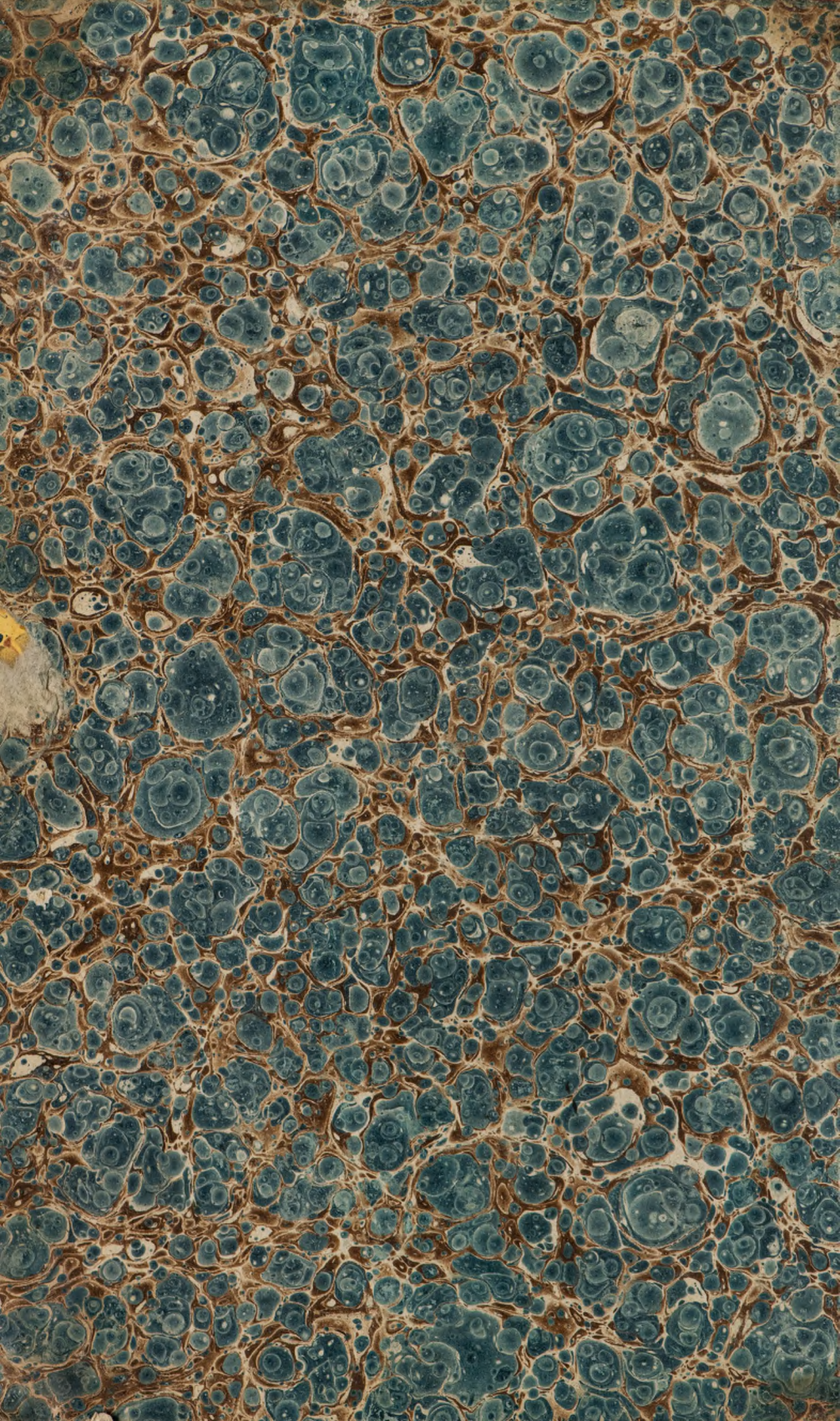
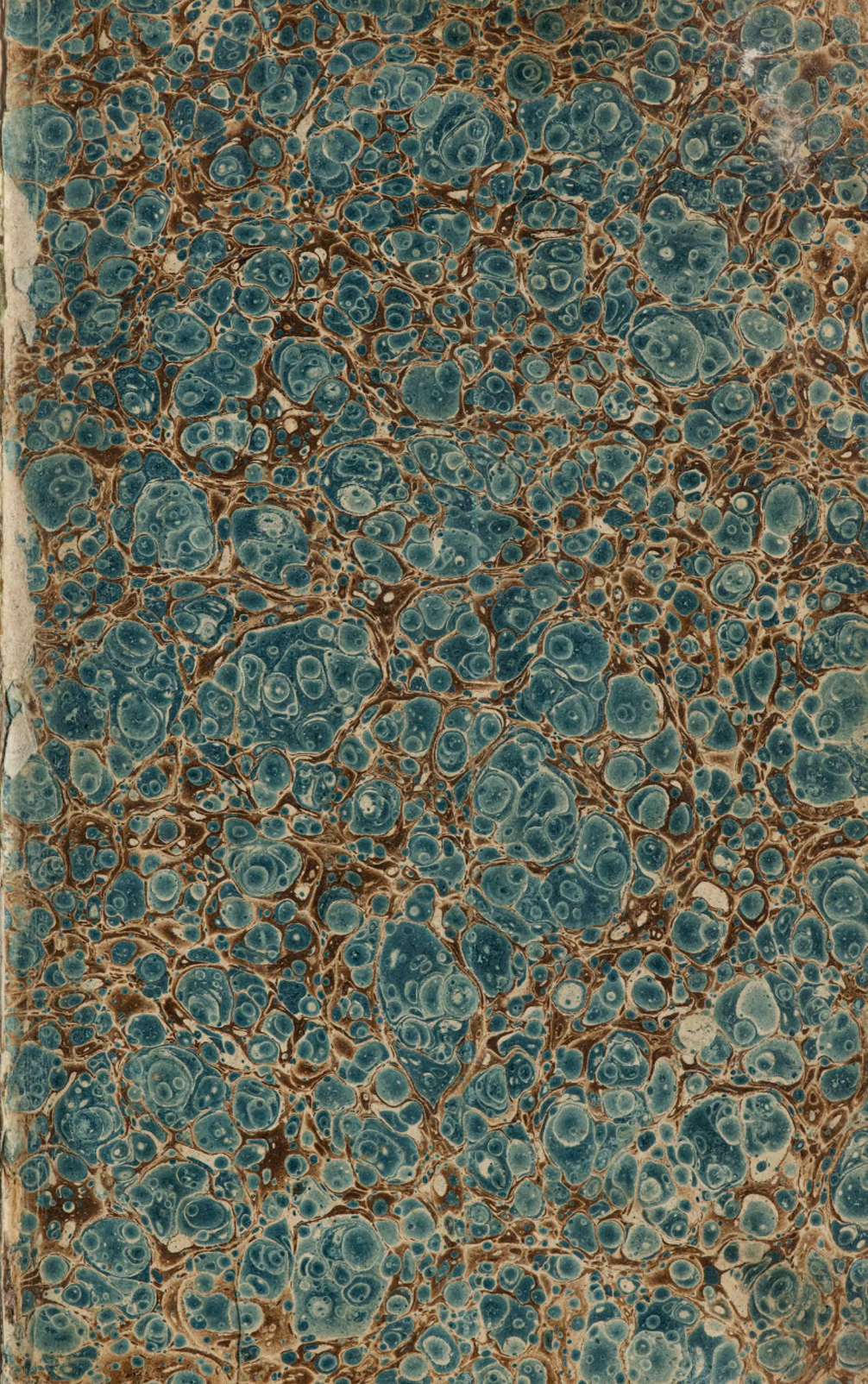








$$3 \times 3 \frac{4}{5} = 11 \frac{2}{5}$$



$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 15} \\ \underline{12} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3^{\text{oc}} 3^{\text{oc}} 150 \\ 4 \\ \hline 12 \quad 13 \quad 1600 \\ 5 \quad 0 \quad 711 \quad 15 \quad 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 59 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 11} \\ \underline{59} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 133 \overline{) 144} \\ \underline{133} \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1301 \\ 1323 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2071 \\ 2211 \\ 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 819 \\ 8 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0011 \\ 1100 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1400 \\ 3540 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ 2816 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$6.3999$$

$$\begin{array}{r} 60000 \\ 3000 \\ 900 \\ 190 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54000 \\ 2997 \\ 8891 \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59999 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54000 \\ 2997 \\ 8891 \\ 81 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 939 \\ 939 \\ 939 \\ 939 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2816 \\ 17 \\ \hline 160 \end{array}$$





ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Μ. ΦΑΛΤΑΤΣΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

617

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

συντεθέντα πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων εἰς τὰ

Ἑλληνικὰ σχολεῖα τῆς Ἑλλάδος.

[Handwritten signature]

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ.

17 Απριλίου 1944

ἤγγραδον 5-25 ὑπ'

Μ. Ι. Μ.

Φέρε λάβωμεν τοῦτο τὸ
καινόν, ὃ πᾶσαι προσχρῶν-
ται τέχναι τε καὶ διάνοιαι·
καὶ ἐπιστῆμαι, δ καὶ παντὶ
ἐν πρώτοις ἀνάγκη μανθά-
ναι, ἀριθμὸν τε καὶ λογι-
σμέν.

Πλάτ. Πολ. βιβλ. ζ.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ

[Handwritten mark]

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Γ. ΒΑΦΑ.

(Ἡμερᾶ τῇ ὁδῷ Ἀδριανου.)

1842

Ο παρατυπώσας θέλει καταδιωχθῇ κατὰ τὸν νόμον.

Βαβα

ΑΓΑΘΗ ΤΥΧΗ

ΤΗ ΦΙΛΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΝΕΟΤΗΤΙ

ΤΑΙΣ ΑΓΑΘΑΙΣ ΤΗΣ ΠΑΤΡΙΔΟΣ ΕΛΠΙΣΙ

ΤΟ ΠΟΝΗΜΑΤΟΝ ΤΟΥΤΟ

ἀνέθηκεν

ὁ συγγραφεύς

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Ἐλπίζων ὅτι ᾗθελεν ἔλθεῖ ποτε καὶ ῥοῦς νὰ ὀργανισθῶσι τὰ λεγόμενα Ἑλληνικὰ σχολεῖα καὶ τὰ γυμνάσια, ἀνέβαλον τὴν ἐκδοσιν διδακτικῶν βιβλίων τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς, ἐπιμελούμενος μόνον διδάσκων νὰ ἐπανορθῶν τῶν ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν μαθηματικῶν βιβλίων ὅσα ἔχρηζον κατὰ τὴν γνώμην μου ἐπανορθώσεως.

Ἀλλὰ τοιοῦτόν τι μόνον δὲν ἐξαρκεῖ εἰς μαθητὰς γυμνασίων, οἷτινες, καὶ ὅταν μελετῶσι τὸ πρῶτον, καὶ ὅταν ἐπαναλαμβάνωσι τὰ μαθήματά των, ἂν δὲν ἔχωσιν ὑπ' ὄψιν ὅσα ἠκροάσθησαν, δυσκόλως ἐνθυμοῦνται τοὺς πτερόεντας λόγους, καὶ λοιπὸν ἀτελῶς μανθάνουσιν ὅς' ἀπαιτεῖτ' ἐντελῶς νὰ ἡξεύρωσιν. Ἰδοὺ τί μ' ἐβίασε περὶ τὰς ἀρχὰς τούτου τοῦ ἔτους νὰ ἐκδώσω τυπωμένα ταῦτα τὰ μαθήματα, τῶν ὁποίων ἡ ἀνάγκη ἦτον ἐπαισθητοτέρα, χωρὶς νὰ περιμείνω πλέον ὀργανισμὸν σχολείων.

Συντάττων δὲ τὸ πονημάτιον τοῦτο, ἐπεμελήθην νὰ τὸ καταστήσω τοῦλάχιστον τῶν ὅσα μέχρι τοῦδ' ἔχομεν εἰς τὴν γλῶσσάν μας τελειότερον, καὶ κατὰ τὴν ἀκρίβειαν τῶν ὀρισμῶν, καὶ κατὰ τὴν τάξιν τῶν μερῶν, καὶ κατὰ τὴν ἀπλότητα καὶ ἀκρίβειαν τῶν ἀποδείξεων. Γενικῶς δὲ προτιμητέαν δὲν ἔκρινα τὴν βραχυλογίαν ἄνευ τῆς σαφηνείας. Ἐκτὸς δὲ τούτων μετεχειρίσθην ἐνίοτε καὶ ὀνόματα νέα, ἢ πρὸς διάκρισιν πραγμάτων, ἢ ἀντὶ ἄλλων ὀνομάτων καὶ φράσεων ἀναρμόστων ἢ ἀσημάντων. Τὰ δὲ πολλὰ καὶ ποικίλα προβλήματα θεωρῶ ὠφελιμύτατα. Τούτων τὰ πλείστα εἶναι ἐκλελεγμένα ἔκ τε τῆς τοῦ Γάλλου Ὀλιβιέρου ἀριθμητικῆς καὶ ἐκ τῆς ἐν Μελίτῃ τυπωμένης μεταφράσεως Ἀγγλικῆς τινος ἀριθμητικῆς. Ἄν δὲ καὶ εἵμαιμόνον περὶ τὰ διακόσια τὰ προβλήματα, μολοντοῦτο, ἂν μεταλλαχθῇ ἡ ἄγνωστος πολλῶν, ὡς ἔγεινεν εἰς τὸ κείμενον ἐπιτῶν τοῦ τόκου, καὶ ἔτι οἱ ἀριθμοὶ εἰς ἄλλους ἢ ἀκεραίους ἢ κλασματικούς κτλ,

θέλουσι καταντήσῃ ἕως χίλια. Τὴν δὲ χρῶσιν τῶν ἀλγερίκων σημείων τῶν πράξεων ἀντὶ τῶν συντομωτάτων λέξεων καὶ ἀπὸ, ἐπὶ, διὰ ἐθεώρησα ὅχι μόνον μὴ ἀναγκάϊαν, ἀλλὰ καὶ περιττήν. Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς συντάξεως.

Πολλὰ δὲ τῶν ἐμπειροχόμενων εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ἐδιδάσκοντο μέχρι τοῦδε εἰς τὸ γυμνάσιον. Ἀλλὰ φρονῶ ὅτι τόσας ἀριθμητικὰς γνώσεις, ὅσαι εἶναι εἰς τὸ πονημάτιον τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωσιν εἰς τὸ ἐξῆς οἱ τελειόνοντες τὰς σπουδὰς τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα, ἢ οἱ μέλλοντες νὰ ταχθῶσιν εἰς τὴν κατωτέραν τάξιν τῶν γυμνασίων. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὰς ἀκριβῶς ν' ἀποκτήσωσι μόνον εἰς τὴν ἀνωτάτην τάξιν τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων εἶναι δυνατόν, καὶ διὰ τὴν ἡλικίαν, καὶ δότι τότε ὁ νοῦς τῶν νέων εἶναι ὅπως οὖν προετομασμένος εἰς τὸ συλλογίζεσθαι, διὰ τοῦτο συνέταξα τὰ μαθήματα ταῦτα ὡς διδαχθισόμενα εἰς τὴν εἰρημένην τάξιν. Ἐὰν τοῦτο γείνη, καὶ καλῶς θέλουσιν ἡξεύρει τὴν τόσον χρήσιμον ἀριθμητικὴν, καὶ οἱ ἐξετασθησόμενοι, διὰ νὰ γείνωσι δεκτοὶ εἰς γυμνάσιον, θέλουσιν εἶθαι ἐτοιμότεροι, καὶ εἰς τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῶν εἰς τὰ γυμνάσια παραδιδόμενων μαθηματικῶν θέλουσιν ἔχει πλειότεραν εὐκολίαν οἱ μαθηταί.

Τὰ δὲ διὰ τῶν μικρῶν στοιχείων τυπωμένα δύναται τις κατὰ τὴν πρώτην ἀνάγνωσιν νὰ παραβλέψῃ, καὶ νὰ τὰ σπουδάσῃ, ὅταν αἰσθανθῇ τὴν ἀνάγκην τῶν.

Συντάξας δὲ τὰ παρόντα μαθήματα εἰς χρῆσιν τὴν ἤδη προειρημένην, ἀσχολοῦμαι ἤδη νὰ προετοιμάσω πρακτικὴν τινα μᾶλλον ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρικὴν εἰς χρῆσιν τῶν κατωτέρων τάξεων τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων· ὥστε νὰ ὑπάρχῃ κατ' ἐμὲ ὁμοιόμορφός τις καὶ ἀρμόδιος σειρὰ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μαθηματικῆς εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα. Ἐπειτα θέλω ἐκδώσει καὶ ὅ,τι κριθῇ ἀρμόδιον εἰς τὰ γυμνάσια· ἀλλ' εὐχομαι νὰ ᾖ ἕως τότε ἐκδεδομένος τῶν γυμνασίων ὁ ὀργανισμός.

ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

Σελ. στίχ.

- 20, 10 ἄνωθεν, ἀντὶ δωδέκατα γράφε δέκατα.
 30, 21 — ἀντὶ 17 γράφε 16.
 47, 11 — ἀντὶ 47916 γράφε 479160.
 62, 11 — ἀντὶ 57 γράφε 56.
 74, 6,8,9, κάτωθεν, ἀντὶ 96 γράφε 69.
 79, 15 — ἀντὶ 6 γράφε 9.
 96, 7 ἄνωθεν, ἀντὶ $\frac{60}{94}$ γράφε $\frac{60}{93}$.
 111, 5 — ἀντὶ Ἐλευσῖνι γράφε Σαλαμῖνι.
 127, 12 κάτωθεν, ἀντὶ 37758 γράφε 3775.
 144, 4 ἄνωθεν, ἀντὶ 21,732 γράφε 24, 732.
 149, 11 — ἀντὶ 04 γράφε 40.
 156, 14 κάτωθεν ἀντὶ $\frac{9}{20}$ γράφε $\frac{9}{25}$.
 22 — ἀντὶ $\frac{16}{5}$ γράφε $\frac{16}{3}$.
 160, 6 — ἀντὶ $\frac{82}{30}$ ἢ $\frac{41}{15}$ γράφε $\frac{22}{9}$ ἢ $\frac{11}{45}$.
 171, 1 — ἀντὶ ἄλλους γράφε ἄλλας.
 177, 10 — μετὰ τὸ χ πρόσθετε καὶ ἀριστερὰ γράφεται ὁμοειδὴς του.
 178, 1 — ἀντὶ $\frac{260}{678}$ γράφε $\frac{260}{339}$.
 183, 6 — ἀντὶ 14^ημ γράφε 20^ημ.
 184, 2 — ἀντὶ 76 γράφε 39.
 185, 9 — ἐννόει τὴν μητέρα τοῦ παιδὸς ἤτοι τὴν γυναῖκα τοῦ ἀποθνήσκοντος.
 188, 13 — ἀντὶ εἰς 6 γράφε εἰς 6 μῆνας.
 189, τινὲς ἀριθμοὶ εἶναι λανθασμένοι κατ' ὀλίγα λεπτά, γενομένης ἀρχῆς ἐκ τοῦ 419,80, ὅστις πρέπει νὰ ᾔηται 419,80.
 78, 15 — κάτωθεν, μετὰ τὸ, διὰ τοῦ 3, νὰ προστεθῇ, τὸ ὅποιον 18 εἶναι διαιρέσιμον διὰ τοῦ 3. Ὅτι δὲ εἶναι διαιρέσιμον τὸ πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ἐξαργυρεῖται ἐκ τούτου,

ὅτι ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι φανερόν ὅτι ὁ 36 εἶναι γινόμενον τοῦ 18 ἐπὶ 2· κατὰ τινὰ δὲ ἀρχὴν, τὴν ὁποῖαν θέλομεν ἀποδείξει ἄλλου, ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν καὶ ἀσυνδιαίρετος μὲν ἓνα τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, εἶν' ἐξ ἀνάγκης διαιρέτης τοῦ ἄλλου παραγόντος, ὡς ἐδῶ ὁ 3. Διὰ δὲ τὴν μὴ προαποδειχθεῖσαν ταύτην ἀρχὴν ἢ ἀπόδειξις τοῦ ἀριθμοῦ ἐκεῖνου πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀτελής. Ἄλλως, ἢ χρῆσις τῆς ἀληθείας τοῦ ἀριθμοῦ ἐκεῖνου περιορίζεται μόνον εἰς τὸν ἀριθμὸν 119.

Εἰς τὸν τῆς 79 σελ. 12 στίχον κάτωθεν ἀντὶ τοῦ οἵτινες εἶναι γινόμενα μέχρι τοῦ 7 στίχου ὅπου εἶναι τὸ (114), νὰ τεθῇ αὕτη ἢ σειρὰ τῆς ἀποδείξεως, ὡς ἀκριβέστερα, οἵτινες εἶναι γινόμενα ὁ μὲν 69993 τοῦ 9999 ἐπὶ 7, ὁ δὲ 7992 τοῦ 999 ἐπὶ 8, ὁ δὲ 396 τοῦ 99 ἐπὶ 4, ὁ δὲ 45 τοῦ 9 ἐπὶ 5. Ἐπειδὴ εἶναι φανερόν ὅτι ὡς οἱ 10, 100, 1000 κτλ ἡλαττωμένοι κατὰ μονάδα εἶναι 9, 99, 999 κτλ, οὕτω καὶ οἱ 20, 200, 2000 κτλ ἡλαττωμένοι κατὰ 2 γίνονται 9, 99, 999 κτλ πολλαπλασιασμένοι ἐπὶ 2, οὕτω καὶ οἱ 30, 300, 3000 κτλ ἡλαττωμένοι κατὰ 3 γίνονται 9, 99, 999 κτλ πολλαπλασιασμένοι ἐπὶ 3, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐκ δὲ τούτων εἶναι φανερόν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 69993, 7992, 396 καὶ 45 εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3 καὶ 9, διότι ὁ εἰς τῶν παραγόντων τῶν ὁ 9, ἢ 99, ἢ 999 κτλ εἶναι φανερὰ διαιρέσιμοι διὰ 3 καὶ 9 (114) κ. τ. λ.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τί εἶναι Ἀριθμός.

1. Τί ὀνομάζεται *ἐν* καθείς τὸ μανθάνει ἐκ τῆς βρεφικῆς του μάλιστα ἡλικίας, καὶ ἡξεύρει ἔπειτα νὰ ὀνομάζῃ οὕτως ὅ,τι εἶναι τῷ ὄντι ἓν. Καὶ πρῶτον μὲν μανθάνει νὰ λέγῃ ὠρισμένον τι πράγμα *ἐν*, οἷον *ἐν δένδρῳ*, *ἐν μῆλῳ*, *ἐν πατάθῳ*, κτλ. Ἐπειτα δὲ λέγει καὶ ἀπλῶς *ἐν*, χωρὶς νὰ νοῇ ὠρισμένον τι πράγμα (α).

2. Πολλὰ δὲ ἡ πλῆθος λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν κτλ, χωρὶς νὰ ἦναι προσδιωρισμένον πόσα εἶναι τὰ ἓν (β).

Καὶ τὰ πολλὰ δὲ ποτὲ μὲν εἶναι ὠρισμένα πράγματα, οἷον δένδρα, μῆλα, ἄνθρωποι, οἰκίαι, κτλ., καὶ τότε λέγομεν *πολλὰ δένδρα* ἢ *πλῆθος δένδρων*, *πολλοὶ ἄνθρωποι* ἢ *πλῆθος ἀνθρώπων* κτλ., ποτὲ δὲ ἀόριστα ἢ ὁποιαδήποτε πράγματα, καὶ τότε λέγομεν ἀπλῶς *πολλὰ*, χωρὶς νὰ νοῶμεν τί πράγμα εἶναι καθὲν τῶν πολλῶν.

3. Ἀριθμός δὲ εἶναι αὐτὰ τὰ πολλὰ, ὅταν ἦναι προσδιω-

(α). Ὅ,τι λέγομεν περὶ τοῦ οὐδετέρου ἓν ἀρμῶζει λεγόμενον καὶ περὶ τοῦ ἀρσενικοῦ εἴ; καὶ περὶ τοῦ θηλυκοῦ μία.

(β). Τὸ πολλὰ σημαίνει ἔτι τὸ ἀντίθετον τοῦ ἕ,τι σημαίνει τὸ εἴληγα.

ρισμένον πῶσα εἶναι τὰ ἐν, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται τὰ πολλά, ἤγουν τὸ προσδιορισμένον πλῆθος, οἷον ἐν καὶ ἐν εἶναι ἀριθμὸς - ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν εἶναι ἀριθμὸς ἄλλος -- ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν ὡσαύτως, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὸ δὲ ἐν, ἐκ τοῦ ὁποίου σύγκειται ἀριθμὸς, λέγεται καὶ μονάς. Αὕτη δὲ ἡ μονάς ποτὲ μὲν εἶναι ὠρισμένον πρᾶγμα, καὶ τοῦτο δηλοῦται διὰ τοῦ ὀνόματος αὐτῆς, οἷον δένδρον, μῆλον, κτλ, ποτὲ δὲ εἶναι ἀπροσδιόριστον, καὶ τότε δὲν ὑπάρχει τὸ ὄνομα τῆς μονάδος.

Σημ. Εἰς τὸ ἐξῆς θέλωμεν ἰδεῖ κατὰ πόσους τρόπους εἴμπορεῖ νὰ ᾖναι προσ-
διορισμένη ἡ μονάς.

Περὶ Ὀνομασολογίας τῶν Αριθμῶν.

4. Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πολλότατοι, καὶ διὰ νὰ διακρίνηται καθεὶς ἀπὸ τοὺς ἄλλους, ἀνάγκη νὰ ἔχη ὄνομα ἰδιαίτερον καὶ τὰ ὀνόματα λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλότατα, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί. Ἀλλ' ἐὰν ᾔθελεν ὀνομασθῇ καθεὶς αὐτῶν μὲ λέξιν ἰδιαιτέραν, ᾔθελεν χρειασθῇ πολλότατοι λέξεις· καὶ τότε ᾔθελεν εἶσθαι δυσκολώτατον, καὶ ἀδύνατον μάλιστα, καὶ νὰ μάθῃ τις τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ὅλων καὶ νὰ τὰ ἐνθυμῇται. Τοῦτο προϋδόντες οἱ ὀνοματοθέται τῶν ἀριθμῶν, ἐπενόησαν μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωνται ὅλοι οἱ ἀριθμοί. Τοῦτο ἐκθέτομεν ἐφεξῆς.

5. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται ἕκαστος μὲ λέξιν ἰδιαιτέραν, ἤγουν

ἐν καὶ ἐν	ὀνομάζονται	δύο (α).
ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν, ἢ δύο καὶ ἐν		τρία,
ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν, ἢ τρία καὶ ἐν		τέσσαρα,
ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν καὶ ἐν, ἢ τέσσαρα καὶ ἐν		πέντε,
παρομοίως πέντε καὶ ἐν		ἕξ,
ἕξ καὶ ἐν		ἐπτά,

(α). Ὡσαύτως μία μονάς καὶ μία μονάς ὀνομάζεται δύο μονάδες, δύο μονάδες καὶ μία μονάς, τρεῖς μονάδες κτλ.

ἑπτὰ καὶ ἓν	ὀκτώ,
ὀκτώ καὶ ἓν	ἐννέα,
ἐννέα καὶ ἓν	δέκα.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἀριθμοὶ μονάδων. Ἡ δὲ μονὰς αὐτῶν λέγεται καὶ ἀρχικὴ μονάς.

6. Ὁ ἀριθμὸς δέκα νοεῖται ὡς ἓν, ὡς μονάς, καὶ πρὸς διάκρισιν ἐκ τῆς πρώτης μονάδος λέγεται δεκάς καὶ δευτέρας τάξεως μονάς. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ δέκα καὶ δέκα--δέκα καὶ δέκα καὶ δέκα -- δέκα καὶ δέκα καὶ δέκα καὶ δέκα κτλ, δεν διαφέρουσιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ἓν καὶ ἓν -- ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν κτλ, παντάπασιν· αἱ μονάδες αὐτῶν διαφέρουσι. Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται μὲ τ' ἀνωτέρω ὀνόματα, ἀκολουθούμενα ὅμως ὑπὸ τοῦ ὀνόματος τῆς μονάδος των, οἷον δύο δεκάδες, τρεῖς δεκάδες ἐννέα δεκάδες, ἢ ἀντὶ τούτου ἔχοντα τὴν κατάληξιν κοῖτα, οἷον

δέκα καὶ δέκα	ὀνομάζεται εἴκοσι (α)
δέκα καὶ δέκα καὶ δέκα, ἢ εἴκοσι καὶ δέκα	τριάκοντα,
ὡσαύτως τριάκοντα καὶ δέκα	τεσσαράκοντα,
τεσσαράκοντα καὶ δέκα	πεντήκοντα,

.
.
.

ἐννεμήκοντα καὶ δέκα ἀντὶ δεκάκοντα ὀνομάζεται μὲ ἰδιαιτέραν λέξιν ἑκατόν.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἀριθμοὶ δεκάδων.

7. Μεταξὺ δὲ τοῦ δέκα καὶ τοῦ εἴκοσι, τοῦ εἴκοσι καὶ τοῦ τριάκοντα, καὶ γενικῶς μεταξὺ ὅποιουδήποτε ἀριθμοῦ δεκάδων καὶ τοῦ ἀκολουθοῦ του εἶναι ἐννέα ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι οἱ ἕως εἰς τὸν δέκα. Οὗτοι δὲ νοοῦνται σύνθετοι ἐκ τινος ἀριθμοῦ δεκάδων καὶ τινος ἀριθμοῦ μονάδων· διὰ τοῦτο καὶ τὰ

(α). Οὗτος μόνον λέγεται μὲ ἰδιαιτέραν λέξιν, ἀντὶ νὰ λέγεται δικάκοντα. Εἰς δὲ τὴν κοινὴν γλῶσσαν λέγμεν συντομώτερα τριάντα, σαράντα, πενή. κ. τ. λ.

ὀνόματα αὐτῶν συνίστανται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν
τούτων, οἷον

δέκα ἓν ἢ ἑνδεκα, δέκα δύο ἢ δώδεκα, δέκα τρία

δέκα ἑννέα·

εἴκοσιν ἓν, εἴκοσιν δύο, εἴκοσι τρία . . . εἴκοσιν ἑννέα·

τριάκοντα ἓν, τριάκοντα δύο τριάκοντα ἑννέα·

· · · · ·
· · · · ·

ἑννεήκοντα ἓν, ἑννεήκοντα δύο ἑννεήκοντα ἑννέα.

8. Ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς ἑκατὸν νοεῖται καὶ αὐτὸς ὡς ἓν, ὡς
μονάς, καὶ πρὸς διάκρισιν ἐκ τῶν προηγουμένων λέγεται ἑκα-
τορτάς καὶ τρίτης τάξεως μονάς. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ ἑκατὸν καὶ
ἑκατὸν -- ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν κτλ., διαφέροντες
μόνον κατὰ τὴν μονάδα ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων καὶ δε-
κάδων, ὀνομάζονται μὲ τ' αὐτὰ ὀνόματα δύο, τρία,
ἀκολουθούμενα ὁμῶς ὑπὸ τοῦ ὀνόματος ἑκατοντάδες πρὸς δια-
κρισιν, οἷον, δύο ἑκατοντάδες, τρεῖς ἑκατοντάδες
ἑννέα ἑκατοντάδες, δέκα ἑκατοντάδες, ἢ ἀντὶ τούτου ἔχον-
τα τὴν κατάληξιν κοσια, οἷον

ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν ὀνομάζεται διακόσια,

ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν, ἢ διακόσια καὶ ἑκατὸν . . τρια-
κόσια,

τριακόσια καὶ ἑκατὸν τετρακόσια,

· · · · ·
· · · · ·

ἑννεακόσια καὶ ἑκατὸν ἀντὶ δεκακόσια ὀνομάζεται μὲ ἰδιαι-
τέρην λέξιν χίλια καὶ χιλιάς, διότι νοεῖται ὡς μονάς.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων.

9. Μεταξὺ δὲ τοῦ ἑκατὸν καὶ τοῦ διακόσια, τοῦ διακόσια
καὶ τοῦ τριακόσια, καὶ γενικῶς μεταξὺ ὅποιουδήποτε ἀριθμοῦ
ἑκατοντάδων καὶ τοῦ ἀκολουθίου του εἶναι ἑννεήκοντα ἑννέα
ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι οἱ ἕως εἰς τὸν ἑκατόν. Οὗτοι δὲ νοεῖνται

σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ ἑκατόν· διὰ τοῦτο καὶ τὰ ὀνόματά των συνίστανται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν τούτων, οἷον ἑκατόν ἓν, ἑκατόν δύο, -- ἑκατόν ἑννέα, ἑκατόν δέκα, ἑκατόν εἴκοσιν, . . . ἑκατόν ἑννεήκοντα -- ἑκατόν ἑνδεκα ἑκατόν εἴκοσι τρία ἑκατόν ἑννεήκοντα ἑνέα.

διακόσια { ἓν, δύο, . . . ἑννεα·
δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, . . . ἑννεήκοντα·
ἑνδεκα, δώδεκα, . . . ἑννεήκοντα ἑννέα.

ἑννεακόσια { ἓν, δύο, τρία, δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα . . . πεντήκοντα ἑξ, ἑννεήκοντα ἑννέα.

Βλέπει δέ τις ὅτι τῶν ἀριθμῶν τούτων οἱ μὲν εἶναι σύνθετοι ἐξ ἑκατοντάδων καὶ μονάδων, οἱ δὲ ἐξ ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, οἱ δὲ ἐξ ἑκατοντάδων δεκάδων καὶ μονάδων.

10. Σημ. Τῶν ἑννεακοσίων ἑννεήκοντα ἑννέα προηγουμένων ἀριθμῶν τὰ ὀνόματα ἔγειναν μὲ δέκα μόνον διαφοροὺς λέξεις, τῶν ὁποίων ἡ μὲν δέκα ἢ δεκάς καὶ ἑκατόν ἢ ἑκατοντάς εἶναι ὀνόματα ἀριθμῶν, οἵτινες νοῶνται ὡς μονάδες, αἱ δὲ δύο, τρία, . . . ἑννέα εἶναι ὀνόματα ἀριθμῶν, οἵτινες σύγκεινται ἐκ τῆς μονάδος, τῆς δεκάδος καὶ τῆς ἑκατοντάδος. Διακρίνονται δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἀπὸ τῶν μονάδων ἢ ἐκ τοῦ ὀνόματος δεκάδες, ἢ ἐκ τῆς καταλήξεως κοντα· οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ὡσαύτως διακρίνονται ἐκ τοῦ ἑκατοντάδες ἢ ἐκ τῆς κοσια. Ὅλοι οἱ λοιποὶ ὡς σύνθετοι ἔχουσιν ὀνόματα συνθεμένα ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀπλῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐχρημάσθησαν δὲ μόνον δέκα λέξεις, διότι ἀφοῦ ἐνοήθησαν οἱ ἀριθμοὶ δέκα καὶ ἑκατόν ὡς μονάδες, καὶ ὠνομάσθησαν μὲ δύο λέξεις ἰδιαιτέρας, οἱ ἐκ τούτων τῶν μονάδων ὁμοίως συγκεῖμενοι ἀριθμοὶ ἔπρεπε νὰ ἔχωσι τὰ αὐτὰ ὁκτώ ὀνόματα, ἀλλ' ἀκολουθούμενα ὑπὸ τοῦ ὀνόματος τῆς μονάδος ἐκ τῆς ὁποίας σύγκεινται, ἢ ἔχοντα ἰδιαιτέραν κατάληξιν πρὸς διέκρισιν. Οἱ δὲ λοιποὶ ὡς σύνθετοι ἔχουσι καὶ ὀνόματα σύνθετα ἐκ τούτων. Λοιπὸν ἐχρημάσθησαν δύο λέξεις καὶ ὁκτώ, ἥτοι δέκα. Καὶ ταῦτα μὲν εἶναι κυρίως τὰ ὀνόματα ὧν τῶν ἀριθμῶν, διότι οἱ ἄλλοι οἱ μεγαλύτεροι ὠνομάζονται μὲ αὐτὰ ταῦτα, ἀλλὰ διακρίνονται ἐκ τῶν προηγουμένων διὰ τοῦ ὀνόματος τῆς μονάδος των, ὡς θέλωμεν εὐθεῶς.

11. Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ ἀριθμὸς δέκα ἑκατοντάδες νο-

εἶται ὡς ἓν, ὡς μονάς, καὶ ὀνομάζεται χίλια ἢ καὶ χιλιάς. Προσθέτομεν δὲ τώρα ὅτι ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ συγκείμενοι ἐκ ταύτης τῆς μονάδος ὀνομάζονται μὲ τὰ αὐτὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὅποια ὠνομάσθησαν καὶ οἱ προηγούμενοι ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ, ἀλλ' ἀκολουθοῦμενα ὑπὸ τῆς λέξεως χιλιάδες πρὸς διάκρισιν ἐκ τῶν προηγουμένων, οἷον μία χιλιάς, δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες, δέκα χιλιάδες, ἑνδεκα χιλιάδες, εἴκοσι χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσαιοι πενήκοντα ὀκτὼ χιλιάδες, ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα χιλιάδες, χίλια χιλιάδες.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἀριθμοὶ χιλιάδων πρὸς διάκρισιν ἐκ τῶν προηγουμένων, οἵτινες λέγονται ἐνίοτε ἀριθμοὶ ἀπλῶν μονάδων. Καὶ ἡ μὲν χιλιάς λέγεται καὶ μονάς τετάρτης τάξεως, ἡ δὲ δεκάς χιλιάδος, μονάς πέμπτης τάξεως, ἑλληνιστὶ δὲ μυριάς, ἡ δὲ ἑκατοντάς χιλιάδος, μονάς ἕκτης τάξεως. Ἔτι δὲ οἱ ἀριθμοὶ μία χιλιάς, δύο χιλιάδες, . . . ἑννέα χιλιάδες λέγονται ἀριθμοὶ μονάδων χιλιάδος, οἱ δὲ δέκα χιλιάδες, εἴκοσι χιλιάδες, . . ἑννεήκοντα χιλιάδες λέγονται ἀριθμοὶ δεκάδων χιλιάδος, οἱ δὲ ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσιοι χιλιάδες, . . . ἑννεακόσιοι χιλιάδες, ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων χιλιάδος. Ὅλοι οἱ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἐκ τούτων, οἷον ἑνδεκα χιλιάδες, . . . εἰκοσιπέντε χιλιάδες, . . διακόσιοι τρεῖς χιλιάδες, πεντακόσιοι ἑξήκοντα χιλιάδες, . . . ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα χιλιάδες.

12. Μεταξὺ δὲ τοῦ χίλια καὶ τοῦ δύο χιλιάδες, τοῦ δύο χιλιάδες καὶ τοῦ τρεῖς χιλιάδες, καὶ γενικῶς μεταξὺ ὁποιοῦδήποτε ἀριθμοῦ χιλιάδων καὶ τοῦ ἀκολουθοῦντος του εἶναι ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι οἱ ἕως εἰς τὸν χίλια. Οὗτοι νοοῦνται σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος χιλιάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων ἀπλῶν διὰ τοῦτο καὶ τὰ ὀνόματα αὐτῶν συνίστανται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν τούτων, οἷον

χιλία { ἓν, δύο, τρία, . . . δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, . .
 . . . ἑκατὸν, διακόςια, ἑννεακόςια, . . . ἑννεα-
 κόςια ἑννεήκοντα ἑννέα.

δύο χιλιάδες { ἓν, δύο, τρία, ἑννεακόςια ἑννε-
 νήκοντα ἑννέα.

ἑννεακόςια ἑννεή- { ἓν, δύο, τρία, ἑννεακόςια
 κοντα ἑννέα χιλιάδες { ἑννεήκοντα ἑννέα.

Τούτων δὲ τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι σύνθετοι ἐξ ἀριθμῶν
 δύο τάξεων, οἱ δὲ ἐκ τριῶν, οἱ δὲ ἐκ τεσσάρων, οἱ δὲ ἐκ πέντε,
 οἱ δὲ ἐξ ἀριθμῶν ἐξ τάξεων. Οἱ δὲ ἀρχαριοὶ πρέπει νὰ γυμνά-
 ζωνται εἰς τὸ νὰ διακρίνωσιν αὐτοὺς εἰκόλως.

13. Ὁ ἀνωτέρω (11) ὀνομασθεῖς δέκα ἑκατοντάδες χιλιά-
 δος καὶ χίλια χιλιάδες νοεῖται ὡς ἓν, ὡς μονάς, καὶ ὀνομάζε-
 ται μὲ ἰδιαιτέραν λέξιν *ἐκατομμύριον* (διότι εἶναι ἑκατὸν μυ-
 ριάδες), συνήθως δὲ καὶ μὲ ξένην λέξιν *μ.λ.λιόνιον* ἀντὶ τούτου
 δὲ εἰμπορεῖ τις νὰ μεταχειρίζηται τὴν λέξιν *χιλιόνιον*.

ἑννεακόςιοι δὲ ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ συγκεῖμενοι ἐκ ταύ-
 της τῆς μονάδος ὀνομάζονται μὲ τὰ αὐτὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὁποῖα
 ὀνομάσθησαν οἱ πρῶτοι ἑννεακόςιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ,
 ἀλλ' ἀκολουθούμενα ὑπὸ τοῦ ὀνόματος *ἐκατομμύριον* πρὸς διὰ-
 κρισιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀπλῶν μονάδων καὶ τῶν χιλιάδων,
 οἷον

ἓν ἐκατομμύριον, δύο ἐκατομμύρια, τρία ἐκατομμύρια,
 δέκα ἐκατομμύρια, εἴκοσιν ἐκατομμύρια, . . . ἑκατὸν ἐκατομ-
 μύρια, διακόςια ἐκατομμύρια, . . . ἑννεακόςια ἐκατομμύρια,
 . . . ἑννεακόςια ἑννεήκοντα ἑννέα ἐκατομμύρια, χίλια ἐκα-
 τομμύρια, ὅστις λέγεται ἰδίως *δι.λιόνιον*.

Οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ὀνομάζονται *ἀριθμοὶ ἐκατομμυρίων*. Καὶ
 ἡ μὲν μονάς ἐκατομμυρίου εἶναι *μορὰς ἐβδόμης τάξεως*, ἡ δὲ
 δεκάς ἐκατομμυρίου, *μορὰς ὀγδόης τάξεως*, ἡ δὲ ἑκατοντάς
 ἐκατομμυρίου, *μορὰς ἐννάτης τάξεως*.

14. Μεταξύ δὲ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίων καὶ τοῦ ἀκολουθοῦντος τοῦ εἶναι ἑννεακόσιαι ἑννεήκοντα ἑννέα χιλιάδες ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοί, ὅσοι εἶναι οἱ ἕως εἰς τὸ ἑκατομμύριον. Οὗτοι δὲ νοοῦνται σύνθετοι, οἱ μὲν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατομμυρίων καὶ ἀριθμοῦ τινος ἀπλῶν μονάδων, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατομμυρίων καὶ ἀριθμοῦ τινος χιλιάδων, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατομμυρίων ἀριθμοῦ τινος χιλιάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων ἀπλῶν. Διὰ τοῦτο καὶ τὰ ὀνόματα αὐτῶν συνίστανται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι σύνθετοι.

Τούτων δὲ τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἔχουσι μονάδας δύο τάξεων, οἱ δὲ τριῶν τάξεων . . . οἱ δὲ καὶ ἑννέα τάξεων. Οἱ ἀρχαριοὶ κάμνουσι καλὰ νὰ γυμνάζωνται εἰς τὸ νὰ τοὺς διακρίνωσιν.

15. Καὶ ὁ ἀριθμὸς χίλια ἑκατομμύρια νοεῖται ὡς μονάς, καὶ ὀνομάζεται *διλιόνιον* (ταὐτὸν μὲ τὸ διχιλιόνιον), οἱ δὲ ἐκ ταύτης τῆς μονάδος συγκαίμενοι ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοὶ ὀνομάζονται μὲ τὰ αὐτὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὅποια καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν χιλιάδων καὶ τῶν ἑκατομμυρίων, ἡγουν ἓν διλιόνιον, δύο διλιόνια . . . ἑννεακόσια ἑννεήκοντα ἑννέα διλιόνια, καὶ λέγονται *ἀριθμοὶ διλιονίων*. Ἡ μονάς δὲ τοῦ διλιονίου εἶναι *δεκάτης τάξεως*, ἡ δεκάς διλιονίου *ἐνδεκάτης τάξεως*, καὶ ἡ ἑκατοντάς διλιονίου *δωδεκάτης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς χίλια διλιόνια ὀνομάζεται *τριλιόνιον*, ὁ χίλια τριλιόνια *τετραλιόνιον* καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

16. Τὸ ἐν ἧ ἡ ἀρχικὴ μονάς, καὶ οἱ ἀριθμοὶ χίλια, ἑκατομμύριον, διλιόνιον κτλ., ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται ἑννεακόσιοι ἑννεήκοντα ἑννέα ἀριθμοί, εἰμποροῦν νὰ ὀνομάζωνται *πρωτεύουσαι μονάδες*, δευτερεύουσαι δὲ ἡ μονάς, ἡ δεκάς καὶ ἡ ἑκατοντάς, αἵτινες εἶναι κοινὰ εἰς ὅλας τὰς πρωτευούσας, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται μόνον ἑννέα ἀριθμοί. -- Οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρωτευουσῶν μονάδων ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὀνόματα, καὶ διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων διὰ τοῦ ὀνόματος τῆς πρωτευούσης

μονάδος. Ὡστε αἱ λέξεις, ὅσαι χρησιμεύουσιν εἰς τὴν ὀνοματολογίαν τῶν ἀριθμῶν ὅλων εἶναι αἱ δέκα, τὰς ὁποίας εἶδομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 10, καὶ διὰ τῶν ὁποίων ὀνομάζονται οἱ ἐννεακόσιοι ἐννεήκοντα ἐννέα πρῶτοι ἀριθμοὶ, καὶ ἔτι αἱ λέξεις, αἵτινες εἶναι τὰ ὀνόματα τῶν πρωτευουσῶν μονάδων, ἦγουν χίλια, ἑκατομμύριον, διλιόνιον κτλ.

17. Ἐκ τοῦ ὅτι ἐθεωρήθησαν τινὲς ἀριθμοὶ ὡς πρωτεύουσαι μονάδες καὶ ἄλλοι ὡς δευτερεύουσαι, διὰ τὴν ἵνα δυνατὸν ἦν ὀνομασθῶσι μὲ ὀλίγας λέξεις ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, συνέβη ὥστε τινὲς μὲν ἀριθμοὶ ἦναι ἀπλοῖ, ἥτοι ἵνα σύγκηνται ἀμέσως ἐκ μονάδων μιᾶς τάξεως ὅχι πλειοτέρων τῶν ἐννέα, οἷον πέντε, πεντήκοντα, πεντακόσια, πέντε χιλιάδες, πεντήκοντα χιλιάδες, πεντακόσιαι χιλιάδες, πέντε ἑκατομμύρια κτλ. οἵτινες διαφέρουσι μόνον κατὰ τὸ μέγεθος τῶν μονάδων, ἐνῷ ὅλοι σύγκηνται ἐκ πέντε μονάδων· τινὲς δὲ ἦναι σύνθετοι ἐκ πλειοτέρων ἀπλῶν, οἷον τετρακόσιαι πεντήκοντα τρεῖς χιλιάδες διακόσια δέκα, ὅστις εἶναι σύνθετος ἐκ πέντε ἀπλῶν ἀριθμῶν διαφόρων τάξεων, κτλ.

Οἱ δὲ πολυσύνθετοι χωρίζονται πρῶτον εἰς ἀριθμοὺς τῶν διαφορῶν πρωτευουσῶν μονάδων, οἷον ὁ ἀνωτέρω χωρίζεται εἰς ἀριθμὸν χιλιάδων καὶ μονάδων ἀπλῶν, τὸ ὅποῖον διακρίνεται διὰ τῶν ὀνομάτων τῶν πρωτευουσῶν μονάδων. Ἐκαστος δὲ τούτων πάλιν ἀποσυντίθεται εἰς ἀριθμὸν μονάδων, ἀριθμὸν δεκάδων καὶ ἀριθμὸν ἑκατοντάδων, τὸ ὅποῖον διακρίνεται διὰ τῶν καταλήξεων κοντα καὶ κοσια. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς πεντήκοντα τέσσαρα ἑκατομμύρια ἑξακόσιαι τριάκοντα πέντε χιλιάδες διακόσια ἑξήδηκοντα ἐννέα, εἶναι σύνθετος ἐξ ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίων, τοῦ πεντήκοντα τέσσαρα, ἐξ ἀριθμοῦ χιλιάδων, τοῦ ἑξακόσιαι τριάκοντα πέντε, καὶ ἐξ ἀριθμοῦ μονάδων, τοῦ διακόσια ἑξήδηκοντα ἐννέα· καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν ἑκατομμυρίων εἶναι σύνθετος ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, ὁ δὲ τῶν χιλιάδων ἐξ ἑκατοντάδων δεκάδων καὶ μονάδων, καὶ ὁ τῶν μονάδων ὡσαύτως.

18. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μέχρι τοῦδε θεωρηθέντες, οἵτινες κυρίως σύγκεινται ἐκ τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ὀνομάζονται ἀκέραιοι. Περὶ δὲ τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ὅποια εἶναι, θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω.

Περὶ γραφῆς τῶν Ἀριθμῶν.

19. Τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν, μάλιστα τῶν πολυσυνθέτων, οἷον τοῦ πενταχόσια τριάκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια τετραχόσια δέκα ἑξ χιλιάδες ἑπταχόσια ἑννεήκοντα δύο, ἀπαρτίζονται ἐκ πολλῶν λέξεων, καὶ ἂν, ὅσάκις ἠθέλαμεν νὰ γράφωμεν αὐτοὺς, ἠθέλαμεν γράφει αὐτὰς τὰς λέξεις, καὶ ὥραν πολλήν καὶ τόπον πολλὸν ἠθέλαμεν χρειασθῆ, καὶ δυσκολίαν πολλήν ἠθέλαμεν δοκιμάζει εἰς τὴν χρῆσιν αὐτῶν. Πρὸς ἀποφυγὴν λοιπὸν τούτων ἐχρειάσθησαν ἄλλα γραπτὰ σημεῖα ἀντὶ τῶν λέξεων, τὰ δὲ κοινῶς παρὰ τῶν νεωτέρων ἐθνῶν παραδεδεγμένα πρὸς γραφὴν τῶν ἀριθμῶν εἶναι τὰ λεγόμενα Ἀραβικοὶ χαρακτῆρες ἢ Ἀραβικὰ ψηφία.

Σημ. Πρετιμῶμεν εἰς τὸ ἐξῆς τὰ ψηφία, διότι γίνονται σύνθετα ἐξ αὐτοῦ εὐφωνότερα.

20. Τὰ ψηφία ταῦτα εἶναι δεκα, τὰ ἐξῆς

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

καὶ τὰ μὲν πρῶτα ἑννέα σημαίνουν γενικῶς ὅ,τι σημαίνουν αἱ λέξεις ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἑξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἑννέα, καὶ λέγονται σημαντικά, τὸ δὲ 0 δὲν σημαίνει κανένα ἀριθμὸν, καὶ λέγεται μηδενικὸν καὶ ἀσήμαντον. Θέλομεν δὲ ἰδεῖ εὐθὺς τὴν χρῆσιν του.

21. Διὰ νὰ ᾔναι δὲ δυνατόν νὰ παριστάνωσι τὰ ψηφία ταῦτα ἀριθμοὺς ὅποιαςδὴποτε τάξεως, τίθενται εἰς προσδιωρισμένας θέσεις, ἧγουν μόνον ἕκαστον, διὰ νὰ σημαίνῃ μονάδας πρώτης τάξεως, εἰς τὴν δευτέραν θέσιν πρὸς ἀριστεράν, διὰ νὰ σημαίνῃ μονάδας δευτέρας τάξεως, ἥτοι δεκάδας, εἰς τὴν τρίτην θέσιν

πρὸς ἀριστεράν, διὰ νὰ σημαίνη τρίτης τάξεως μονάδας, ἤτοι ἑκατοντάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς.

22. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ τῶν μονάδων γράφονται διὰ μόνων τῶν ψηφίων, οὕτω

έν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἐπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων γράφονται διὰ τῶν αὐτῶν τούτων ἔχόντων δεξιά των 0, ὥστε νὰ ᾔηαι αὐτὰ εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, οὕτω

δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα . . . ἐννενήκοντα.

10, 20, 30, 40, 90.

Οἱ δὲ σύνθετοι ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων γράφονται διὰ δύο σημαντικῶν ψηφίων, τῶν ὁποίων τὸ παριστάνον δεκάδας γράφεται ἀριστερά, ἤτοι εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, οὕτω

ἐνδεκα, δώδεκα, εἴκοσι πέντε . . . τριάκοντα ὀκτὼ κτλ.

11, 12, 25, 38.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων γράφονται διὰ τῶν αὐτῶν ἐννέα σημαντικῶν ψηφίων, ἀλλ' ἀκολουθουμένων ὑπὸ 00, ὥστε νὰ ἔχωσιν αὐτὰ τὴν τρίτην θέσιν, οὕτω

ἑκατὸν, διακόσια, τριακόσια, . . . ἐννεακόσια.

100, 200, 300, 900.

Οἱ δὲ σύνθετοι ἐξ ἑκατοντάδων καὶ μονάδων γράφονται διὰ τριῶν ψηφίων, δι' ἐνὸς σημαντικοῦ εἰς τὴν τρίτην θέσιν, δι' ἐνὸς 0 εἰς τὴν δευτέραν, καὶ δι' ἐνὸς σημαντικοῦ εἰς τὴν πρώτην, οὕτω

ἑκατὸν ὀκτὼ, διακόσια τρία, ἐπτακόσια ἐννέα.

108, 203, 709.

Ὡσαύτως γράφονται καὶ οἱ σύνθετοι ἐξ ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ἀλλὰ τὸ 0 γράφεται εἰς τὴν πρώτην θέσιν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην τὰ σημαντικὰ, οἷον

ἑκατὸν τριάκοντα, πεντακόσια ἑξήκοντα,

1 3 0

5 6 0

ὀκτακόσια ἐννεήκοντα.

8 9 0.

Τελευταῖον οἱ σύνθετοι ἐξ ἑκατοντάδων δεκάδων καὶ μονάδων γράφονται διὰ τριῶν σημαντικῶν τῶν ἀρμοδίων, ὡς ἤδη εἵπομεν, οἷον

διακόσια ἐξδομήκοντα ὀκτὼ, πεντακόσια εἴκοσιν ἑν,

2 7 8

5 2 1,

ἐννεακόσια ἐννεήκοντα ἐννέα.

9 9 9.

Εἰμποροῦμεν δὲ νὰ ὀνομάζωμεν τοὺς μὲν μικροτέρους τοῦ δέκα, οἵτινες γράφονται δι' ἐνὸς ψηφίου, *μονοψηφίους*, τοὺς δὲ ἐκ τοῦ δέκα μέχρι τοῦ ἐννεήκοντα ἐννέα, οἵτινες γράφονται διὰ δύο ψηφίων, *διψηφίους*, τοὺς δὲ ἐκ τοῦ ἑκατὸν μέχρι τοῦ ἐννεακόσια ἐννεήκοντα ἐννέα, οἵτινες γράφονται διὰ τριῶν ψηφίων, *τριψηφίους*.

Ἐκαστον ψηφίον τῶν ἀριθμῶν τούτων παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἡ δὲ θέσις τοῦ τῆν τάξιν τῶν μονάδων, ἥτοι τὸ μέγεθος αὐτῶν. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν.

23. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν χιλιάδων γράφονται ἀπαράλλακτα ὡς οἱ προηγούμενοι ἀριθμοὶ, ἀλλ' ἔχουσι δεξιά των 000, καὶ τοῦτο διὰ νὰ ᾔνοι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων χιλιάδος, ἥτοι τῶν τετάρτης τάξεως μονάδων, εἰς τὴν τετάρτην θέσιν, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων χιλιάδος, ἥτοι τῶν πέμπτης τάξεως μονάδων, εἰς τὴν πέμπτην θέσιν, καὶ τὸ τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδος εἰς τὴν ἕκτην, οἷον

ὀκτὼ χιλιάδες,	πεντήκοντα ἐξ χιλιάδες,	ἐπτακόσιαι τρεῖς
8000	56000	703000 χιλιάδες,
τριῆκοντα χιλιάδες,	διακόσιαι χιλιάδες,	ἑκατὸν τριῆκοντα
30000	200000	130000 χιλιάδες.

Ὡσαύτως γράφονται καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατομμυρίων, ἀλλὰ μὲ 000000 δεξιά, διὰ τὸν ἤδη εἰρημένον λόγον, οἷον

πέντε εκατομμύρια, έννενήκοντα τέσσαρα εκατομμύρια,
5000000 94000000

έκατὸν πεντήκοντα ὀκτὼ εκατομμύρια.

158000000.

Ὡσαύτως γράφονται καὶ τὰ διλιόνια, ἀλλὰ μὲ ἐννέα μηδε-
νικὰ δεξιά, οἷον ἑξακόσια τέσσαρα διλιόνια

604000000000, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἀριθμὸς χιλιάδων εἶναι ἡ τετραψήφιος ἢ πενταψήφιος ἢ ἑξα-
ψήφιος, ἀριθμὸς δὲ εκατομμυρίων εἶναι ἡ ἑπταψήφιος ἢ ὀκτα-
ψήφιος ἢ ἐννεαψήφιος, κτλ.

24. Οἱ δὲ σύνθετοι ἐξ ἀριθμῶν μονάδων ἀπλῶν, χιλιάδων,
εκατομμυρίων κτλ. γράφονται εὐκολώτατα. Ἐπειδὴ πρῶτον
γράφεται, ὡς ἤδη εἵπομεν, ὁ τῆς ἀνωτάτης πρωτευούσης μονά-
δος ἀριθμὸς, ἀλλὰ χωρὶς τῶν μηδενικῶν· ἔπειτα δεξιά τούτου
γράφεται ὁ τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρωτευούσης μονάδος· ἂν
δὲ δὲν ὑπάρχῃ τοιοῦτος ἀριθμὸς, γράφονται ἀντ' αὐτοῦ 000,
διὰ νὰ ἔχῃσι τὰ προγεγραμμένα τὴν ἀρμοδίαν των θέσιν· ἔπειτα
δεξιά τούτων γράφεται ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρω-
τευούσης μονάδος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, οἷον

τριακόσιαι πεντήκοντα χιλιάδες ἑπτακόσιαι ὀκτώ.

350708.

Ἑξακόσια τέσσαρα εκατομμύρια ἑπτακόσιαι τριάκοντα χιλιά-
δες διακόσιαι ἐννενήκοντα πέντε γράφεται

604730295.

Πεντήκοντα τέσσαρα διλιόνια ἑπτακόσιαι εἴκοσιν ὀκτὼ ἐκα-
τομμύρια ἐννεακόσιαι τεσσαράκοντα χιλιάδες διακόσιαι ὀκτὼ
γράφεται

54728940208.

Ἐδῶ πρέπει νὰ γυμνασθῇ τις ἀρκετὰ, ὥστε νὰ δύναται εὐθὺς
ἅμα ἀκούσῃ τὸ ὄνομα ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, νὰ τὸν γράφῃ
ἀλανθάστως.

25. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων εἶναι φανερόν ὅτι ἀριθμοῦ γραμ-
μένου δι' ἀραβικῶν χαρακτήρων οἱ μὲν τρεῖς ἐν δεξιά χαρακτη-

ρες παριστάνουσιν ἀριθμὸν μονάδων ἀπλῶν, ὁ μὲν μονάδας, ὁ δὲ δεκάδας, ὁ δὲ ἑκατοντάδας, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς οἱ ἀριστερόθεν τούτων παριστάνουσιν ἀριθμὸν χιλιάδων, ὁ μὲν μονάδας, ὁ δὲ δεκάδας, ὁ δὲ ἑκατοντάδας χιλιάδος, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς οἱ ἐτι ἀριστερώτεροι παριστάνουσιν ἀριθμὸν ἑκατομμυρίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Διὰ ν' ἀπαγγεῖλωμεν λοιπὸν ἀριθμὸν γραμμένον δι' ἀρχαϊκῶν χαρακτήρων, πρῶτον χωρίζομεν αὐτὸν, ἀρχίζοντες δεξιόθεν, εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων ἕκαστον, προσδιορίζομεν οὕτω τίνος πρωτευούσης μονάδος ἀριθμὸν παριστάνει τὸ ἀριστερώτατον τμήμα (τὸ ὁποῖον δυνατόν νὰ ἔχῃ ἐν ἡ δύο ἢ τρία ψηφία), καὶ ἔπειτ' ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν, ἡγουν λέγομεν τὸ ὄνομά του, ἀπαγγέλλοντες πρῶτον τὸ ἀριστερώτατον τμήμα ὡς ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια, εἰς δὲ τὸ τέλος τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος του, ἔπειτα τὸ δεξιὰ τούτου τμήμα ὡσαύτως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου δεξιοῦ τμήματος.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ ἀριθμὸς 49584738645 ἀπαγγέλλεται οὕτω, τεσσαράκοντα ἑνέα διλιόρια πεντακόσια ὀγδοήκοντα τέσσαρα ἑκατομμύρια ἑπτακόσια τριάκοντα ὀκτὼ χιλιάδες ἑξακόσια τεσσαράκοντα πέντε. Ὡσαύτως ὁ 780432458 ἀπαγγέλλεται, ἑπτακόσια ὀγδοήκοντα ἑκατομμύρια τετρακόσιαι τριάκοντα δύο χιλιάδες τετρακόσια πενήκοντα ὀκτὼ.

Καὶ ἐδῶ ἀπαιτεῖται μικρά τις γύμνασις.

26. Ἐνῷ λέξεις ἐχρειάσθησαν περισσότεραι τῶν δέκα, διὰ νὰ σχηματισθῶσι τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, σημεῖα γραπτὰ, ἥτοι ψηφία, ἤρκεσαν μόνον δέκα. Τοῦτο συμβαίνει διότι, οἱ σύνθετοι ἀριθμοὶ νοοῦνται ὡς σύνθετοι μόνον ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν διαφόρων τάξεων· καὶ ἐπειδὴ οὗτοι σύγκεινται ἐξ ἑνῆς μονάδων τὸ πολὺ, χρειάζονται μόνον ἑνῆς σημαντικὰ ψηφία· τὴν δὲ τάξιν τῶν μονάδων τὴν παριστάνει ἡ θέσις αὐτῶν τῶν ψηφίων. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐτι οἱ ἀπλοὶ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ γράφονται μὲν ἐν σημαντικὸν ψηφίον, τοῦτο δὲ πρέπει νὰ ἔχῃ διαφόρους θέσεις κατὰ τὴν

τάξιν τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ἦτον ἀνάγκη καὶ ἐνὸς δεκάτου ψηφίου, ἀσημάντου μὲν καθ' αὐτὸ, ἀλλὰ χρησίμου, διὰ νὰ δύνηται τὸ σημαντικὸν νὰ τίθεται εἰς τὴν ἀρμοδίαν θέσιν του. Ὡσαύτως χρησιμεύει τὸ 0 καὶ ὅταν οἱ σύνθετοι δὲν ἔχωσιν ἀριθμὸν τᾶξέως τινος.

*Περὶ Ποσῶν καὶ τοῦ προσδιορισμοῦ
αὐτῶν δι' ἀριθμῶν.*

27. Ποσὸν ὀνομάζεται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον, ἤγουν εἶναι κάμποσον, εἶναι καὶ περισσότερον καὶ ὀλιγώτερον τούτου.

Τὸ πλῆθος ἢ ὁ ἀριθμὸς, τὸ βάρος, τὸ μῆκος, ἢ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος, ὁ χρόνος (καιρὸς), ἢ χωρητικότης, ἢ ἀξία κτλ. εἶναι ποσὰ διαφόρου εἶδους, διότι ὅλα ἐπιδέχονται τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον. Ἀφοῦ νοηθῇ π. γ. ὁ πέντε τί εἶναι, βλέπει τις ὅτι ὁ ὀκτὼ εἶναι περισσότερα, ὁ τρία εἶναι ὀλιγώτερα, λοιπὸν εἶναι κάμποσον, εἶναι περισσότερον, εἶναι καὶ ὀλιγώτερον· λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ποσόν. Ὡσαύτως, ἀφοῦ αἰσθανθῇ τις τὸ βάρος μῆλου, ἔπειτα τὸ βάρος πεπονίου καὶ τὸ βάρος κερασίου, διακρίνει ὅτι εἶναι βάρος κάμποσον, περισσότερον καὶ ὀλιγώτερον. Ὡσαύτως, ἀφοῦ αἰσθανθῇ τις τὸ μῆκος δωματίου, ἔπειτα τὸ μῆκος τῆς οἰκίας καὶ τὸ παραθύρου τοῦ δωματίου, διακρίνει ὅτι εἶναι μῆκος κάμποσον, περισσότερον καὶ ὀλιγώτερον· λοιπὸν τὸ μῆκος εἶναι ποσόν· οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

28. Ποσὸν εἶδους τινὸς θεωρεῖται ἢ καθ' αὐτὸ, ἀπολύτως, ἢ σχετικῶς, πρὸς ἄλλο τι ὁμοειδές. Πρὸς ἄλλο δέ τι θεωρούμενον ἢ νοεῖται ἀπλῶς ὅτι εἶναι μεγαλύτερον ἐκείνου ἢ μικρότερον, ἢ νοεῖται ἔτι περισσότερον ὅτι εἶναι ἴσον μὲ δις, τρίς, τετράκις κτλ. ἐκείνο, ἢ ἄλλως, μὲ δύο, τρία, τέσσαρα κτλ. ἴσα μ' ἐκείνο, ὅταν ᾖναι μεγαλύτερον. Ὅταν δὲ οὕτω νοῆται ποσόν τι πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, λέγομεν ὅτι εἶναι προσδιορισμένον πρὸς αὐτὸ τὸ ἄλλο.

29. Πρὸς περισσοτέραν ἀπλότητα εἰς πᾶν ἔθνος εἶναι προσδιωρισμένον κατὰ κοινὴν συμφωνίαν ἐκ παντὸς εἶδους ποσοῦ, ἐκτὸς τοῦ πλῆθους, καὶ μ.ποσον, ὅσον τὸ ἔθνος ἠθέλησε, πρὸς τὸ ὁποῖον παραβάλλεται καὶ προσδιορίζεται ὁποιοιδήποτε ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ, καὶ τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἀρχικὸν ποσὸν, ὡς ἀρχικὸν ἐν, ὡς ἀρχικὴ μονάς.

Εἶναι δὲ τόσαι αἱ ἀρχικαὶ μονάδες, ὅσα εἶναι τὰ διάφορα εἶδη ποσῶν, καὶ ὀνομάζεται ἐκάστη μὲ ἰδιαιτέρον ὄνομα. Εἰς τὴν Ἑλλάδα μονάς τοῦ μήκους ἦτον πρότερον ἡ πῆχη, τὴν δὲ καὶ ὁ λεγόμενος βασιλικὸς πῆχυς, μονάς τοῦ βάρους ἦτον ἡ ὀκά, τὴν δὲ καὶ ἡ μινᾶ, ἥτις ἀκόμη δὲν εἶναι εἰς κοινὴν χρῆσιν, μονάς τοῦ χρόνου ἡ ἡμέρα, μονάς τῆς χωρητικότητος ὑγρῶν μὲν ἡ ὀκά, . . . γεννημάτων δὲ τὸ κοῖλον, . . . μονάς τοῦ νομίσματος ἡ δραχμὴ. Πόση δὲ εἶναι ἐκάστη τῶν μονάδων τούτων τὸ μακρύνει τις διὰ τῆς αἰσθήσεως. Κατωτέρω δὲ θέλομεν εἰπεῖ περὶ τινων ἐξ αὐτῶν πῶς ἐπροσδιορίσθησαν, ὡσαύτως καὶ περὶ ἄλλων, τὰς ὁποίας δὲν ἐμνημονεύσαμεν ἐνταῦθα.

Σημ. Πλῆθους ὁποιοιδήποτε ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι αὐτὸ τὸ ἐν, ἐκ τοῦ ὁποίου σύγκειται τὸ πλῆθος· π. γ. πλῆθους δένδρων ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι τὸ ἐν δένδρον, πλῆθους ἀνθρώπων ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι ὁ εἰς ἄνθρωπος, κτλ. Εἶναι δὲ τόσαι, ὅσα εἶναι τὰ διάφορα πράγματα τὰ συνιστῶντα τὰ πλῆθη.

30. Ὅποιοιδήποτε δὲ ἄλλο ποσὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος του ἢ περισσότερον θέλει εἶσθαι ἢ ἴσον ἀκριβῶς μὲ ἀριθμὸν τινὰ μονάδων ἀρχικῶν τοῦ εἶδους του, ἢ ἴσον μὲ ἀριθμὸν τινὰ μονάδων καὶ μέρος τι τῆς μονάδος. Διὰ νὰ προσδιορισθῇ δὲ μὲ τίνα ἀριθμὸν μονάδων εἶναι ἴσον, ἀπαιτεῖται νὰ γείνη πράξις, ἥτις ἐπὶ ἄλλου ποσοῦ εἶναι ἄλλη.

Καὶ τὸ μὲν πλῆθος, ὅπου διακρίνεται ἐν καὶ πολλὰ, προσδιορίζομεν ἀπλῶς δι' ἀριθμώσεως, ἔχουν διατρέχοντες ἐν μετὰ τὸ ἄλλο τὰ συνιστῶντα τὸ πλῆθος, καὶ λέγοντες κατὰ σειρὰν ἐν,

ἑνὸς, τρία καὶ καθεξῆς ἕως εἰς τὸ τελευταῖον· ὁ δὲ τελευταῖος ἀριθμὸς φανερόναι πόσα εἶναι τὰ πολλά. Ἐὰν λοιπὸν ἀριθμοῦντας πλῆθος δένδρων τελειώσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 8, νοοῦμεν ὅτι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 8, τόσα εἶναι τὰ δένδρα, ἤτοι ὅτι εἶναι 8 τὰ δένδρα. Οὕτω καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου πλῆθους.

31. Ἐπὶ δὲ μήκους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓν, ἀλλ' ὄχι καὶ πολλά, ἐπιφέρεται ἡ μονάς, ὁ πῆχυς, ἀπὸ τὸ ἐν ἄκρον τοῦ ἕως εἰς τὸ ἄλλο καὶ ἀριθμοῦνται συγχρόνως αἱ μονάδες, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *μετρεῖν*. Ἐὰν λοιπὸν οὕτω μετρηθῇ τὸ μῆκος τοίχου τινὸς ἢ τσόχας, καὶ εἰς τὸ τέλος εὔρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 20, νοεῖται ὅτι τὸ μῆκος αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ 20 πῆχεις, ἢ ἀπλούστερα, ὅτι εἶναι 20 πῆχεις ἢ 20 πῆγεων. Συνήθως δὲ ὁ ἀριθμὸς 20 τότε λέγεται *μέτρον* τοῦ τοίχου ἢ τῆς τσόχας.

Σημ. Μῆκη ἄλλα, ὅπου δὲν εἶναι δυνατὴ τοιαύτη μέτρησις, μετροῦνται κατ' ἄλλον τρόπον, τὸν ὁποῖον διδάσκουσιν ἄλλαι μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι.

32. Βαρὺ δὲ τι πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ εἶναι ἓν, ἀλλ' ὄχι καὶ πολλά, συνήθως τίθεται ἐπὶ τῆς ἐτέρας πλάστιγγος ζυγαριᾶς, ἐπὶ δὲ τῆς ἐτέρας τίθεται ἀριθμὸς ὁκάδων, ἕως νὰ γείνη ἰσορροπία, τὸ ὁποῖον λέγεται *ζυγίζειν*. Ἐὰν λοιπὸν οὕτω ζυγισθὲν κομμάτιον μολύβδου εὔρεθῇ ὅτι ἰσορροπεῖ μὲ 12 ὁκάδας, νοεῖται ὅτι τὸ βάρος τοῦ μολύβδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος 12 ὁκάδων, ἢ ἀπλούστερα, ὅτι ὁ μολύβδος εἶναι 12 ὁκάδας βαρὺ.

Σημ. Ἀλλοτε μεταχειρίζονται ἄλλα μέσα, διὰ νὰ ζυγίσωσι βαρὺ πρᾶγμα.

Τὸν χρόνον προσδιορίζουσι μὲ τίναν ἀριθμὸν μονάδων εἶναι ἴσος συνήθως δι' ὥρολογίου, ἐνίοτε δὲ καὶ δι' ἄλλου μέσου, καὶ ἄλλο ποσὸν κατὰ τινα ἰδιαιτέρον τρόπον. Ἀλλ' ἐν γένει ὁ ἀριθμὸς, ὅστις παριστάνει πόσον εἶναι ἕκαστον αὐτῶν τῶν ποσῶν πρὸς τὴν μονάδα του, εὔρεσκεται μὲ δυσκολίαν πλείωτέραν, καὶ ἀπαιτεῖ μηχανὰς καὶ γνώσεις ἱκανάς.

33. Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπει τις ὅτι πᾶν ποσὸν μεγάλῃ-τερον τῆς ἀρχικῆς μονάδος του προσδιορίζεται πρὸς αὐτὴν πρὸς

σον εἶναι δι' ἀριθμοῦ, ἤγουν ὅτι εἶναι ἴσον μὲ δύο μονάδας, μὲ τρεῖς, μὲ τέσσαρας καὶ καλεῖται. Ὁ δὲ προσδιορισμὸς οὗτος εἶναι χρησιμώτατος, ὥς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ ἐξῆς.

Ὁ ἀριθμὸς δὲ, ἐνότῳ δὲν εἶναι προσδιορισμένη ἡ μονάς του ὁποίου εἶδους ποσὸν εἶναι, καὶ πόσον εἶναι, λέγεται ἀγνηρημέ-
νος, οἷον ἕξ, δέκα, εἴκοσι τρία, κτλ· ἐδῶ νοεῖται μόνον πόσαι
εἶναι αἱ μονάδες, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς καὶ τίποτε ἄλλο. Ἐὰν δὲ προσδιο-
ρίζηται καὶ ὁποίου εἶδους ποσὸν εἶναι ἡ μονάς του, καὶ πόση εἶναι,
τὸ ὁποῖον γίνεται διὰ τοῦ παρακολουθοῦντος ὀνόματος τῆς μονά-
δος, τότε λέγεται συγκεκριμένος, οἷον τέσσαρες ἡμέραι, ὀκτὼ
πήχεις, κτλ· ἐδῶ νοεῖται καὶ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, καὶ ὅτι
εἶναι μονάδες χρόνου ἢ μήκους, καὶ τόσου χρόνου ἢ μήκους, ὅση
εἶναι ἡ ἡμέρα ἢ ὁ πῆχυς. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἂν μὲν ᾖναι
ἀριθμὸς πλῆθους, οἷον πέντε δένδρα, αἱ μονάδες εἶναι ὅμοιαι
μόνον, ὅχι δὲ καὶ ἴσαι. Ἐὰν δὲ ᾖναι ἀριθμὸς μονάδων ἄλλου
ποσοῦ, οἷον ἑπτὰ ὀκάδες, αἱ μονάδες του εἶναι ἴσαι.

Ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς ποτὲ μὲν εἶναι ἀπλῶς ἀριθμὸς μο-
νάδων εἶδους τινὸς ποσοῦ, ὥς ἤδη εἵπομεν, ποτὲ δὲ εἶναι ἀριθ-
μὸς μονάδων, τῶν ὁποίων τὸ ποσὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ποσὸν πράγ-
ματός τινος, καὶ τότε εἶναι ὑπερσυγκεκριμένος, καὶ παρακο-
λουθεῖται ὑπὸ τοῦ ὀνόματος τοῦ πράγματος, οἷον πέντε πήχεις
τσόχας, ἢ τσόχα πέντε πήχεων, τρεῖς ὥραι περιπάτου, ἢ τριῶν
ὥρων περίπατος κτλ.

Περὶ Κλασματικῶν, Μικτῶν καὶ

Συμμιγτῶν ἀριθμῶν.

34. Ποσὸν μικρότερον τῆς ἀρχικῆς μονάδος του, καὶ τόσον,
ὥστε πολλὰ ἀπ' αὐτὰ νὰ συνιστῶσιν ἄλλο ποσὸν ἴσον μὲ αὐτὴν,
λέγεται ἀρίστως πολλοστὸν αὐτῆς μέρος· ὠρισμένως δὲ, ἐὰν
ποσὸν τι ᾖναι τόσονμικρόν, ὥστε δύο ἀπ' αὐτὰ ν' ἀποτελῶσι
ποσὸν ἴσον μὲ τὴν ἀρχικὴν μονάδα, λέγεται ἡμισυ ἢ δεύτερον

αὐτῆς μέρος, ἐάν δὲ ἦναι τόσον, ὥστε τρία νὰ ἰσοδυναμῶσι μὲ τὴν ἀρχικὴν μονάδα, λέγεται *τρίτον* αὐτῆς, ἐάν δὲ τέσσαρα ἰσοδυναμῶσι μὲ τὴν μονάδα, τὸ ἐν λέγεται *τέταρτον* αὐτῆς, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἰκοστὸν τῆς μονάδος σημαίνει ποσὸν μικρότερον αὐτῆς, καὶ τόσον, ὥςτε εἴκοσιν ἀπ' αὐτὰ ἰσοδυναμοῦσι μὲ αὐτήν.

Σημ. Τῶν τοιούτων ὀνομάτων ἡ μὲν κατάληξις τὸν παριστάνει ὅτι τὸ ποσὸν εἶναι μέρος τῆς μονάδος, ἡ δὲ ῥίζα σημαίνει τί μέρος εἶναι, ἤγουν πόσα συνιστᾷσι τὴν μονάδα.

35. Κατὰ ταῦτα ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι πολλοστὸν μέρος παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἄλλου ἄλλο, οἷον τοῦ 2 εἶναι τὸ ἥμισυ, τοῦ 3 τὸ τρίτον, τοῦ 10 τὸ δέκατον, τοῦ 100 τὸ ἑκατοστὸν, καὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

36. Πολλοστὸν τι μέρος τῆς μονάδος, οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ. δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐάν μερισθῇ αὐτὴ εἰς δύο, τρία, τέσσαρα κτλ. ἴσα μέρη. Ἀλλὰ δύναται τὸ αὐτὸ νὰ εὑρεθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ἐάν παρατηρηθῇ ποῖον ἄλλο ποσὸν ἐπικταλαμβανόμενον δις, τρίς, τετράκις, κτλ. συνιστᾷ τὴν μονάδα, καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κτλ.

37. Ἐκαστον πολλοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος θεωρεῖται ὡς μονάς, καὶ ὀνομάζομεν αὐτὸ τότε *κλασματικὴν μονάδα*. Γίνονται δὲ ἐξ αὐτῆς καὶ σύγκεινται ἀριθμοὶ ἀπαράλλακτα, ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς μονάδος οἱ ἀκεραῖοι· διὰ τοῦτο καὶ ὀνομάζονται μὲ τὰ αὐτὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὅποια καὶ οἱ ἀκεραῖοι, ἀλλὰ παρακολουθούμενα ὑπὸ τοῦ ὀνόματος τοῦ πολλοστοῦ πρὸς διάκρισιν· οἷον ἐκ τοῦ ἑκτοῦ γίνονται δύο ἑκτα, τρία ἑκτα, τέσσαρα ἑκτα, . . . ἑξ ἑκτα, . . . δέκα ἑκτα, . . . εἰκοσιτέσσαρα ἑκτα κτλ. -- Ἐκ τοῦ ἐνδεκάτου, δύο ἐνδέκατα, τρία ἐνδέκατα, . . . ἐνδεκα ἐνδέκατα, . . . τριάκοντα ἐνδέκατα κτλ.

38. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι κλασματικαί, ἤτοι πολλοστά ἀρχικῆς τινος μονάδος, ὀνομάζονται *κλασματικοί*. Εἰς πάντα δὲ κλασματικὸν ἀριθμὸν διακρίνονται δύο τινά, τὰ ὅποια παρατηροῦνται καὶ εἰς ὅποιονδήποτε ἄλλον

ἀριθμὸν, ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν, ἥτοι πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, καὶ πόση εἶναι ἐκάστη. Τοῦ ἐπτὰ ἔννατα ὁ ἐπτὰ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, καὶ τὸ ἔννατα τὸ ὄνομα ἐκάστης ἥτοι πόση εἶναι, ὡς τοῦ πέντε δεκάδες ὁ πέντε παριστάνει τὸν ἀριθμὸν, καὶ τὸ δεκάδες τὸ ὄνομα τῶν μονάδων.

Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῶν κλασματικῶν λέγεται ἀριθμητὴς τοῦ κλασματικοῦ, τὸ δὲ ὄνομα τῆς κλασματικῆς μονάδος παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ. Τοῦ ἐννέα δέκατα, τὸ ἐννέα εἶναι ὁ ἀριθμητὴς, τὸ δὲ ~~ἐννέα~~ δέκατα ὁ παρονομαστὴς. Ὁ ἀριθμητὴς δὲ καὶ ὁ παρονομαστὴς μὲ κοινὸν ὄνομα λέγονται ὄροι τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

39. Καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς κλασματικοῦ ἀριθμοῦ γράφεται ὡς ἀκέραιος ἀριθμός· ἀλλὰ διὰ νὰ διακρίνηται ὁ εἰς ἀπὸ τὸν ἄλλον, ἥτοι ὅτι ὁ εἰς παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, καὶ ὁ ἄλλος τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, γράφεται ὁ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ χωρίζονται διὰ γραμμῆς, οἷον ἐπτὰ ἔννατα γράφεται οὕτω $\frac{7}{9}$, τέσσαρα ἕκτα οὕτω $\frac{4}{6}$, πέντε δωδέκατα οὕτω $\frac{5}{12}$.

Σημ. Εἰμποροῦν οἱ αὐτοὶ νὰ γραφθῶσι καὶ οὕτω, 7 ἔννατα, 4 ἕκτα, 5 δωδέκατα ἥγουν ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων μόνον νὰ γράφηται ὡς ἀκέραιος, ὁ δὲ παρονομαστὴς, ἀντὶ νὰ γραφθῇ ὡς ἀκέραιος ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν, νὰ γράφηται ἐπὶ τοῦ ἀριθμητοῦ. Τὰς δὲ κλασματικὰς μονάδας γράφομεν διττῶς, οἷον τὸ πέμπτον οὕτως $\frac{1}{5}$, ἢ οὕτω 5^{ον}, τὸ δωδέκατον οὕτως $\frac{1}{12}$, ἢ οὕτω 12^{ον}.

40. Γραμμένον δὲ κλασματικὸν ἀριθμὸν ἀπαγγέλλομεν ἀπαγγέλλοντες τὸν μὲν ἀριθμητὴν του ὡς ἀκέραιον, τὸν δὲ παρονομαστὴν του ἔπειτα ὡς τακτικὸν ἀριθμὸν, οἷον ὁ $\frac{7}{8}$ ἀπαγγέλλεται ἐπτὰ ὄγδοα, ὁ $\frac{3}{4}$ τρία τέταρτα, κτλ. Ἐνίοτε δὲ ἀπαγγέλλονται οἱ αὐτοὶ καὶ οὕτω, ἐπτάκις τὸ ὄγδον τῆς μονάδος, τρίς τὸ τέταρτον τῆς μονάδος, ἢ καὶ οὕτως, ἐπτὰ τῶν ὀκτώ τῆς μονάδος, τρία τῶν τεσσάρων τῆς μονάδος. Οἱ δὲ ἀρχάριοι κάμνουσι καλὰ νὰ συνειθίσωσιν ὅλας τὰς ἐκφράσεις.

41. Κλασματικός ἀριθμὸς εἶναι ἢ μικρότερος τῆς ἀρχικῆς τοῦ μονάδος, ἢ ἴσος μετ' αὐτήν, ἢ μεγαλύτερος αὐτῆς. Καὶ εἶναι μὲν μικρότερος τῆς μονάδος, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ᾖ μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, οἷον $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, καὶ τότε λέγεται ἰδίως *κλάσμα* τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ ἴσος μετ' τὴν μονάδα, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ᾖ ἴσος μετ' τὸν παρονομαστήν του, οἷον $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{4}{4}$. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ᾖ μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του, οἷον $\frac{20}{5}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{1^2}{7^2}$, κτλ.

Σημ. Καὶ ἡ μονάς καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ εἰς κλασματικόν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς ἄλλο μέρος· καὶ ἀντιστρόφως, οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος κλασματικοὶ δύνανται νὰ τραπῶσιν ἢ εἰς ἀκεραίους ἢ εἰς ἀκεραίους μετὰ κλάσματος. Ἡ δὲ μονάς, ὅταν παριστάνηται κλασματικῶς, οἷον $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{4}$, κτλ., γίνεται ἀριθμός.

42. Ὡς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἡ μονάς του εἶναι πολλοστὸν τι μέρος, οὕτω καὶ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ μονάς του εἶναι πολλοστὸν τι μέρος αὐτοῦ. Π. χ. τοῦ 6 τὸ 1 εἶναι τὸ ἕκτον, ὡσαύτως καὶ τοῦ $\frac{6}{8}$ τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι τὸ ἕκτον, διότι ἐξάκις τὸ $\frac{1}{8}$ ἀποτελεῖ τὸ $\frac{6}{8}$. οὕτω καὶ τοῦ $\frac{7}{12}$ τὸ $\frac{1}{12}$ εἶναι τὸ ἑβδόμον, διότι ἐπτάκις τὸ $\frac{1}{12}$ ἀποτελεῖ τὸ $\frac{7}{12}$. Γενικῶς, ἡ κλασματικὴ μονάς εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ὅποιον πολλοστὸν τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἡ μονάς αὐτοῦ.

43. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων γίνεται φανερόν ὅτι ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι ἴση μετ' πολλὰ πολλοστὰ κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ· οἷον ἡ ἀρχικὴ μονάς εἶναι ἴση μετ' $\frac{8}{8}$ τοῦ $\frac{5}{8}$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{5}{8}$, ἡ δὲ ἀρχικὴ μονάς του εἶναι ἴση μετ' $\frac{8}{8}$, ἔχουν ἴση μετ' ὀκτάκις τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{5}{8}$, ἥτοι μετ' $\frac{8}{5}$ τοῦ $\frac{5}{8}$. Ὡσαύτως τὸ $\frac{1}{7}$ εἶναι τὸ ἑννακτὸν τοῦ $\frac{9}{7}$. ἀλλ' ἡ μονάς εἶναι ἴση μετ' ἐπτάκις τὸ $\frac{1}{7}$. λοιπὸν ἡ μονάς εἶναι ἴση μετ' ἐπτάκις τὸ ἑννακτὸν τοῦ $\frac{9}{7}$, ἥτοι ἴση μετ' $\frac{7}{9}$ τοῦ $\frac{9}{7}$.

Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι, διὰ νὰ εὕρῃ μετ' πόσα πολλοστὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἴση ἡ ἀρχικὴ μονάς, πρέπει ν' ἀναστρέψῃ τοὺς ὁροὺς τοῦ κλασματικοῦ, ἔχουν νὰ γράψῃ τὸν ἀριθμητὴν παρονομαστὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ἀριθμητὴν, καὶ ὁ προ-

κύπτων οὕτως ἀριθμὸς φανερόναι τὸ ζητούμενον. Π. γ. μὲ πόσα πολλοστὰ τοῦ $\frac{8}{12}$ εἶναι ἡ μονάς; Ἀναστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ ἔχομεν $\frac{1}{6}$. λοιπὸν ἡ μονάς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{8}{12}$.

44. Μικτὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ὁ σύνθετος ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ κλάσμα, οἷον ὁ $6\frac{3}{4}$, ὁ $15\frac{7}{9}$, ὁ $38\frac{12}{25}$ κτλ.

45. Ποσὸν μικρότερον τῆς ἀρχικῆς μονάδος του εἶναι ἴσον μὲ κλάσμα τι. Εὐρίσκεται δὲ μὲ τί κλάσμα εἶναι ἴσον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅποιον ἐξεθέσαμεν εἰς τὸν ἀριθμ. 31—32 περὶ τῶν ποσῶν τῶν μεγαλητέρων τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Ἡ κλασματικὴ δὲ μονάς τὴν ὁποίαν μεταχειρίζομεθα εἶναι ποτὲ μὲν τὸ τρίτον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ποτὲ δὲ τὸ τέταρτον, ἄλλοτε δ' ἄλλη.

46. Καὶ ποσὸν μεγαλήτερον τῆς ἀρχικῆς μονάδος πολλάκις συγκρίνεται πρὸς κλασματικὴν τινα μονάδα, καὶ εὐρίσκεται κατὰ τὸν ἤδη εἰρημένον τρόπον μὲ τίνα ἀριθμὸν κλασματικῶν μονάδων εἶναι ἴσον. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι πάντοτε μεγαλήτερος τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Ἀλλὰ συνθέστερον τὰ μεγαλήτερα τῆς ἀρχικῆς των μονάδος ποσὰ πρῶτον συγκρίνονται πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, καὶ ἂν περισσεύσῃ τι μικρότερον αὐτῆς, τοῦτο συγκρίνεται πρὸς κλασματικὴν τινα μονάδα, ὡς ἤδη εἵπομεν· καὶ τότε δῆλον ὅτι θέλει εἶσθαι ἴσον τὸ ποσὸν μὲ μικτὸν ἀριθμὸν.

Εἰν οὕτω μετρηθὲν κομμάτιον τσόχας πρὸς τὸν πήχυν εὐρεθῇ ἴσον μὲ 8 πήχεις καὶ μέρος τι μικρότερον τοῦ πήχεως, τοῦτο δὲ μετρηθὲν ὡσαύτως πρὸς τὸ 4^{ον} τοῦ πήχεως εὐρεθῇ ἴσον μὲ τρεῖς τοιαύτας μονάδας, τότε δῆλον ὅτι τὸ κομμάτιον τῆς τσόχας εἶναι ἴσον μὲ 8 πήχ. καὶ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ, ἔχουν μὲ μικτὸν ἀριθμὸν πήχεων καὶ τετάρτων τοῦ πήχεως.

47. Ἀλλὰ τὸ κοινότατον πάντων εἶναι τὸ ἐξῆς. Εἶναι προσδιωρισμένας ἐξ ἑκάστου εἴδους ποσοῦ κἄμποσαι μονάδες, αἱ μὲν μεγαλήτεραι τῆς ἀρχικῆς καὶ ἴσαι ἄλλη μὲ ἄλλον ἀριθμὸν ἀρχικῶν μονάδων, αἱ δὲ μικρότεραι καὶ ἴσαι ἄλλη μὲ ἄλλο πολλοστὸν αὐτῆς.

ἐκάστη δὲ τῶν μονάδων τούτων ἔχει ὄνομα ἰδιαίτερον, διὰ νὰ διακρίνηται ἐκ τῶν λοιπῶν. Π. γ. ἑάρους μονάδες ἐκτὸς τῆς ὁκάς εἶναι ὁ στατήρ (κοινῶς καντάρι) ἴσος μὲ 44 ὁκάδας, καὶ τὸ δράμι ἴσον μὲ τὸ τετρακοσιοστὸν τῆς ὁκάς. Πολὺ δὲ ἑαρὺ πρᾶγμα ζυγίζεται πρῶτον μὲ στατήρας, καὶ ἂν δὲν ἰσοῦροπῇ μὲ ἀριθμὸν τινα στατήρων, ἀλλ' εἶναι βαρύτερον, προστίθενται καὶ ὁκάδες, καὶ ἂν δὲν ἰσοῦροπῇ ἀκόμη, προστίθενται καὶ δράμια εἰς τὴν πλάστιγγα, ἕως νὰ γείνη ἰσοῦροπία. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι οὕτω ζυγισθὲν σακκίον ἀλεύρου ἰσοῦροπεῖ μὲ 3 στατήρας 28 ὁκάδας καὶ 300 δράμια. Ὁ ἀριθμὸς 3 στατήρες 28 ὁκάδες καὶ 300 δράμια, ὅσιν σύγκειται ἐκ τριῶν διακεκριμένων ἀριθμῶν, 3, 28, 300, ἀνίστων μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἶδους ποσοῦ, καὶ παριστάνει τὸ ἑáros πράγματός τινος, τοῦ ἀλεύρου, ὀνομάζεται *συμμιγῆς*.

Συνήθως τὰ ὀνόματα τῶν μερικῶν μονάδων τούτων τῶν ἀριθμῶν γράφονται ὄχι ὁλόκληρα μετὰ τοὺς ἀριθμοὺς, ἀλλ' ἐπάνω τῶν ἀριθμῶν μόνον τὰ πρῶτα γράμματα αὐτῶν, οἷον ὁ ἀνωτέρω γράφεται οὕτω $3^{\text{στ.}} 28^{\text{ὁκ.}} 300^{\text{δρ.}}$.

Ὅ,τι δὲ εἵπομεν περὶ τοῦ ἑάρους καὶ τῶν μονάδων του, τοῦτο πρέπει νὰ νοηθῇ καὶ περὶ παντὸς ἄλλου εἶδους ποσοῦ, ὅτι δηλ. προσδιορίζεται διὰ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ. Κατωτέρω δὲ θέλομεν ἐκθέσει κατ'ἀλογον τῶν διαφορῶν μονάδων ἐκάστου εἶδους ποσοῦ. αἱτινες εἶναι εἰς χρῆσιν εἰς τὴν Ἑλλάδα, καὶ θέλομεν ἐξετάσει ἀκριβέστερα τοὺς ἐκ τούτων γινομένους συμμιγεῖς ἀριθμοὺς. Ἐδῶ παρατηροῦμεν μόνον ὅτι πᾶς συμμιγῆς ἀριθμὸς εἶναι ἐξ ἀνάγκης συγκεκριμένος, ἐνῶ οἱ κλασματικοὶ καὶ οἱ μικτοὶ εἰσποροῦν νὰ ᾖναι καὶ ἀρρηθεμένοι καὶ συγκεκριμένοι, ὡς οἱ ἀκέραιοι.

*Περὶ Ὁμοωνύμων καὶ Ἑτερονύμων ἀριθμῶν,
καὶ περὶ Ὁμοειδῶν καὶ Ἑτεροειδῶν.*

48. Ἐπειδὴ εἶδομεν πολλάς καὶ διαφορὰς μονάδας εἰς τὰ προηγουμένα, καὶ ἀριθμοὺς ἐπομένως διαφορῶν μονάδων, διὰ

νά τοὺς διακρίνωμεν σύντομα εἰς τὸ ἐξῆς, θέλομεν ὀνομάζειν ὁμωνύμους μὲν ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων ἡ μονάς εἶναι ἡ αὐτή· οἷον 5 μονάδες καὶ 7 μονάδες — 9 δεκάδες καὶ 6 δεκάδες — 4 ἑκατοντάδες καὶ 8 ἑκατοντάδες — $\frac{6}{8}$ καὶ $\frac{9}{8}$ — $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$ — 9 ὀκτάδες καὶ 7 ὀκτάδες — 12 ἡμέραι καὶ 10 ἡμέραι — 20 ἄνθρωποι καὶ 15 ἄνθρωποι κτλ., εἶναι ὁμώνυμοι ἀριθμοί· ἑτερωνύμους δὲ ἐκείνους, τῶν ὁποίων ἡ μονάς εἶναι διαφορετικὴ κατὰ τὸ μέγεθος, οἷον 6 μονάδες καὶ 8 δεκάδες — 4 μονάδες καὶ $\frac{5}{7}$ — $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{9}{12}$ — 8 ὀκτάδες καὶ 100 δράμια — 8 ἡμέραι καὶ 5 ὥραι, κτλ.

Προσέτι δὲ θέλομεν ὀνομάζειν ὁμοσειδεῖς μὲν ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ποσὸν τοῦ αὐτοῦ εἶδους, εἴτε ἴσαι εἶναι εἴτε ἄνιστοι, οἷον 5 ὀκτάδες καὶ 9 ὀκτάδες — 6 ἡμέραι καὶ 9 ὥραι — 7 δραχμαὶ καὶ 12 δραχμαὶ κτλ. ἑτεροσειδεῖς δὲ ἐκείνους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι διάφοροι κατὰ τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ, οἷον 7 ὀκτάδες καὶ 8 ἡμέραι — 4 δραχμαὶ καὶ 9 πῆχεις — 10 ἄνθρωποι καὶ 8 δένδρα κτλ.

Κατὰ ταῦτα βλέπει τις ὅτι οἱ μὲν ὁμοσειδεῖς εἰμποροῦν νά ᾔναι ὁμώνυμοι ἢ ἑτερώνυμοι, οἱ δὲ ἑτεροσειδεῖς εἶναι πάντοτε ἑτερώνυμοι. Εἶναι δὲ φανερόν ἔτι ὅτι συμμιγῆς ἀριθμὸς εἶναι σύνθετος ἐξ ὁμοσειδῶν καὶ ἑτερωνύμων ἀριθμῶν.

Εἰς τὸ ἐξῆς πρέπει νά προσέχη τις νά διακρίνη, ὅταν ἡ χρεῖα τὸ καλῇ, α'. τὸν ἀριθμὸν, ἥγουν πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, β'. πόση εἶναι ἡ μονάς ἢ τίς εἶναι, καὶ γ'. τί εἶδος ποσοῦ εἶναι. Καὶ ὅταν ᾔναι δύο ἀριθμοί, πρέπει νά ἐξετάζωνται ἂν ᾔναι ἴσοι ἢ ἄνιστοι, ἥγουν ἂν ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ ἐνὸς τόσαι ᾔναι καὶ αἱ τοῦ ἄλλου ἢ ὅχι, ἂν ᾔναι ὁμώνυμοι ἢ ἑτερώνυμοι, καὶ ἂν ᾔναι ὁμοσειδεῖς ἢ ἑτεροσειδεῖς. Κατωτέρω δὲ θέλομεν κάμει καὶ ἄλλας διακρίσεις τῶν ἀριθμῶν, καθόσον ἡ ἀνάγκη τὸ καλέσῃ.

Σημ. Ἰσως τὰ ὀνόματα ταυτομόναδοι καὶ ἑτερομόναδοι ἀντὶ τῶν ὁμώνυμοι καὶ ἑτερώνυμοι, καὶ ταυτόποσοι καὶ ἑτερόποσοι, ἀντὶ τῶν ὁμοσειδεῖς καὶ ἑτεροσειδεῖς ἤθελαν σημεῖναι καθαρώτερα τὸ πρᾶγμα· ἀλλ' ἐνόμισα πρὶν τῆς ἐκείνης μᾶλλον τὰ εὐφρονέστερα καὶ εὐχρηστα ἀντὶ αὐτῶν.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΕΩΣ ΑΥΤΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ Πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

49. Προτίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄλλον σημαίνει τίθεται ἀριθμὸς πλησίον εἰς ἄλλον καὶ ἐνόνονται οὕτως αἱ μονάδες τοῦ ἐνὸς μὲ τὰς τοῦ ἄλλου· ἡ δὲ πράξις, ἣτις γίνεται ἐνῷ προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄλλον, λέγεται πρόσθεσις. Ἀφοῦ δὲ γείνη ἡ πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄλλον, προκύπτει τρίτος ἀριθμὸς ἔχων τόσας μονάδας, ὅσαι εἶναι εἰς τὸν ἕνα καὶ εἰς τὸν ἄλλον χωριστά. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν δύο καὶ κεφάλαιον.

Σημ. α'. Ἡ λέξις κεφάλαιον εἰμφορεῖ νὰ σημαίνει γενικώτερον ἀριθμὸν ἔχοντα τόσας μονάδας ὅσας ἔχουσι χωριστὰ δύο ἄλλοι ἢ καὶ πλείότεροι (ιδεὶ 56), εἴτε προηγήθῃ πρόσθεσις εἴτε καὶ ὄχι.

Σημ. β'. Τινὲς ὀνομάζουσι τοὺς εἰς πρόσθεσιν δύο ἀριθμοὺς προσθετέους, ἐνῷ εἰς τὸν ἕνα, τὸν μέλλοντα νὰ προστεθῇ, ἀρμόζει τὸ ὄνομα τοῦτο, ὁ δὲ ἄλλος, εἰς τὸν ὁποῖον μέλλει νὰ προστεθῇ ὁ προσθετέος, ἀρμόζει νὰ λέγῃται θετέος.

Σημ. Πολλάκις ἀντὶ προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄλλον λέγουσι προστίθενται οἱ δύο ἀριθμοί.

50. Ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπ' ἄλλον σημαίνει ἐκβάλλονται ἀπὸ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τόσαι μονάδες, ὅσαι εἶναι εἰς τὸν πρῶτον· ἡ δὲ πράξις, ἡ γινομένη ἐνῷ ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπ' ἄλλον, λέγεται ἀφαιρέσις. Ἀφοῦ δὲ γείνη ἡ ἀφαιρέσις ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλον, προκύπτει τρίτος ἀριθμὸς ἔχων τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ μεγαλύτερος περιττοτέρως ἀπὸ τὸν μικρότερον, ἢ οὗτος

ὀλιγωτέρως ἀπ' ἐκεῖνον. Ὁ τρίτος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται ὑπολοιπὸν τῆς ἀφαιρέσεως ἢ τῶν δύο ἀριθμῶν, ἔτι δὲ καὶ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέρου ὑπὲρ τὸν μικρότερον εἰς μερικωτέραν σημασίαν.

Σημ. α'. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς λέγεται καὶ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅταν σημαίνῃ ἀρίστως κατὰ πόσας μονάδας διαφέρει ὁ εἰς τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ, εἴτε προηγῆθῃ ἀφαιρέσις εἴτε καὶ ὄχι.

Σημ. β'. Ἐνότε λέγουσι καὶ ἐδῶ ἀντὶ τοῦ ἀφαιρέται ἀριθμὸς ἀπ' ἄλλον ἀφαιροῦνται οἱ δύο ἀριθμοί.

Τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ἀπὸ τὸν ὁποῖον πρόκειται ν' ἀφαιρῶμεν, ὀνομάζομεν ἀφαιρετέον, τὸν δὲ μικρότερον, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας πρέπει ν' ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, ἀφαιρέτην (α).

51. Πράξεις ἀριθμητικαί, ἥτοι γινόμεναι ἐπὶ ἀριθμῶν, εἶναι κυρίως μόναι αἱ προειρημέναι δύο, διότι τοῦτο μόνον δύναται νὰ γείνη εἰς ἀριθμὸν ὁποῖονδήποτε, ἢ νὰ προσθέτωνται εἰς αὐτὸν μονάδες ὅσαι εἶναι εἰς ἄλλον ἀριθμὸν, ἢ ν' ἀφαιρῶνται ἀπ' αὐτόν. Εἶναι δὲ ἀντίθετος ἡ ἀφαίρεσις τῆς προσθέσεως, διότι διὰ ταύτης μὲν αὐξάνεται ἀριθμὸς, δι' ἐκείνης δὲ ἐλαττοῦται ἀριθμὸς καθ' ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος. Αἱ δὲ λοιπαί, τὰς ὁποίας θέλομεν εὐθὺς ἰδεῖ ἢ κατωτέρω, καὶ διὰ τῶν ὁποίων εὐρίσκονται ἀριθμοὶ ἔχοντες διαφόρους σχέσεις πρὸς ἄλλους γνωστούς ἀριθμούς, ἐκτελοῦνται διὰ προσθέσεως ἢ διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

52. Αριθμὸς ἀκέραιος γίνεταί ἐκ τῆς ἀρχικῆς μονάδος του, ἐὰν προστεθῇ ἡ μονὰς εἰς ἐαυτήν, ἔπειτα προστεθῇ εἰς τὸν δύο, ἔπειτα προστεθῇ εἰς τὸν τρία, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Κλασματικὸς

(α). Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ἄλλος ἄλλως ὀνομάζει. Νομίζω ὅτι εἶναι ἀραιοδιώτερα τὰ ὀνόματα ἀφαιρετέος καὶ ἀφαιρέτης, καὶ διότι εἶναι τῆς αὐτῆς ῥίζης μὲ τὸ ἀφαίρεσις, καὶ διότι σημαίνουναι καλλίτερα τὸ πρᾶγμα· ἐπειδὴ ἀφαιρετέος κατὰ τὴν παθητικὴν σημασίαν τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀφαιροῦμαι σημαίνει κυρίως ἐκεῖνον ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιρεῖται τι, ἀφαιρέτης δὲ σημαίνει τὸν δεικνύοντα τὰς μονάδας ὅσαι πρέπει ν' ἀφαιρεθῶσιν, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ διαιρέτης. Ἀλλὰ καὶ ταῦτα διὲν ἀφαιροῦσι πᾶσαν δυσκολίαν.

δὲ ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀρχικῆς μονάδος του, ἐὰν πρῶτον εὔρεθῇ ὅπως δῆποτε (36) πολλοστὸν τι μέρος αὐτῆς, καὶ ἔπειτα ἐκ ταύτης τῆς κλασματικῆς μονάδος δι' ἐπανειλημμένης προσθέσεως γείνη ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς, ὡς ἀκέραιός τις ἐκ τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Ἀλλὰ πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς ἓν, ὡς μονάς, καὶ εἰς τὸ πρῶτον μέρος εἶδομεν ἤδη ὅτι ὁ δέκα, ὁ ἑκατὸν κτλ. νοοῦνται ὡς μονάδες.

Ἐὰν λοιπὸν ἀριθμὸς τις, οἷον ὁ 7 ἢ ὁ $\frac{7}{3}$, νοηθῇ ὡς μονάς, καὶ ἐπ' αὐτοῦ γείνη ἡ αὐτὴ προειρημένη πρᾶξις, καθ' ἣν γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἄλλος ἀριθμὸς, οἷον ὁ 4 ἢ ὁ $\frac{2}{3}$, θέλει προκύβει τρίτος ἀριθμὸς, ὅστις θέλει εἶσθαι τοιοῦτος πρὸς τὸν 7 ἢ τὸν $\frac{7}{3}$, ὅποιος εἶναι ὁ 4 ἢ ὁ $\frac{2}{3}$ πρὸς τὴν μονάδα.

Γενικῶς, ἡ πρᾶξις, καθ' ἣν γίνεται ἀριθμὸς τις δεδομένου ἐκ τῆς μονάδος, γινόμενη ἐπὶ ἄλλου δεδομένου ἀριθμοῦ, ὀνομάζεται *πολλαπλασιασμός* ἢ *πολλαπλασιασμός*. καὶ *πολλαπλασιάζεται* ἀριθμὸς ἐπ' ἄλλον σημαίνει γίνεται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἡ αὐτὴ πρᾶξις, καθ' ἣν γίνεται ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος. Ὁ δὲ ἐκ τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον προκύπτων τρίτος ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε τοιοῦτος πρὸς τὸν πρῶτον, τὸν *πολλαπλασιαζόμενον*, ὅποιος εἶναι ὁ δεύτερος πρὸς τὴν μονάδα.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ *πολλαπλασιασθῇ*, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*. ὁ δὲ δεύτερος, ἐπὶ τὸν ὅποιον μέλλει νὰ *πολλαπλασιασθῇ* ὁ πρῶτος, ὀνομάζεται *πολλαπλασιαστής*. οἱ δὲ δύο ὁμοῦ λέγονται *κοινῶς παράγοντες*. ὁ δὲ τρίτος ὁ προκύπτων ἐκ τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ*, *γινόμενον*, καὶ ἔτι γινόμενον τοῦ *πολλαπλασιαστέου* ἐπὶ τὸν *πολλαπλασιαστήν* ἢ τοῦ *πολλαπλασιαστέου* καὶ *πολλαπλασιαστοῦ*, ἢ γινόμενον τῶν *παράγοντων* του.

Σημ. α'. Καὶ ἐδῶ λέγουσι *πολλαπλασιάζονται* οἱ δύο ἀριθμοὶ ἐπὶ τοῦ *πολλαπλασιάζεται* ὁ εἰς ἐπὶ τὸν ἄλλον.

Σημ. β'. Ἡ κοινὴ σημασία τοῦ *πολλαπλασιάζω* ἀρμόζει μὲν ὅταν ὁ *πολλαπλασιαστής* ᾖ ἀκέραιος, ἀλλ' ὅχι καὶ ὅταν ᾖ κλασματικός.

53. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 35 εἶδομεν ὅτι ἡ μονὰς εἶναι πολλοστὸν τι μέρος παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἄλλου ἄλλο, εἰς δὲ τὸν 43 ὅτι εἶναι ἴση μὲ ἀριθμὸν τινα πολλοστῶν κλασματικοῦ ὁποιοῦνδήποτε ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 6 ἡ μονὰς εἶναι τὸ ἕκτον, τοῦ 9 τὸ ἑννατον — τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$, τοῦ $\frac{4}{9}$ τὰ $\frac{9}{4}$ κτλ.

Ἀλλὰ καὶ ἀριθμὸς τις ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς εἰμπορεῖ νὰ ᾖναι πολλοστὸν τι μέρος ἄλλου ἀριθμοῦ, ἢ νὰ ᾖναι ἴσος μὲ ἀριθμὸν τινα πολλοστῶν ἄλλου ἀριθμοῦ. Π. χ. ὁ 4 εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 12, ὡς ἡ 1 εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 3, διότι 4 καὶ 4 καὶ 4 ἀποτελοῦσι 12, ὡς 1 καὶ 1 καὶ 1 κάμνουσι 3. Ὡς αὐτῶς ὁ 12 εἶναι $\frac{4}{3}$ τοῦ 9, ὡς ἡ μονὰς εἶναι $\frac{4}{3}$ τοῦ $\frac{3}{4}$, διότι ὁ 12 εἶναι τετράκις 3, ὁ δὲ 3 εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 9.

Ὅταν δὲ ᾖναι γνωστὸν ὅτι ἀριθμὸς ἄγνωστος εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν ἄλλου γνωστοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 15, ὁποῖον πολλοστὸν π. χ. τοῦ 5 εἶναι ἡ μονὰς, ἢ ὅτι εἶναι τοιοῦτος ἀριθμὸς πολλοστῶν τοῦ 15, ὁποῖος ἀριθμὸς πολλοστῶν τοῦ $\frac{4}{3}$ εἶναι ἡ μονὰς, καὶ ζητῆται ὁ ἄγνωστος αὐτὸς ἀριθμὸς, πρέπει νὰ γείνηται πρᾶξις τις πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ· ἀλλ' ἡ πρᾶξις αὕτη, ὡς συνθετωτέρα, δὲν εἶναι εὐκόλῳ νὰ προσδιορισθῇ ἐδῶ, ὡς ἐπροσδιορίσθησαν αἱ προηγούμεναι, ἀλλὰ θέλομεν τὴν ἰδεῖ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον εἰς τί συνίσταται.

Ἐδῶ λέγομεν μόνον ὅτι εἶναι πρᾶξις τις, καθ' ἣν εὐρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ᾖναι τοιοῦτος πρὸς δεδομένον ἀριθμὸν, ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς πρὸς ἄλλον δεδομένον ἀριθμὸν, καὶ ὀνομάζεται *διαίρεσις*· καὶ διαιρεῖται ἀριθμὸς δι' ἄλλον σημαίνει γίνεται πρᾶξις, καθ' ἣν εὐρίσκεται ἀριθμὸς τοιοῦτος πρὸς τὸν πρῶτον, ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν δεύτερον. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ὁ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι πολλοστὸν τοῦ πρώτου, ἐὰν ὁ δεύτερος ᾖναι ἀκέραιος, ἢ ἀριθμὸς τις πολλοστῶν τοῦ πρώτου, ἐὰν ὁ δεύτερος ᾖναι κλασματικὸς.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ,

ἤτοι τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὑρεθῇ πολλοστόν τι μέρος κτλ, ὀνομάζεται *διαιρετέος*· ὁ δὲ ἄλλος, διὰ τοῦ ὁποίου μέλλει νὰ διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος, λέγεται *διαιρέτης*· ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως, *πηλίκον*, καὶ ἔτι *πηλίκον* τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ *πηλίκον* τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ *πηλίκον* τῶν δύο ἀριθμῶν.

Σημ. α'. Λέγουσι καὶ διαίρουσιν εἰς δύο ἀριθμοὶ ἀντὶ τοῦ διαιρεῖται ὁ εἰς διὰ τοῦ ἄλλου, ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου.

Σημ. β'. Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ ὅτι δὲν ἀρμόζει εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἢ κοινὴ σημασίαν τοῦ διαίρω, διαίρεσις κτλ, καὶ τοῦ πηλίκον. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι καθιερωμένοι ἤδη αἱ λέξεις, τὰς μεταχειρίζομεθα, νοῶντες ὅμως δι' αὐτῶν ὅ,τι ἤδη εἶπομεν καὶ θέλομεν ἰδεῖ ἐφεξῆς.

54. Αἱ δύο τελευταῖαι πράξεις, τὰς ὁποίας θέλομεν ἰδεῖ μετὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν πῶς ἐκτελοῦνται, εἰμποροῦν νὰ θεωρῶνται ὡς ἀντίθετοι κατὰ τοῦτο, ὅτι διὰ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὐρίσκεται ἀριθμὸς τοιοῦτος πρὸς τὸν ἕνα δεδομένον, ὅποιος εἶναι ὁ ἄλλος δεδομένος πρὸς τὴν μονάδα, διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται ἀριθμὸς τοιοῦτος πρὸς τὸν ἕνα δεδομένον, ὅποια εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἄλλον δεδομένον, καὶ ὅχι ὁ ἄλλος δεδομένος πρὸς τὴν μονάδα.

Περὶ Προσθέσεως ἀκεραίων.

55. Προστίθεται ἀριθμὸς μονοψήφιος εἰς ἄλλον μονοψήφιον ἢ καὶ πολυψήφιον, ἐὰν προστεθῇ εἰς αὐτὸν πρῶτον μία τῶν μονάδων του, ἔπειτα ἄλλη, ἔπειτα ἄλλη ἕως εἰς τὴν τελευταίαν, καὶ ἐνταυτῷ ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοί.

Οὕτω προστίθεται ὁ 5 εἰς τὸν 6, ἐὰν εἴπωμεν 6 καὶ μία τῶν μονάδων τοῦ 5 7, καὶ ἄλλη μία 8, καὶ ἄλλη 9, καὶ ἄλλη 10, καὶ ἡ τελευταία 11. Ἡξέυρομεν λοιπὸν τώρα ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ 6 καὶ 5 εἶναι 11, ἢ, ὡς λέγουσιν, 6 καὶ 5 κάμνουσιν 11. Οὕτω δὲ πράττοντες πολλάκις γυμναζόμεθα τόσον, ὥστε

εὐρίσκειν ἔπειτα τὸ ἄθροισμα ἀμέσως, χωρὶς νὰ προσθέτωμεν ἀπὸ μίαν τὰς μονάδας τοῦ προσθετέου.

56. Οὕτω γίνεται ἡ πρόθεσις καὶ πολλῶν μονοψήφιων ἀριθμῶν. Ἐὰν ζητῇται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἔχη τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουσιν οἱ 5, 7, 8, 9, ἤτοι τὸ ἄθροισμά των, πρῶτον προστίθεται ὁ 7 εἰς τὸν 5, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμά των 12 ὁ 8, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμά των 20 ὁ 9· ὁ δὲ 29 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Ἐδῶ ἐγένεον πολλὰι προσθέσεις, καὶ τόσαι, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ παρὰ μίαν, ἤγουν τρεῖς, ἐνθ' οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τέσσαρες. Τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην τοιαύτην περίπτωσιν.

Σημ. α'. Ὁ 7, 8 καὶ 9 εἶναι προσθετέοι, ὁ δὲ 5 θετέρος. Ἐὰν δὲ ἐτίθετο πρῶτον ὁ 8 καὶ ἐπροστίθεντο οἱ ἄλλοι, ἄθροισμα ἔθελεν εὐρεθῆ πάλιν ὁ 29· καὶ ἄλλως δ' ἂν ἐπροστίθεντο, ἔθελεν εὐρεθῆ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν ᾖσαν δύο οἱ ἀριθμοί.

Σημ. β'. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, διὰ νὰ γείνη ἡ πρόσθεσις μονοψήφιου εἰς ἄλλον ἀριθμὸν ὡς ἤδη εἴπομεν, ἀνάγκη αἱ προστιθέμεναι μονάδες νὰ ᾖσαι ἴσαι (ἢ ὅμοιοι μόνον ἐνίοτε) μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον προστίθενται. Ἐπειδὴ εἶναι ὁρὸν ὅτι 6 μονάδες καὶ μία μονά· συμποσοῦσιν 7 μονάδας, ἢ 6 δεκάδες καὶ μία δεκά· κάμνουσι 7 δεκάδας· ἀλλὰ 6 μονάδες καὶ 1 δεκά· δὲν συμποσοῦσιν 7 μονάδας ἢ 7 δεκάδας, ἀλλὰ 16 μονάδας, κτλ. Ὡστε οἱ προστιθέμενοι μονοψήφιοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ᾖσαι ἢ μονάδες ὅλῃ, ἢ δεκάδες ὅλῃ κτλ., καὶ τότε γίνεται ἡ πρόσθεσις, ὡς ἤδη εἴπομεν.

Διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἐξῆς, ὅταν τύχη νὰ προσθέτωνται 10, 20, 30 κτλ. μονάδες εἰς δεκάδας, πρῶτον πρέπει νὰ τρέπωνται εἰς 1, 2, 3 κτλ. δεκάδας, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέτωνται εἰς τὰς δεκάδας. Τὸ αὐτὸ τοῦτο πρέπει νὰ γίνηται καὶ ὅταν τύχη νὰ προσθέτωνται 10, 20, 30 κτλ. δεκάδες εἰς ἑκατοντάδας, κτλ. Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ᾖσαι χρεια νὰ προσθέτωνται 1, 2, 3 κτλ. δεκάδες εἰς μονάδας, πρῶτον πρέπει νὰ τρέπωνται εἰς 10, 20, 30 κτλ. μονάδας, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέτωνται οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

57. Πολυψήφιος δ' ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον πολυψήφιον ὅχι ὡς οἱ μονοψήφιοι, διότι τοιαύτη πρόσθεσις ἔθελεν εἶσθαι καὶ ἐπίπονος καὶ δύσκολος. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ πολυψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι σύνθετοι ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ., ἐὰν προσθεθῶσιν αἱ μονάδες των χωριστὰ, αἱ δεκάδες των χωριστὰ, αἱ ἑκατοντάδες των ὡσαύτως κτλ., οὕτω θέλου-

σιν εἰρεθῇ τόσα μερικὰ ἀθροίσματα, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἔχων τὰ περισσότερα ψηφία ἀριθμός· καὶ ἂν ἐνωθῶσιν ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ ἀθροίσματα εἰς ἓνα ἀριθμὸν, εἶναι φανερόν ὅτι οὗτος θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον ἀθροῖσμα τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω δὲ ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν καταντᾷ εὐκολωτάτῃ.

Πρὸς εὐκολίαν δὲ περισσοτέραν εἰς τὴν προᾶξιν γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἰς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥς τε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ ᾔναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἐξῆς παραδείγματα· ἔπειτα σύρεται ὑποκάτω γραμμὴ, καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφεται τὸ ἀθροῖσμα.

α'. Ἀς προστεθῇ ὁ 2154 εἰς τὸν 4632.

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἀντικρὺ φαίνονται,	4632
λέγομεν 4 καὶ 2 6, καὶ γράφομεν 6 ὑπὸ τὰς μονά-	2154
δας· ἔπειτα 5 καὶ 3 8, καὶ γράφομεν 8 ὑπὸ τὰς	<u>6786</u>
δεκάδας· ἔπειτα 1 καὶ 6 7, καὶ γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς ἐκα-	
τοντάδας· τελευταῖον 2 καὶ 4 6, καὶ τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς χι-	
λιάδας.	

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ὅλα εἶναι μικρότερα τοῦ 10, καὶ, ὡς εἶναι γραμμένα, ἀποτελοῦσιν ἓνα ἀριθμὸν, τὸν 6786, οὗτος δὲ ἔχει καὶ μονάδας καὶ δεκάδας καὶ ἐκατοντάδας καὶ χιλιάδας, ὅσας ἔχουσιν οἱ δύο ἀριθμοὶ 4632 καὶ 2154, διὰ τοῦτο ὁ 6786 εἶναι τὸ ἀθροισμὰ των.

β'. Ἀς προστεθῶσιν οἱ 594 καὶ 8649 καὶ 356 καὶ 6438.

Ἀφοῦ γραφθῶσι καὶ οὗτοι, ὡς ἤδη εἶπομεν,	6438
καὶ ὁποῖος τύχη πρῶτος, δεύτερος κτλ., λέγο-	594
μεν 8 καὶ 4 12, καὶ 9 21, καὶ 6 27· γράφο-	8649
μεν τὰς 7 μονάδας μόνον ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς	<u>356</u>
δὲ 20 μονάδας ἤτοι 2 δεκάδας προσθέτομεν	16037
εἰς τὰς δεκάδας τῶν ἀριθμῶν λέγοντες 2 καὶ 3 5, καὶ 9	
14, καὶ 4 18, καὶ 5 23· γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας μόνον 3,	

τὰς δὲ 20 δεκάδας ἤτοι 2 ἑκατοντάδας προσθέτομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας τῶν ἀριθμῶν λέγοντες 2 καὶ 4 6, καὶ 5 11, καὶ 6 17, καὶ 3 20· γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας 0, τὰς δὲ 20 ἑκατοντάδας ἤτοι 2 χιλιάδας προσθέτομεν εἰς τὰς χιλιάδας τῶν ἀριθμῶν λέγοντες 2 καὶ 6 8, καὶ 8 16, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας ὁλόκληρον, διότι δὲν ὑπάρχουσιν ἄλλα εἰς πρόσθεσιν.

Ἐδῶ τὰ μερικὰ ἄθροίσματα εἶναι 14^{χιλ.}, 18^{ἐκ.}, 21^{δεκ.}, 27^{μον.}, ὅλα μεγαλύτερα τοῦ 9, καὶ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἐνωθῶσιν εἰς ἓνα ἀριθμὸν γραφόμενα τὸ ἐν ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἀλλ' ἐὰν αἱ 2 δεκάδες τῶν 27^{μον.} προστεθῶσιν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν 21^{δεκ.}, καὶ τούτων πάλιν αἱ 2^{ἐκ.} εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν 18^{ἐκ.} καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐκάμαμεν ἀνωτέρω. Ὁ δὲ οὕτως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 16035, ὡς ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων 14^{χιλ.}, 18^{ἐκ.}, 21^{δεκ.}, 27^{μον.}, φανερόν ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν.

58. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐνῶ εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ὅπου ὅλα τὰ μερικὰ ἄθροίσματα εἶναι μικρότερα τοῦ 10, εἶναι ἀδιάφορον εἴτε ἐξ ἀριστερῶν ἀρχίζει τις τὴν πρόσθεσιν εἴτε ἐκ δεξιῶν, εἰς τὸ δεύτερον πρέπει ν' ἀρχίζῃ πάντοτε ἐκ δεξιῶν· διότι μέρος μόνον τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων γράφεται, μέρος δὲ προστίθεται εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τοῦτο δὲ γίνεται εὐκολώτερον ἐὰν ἀρχίζῃ τις ἐκ δεξιῶν τὴν πρόσθεσιν. Ἀλλέως, θέλει γράφει καὶ σβύνει συχνὰ τὰ γραμμένα, διὰ νὰ γράφῃ ἄλλα ψηφία.

59. Γενικῶς, ἡ πρόσθεσις πολυψηφίων ἀριθμῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἐκτελεῖται οὕτως·

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἰς ὑπὲρ τὸν ἄλλον οὕτως,

ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ ᾔναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑπ' αὐτοὺς γραφθῇ γράμμη, προστίθενται πρῶτον αἱ μονάδες τῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμὰ τῶν ᾔναι μικρότερον τοῦ 10, γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας· ἂν δὲ ᾔναι μεγαλύτερον τοῦ 9, γράφονται ὑπὸ τὰς μονάδας μόνον αἱ μονάδες του, αἱ δὲ δεκάδες προσθέτονται εἰς τὰς δεκάδας τῶν ἀμειψῶν. Τὸ αὐτὸ δὲ τοῦτο ἐπαραλαμβάνεται καὶ εἰς τὰς δεκάδας καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας μέχρι τῶν ἀριστερῶν μονάδων.

Ὁ οὕτω δ' εὐρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἴπῃαι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

			8743
	27843	35082	988
6987	57986	9507	7639
2598	3257	60430	9287
9585	89086	105019	26657

Περὶ Ἀφαιρέσεως ἀκεραίων.

60. Ἀφαιρεῖται μονοψήφιος ἀριθμὸς ἀπ' ἄλλον μονοψήφιον, ἂν ἀπὸ τοῦτον, τὸν ἀφαιρετέον, ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ μίαν τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ ἀφαιρέτης.

Οὕτως ἀφαιρεῖται ὁ 4 ἀπὸ τὸν 9, ἐὰν εἴπωμεν, 1 τῶν 4 μονάδων τοῦ ἀφαιρέτου ἀπὸ 9 8, 1 ἀπὸ 8 7, 1 ἀπὸ 7 6, τελευταῖον 1 ἀπὸ 6 5. Πξεύρομεν λοιπὸν τώρα ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 9 ὑπὲρ τὸν 4 εἶναι 5, ἢ ὅτι 4 ἀπὸ 9 5. Οὕτω δὲ πράττοντες πολλάκις γυμναζόμεθα τόσον, ὥστε εὐρίσκωμεν ἔπειτα τὸ ὑπόλοιπον ἀμέσως, χωρὶς ν' ἀφαιρῶμεν ἀπὸ μίαν τὰς μονάδας, οἷον 6 ἀπὸ 9 3—3 ἀπὸ 8 5, κτλ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 ὑπερέχει τὸν 4 κατὰ 5, εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν προστεθῇ ὁ 5 εἰς τὸν 4, θέλει προκύψῃ ἄθροισμα ὁ 9. Γενικῶς δὲ, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τοσοῦτον, ὥστε προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρέτην δίδει ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρετέον.

Εἶναι δὲ ὠφέλιμον εἰς τὰς ἐξῆς ἀφαιρέσεις νὰ ᾖναι γυμνασμένος τις ν' ἀφαιρῇ εὐκόλως μονοψήφιον ἀριθμὸν, ὅχι μόνον ἀπ' ἄλλον μονοψήφιον, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ διψήφιον ἔχοντα μίαν δεκάδα καὶ μονάδας ὀλιγωτέρας τῶν τοῦ μονοψηφίου ἀφαιρέτου, οἷον 6 ἀπὸ 10, 11, 12, 13, 14, 15 — 8 ἀπὸ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, κτλ.

Σημ. α'. Ἡ ὑπερρχὴ τοῦ 9 ὑπὲρ τὸν 4 εἰςμπορεῖ νὰ εὐρεθῇ καὶ διὰ προσθέσεως, ἥγουν ἂν προστεθῶσι μονάδες εἰς τὸν 4 ἕως νὰ γείνη ἴσος μὲ τὸν 9, καὶ ἀριθμηθῶσιν αἱ προστιθέμεναι μονάδες.

Σημ. β'. Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ, ὡς καὶ εἰς τὴν σημ. β'. τοῦ 56 ἀριθμοῦ, ὅτι ἀπαιτεῖται αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρέτου καὶ ἀφαιρετέου νὰ ᾖναι ἴσαι (ἢ ὅμοιαι εἰς τινὰς συγκεκριμένους), ἥγουν ἢ μονάδες, ἢ δεκάδες, ἢ ἑκατοντάδες, κτλ. καὶ τότε γίνεται ἡ ἀφαίρεσις ὡς ἥδη εἴπωμεν· εἰδεμένη, πρέπει πρῶτον νὰ γείνωσιν ὁμώνυμοι ὁ ἀφαιρετέος καὶ ὁ ἀφαιρέτης, καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις.

61. Πολυψήφιος δ' ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον πολυψήφιον ὅχι ὡς οἱ μονοψήφιοι διὰ τὸ δύσκολον καὶ ἐπίπονον. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο εἶναι σύνθετοι ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ, εἰδὴν ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες τῶν χωριστὰ, αἱ δεκάδες χωριστὰ, αἱ ἑκατοντάδες ὡσαύτως κτλ, οὕτω θέλουσιν εὐρεθῇ τόσα μερικὰ ὑπόλοιπα, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀφαιρετέος, τὰ ὅποια γραμμένα τὸ ἐν ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου θέλουσιν ἀποτελεῖ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ἥτοι τὸ ὅλον ὑπόλοιπον. Οὕτω δὲ ἡ ἀφαίρεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν καταντᾷ εὐκολωτάτῃ.

Εἰς δὲ τὴν πρᾶξιν ὁ ἀφαιρέτης γράφεται ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον, τὰ δὲ ἄλλα ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν.

α'. Ἄς ἀφαιρεθῇ ὁ 7234 ἀπὸ τὸν 9548.

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἐδῶ φαίνονται,	9548
λέγομεν 4 ἀπὸ 8 4, καὶ γράφομεν 4 ὑπὸ τὰς	7234
μονάδας· ἔπειτα 3 ἀπὸ 4 1, καὶ γράφομεν 1 ὑπὸ	2314
τὰς δεκάδας· ἔπειτα 2 ἀπὸ 5 3, καὶ γράφομεν 3 ὑπὸ τὰς	
ἑκατοντάδας· τελευταῖον 7 ἀπὸ 9 2, καὶ τὸ γράφομεν ὑπὸ	
τὰς χιλιάδας.	

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς καὶ τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων κτλ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερος

ἀπὸ τὸν ὁμώνυμόν του τὸν τοῦ ἀφαιρέτου, αἱ μερικαὶ ἀφαιρέσεις ἐκτελοῦνται χωρὶς ἐμπόδιον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα, ὡς εἶναι γραμμένα, ἀποτελοῦσιν ἓνα ἀριθμὸν, τὸν 2314, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μονάδων τοῦ 9548 καὶ 7234, αἱ δεκάδες ἡ τῶν δεκάδων κτλ, διὰ τοῦτο ὁ 2314 εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἥτοι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν.

Β'. Ἄς ἀφαιρεθῇ ὁ 4968 ἀπὸ τὸν 6736.

Ἀφοῦ γραφθῶσι καὶ οὗτοι, ὡς ἐδῶ φαίνονται,	6736
παρὰτηροῦμεν ὅτι αἱ 8 μονάδες τοῦ ἀφαιρέτου,	4968
ὡς περισσότεραι τῶν 6 μονάδων τοῦ ἀφαιρέ-	1768

τέου, δὲν εἶναι δυνατόν ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτάς ὅλαι. Διὰ τὴν κατὰσταθῇ δὲ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις αὕτη, προσθέτομεν εἰς τὰς 6 μονάδας τοῦ ἀφαιρέτου μίαν τῶν 3 δεκάδων τοῦ ἥτοι 10 μονάδας (56 σημ. β'), καὶ οὕτως αἱ μὲν δεκάδες τοῦ μένουσι 2, αἱ δὲ μονάδες τοῦ γίνονται 16· τώρα 8 ἀπὸ 16 8, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας. Πάλιν, ἐπειδὴ καὶ αἱ 6 δεκάδες τοῦ ἀφαιρέτου, ὡς περισσότεραι τῶν 2 δεκάδων τοῦ ἀφαιρέτου, δὲν εἶναι δυνατόν ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτάς ὅλαι, διὰ τὴν γείνη δυνατόν τοῦτο, προσθέτομεν εἰς τὰς 2 δεκάδας τοῦ ἀφαιρέτου μίαν τῶν 7 ἑκατοντάδων τοῦ ἥτοι 10 δεκάδας, καὶ οὕτως αἱ μὲν ἑκατοντάδες τοῦ μένουσιν 6, αἱ δὲ δεκάδες τοῦ γίνονται 12· τώρα 6 ἀπὸ 12 6, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας τοῦ. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ αἱ 9 ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρέτου δὲν εἶναι δυνατόν ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς 6 τοῦ ἀφαιρέτου, προσθέτομεν εἰς αὐτάς μίαν τῶν 6 χιλιάδων τοῦ ἥτοι 10 ἑκατοντάδας, καὶ ἔπειτα λέγομεν 9 ἀπὸ 16 7, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας. Τελευταίον 4 ἀπὸ 5 χιλιάδας, ὅσαι ἔμειναν, 1, τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, διὰ τὴν κατὰσταθῶσι δυνατὰ μερικὰ τινες ἀφαιρέσεις, ἐχρησίσθη τὴν προστεθῇ εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρέτου μία τῶν δεκάδων τοῦ, εἰς τὰς δεκάδας,

ἔσαι ἔμειναν, μία τῶν ἑκατοντάδων του, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διὰ δὲ τούτου ὁ ἀφαιρετέος 6736 μετεβλήθη εἰς τὸν ἴσον του 5χιλ. 16^{εξ.} 12^{δεξ.} 16^{μν.} ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἔγεινε κυρίως ἡ ἀφαίρεσις, καὶ εὗρεθῇ ὑπόλοιπον 1768. Τοῦτο δὲ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 4968 ἀπὸ τὸν 6736, ἥγουν ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Σημ. Πολλοὶ, ὅσας εἶναι χρεῖα νὰ κατασταθῇ δυνατὴ μερικὴ τις ἀφαίρεσις, ἀντὶ νὰ σμικρύνωσι κατὰ μονάδα τῆς τάξεώς του τὸ προηγούμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς ἤδη εἶπομεν, συνειθίζουσιν ν' αὐξάνωσι κατὰ τὴν αὐτὴν μονάδα τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρέτου, τὸ ὁποῖον πρέπει ν' ἀφαιρέσωσιν ἀπ' ἐκείνου, διότι καὶ οὕτως εὐρίσκεται τὸ αὐτὸ μερικὸν ὑπόλοιπον. Τοῦτο μάλιστα εἶναι προτιμότερον κατωτέρω εἰς τὴν διαίρεσιν, καὶ εἶναι καλὸν νὰ συνειθίσωσιν καὶ εἰς τὴν τοιουτότροπον ἀφαίρεσιν οἱ ἀρχάριοι.

62. Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν, ὅτι εἰς μὲν τὸ πρῶτον παράδειγμα, ὅπου ἦσαν τοῦ ἀφαιρετέου τὰ ψηφία μεγαλύτερα τῶν ὑπ' αὐτὰ τοῦ ἀφαιρέτου, εἶναι ἀδιάφορον ὅθεν ἀρχίσῃ τις τὴν ἀφαίρεσιν. Εἰς τὸ δεύτερον ὅμως, ὅπου συμβαίνει τὸ ἐναντίον, καὶ ὅπου, διὰ νὰ γείνη δυνατὴ μερικὴ τις ἀφαίρεσις, πρέπει νὰ προσθέτῃται τῶν ἀνωτέρων μονάδων μία εἰς τὰς κατωτέρας, εἶναι προτιμότερον νὰ ἐκτελῶνται πρῶτον αἱ τῶν κατωτέρων μονάδων ἀφαίρεσεις καὶ ἔπειτα τῶν ἀνωτέρων· διὰ τοῦτο πρέπει ν' ἀρχίζωμεν ἐκ δεξιῶν τὴν ἀφαίρεσιν.

63. Ἄς ἀφαιρεθῇ ὁ 247849 ἀπὸ τὸν 600504, ὅστις ἔχει
 μηδενικὰ εἰς τὸ μέσον. Ἐδῶ, διὰ νὰ γείνη δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις τῶν 9 μονάδων, πρέπει νὰ
 προστεθῶσι 10 μονάδες εἰς τὰς 4 τοῦ ἀφαι-
 ρετέου· καὶ ἐπειδὴ δὲν ἔχει δεκάδας ὁ ἀφαιρετέος, λαμβάνομεν
 μίαν τῶν 5 ἑκατοντάδων του, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 δεκάδας,
 καὶ τὰς μὲν 9 ἀφίνομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, τὴν δὲ δε-

600504

247849

352655

κάτην προσθέτομεν εἰς τὰς 4 μονάδας του, καὶ οὕτως αἱ μὲν ἑκατοντάδες του μένουσι 4, αἱ δὲ δεκάδες του γίνονται 9, αἱ δὲ μονάδες 14· τὼρα 9 ἀπὸ 14 5, καὶ τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 4 ἀπὸ 9 δεκάδας 5, καὶ τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας. Ἐπειτα, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὰς 8 ἑκατοντάδας, λαμβάνομεν μίαν τῶν 6 ἑκατοντάδων χιλιάδος τοῦ ἀφαιρετέου, ἣτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 δεκάδας χιλιάδος, ἀφίνομεν τὰς 9 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδος καὶ τὴν ἄλλην τρέπομεν εἰς 10 χιλιάδας, πάλιν ἀφίνομεν τὰς 9 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων καὶ τὴν ἄλλην προσθέτομεν εἰς τὰς 4 ἑκατοντάδας, ὅσαι ἔμειναν, καὶ οὕτως αἱ μὲν ἑκατοντάδες χιλιάδος μένουσι 5, αἱ δὲ δεκάδες καὶ μονάδες χιλιάδος γίνονται 9, αἱ δὲ ἑκατοντάδες 14· τὼρα 8 ἀπὸ 14 6, 7 ἀπὸ 9 2, 4 ἀπὸ 9 5, καὶ 2 ἀπὸ 5 3, τὰ ὅποια γράφομεν κατὰ σειρὰν εἰς τὰς θέσεις των.

64. Γενικῶς, ἡ ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλον πολυψήφιον ἐκτελεῖται οὕτως· Ἀφοῦ γραφθῇ ὁ ἀφαιρέτης ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ τάξιν τῶν μονάδων του καὶ γραμμῇ ὑπ' αὐτὸν, ἀφαιροῦνται πρῶτον αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς τοῦ ἀφαιρετέου, ἂν αὗται ᾖναι περισσότεραι, καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας· ἂν δὲ ᾖναι ὀλιγώτεραι, πρῶτον αὐξάνονται κατὰ 10, καὶ ἔπειτα γίνεται ἡ ἀφαίρεσις· ἀλλὰ τότε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἀνάγκη νὰ ροῇται ἡλαττωμένον κατὰ μίαν δεκάδα, ἂν ᾖναι σηματικόν· ἂν δὲ ᾖναι 0, τότε ροεῖται ἡλαττωμένον κατὰ μίαν ἑκατοντάδα τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ἂν ᾖναι σηματικόν, εἰς δὲ τὴν θέσιν τοῦ 0 ροοῦνται 9 δεκάδες, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐπειτ' ἀφαιροῦνται αἱ δεκάδες ἀπὸ τὰς δεκάδας κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, αἱ ἑκατοντάδες ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ δὲ ἐκ τριζύτης ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

69548	83704	35940	70400
4729	5876	20406	48549
64819	77828	15534	21851

65. Ἀφαιροῦνται πολλοὶ ἀριθμοὶ ἀπὸ ἑνα διττῶς, ἥτοι ἀφαιρεῖται εἰς τῶν πολλῶν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, ἔπειτα ἄλλος ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ ἄλλος ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευτηρίου· ἢ, τὸ προτιμότερον, προστίθενται πρῶτον ὅλοι οἱ μέλλοντες ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀριθμοί, καὶ ἔπειτα τὸ ἄθροισμὰ των ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον.

Σημ. Ὁ θέλων νὰ γυμνασθῇ ἀπὸ ταύτης τῆς στιγμῆς εἰς λύσιν προβλημάτων, εὕρισκε πολλότατα εἰς τὸ τέλος τοῦ β'. κεφαλαίου.

*Περὶ Δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ
τῆς ἀφαιρέσεως.*

66. Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως ὀνομάζεται πρᾶξις, ἣτις γίνεται πρὸς ἐπιθεβαίωσιν ἂν ἢ πρόσθεσις ἢ ἢ ἀφαιρέσεις ἐγείνεν ἀλανθᾶστως, καὶ ἐπομένως ἂν ὁ εὕρημένος διὰ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἀριθμὸς ᾔνοι ὁ ζητούμενος.

Καὶ τῆς μὲν προσθέσεως ἢ δοκιμὴ γίνεται οὕτως· οἱ ἥδη προστεθέντες ἀριθμοὶ προσθέτονται πάλιν, ἀλλ' ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ, ἐνῶ δ' εὕρισκεται ἕκαστον μερικὸν ἄθροισμα ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὰς τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας τοῦ πρότερον εὑρεθέντος ἀθροίσματος, καὶ τὸ ὑπόλοιπον προστίθεται εἰς τὰς ἀμέσως κατωτέρας μονάδας τούτου τοῦ ἀθροίσματος. Καὶ ἐπειδὴ οὕτως εὕρισκεται πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ πρότερον εὑρεθὲν ἄθροισμα, ἂν εἰς τὸ τέλος εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0, σημεῖον ὅτι τὰ κατὰ τοὺς δύο τρόπους εὑρεθέντα ἀθροίσματα εἶναι ἴσα· ἐκ δὲ τούτου ἐπιβεβαιοῦται τις ὅτι ἡ πρώτη πρόσθεσις ἐγείνεν ἀλανθᾶστως, καὶ ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα εἶναι σωστόν.

Π. γ. ἀφοῦ προστεθῶσιν οἱ ἀντικρὺ ἀριθμοί,	4687
κατὰ τὸν τοῦ ἀρ. 59 κανόνα, εὐρίσκεται 19492.	7913
Ἐπειτα τοὺς προσθέτομεν πάλιν ἐξ ἀριστερῶν λέγον-	568
τες 4 καὶ 7 11 καὶ 6 17 ^{κλ.} , ἀπὸ 19 ^{κλ.} 2 ^{κλ.}	6324
ἦτοι 20 ^{εκ.} καὶ 4 24 ^{εκ.} . Ἐπειτα 6 καὶ 9 15	19492
καὶ 5 20 καὶ 3 23 ^{εκ.} , ἀπὸ 24 ^{εκ.} 1 ^{εκ.} ἦτοι	24
10 ^{δεκ.} καὶ 9 19 ^{δεκ.} . Ἐπειτα πάλιν 8 καὶ 1 9	19
καὶ 6 15 καὶ 2 17 ^{δεκ.} , ἀπὸ 19 ^{δεκ.} 2 ^{δεκ.}	22
ἦτοι 20 ^{μον.} καὶ 2 22. Τελευταῖον 7 καὶ 3 10	0
καὶ 8 18 καὶ 4 22, ἀπὸ 22 0. Λοιπὸν ἡ πρόσθεσις εἶναι	
χωρὶς λάθος, καὶ ὁ 19492 εἶναι σωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσ-	
σάρων ἀριθμῶν.	

Ἡ δὲ ἀφαίρεσις δοκιμάζεται ἐὰν προστεθῇ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸν ἀφαιρέτην· καὶ ἂν εὐρεθῇ ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρετέον, ἡ ἀφαίρεσις ἔγενεν ἀλανθάστως, καὶ τὸ εὐρεθὲν ὑπόλοιπον εἶναι σωστὸν. Ἴδοὺ παράδειγμα.

$$\begin{array}{r}
 46594 \\
 28459 \\
 \hline
 18135 \\
 \hline
 46594
 \end{array}$$

Σημ. Δι' αὐτὸ τοῦτο ὅτι ἡ δοκιμὴ εἶναι πρᾶξις, καὶ ἐνίοτε δυσκολωτέρα, ἥτις ὑπόκειται καὶ αὐτὴ εἰς λάθος, δὲν εἶναι, νομίζω, τόσον ἀξιοσύστατος. Τὸ καλλίτερον εἶναι νὰ προσέχη τις ἐνῶ ἐκτελεῖ τὴν πρᾶξιν, καὶ ἂν θέλῃ, ὅς ἐπαναλάβῃ αὐτήν, τοῦλάχιστον τὴν πρόσθεσιν. Ἐξεθέσαμεν δὲ ἀνωτέρω τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως μόνον διὰ νὰ ἴδῃ τις τὴν δυσκολίαν αὐτῆς, καὶ νὰ πισθῇ ὅτι εὐρίσκει ὠφελεῖ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἐπὶ ἀκεραίους.

67. Ἐξηγήσαμεν εἰς τὸν ἀρ. 52 τί σημαίνουνσι γενικῶς αἱ λέξεις πολλαπλασιάζω, πολλαπλασιασμός, πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιαστής καὶ γινόμενον. Ἐδῶ τώρα θέλομεν ἐκθέσει εἰς τί συνίσταται ὁ πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκεραίων, καὶ πῶς ἐκτελεῖται.

Ἐπειδὴ δὲ πολλαπλασιάζω ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον γενικῶς σημαίνει κάμνω ἐπὶ τοῦ πρώτου τὴν αὐτὴν πράξιν, καθ' ἣν γίνεται ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος, καὶ ἐπειδὴ ἐδῶ ὁ δεύτερος, ἀκέραιος ὢν, γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἐὰν εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἄλλη, καὶ εἰς τὸ 2 προστεθῇ καὶ ἄλλη, καὶ οὕτω καθεξῆς, διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖ ἀκέραιος, ὁ πολλαπλασιασμός συνίσταται κυρίως εἰς τὸ νὰ προσθέτῃται ὁ πολλαπλασιαστέος εἰς αὐτὸν, ἔπειτα πάλιν νὰ προσθέτῃται εἰς τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ γείνη ἀριθμός, ὅστις νὰ σύγκληται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς σύγκλειται ὁ πολλαπλασιαστῆς ἐκ τῆς μονάδος.

Καὶ εἰ μὲν προστίθεται ἀριθμὸς τις εἰς ἑαυτὸν ἅπαξ, λέγεται ἰδίως διπλασιάζεται ὁ ἀριθμός, καὶ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὅποιον εἶναι δις ὁ ἀριθμός, διπλάσιον αὐτοῦ· εἰ δὲ προστίθεται εἰς ἑαυτὸν καὶ ἔπειτα πάλιν εἰς τὸ διπλάσιόν του, ὀνομάζεται τριπλασιάζεται ὁ ἀριθμός, καὶ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὅποιον εἶναι τρίς ὁ ἀριθμός, τριπλάσιον αὐτοῦ· ἐκ δὲ τούτων ἐννοεῖται καὶ τί σημαίνει τετραπλασιάζεται ἀριθμός καὶ τετραπλάσιον αὐτοῦ, πενταπλασιάζεται καὶ πενταπλάσιον, καὶ γενικῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμός καὶ πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ὅθεν πολλαπλασιάζεται ἀριθμός ἐπὶ 6 καὶ ἑξαπλασιάζεται αὐτός, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 20 καὶ εἰκοσαπλασιάζεται, εἶναι ἰσοδύναμοι φράσεις. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖ ἀκέραιος, τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ διὰ τοῦτο ὁμώνυμον καὶ ὁμοειδὲς αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ σημασία τοῦ πολλαπλασιάζειν ἐδῶ δὲν εἶναι τόσον γενικὴ ὅσον ἡ ἐν ἀρ. 52. Ἄρα δὲ ἡ μερικὴ εἶναι ἡ κυρία καὶ κοινὴ σημασία του.

α'. Ἐπὶ μονοψήφιον πολλαπλασιαστήν.

68. Μονοψήφιος ἀριθμός πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον μονοψήφιον δι' ἐπαπειλημένης προσθέσεως. Ὁ 8 π. χ. πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 4 ἥτοι τετραπλασιάζεται οὕτως, 8 καὶ

8 16, καὶ 8 24, καὶ 8 32. Ὁ δὲ 32, ὅστις ἔγεινεν ἐκ τοῦ 8 ὅπως ὁ 4 ἔγεινεν ἐκ τῆς μονάδος, εἶναι τετράκις 8, ἢ τετραπλάσιος τοῦ 8.

Οὕτω δὲ πράξαντες ἐπὶ ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ κατατάξαντες καὶ τοὺς παράγοντας καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν, ἐσχημάτισαν τὸν ἀκόλουθον πίνακα. Τοῦτου δὲ ἡ μὲν κορυφαία ζώνη περιέχει ὅλους τοὺς μονοψηφίους πολλαπλασιαστάς, τῶν δὲ στηλῶν ἡ μὲν ἀριστερὰ περιέχει ὅλους τοὺς μονοψηφίους πολλαπλασιαστέους, ἡ δὲ δευτέρα τὰ διπλάσια αὐτῶν, ἡ δὲ τρίτη τὰ τριπλάσια, . . . ἡ δὲ τελευταία τὰ ἐννεαπλάσια. Ὡστε τὸ τετραγωνίδιον τὸ ἀντικρύζον εἰς ἓνα τινὰ πολλαπλασιαστὸν καὶ εἰς ἓνα τινὰ πολλαπλασιαστὴν ἐμπεριέχει τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ὁ πίναξ οὗτος ὀνομάζεται Πυθαγορικὸς, διότι νομίζεται ὅτι πρῶτος ὁ Πυθαγόρας τὸν ἐμήρφωσεν.

Πυθαγορικὸς Πίναξ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἐδῶ, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάῃ τις, εὕρισκει τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 4

εἶναι ὁ εἰς τὸ τετραγωνίδιον τῆς ὀγδόης ζώνης καὶ τῆς τετάρτης στήλης κείμενος ἀριθμὸς 32, ὅστις ἀντικρύζει εἰς τὸν 8 καὶ 4. Ὡσαύτως εὐρίσκεται καὶ ἄλλων ἀριθμῶν τὸ γινόμενον.

Ὡστε, ἂν ἐκστηθίσῃ τις καλὰ τὸν πίνακα τοῦτον, ἀπαλλάττεται ἀπὸ τὸν κόπον τοῦ νὰ πολλαπλασιάσῃ μονοψηφίους ἀριθμούς, καὶ εὐκολύνεται εἰς τοὺς μετέπειτα πολλαπλασιασμούς.

Σημ. α'. Συνήθως δίδουσιν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον ἄλλο σχῆμα ἐπιτηδείωτερον πρὸς ἐκστήθισιν, καὶ τότε οἱ ἰδιόαι μας τὸν ἐνομάζουσι Προπαίδειαν (ἰδὲ εἰς τὸ τέλος).

Σημ. β'. Ὅταν μανθάνωσι τὴν Προπαίδειαν, λέγουσι σύντομα π. χ. 5 εἰ 8, ἀντὶ πεντάκις 8, ἢ 8 ἐπὶ 5. Εἰς γὰρ 5, καὶ θέλω γράφει καὶ εἰς τὸ ἐξῆς οὕτω, διότι νομίζω ὅτι ἡ φράσις ἐπήγαγεν ἐκ τῆς 5 εἰς πολλαπλασιασθεῖν ἐπὶ 8, ἢ πεντάκις εἰς πολλαπλασιασθεῖν ὁ 8. Ἰσως δὲ νὰ ᾔναι καὶ ἡ ἀντὶ αἱ, οἷον πεντάκις αἱ 8.

69. Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου βεβαιούμεθα περὶ δύο τινῶν

α'. Ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 8 τῆς ἀριστερᾶς στήλης ἐπὶ 4 τῆς κορυφαίας ζώνης, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 4 τῆς ἀριστερᾶς στήλης ἐπὶ 8 τῆς κορυφαίας ζώνης εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 32· ἢ μὲ ἄλλας λέξεις, τὸ τετραπλάσιον τοῦ 8 καὶ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ 4 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 32. Τοῦτο δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ ὅποιωνδήποτε ἄλλων δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Ὡστε, ὁπότερος δὺς μονοψηφίων ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, εὐρίσκεται τὸ αὐτὸ γινόμενον.

β'. Ὅτι, ἂν οἱ τῆς ἀριστερᾶς στήλης ἀριθμοὶ νοηθῶσιν ὅτι εἶναι δεκάδες, ἑκατοντάδες κτλ, ἔχουν ἂν μεταβληθῇ ἡ μονὰς αὐτῶν, εἰς τὰς λοιπὰς στήλας πάλιν θέλουσιν εἶσθαι τὰ διπλάσιά των, τὰ τριπλάσιά των κτλ, ἀλλὰ ὁμώνυμα μὲ τοὺς τῆς ἀριστερᾶς στήλης ἀριθμούς (67).

Ὡστε, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾔναι μονοψήφιος, τοῦ δὲ πολλαπλασιαστοῦ ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν μονάδων ᾔναι ὁ αὐτὸς, αἱ δὲ μονάδες μεταβάλλονται, τότε καὶ τοῦ γινομένου ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων εἶναι ὁ αὐτὸς, ὅστις εὐρίσκεται διὰ τοῦ πίνακος, ἀλλ' αἱ μονάδες θέλουσιν εἶσθαι ὅποιαι καὶ αἱ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

70. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ πολυψήφιος 8567 ἐπὶ 5.

Ἐπειδὴ ὁ 8567 σύγκειται ἐκ τεσσάρων ἀριθμῶν ἥτοι ἐξ 8χιλ. 5ἑκ. 6δεκ. 7μον., ἐὰν πενταπλασιασθῇ ἕκαστος τούτων, φανερόν ὅτι οὕτως πενταπλασιάζεται ὁλος ὁ 8567. Ἀφοῦ δὲ προστεθῶσι τὰ τέσσαρα πενταπλάσια ἥτοι τὰ μερικὰ γινόμενα εἰς ἄλληλα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι πενταπλάσιος τοῦ 8567.

Οἱ ἀριθμοὶ διατάττονται ὡς ἐδῶ φαίνονται, ἔπειτα 8567
λέγομεν 5 εἰ 7 35· γράφομεν 5 ὑπὸ τὰς μονάδας 5
καὶ προσθέτομεν τὰς 30μον. ἥτοι 3δεκ. εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων λέγοντες 5 εἰ 6 30 καὶ 3 33· γράφομεν πάλιν 3 ἀριστερὰ τοῦ 5, καὶ προσθέτομεν τὰς 30δεκ. ἥτοι 3ἑκ. εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων λέγοντες 5 εἰ 5 25 καὶ 3 28· γράφομεν 8 ἀριστερὰ τοῦ 3, καὶ προσθέτομεν τὰς 20ἑκ. ἢ 2χιλ. εἰς τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων λέγοντες 5 εἰ 8 40 καὶ 2 42, τὸ ὅποιον γράφομεν ὅλον ἀριστερὰ τοῦ 8, διότι δὲν εἶναι ἄλλος πολλαπλασιασμὸς. Λοιπὸν ὁ 42835 εἶναι ὁ πενταπλάσιος τοῦ 8567.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι πολυψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πρῶτον αἱ μονάδες του, ἔπειτα αἱ δεκάδες του, ἔπειτα αἱ ἑκατοντάδες του κτλ, καὶ ἐνθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα εἰς ἓνα ἀριθμὸν, ἐνθὶ εὐρίσκονται, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα.

Ἀρχίζομεν δ' ἐκ δεξιῶν τὸν πολλαπλασιασμὸν διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν, διὰ τὴν ὁποίαν καὶ τὴν πρόσθεσιν (58).

71. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ 400305, ὅστις ἔχει μηδενικὰ τινὰ τῶν ψηφίων του, ἐπὶ 9.

Λέγομεν καὶ ἐδῶ 5 εἰ 9 45· γράφοντες δὲ 400305
5 ὑπὸ τὰς μονάδας ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν 9
τὰς 40μον. ἥτοι 4δεκ. εἰς τὸ γινόμενον τῶν 3602745

δεκάδιων. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ δεκάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 0, καὶ 0 εἰς 9 0, δὲν ἔχομεν ἄλλας δεκάδας παρὰ 4 τὰς προελθούσας ἐκ τοῦ γινόμενου τῶν μονάδων· γράφομεν λοιπὸν 4 ἀριστερὰ τοῦ 5. Ἐπειτα 3 εἰς 9 27· γράφομεν καὶ τοῦτο ὅλον ἀριστερὰ τοῦ 4, διότι καὶ αἱ χιλιάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 0. Ἐπειτα 0 εἰς 9 0 δεκάδας χιλιάδος· γράφομεν 0 ἀριστερὰ τοῦ 2. Τελευταῖον 4 εἰς 9 36, τὸ ὅποιον γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 0. Ὁ δὲ 3602745 εἶναι ὁ ἐννεαπλάσιος τοῦ 400305.

72. Ἄς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 5700, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος, ἐπὶ 6. 5700

Ἐπειδὴ ὁ 5700 εἶναι 57^{ἑκατ.}, τὸ γινόμενον θέλει 6
εἶσθαι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων, καὶ ἑξαπλάσιος τῶν 34200
57^{ἑκ.}. Ἐξαπλασιάζομεν λοιπὸν τὸν 57 καὶ ἔχομεν γινόμενον 342^{ἑκ.}, ἢ ἄλλως γραμμένον, 34200. Ὡστε πολλαπλασιαστέου μὲ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ σημαντικὰ ψηφία, καὶ δεξιὰ τοῦ γινόμενου νὰ θέτῳται ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

9438	75084	46000	70004
7	8	9	6
66066	600672	414000	420024

6'. Ἐπὶ πολυψήφιον πολλαπλασιαστήν.

73. Καὶ ἐκ τοῦ Πυθαγορικοῦ πίνακος καὶ ἐκ τῶν ἄλλων προηγουμένων πολλαπλασιασμάτων γνωρίζομεν τώρα ὅτι ἀριθμοὶ τινες εἶναι, ἢ δυνατόν νὰ νοῶνται γινόμενα δύο ἄλλων ἀριθμῶν. Ὁ 42 π. χ. εἶναι γινόμενον τοῦ 6 καὶ τοῦ 7, ἥτοι ἑξαπλάσιος τοῦ 7, ἢ ἐπταπλάσιος τοῦ 6. Ὁ 42 λοιπὸν δύναται νὰ νοηθῇ ὅτι γίνεσθαι ἐκ τῆς μονάδος διττῶς, ἢ ἂν πρῶτον ἐκ τῆς μονάδος γείνη ὁ 6, καὶ ἔπειτα ὁ 6 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, ἢ ἂν πρῶτον

γείνη ἐκ τῆς μονάδος ὁ 7 καὶ ἔπειτα ὁ 7 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 6. Τὸ αὐτὸ δὲ τοῦτο ἀληθεύει λεγόμενον καὶ περὶ παντὸς ἄλλου γινομένου δύο ἀριθμῶν.

Ἐὰν λοιπὸν πρόκηται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς τις, οἷον ὁ 235, ἐπὶ 42, ἐπειδὴ ὁ 42 εἴμπορεῖ νὰ γείνη ἐκ τῆς μονάδος κατὰ τοὺς δύο εἰρημένους τρόπους, φανερόν ὅτι ὁ 235 θέλει πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 42, ἢ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 7, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 6, οὕτως·

$$\begin{array}{r} 235 \\ 6 \\ \hline 1410 \\ 7 \\ \hline 9870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 235 \\ 7 \\ \hline 1645 \\ 6 \\ \hline 9870 \end{array}$$

Γενικῶς, ἀριθμὸς ὁποιοσδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον, ὅστις νὰ ᾖ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ τὸν ἓνα τῶν δύο παραγόντων καὶ τὸ γινόμενον ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἄλλον.

74. Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ 10 ἐὰν τεθῇ 0 εἰς τὸ τέλος του.

Ὁ 473 π. χ. δεκαπλασιάζόμενος γίνεται 4730· ἐπειδὴ οὕτως αἱ 3 μονάδες του γίνονται 3 δεκάδες ἥτοι δεκαπλασιάζονται, αἱ 7 δεκάδες του γίνονται 7 ἑκατοντάδες ἥτοι δεκαπλασιάζονται, αἱ 4 ἑκατοντάδες του γίνονται 4 χιλιάδες. Ἐπειδὴ δὲ δεκαπλασιάζονται καὶ αἱ μονάδες καὶ αἱ δεκάδες καὶ αἱ ἑκατοντάδες του, φανερόν ὅτι δεκαπλασιάζεται ὅλος ὁ ἀριθμὸς.

Πολλαπλασιάζεται δ' ἀριθμὸς ἐπὶ 20, 30, . . . 90, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ 2, 3, . . . 9 καὶ τὸ γινόμενον ἔπειτα ἐπὶ 10 (73).

Ἐπὶ δὲ 100 πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς, ἐὰν τεθῶσι 00

εἰς τὰ δεξιά του. Ἐπειδὴ ὁ 100 εἶναι γινόμενον τοῦ 10 ἐπὶ 10, καὶ ὁ ἀριθμὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον πάλιν ἐπὶ 10, ἤγουν πρέπει νὰ προσλάβῃ 00 εἰς τὸ τέλος του ὁ ἀριθμὸς. Τὸ γινόμενον τοῦ 689 ἐπὶ 100 εἶναι 68900.

Ἐπὶ δὲ 200, 300, . . . 900 πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ 2, 3, . . . 9 καὶ τὸ γινόμενον ἔπειτα προσλάβῃ 00 εἰς τὸ τέλος του. Ἐπειδὴ 200, 300 κτλ εἶναι γινόμενα τοῦ 2, 3, . . . ἐπὶ 100.

Ἐκ δὲ τῶν ἤδη εἰρημένων κατὰλαμβάνει τις εὐκόλως ὅτι ἐπὶ 1000, 10000 κτλ πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς, ἐὰν προσλάβῃ 000, 0000 κτλ εἰς τὸ τέλος του, ἐπὶ δὲ 2000, 3000 κτλ ἢ 20000, 30000 κτλ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ 2, 3 κτλ καὶ ἔπειτα τεθῶσι 000, ἢ 0000 κτλ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου.

75. Τώρα ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ πολυψήφιος ἀριθμὸς ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον, οἷον ὁ 7986 ἐπὶ 869.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιαστής	7986
869 γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν ἐκ ταύτης πρῶτον	869
γείνη ὁ 9, ἔπειτα ὁ 60, ἔπειτα ὁ 800	71874
800, καὶ οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ τελευ-	60
ταῖον προστεθῶσι. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμε-	9
μενον θέλει γείναι ἐκ τοῦ πολλαπλασια-	869
στέου 7986, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής	6939834

στέου 7986, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο πρῶτον πρέπει νὰ γείνη ἐκ τοῦ 7986 ἀριθμὸς τις, ὅπως γίνεται ὁ 9 ἐκ τῆς μονάδος, ἤγουν πρῶτον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7986 ἐπὶ 9· ἔπειτα πρέπει νὰ γείνη πάλιν ἐκ τοῦ 7986 ἄλλος ἀριθμὸς, ὅπως γίνεται ὁ 60 ἐκ τῆς μονάδος, ἤγουν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7986 ἐπὶ 60· ἔπειτα πρέπει πάλιν νὰ γείνη ἐκ τοῦ 7986 ἄλλος ἀριθμὸς, ὅπως γίνεται ὁ 800 ἐκ τῆς μονάδος, ἤγουν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ

7986 ἐπὶ 800· καὶ τελευταῖον οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, οἵτινες γίνονται ἐκ τοῦ 7986, πρέπει νὰ προστεθῶσι, καὶ τὸ ἄθροισμά των θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸν 7986 ἐπὶ 9, ἐπὶ 60 καὶ ἐπὶ 800, ἅμ' σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα, τὰ γράφομεν τὸ ἐν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε νὰ ᾔναι ἕτοιμα εἰς πρόσθεσιν.

Ἀφοῦ γραφθῶσι λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἀνωτέρω φαίνονται, πολλαπλασιάζομεν τὸν 7986 ἐπὶ 9, καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ γινόμενόν των 71874, ἐνῶ τὸ σχηματίζομεν. Ἐπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 7986 ἐπὶ 60 (74), καὶ τὸ γινόμενον 479160, ἐνῶ τὸ σχηματίζομεν, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον. Ἐπειτα πάλιν πολλαπλασιάζομεν τὸν 7986 ἐπὶ 800 (74), καὶ τὸ γινόμενον 6388800, ἐνῶ τὸ εὐρίσκομεν, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰ δύο πρῶτα. Τελευταῖον προσθέτοντες τὰ τρία ταῦτα μερικὰ γινόμενα, τὰ ὅποια εἶναι ἕτοιμα εἰς πρόσθεσιν, εὐρίσκομεν 6939834. Οὗτος δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, διότι ἔγινεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 7986, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστής 869 γίνεται ἐκ τῆς μονάδος.

Σημ. Τὸ 0 εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου μερικοῦ γινομένου, καὶ τὰ 00 εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου εἰμποροῦμεν καὶ νὰ μὴ τὰ γράφωμεν, διότι δὲν ἔχουν καμμίαν ἐπιρροὴν εἰς τὴν μετέπειτα πρόσθεσιν. Ἀλλ' ἂν δὲν τὰ γράφωμεν, πρέπει ν' ἀφίνωμεν τὸν τόπον των κενόν, διὰ νὰ μὴ σφάλλωμεν. Γενικῶς δὲ, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, πρέπει ν' ἀφίνωμεν τὴν θέσιν τῶν μονάδων κενήν, καὶ νὰ γράφωμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ ἀριστερά. Ὅταν δὲ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν ἐκατοντάδων, πρέπει ν' ἀφίνωμεν δύο θέσεις κενὰς τὴν τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων, καὶ νὰ γράφωμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὰς ἐκατοντάδας καὶ ἀριστερά, καὶ οὕτω καθεξῆς.

76. Πᾶς λοιπὸν πολυψήφιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον οὕτως· Ἀφοῦ διαταχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς εἵπομεν, πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος πρῶτον μὲν

ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τοὺς παράγοντας· ἔπειτα ἐπὶ τὰς δεκάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ρουμένας ὡς μονάδας, καὶ τὸ δεῦτερον τοῦτο γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸ πρῶτον, ἀλλ' ἀπὸ τὰς δεκάδας του καὶ ἀριστερά· ἔπειτα ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ρουμένας ὡς μονάδας, καὶ τὸ τρίτον τοῦτο γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὰ δύο πρῶτα, ἀλλ' ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας των καὶ ἀριστερά, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τελευταῖον προσθέτονται ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα. Ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

77. Ἄς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 7832 ἐπὶ 200603, ὅστις ἔχει μηδενικά εἰς τὸ μετὰξύ.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 200603 σύγκειται ἐκ τριῶν ἀριθμῶν, ἐκ τοῦ 200000, τοῦ 600 καὶ τοῦ 3, πρέπει ἐκ τοῦ 7832 νὰ γείνωσι τρία μερικὰ γινόμενα, ὡς ἐκ τῆς μονάδος γίνονται οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 200000, 600 καὶ 3, ἥγουν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7832 ἐπὶ 3, ἐπὶ 600 καὶ ἐπὶ 200000, καὶ τὰ τρία μερικὰ γινόμενα νὰ προστεθῶσιν. Ἀφοῦ λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ 7832 ἐπὶ 3 καὶ ὑπογραφθῇ τὸ γινόμενον 23496, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 600, ἥγουν ἐπὶ 6 καὶ τὸ γινόμενον 46992 νὰ γραφθῇ ὑπὸ τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας του καὶ ἀριστερά· ἔπειτα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 200000, ἥγουν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον 15664 νὰ γραφθῇ ὑπὸ τὰ πρῶτα ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας χιλιάδος καὶ ἀριστερά. Ἰδοὺ ὁ τύπος·

$$\begin{array}{r}
 7832 \\
 200603 \\
 \hline
 23496 \\
 46992 \\
 15664 \\
 \hline
 1571122696
 \end{array}$$

78. Όταν ἔχη ὁ πολλαπλασιαστής τὰ
 μηδενικά εἰς τὸ τέλος, οἷον ὁ 3600, νοεῖται
 ὅτι εἶναι οὗτος 36 ἑκατοντάδες, ἢ γινό-
 μενον τοῦ 36 ἐπὶ 100, καὶ διὰ τοῦτο πολλα-
 πλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ 36
 μονάδας, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου θέτονται τὰ 00, ὅσα
 ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής εἰς τὸ τέλος του, ὡς ἄνω φαίνεται.

79. Όταν δὲ καὶ οἱ δύο παράγοντες
 ἔχωσι μηδενικά τὰ δεξιὰ των ψηφία, ἐκ τοῦ
 ὅ,τι τώρα εἵπομεν, καὶ ἐκ τοῦ ὅ,τι εἵπομεν
 εἰς τὸν ἀρ. 72 γίνεται φανερόν ὅτι πρέπει

να πολλαπλασιάζονται τὰ σημαντικά
 ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰ σημαντικά ψηφία τοῦ
 πολλαπλασιαστοῦ, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου των να
 θέτῳνται τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες εἰς
 τὸ τέλος των, ὡς ἄνω φαίνεται.

80. Όταν δὲ ὁ πολλαπλασιαστής ᾗναι γινόμενον δύο ἀριθ-
 μῶν, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται κατὰ δύο τρόπους· π. γ.
 ὁ 478 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 56, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ 7
 καὶ 8, ἢ οὕτως

478	ἢ οὕτως	478
56		7
2868		3346
2390		8
26768		26768

81. Παρατηρήσαμεν εἰς τὸν ἀριθ. 69, ὅτι ὁπότερον δύο
 μονοψηφίων ἀριθμῶν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἄλλον, θέλο-
 μεν εὐρεῖ τὸ αὐτὸ γινόμενον. Ἀλλὰ καὶ δύο ὁποιοῦνδήποτε
 ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁπότερον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν
 ἄλλον, θέλομεν εὐρεῖ γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἐπειδὴ,
 ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ ᾗναι π. γ. 72 καὶ 45, ἃς γράψωμεν τὰς 72
 μονάδας ἀπὸ μίαν μίαν ὀρίζοντίως, ἔπειτα πάλιν ἄλλας τόσας

ὑποκάτω, ἔπειτα ἄλλας τόσας ὑποκάτω, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ γείνωσι 45 ὀριζόντιαι γραμμαὶ ἀνὰ 72 μονάδας ἐκάστη. Οὕτω θέλει μορφωθῇ ὁ ἀκόλουθος πίναξ,

Τούτου δὲ τοῦ πίνακος ὅλαι ὁμοῦ	1, 1, 1, 1, 1,
αὶ μονάδες συνιστῶσιν ἀριθμὸν	1, 1, 1, 1, 1,
ἓνα· καὶ εἶναι φανερόν ὅτι τοῦτον	1, 1, 1, 1, 1,
τὸν ἀριθμὸν θέλομεν εὐρεῖ ἐάν τε	1, 1, 1, 1, 1,
συνενώσωμεν εἰς ἓν ὅλας τὰς μονάδας τοῦ πίνακος ἀνὰ 72, ὅσαι	. . . *

εἶναι εἰς ἐκάστην ὀριζόντιον γραμμὴν, ἐάν τε συνενώσωμεν αὐτὰς εἰς ἓν ἀνὰ 45, ὅσαι εἶναι εἰς ἐκάστην κάθετον γραμμὴν. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν νοεῖται ὅτι πολλαπλασιάζομεν τὸν 72 ἐπὶ 45, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὅτι πολλαπλασιάζομεν τὸν 45 ἐπὶ 72· λοιπὸν ὁπότερον τῶν δύο ἀριθμῶν 72 καὶ 45 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἄλλον, τὸ γινόμενόν των θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ὅσα εἶπομεν περὶ τοῦ 72 καὶ 45 εἰμποροῦμεν νὰ τὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς δύο ὁποιοὺςδήποτε ἀκεραίους ἀριθμούς· λοιπὸν ὁπότερον δύο ὁποιωρδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἄλλον, θέλομεν εὐρεῖ γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ διψήφιος 65 ἐπὶ τὸν τετραψήφιον 4728, εἰμπορούσαμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστρόφως τὸν 4728 ἐπὶ 65, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀλίγον τι ἀπλούστερον εἰς τὴν πρᾶξιν.

82. Ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ ἄλλον, οἷον ὁ 8 ἐπὶ 7, ἃς πολλαπλασιασθῇ ἔπειτα τὸ γινόμενόν των 56 ἐπὶ τρίτον ἄλλον ἀριθμὸν, οἷον ἐπὶ 6. Ὁ ἀριθμὸς 336, ὅστις οὕτω θέλει προκύψει, λέγεται γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν 8, 7 καὶ 6, καὶ εἶναι ἐξαπλάσιον τοῦ 56· ἐπειδὴ δὲ ὁ 56 εἶναι ἐπταπλάσιον τοῦ 8, ὁ 336 εἶναι ἐξαπλάσιον τοῦ ἐπταπλασίου τοῦ 8. Ἄς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 336 ἐπὶ ἄλλον τέταρτον ἀριθμὸν, οἷον ἐπὶ 5. Ὁ ἀριθμὸς 1680, ὅστις θέλει προκύψει ἐκ

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγεται γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν 8, 7, 6 καὶ 5, καὶ εἶναι πενταπλάσιος τοῦ 336, ἤγουν πενταπλάσιος τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ ἑπταπλασίου τοῦ 8. Καὶ γενικῶς γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει ἀπὸ πολλοὺς διαδοχικοὺς πολλαπλασιασμοὺς, ὅπου εἰς τῶν πολλῶν ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἓνα ἄλλον, καὶ τὸ γινόμενόν των ἐπὶ ἓνα τρίτον, καὶ πάλιν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἐπὶ ἓνα τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως εἰς τὸν τελευταῖον. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται παράγοντες τοῦ γινομένου, ἐκ τῶν ὁποίων εἰς μόνος εἶναι πολλαπλασιαστέος, ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι εἶναι πολλαπλασιασταί. Ὅταν δὲ κάμνωμεν τοὺς διαδοχικοὺς πολλαπλασιασμοὺς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, λέγομεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐπ' ἀλλήλους.

83. Ὅταν δὲ πολλαπλασιάζωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς ἐπ' ἀλλήλους, τοὺς πολλαπλασιάζομεν κατὰ τινὰ τάξιν, ἥγουν θεωροῦμεν ἓνα τινὰ ὡς πολλαπλασιαστέον, ἄλλον ὡς πρῶτον πολλαπλασιαστήν, ἄλλον ὡς δεύτερον πολλαπλασιαστήν, ἄλλον ὡς τρίτον κτλ. Ἀλλ' ὅποιονδὴποτε τάξωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον, καὶ ὅποιονδὴποτε ὡς πρῶτον πολλαπλασιαστήν, ὡς δεύτερον κτλ, τὸ τελευταῖον γινόμενον, ἥγουν τὸ γινόμενον ὅλων, θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς. Π. χ. ἡ πολλαπλασιάζωμεν τὸν 8 ἐπὶ 7, καὶ τὸ γινόμενόν των ἐπὶ 6, καὶ τὸ γινόμενόν των πάλιν ἐπὶ 5, ἡ πολλαπλασιάζωμεν τὸν 6 ἐπὶ 5, καὶ τὸ γινόμενόν των ἐπὶ 8, καὶ πάλιν τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ 7, ἡ καὶ ὅπως ἄλλως θέλωμεν, ὡς γινόμενον τῶν τεσσάρων τούτων ἀριθμῶν θέλει εὐρεθῇ πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 1680.

Ἐπειδὴ πρῶτον, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ κατὰ ταύτην τὴν τάξιν

	8, 7, 6, 5
ἡ κατὰ ταύτην	8, 7, 5, 6
ἡ οὕτως	8, 5, 7, 6
ἡ οὕτω	5, 8, 7, 6,

λέγω ὅτι τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα εἶναι ἴσα ἢ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

α. Τὰ δύο πρῶτα εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ καὶ τῶν δύο οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοὶ 8 καὶ 7, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Ἀλλ' οὗτος εἰς μὲν τὴν πρώτην σειρὰν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 5, εἰς δὲ τὴν δευτέραν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 6· εἶναι δὲ ἀποδεδειγμένον (73) ὅτι ὁ κατὰ τοὺς δύο τούτους τρόπους πολλαπλασιασμοῦ φέρει εἰς τὸ αὐτὸ γινόμενον· λοιπὸν τὰ δύο πρῶτα γινόμενα εἶναι ἴσα.

β. Τὸ τρίτον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 8 εἰς μὲν τὴν δευτέραν σειρὰν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 7 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 5, εἰς δὲ τὴν τρίτην πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 7, ταῦτα δὲ τὰ γινόμενα (73) εἶναι ἴσα· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων παραγόντων τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης σειρᾶς· εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Οὗτος δ' ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 6 καὶ εἰς τὰς δύο σειρὰς· λοιπὸν τὰ γινόμενα τῶν τεσσάρων παραγόντων εἶναι ἴσα, ἥτοι τὸ τρίτον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον, ἐπομένως καὶ μὲ τὸ πρῶτον.

γ. Τὸ τέταρτον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον. Ἐπειδὴ 8 ἐπὶ 5 ἢ 5 ἐπὶ 8 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (80). Ἀλλ' οὗτος καὶ εἰς τὰς δύο σειρὰς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 7 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 6· λοιπὸν τὸ τέταρτον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον, ἐπομένως εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ δεύτερον καὶ μὲ τὸ πρῶτον.

Ὡστε τὰ τέσσαρα γινόμενα εἶναι ἴσα.

Ἐπειτα παρατηροῦντες ὅτι ὁ παράγων 5 εἰς μὲν τὸ πρῶτον γινόμενον εἶναι τέταρτος, εἰς δὲ τὸ δεύτερον τρίτος, εἰς δὲ τὸ τρίτον δεύτερος, εἰς δὲ τὸ τέταρτον πρῶτος, καταλαμβάνομεν ὅτι, ὅποιανδήποτε θέσιν ἔχῃ ὁ 5, ἐνῷ πολλαπλασιάζονται οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ, τὸ γινόμενόν των θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἀλλ' εἰμπορεῖ ν' ἀποδειχθῇ, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη περὶ τοῦ 5, ὅτι καὶ ἄλλος ὅποιοςδήποτε τῶν τριῶν παραγόντων 8, 7 καὶ 6 ἐὰν ἔχῃ ὅποιανδήποτε θέσιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, τὸ προκύπτον γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμός· λοιπὸν καθ' ὅποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 8, 7, 6, 5, τὸ προκύπτον γινόμενον θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ τοῦτο ἀπαρχάλλακτα δύναται ν' ἀποδειχθῇ καὶ περὶ ὅσωνδήποτε καὶ ὅποιωνδήποτε ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Λοιπὸν καθ' ὅποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν ὅσοιδήποτε καὶ ὅποιοιδήποτε ἀκεραῖοι ἀριθμοὶ, τὸ προκύπτον γινόμενον θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Περὶ Διαιρέσεως ἀκεραίων δι' ἀκεραίων.

84. Ἐπομεν εἰς τὸν ἀριθμ. 53 τί σημαίνουσι γενικῶς αἱ λέξεις διαιρῶ, διαιρέσις, διαιρετέος, διαιρέτης καὶ πηλίκον.

Ἐδὼ δὲ θέλομεν ἐκθέσει εἰς τί συνίσταται ἡ διαιρέσις ἀκεραίου ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου, καὶ πῶς ἐκτελεῖται.

Ἐπειδὴ δὲ, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖναι ἀκεραῖος, ἡ μονὰς εἶναι πολλοσὸν τι μέρος αὐτοῦ (35), διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον τότε θέλει εἶσθαι πολλοστόν τι μέρος τοῦ διαιρετέου, ἤγουν τρίτον μὲν, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖναι 3, πέμπτον δὲ, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖναι 5, εἰκοστόν δὲ, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖναι 20, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὡς τοιοῦτον δὲ πολλοστόν τοῦ διαιρετέου τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην θέλει παράγει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν διαιρετόν. Τοῦτο δὲ θέλει μᾶς χρησιμεύσει εἰς τὸ ἐξῆς καὶ πρὸς εὔρεσιν τοῦ πηλίκου καὶ πρὸς δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως.

α'. Διὰ μονοψηφίου διαιρέτου.

85. Ὅταν ὁ διαιρέτεός ᾖναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι I· ἐπειδὴ τὸ I λαμβανόμενον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, παράγει ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸν διαιρετόν. Π. χ. ὁ 7 διαιρούμενος διὰ 7, ἢ, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ 7^{ον} τοῦ 7 εἶναι 1, διότι 1 εἰς 7 7· τὸ 4^{ον} τοῦ 4 εἶναι 1, διότι 1 εἰς 4 4 (35).

Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτεός ᾖναι δεκάδες ἢ ἑκατοντάδες κτλ. τόσαι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον καὶ τότε εἶναι 1, ἀλλὰ μία δεκάς ἢ μία ἑκατοντάς κτλ· διότι μία δεκάς ἢ μία ἑκατοντάς κτλ λαμβανομένη τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, παράγει ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸν διαιρετόν. Π. χ. τὸ 6^{ον} τῶν 6 δεκάδων εἶναι 1 δεκάς, διότι 1 εἰς 6 6 δεκάδες· τὸ 9^{ον} τῶν 9 ἑκατοντάδων εἶναι 1 ἑκατοντάς. Σύντομα, ὅταν ὁ διαιρέτεός ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινας τόσας, ὅσας ἀπλᾶς μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον εἶναι 1 ὁμώνυμον μὲ τὸν διαιρέτην.

86. Ὅταν ὁ διαιρέτεός ᾖναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρέτην

καὶ παρονομαστήν τὸν διαιρέτην. Ἄς διαιρεθῇ π. χ. ὁ 3 διὰ τοῦ 5, ἥτοι ὡς εὑρεθῇ τὸ 5^{ον} τοῦ 3. Τὸ 5^{ον} τοῦ 3 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{1}{5}$. ἐπειδὴ ὁ 3 εἶναι 1 καὶ 1 καὶ 1, καὶ τὸ 5^{ον} τοῦ 3 πρέπει νὰ ᾔῃ τὸ 5^{ον} τοῦ 1 καὶ 1 καὶ 1, ἥτοι $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{5}$, ἢ $\frac{3}{5}$ τῆς μονάδος. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι τὸ 8^{ον} τοῦ 6 εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς μονάδος, ἔχουν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 6 καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 8.

87. Ὅταν ὁ διαιρέτέος ᾔῃαι μονοψήφιος ἢ διψήφιος, ἀλλὰ μεγαλύτερος τοῦ μονοψηφίου διαιρέτου καὶ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἢ μονοψήφιος ἀριθμὸς ἢ μικτὸς ἀπὸ μονοψηφίου καὶ κλάσμα τι.

α'. Ἄς διαιρεθῇ π. χ. διὰ 9 ὁ 45, ὅστις εἶναι μεγαλήτερος μὲν τοῦ 9, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου του 90. Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι τὸ 9^{ον} τοῦ 45. Ἀλλ' 1 εἶναι τὸ ἕννατον τοῦ 9· λοιπὸν τὸ ἕννατον τοῦ 45, ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τοῦ 9, πρέπει νὰ ᾔῃαι μεγαλήτερον τοῦ 1. Ἐπειτα 10 εἶναι τὸ ἕννατον τοῦ 90· λοιπὸν τὸ ἕννατον τοῦ 45, ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 90, πρέπει νὰ ᾔῃαι μικρότερον τοῦ 10. Λοιπὸν τὸ ἕννατον τοῦ 45, τὸ ὅποιον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 1 καὶ μικρότερον τοῦ 10, πρέπει νὰ ᾔῃαι ἀριθμὸς μονοψήφιος ἢ μικτὸς ἀπὸ μονοψηφίου καὶ κλάσμα τι.

Διὰ νὰ εὑρεθῇ δὲ τίς τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι τὸ 9^{ον} τοῦ 45, δοκιμάζομεν κατὰ σειρὰν τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς οὕτω, 2 εἰ 9 18, δὲν εἶναι ὁ 2· 3 εἰ 9 27, δὲν εἶναι οὐδ' ὁ 3· 4 εἰ 9 36, δὲν εἶναι οὐδ' ὁ 4· 5 εἰ 9 45, ὁ 5 εἶναι τὸ 9^{ον} τοῦ 45.

Ὡσαύτως εὐρίσκεται καὶ ὅτι τὸ 7^{ον} τοῦ 42, ἥτοι τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως τοῦ 42 δι' 7, εἶναι 6 — τὸ 6^{ον} τοῦ 54 εἶναι 9· — τὸ 4^{ον} τοῦ 28 εἶναι 7.

Ὁ ἐνθυμούμενος καλὰ τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα, χωρὶς τῶν δοκιμασιῶν τούτων, ἢ κάμων εὐθὺς νοεσῶς τὰς δοκιμασίας

τάυτας, εὐρίσκει ἀμέσως τίς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον
πηλίχον.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι καὶ τῶν 45 δεκάδων ἡ ἑκατοντάδων
 κατὰ τὸ 9^{ον} εἶναι 5, ἀλλὰ δεκάδες, ἑκατοντάδες, κατὰ τὸ 9^{ον}
 σημαίνει ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου
 ᾖ ὁ αὐτὸς, ἀλλ' αἱ μονάδες μεταβάλλονται, τότε καὶ ὁ ἀριθ-
 μὸς τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς, ὅστις εὐρί-
 σκεται διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως, ἀλλ' αἱ μονάδες θέλουσιν
 εἶσθαι ὅποῃ εἶναι αἱ τοῦ διαιρετέου. Ὡστε πρέπει νὰ εὕρισκε-
 ται καὶ τότε τὸ πηλίκον ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, οἷον τὸ 7^{ον} τῶν
 28 δεκάδων εἶναι 4 δεκάδες — τὸ 5^{ον} τῶν 35^{ων} εἶναι
 7^{ον}. κατὰ.

Σημ. Ἡ διαίρεσις τῶν προηγουμένων ἀριθμῶν δύναται νὰ γείνη καὶ ὡς εἰς τὸν προηγούμενον ἀριθμόν· καὶ τότε φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι κλασματικὸς ἀριθμὸς ἔχων ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστικὴν τὸν διαιρέτην, οἷον τὸ 9^{ον} τοῦ 45 θέλει εἶσθαι $\frac{45}{9}$ τῆς μονάδος — τὸ 7^{ον} τοῦ 42 θέλει εἶσθαι $\frac{42}{7}$, κτλ.

6'. "Ας διαιρεθῇ καὶ ὁ 38 δι' 7, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ 7^{ον} τοῦ 38. Πράττοντες ὡς ἤδη εἶπομεν εὐρίσκομεν ὅτι 5 εἶναι τὸ 7^{ον} τοῦ 35, ἀριθμοῦ κατὰ 3 μονάδας μικροτέρου τοῦ 38. λοιπὸν τὸ 7^{ον} τοῦ 38 θέλει εἶσθαι τὸ 7^{ον} τοῦ 35 καὶ τὸ 7^{ον} τοῦ 3. Καὶ ἐπειδὴ τὸ 7^{ον} τῶν 3 μονάδων εἶναι $\frac{3}{7}$ τῆς μονάδος (86), εἶναι φανερόν ὅτι τὸ 7^{ον} τοῦ 38 εἶναι 5 καὶ $\frac{5}{7}$, 5 τὸ 7^{ον} τοῦ 35 καὶ $\frac{3}{7}$ τὸ 7^{ον} τοῦ 3.

Εἰς τὴν πρᾶξιν λέγουσι σύντομα οὕτω, τὸ 7^{ον} τοῦ 38 εἶναι 5 διὰ τὸν 35 καὶ μένουσι 3· τὸ 7^{ον} τοῦ 3 εἶναι $\frac{3}{7}$ λοιπὸν τὸ 7^{ον} τοῦ 38 εἶναι 5 $\frac{3}{7}$.

Ὡσαύτως λέγουσι, τὸ $9^{\text{ον}}$ τοῦ 59 εἶναι 6 διὰ τὸν 54 καὶ μένουσι 5· τὸ $9^{\text{ον}}$ τοῦ 5 εἶναι $\frac{5}{9}$ τῆς μονάδος· λοιπὸν τὸ $9^{\text{ον}}$ τοῦ 59 εἶναι $6\frac{5}{9}$.

Τὸ δὲ 7^{ον} τῶν 38 δεκάδων εἶναι ὁ δεκάδης καὶ μένουσι 3

δεκάδες ἔτοι 30 μονάδες· τὸ 7^{ον} τῶν 30 μονάδων εἶναι 4 μονάδες καὶ $\frac{2}{7}$ τῆς μονάδος· λοιπὸν τὸ 7^{ον} τῶν 38 δεκάδων εἶναι 5 δεκάδες 4 μονάδες καὶ $\frac{2}{7}$ τῆς μονάδος, ἔτοι 54 $\frac{2}{7}$.

Ὡσαύτως τὸ 9^{ον} τῶν 59 ἑκατοντάδων εἶναι 6 ἑκατοντάδες καὶ μένουσι 5 ἑκατοντάδες ἔτοι 50 δεκάδες· τὸ 9^{ον} τῶν 50^{δεκ.} εἶναι 5^{δεκ.} καὶ μένουσι 5^{δεκ.} ἔτοι 50^{μον.}, τῶν ὁποίων τὸ 9^{ον} εἶναι 5 $\frac{5}{9}$ · λοιπὸν τὸ 9^{ον} τῶν 59 ἑκατοντάδων εἶναι 6^{δεκ.} 5^{δεκ.} 5^{μον.} καὶ $\frac{5}{9}$ τῆς μονάδος, ἔτοι 655 $\frac{5}{9}$. Διὰ δὲ ταύτης τῆς πράξεως ὁ διαιρετέος 59^{δεκ.} ἢ 5900 ἐχωρίσθη εἰς , . 54^{δεκ.} 45^{δεκ.} 45^{μον.} 5 $\frac{5}{9}$, τῶν ὁποίων τὰ ἔννατα εἶναι 6 5 5 $\frac{5}{9}$ ἔτοι 655 $\frac{5}{9}$.

Εἶναι καλὸν νὰ γυμνάζωνται οἱ ἀρχάριοι εἰς τοιαύτας διαιρέσεις.

88. * Ἀς διαιρεθῇ ὁ πολυψήφιος 9384 διὰ τοῦ 4, ἔχουν ἄς εὑρεθῇ τὸ 4^{ον} τοῦ 9384.

Οἱ ἀριθμοὶ διατάσσονται οὕτω, δεξιὰ τοῦ 9384 | 4
 διαιρετέου γράφεται ὁ διαιρέτης, μεταξὺ αὐ- 2346
 τῶν γραμμῶν, καὶ ἄλλη γραμμὴ ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι ἡ θέσις τοῦ πηλίκου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλῆτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου 4, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι πολυψήφιος ἀριθμός· καὶ διὰ νὰ εὑρωμεν ἀπὸ ἓν τὰ ψηφία του, χωρίζομεν τὸν διαιρετέον εἰς ἄλλους μερικοὺς διαιρετέους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες, ὁποιασδήποτε τάξεως καὶ ἂν ᾖναι, νὰ ᾖναι πλείυτεραι μὲν τῶν 4 τοῦ διαιρέτου, ὀλιγώτεραι δὲ τῶν 40 τοῦ δεκαπλασίου του.

Καὶ πρῶτον αἱ 9^{χιλ.} τοῦ διαιρετέου εἶναι μερικός τις διαιρετέος, διότι εἶναι πλείυτεραι μὲν τῶν 4, ὀλιγώτεραι δὲ τῶν 40. Τὸ δὲ 4^{ον} τῶν 9^{χιλ.} εἶναι 2^{χιλ.} διὰ τὰς 8 καὶ μένει 1^{χιλ.} ἔτοι 10^{δεκ.}· γράφομεν 2 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, προσθέτομεν τὰς 10^{δεκ.}, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὰς 3^{δεκ.} τοῦ διαιρετέου,

καὶ οὕτω γίνεται δεύτερος μερικὸς διαιρετέος $13^{\text{εικ.}}$. Τὸ $4^{\text{ον}}$ τῶν $13^{\text{εικ.}}$ εἶναι $3^{\text{εικ.}}$ διὰ τὰς 12 καὶ μένει $1^{\text{εικ.}}$ ἥτοι $10^{\text{δεκ.}}$ γράφομεν τὰς $3^{\text{εικ.}}$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τῶν $2\chi\lambda.$ δι' αὐτὸ τοῦτο, ὅτι εἶναι ἑκατοντάδες, προσθέτομεν τὰς $10^{\text{δεκ.}}$ αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὰς $8^{\text{δεκ.}}$ τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνεται οὕτω τρίτος μερικὸς διαιρετέος $18^{\text{δεκ.}}$. Τὸ $4^{\text{ον}}$ τῶν $18^{\text{δεκ.}}$ εἶναι $4^{\text{δεκ.}}$ διὰ τὰς 16 καὶ μένουσι $2^{\text{δεκ.}}$ ἥτοι $20^{\text{μον.}}$ γράφομεν τὰς $4^{\text{δεκ.}}$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τῶν $3^{\text{εικ.}}$ δι' αὐτὸ τοῦτο, ὅτι εἶναι δεκάδες, προσθέτομεν τὰς $20^{\text{μον.}}$, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὰς $4^{\text{μον.}}$ τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνεται τέταρτος μερικὸς διαιρετέος $24^{\text{μον.}}$. Τελευταῖον τὸ $4^{\text{ον}}$ τῶν $24^{\text{μον.}}$ εἶναι $6^{\text{μον.}}$ σωστὰ, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τῶν $4^{\text{δεκ.}}$.

Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι διὰ τῆς πράξεως ταύτης ὁ διαιρετέος ἐχωρίσθη εἰς $8\chi\lambda.$ $12^{\text{εικ.}}$ $16^{\text{δεκ.}}$ $24^{\text{μον.}}$ τῶν ὁποίων τὰ τέταρτα εἶναι 2 3 4 6, ἥτοι ὁ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου γραμμένος ἀριθμὸς 2346. Λοιπὸν ὁ 2346 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἥγουν τὸ $4^{\text{ον}}$ τοῦ 9384.

89. Πρὸχίσαμεν ἐξ ἀριστερῶν τὴν διαίρεσιν καὶ διὰ τοῦτο ἐδιαίρεσαμεν ἀπ' αὐτῆς χιλιάδας, ἑκατοντάδας κτλ. ἐπειδὴ ὅσαι χιλιάδες ἔμειναν ἐκ τῆς πρώτης μερικῆς διαίρεσεως, τὰς ἐπ' αὐτὰς θέσαμεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας καὶ ἔπειτα ἐδιαίρεσαμεν αὐτάς· τὸ αὐτὸ ἔγινε καὶ εἰς τὰς λοιπὰς διαίρεσεις. Ἀλλ' ἂν ἤρχίζαμεν ἐκ δεξιῶν, ἠθέλαμεν βιασθῆναι νὰ διαιρῶμεν πολλάκις μονάδας, δεκάδας κτλ, καὶ ἠθέλαμεν οὕτως εὗρεϊ πολλὰ πηλίκια, τὰ ὁποῖα ἔπρεπεν ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν, διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον. Εἶναι λοιπὸν προτιμότερον ἢ διαίρεσις ν' ἀρχίζῃ ἐξ ἀριστερῶν, καὶ ὅχι ἐκ δεξιῶν ὡς αἱ προηγούμεναι πράξεις.

90. Ἄς διαιρεθῇ καὶ ὁ 23839 δι' 7, δηλαδὴ ἃς εὗρεθῇ τὸ $7^{\text{ον}}$ τοῦ 23839.

$$23839 \overline{) 7}$$

Ἐδὼ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος πρόκειται

$$3405 \frac{4}{7}$$

νὰ εἶναι $23\chi\lambda.$, διότι αὗται εἶναι περισσότεραι τῶν 7 μονάδων

τοῦ διαιρέτου καὶ ὀλιγώτεροι τῶν 70 τοῦ δεκαπλασίου του. Τὸ δὲ 7^{ον} τῶν 23χιλ. εἶναι 3χιλ. διὰ τὰς 21 καὶ μένουσι 2χιλ. ἤτοι 20^{ικ.}· γράφομεν 3 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, προσθέτομεν τὰς 20^{ικ.}, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὰς 8 τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 28^{ικ.}, δεύτερος μερικός διαιρετέος. Τὸ 7^{ον} τῶν 28^{ικ.} εἶναι σωστὰ 4^{ικ.}, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τοῦ 3. Τώρα πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸ 7^{ον} τῶν δεκάδων. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν προηγουμένην μερικὴν διαίρεσιν δὲν ἔμειναν δεκάδες, αἱ δὲ 3^{δεκ.} τοῦ διαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεροι τῶν 7 μονάδων τοῦ διαιρέτου, τὸ 7^{ον} αὐτῶν δὲν εἶναι οὐδὲ μία δεκάς, ἀλλὰ κλάσμα αὐτῆς διὰ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τῶν 4^{ικ.} πρέπει νὰ γραφῇ 0, διὰ νὰ κρατῇ τὴν θέσιν τῶν μὴ ὑπαρχουσῶν δεκάδων. Ἐπειτα προσθέτοντες τὰς 3^{δεκ.} τοῦ διαιρετέου ἤτοι 30^{μον.} εἰς τὰς 9 μονάδας του, καὶ διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα 39^{μον.} διὰ 7, ἔχομεν 5 $\frac{4}{7}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον δεξιά τοῦ 0.

Ὁ 23839 ἐχωρίσθη εἰς 21χιλ. 28^{ικ.} 0^{δεκ.} 35^{μον.} 4^{μον.}, τῶν ὁποίων τὰ ἔσδομα εἶναι 3 4 0 5 $\frac{4}{7}$, ἤτοι ὁ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου ἀριθμὸς 3405 $\frac{4}{7}$. λοιπὸν ὁ 3405 $\frac{4}{7}$ εἶναι τὸ 7^{ον} τοῦ 23839.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι, ἐὰν μερικός τις διαιρετέος ἢ ἐκκτοντάδων ἢ δεκάδων κτλ ἔχῃ ὀλιγώτερας μονάδας τῆς τάξεώς του παρὰ τὰς μονάδας τοῦ διαιρέτου, ὡς ἀνωτέρω αἱ 3^{δεκ.}, πρῶτον γράφεται 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τῶν γραμμένων ἤδη ψηφίων, ἔπειτα προστίθεται αὐτὸς ὁ μερικός διαιρετέος εἰς τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ ὁ γινόμενος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, κτλ.

91. Γενικῶς, πολυψήφιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ μονοψηφίου οὕτως· Ἀγοῦ γραφθῇ ὁ διαιρέτης δεξιά τοῦ διαιρετέου, χωρισθῶσι διὰ γραμμῆς, καὶ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφθῇ ἄλλη γραμμὴ, διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου (δηλ. εὕρεσκειται τὸ ζητούμενον πολλαπλὸν) πρῶτον τὸ ἀριστερὸν ψηφίον τοῦ

διαιρετέον, ἂν περιστάνῃ πλειοτέρας μονάδας τῆς τάξεώς του παρὰ τὸν διαιρέτην, εἰδεμὴ διαιρεῖται ὁ ἀπὸ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελούμενος ἀριθμὸς, καὶ τὸ μερικὸν πηλίκον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου. Ἐπειτα, ἂν μὲν ἔμειναν μονάδες ἀπὸ τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, προστίθενται εἰς τὰς τοῦ ἀκολουθοῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου, τὸ ἄθροισμα διαιρεῖται ὡς ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος, καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο μερικὸν πηλίκον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τοῦ προευρεθέντος. Ἄν ὅμως δὲν ἔμειναν, τότε διαιρεῖται μόνον τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἂν ἦναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου· ἂν δὲ ἦναι μικρότερον, πρῶτον γράφεται 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, ἔπειτα προστίθεται αὐτὸ τὸ ψηφίον εἰς τὸ ἀκόλουθον τοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ ἄθροισμα διαιρεῖται, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὁ δὲ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

$$\begin{array}{r} 93639 \mid 3 \qquad 95830 \mid 5 \qquad 26843 \mid 6 \\ \hline 31213 \qquad 19166 \qquad 4473 \frac{5}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74832 \mid 9 \qquad 2822400 \mid 7 \qquad 79438 \mid 4 \\ \hline 403200 \end{array}$$

Ε'. Διὰ πολυψηφίου διαιρέτου.

92. Ὅσα εἴπομεν εἰς τοὺς ἀριθ. 85 καὶ 86, ὅπου ὁ διαιρέτης ἐλογίζετο μονοψήφιος, ἀληθεύουσι λεγόμενα καὶ ὅταν αὐτὸς ᾖ πολυψήφιος. Δηλαδή

α'. Ὅταν ὁ διαιρετέος ᾖ ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι 1· οἷον τοῦ 672 τὸ 672^{ον} εἶναι 1.

Ἦσαύτως 1 εἶναι καὶ τῶν 672 δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ τὸ 672^{ον}, ἀλλὰ 1 δεκάς ἢ ἑκατοντάς κτλ.

ε'. Ὅταν ὁ διαιρετέος ᾦναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην· οἷον τοῦ 234 τὸ 568^{ον} εἶναι $\frac{234}{568}$ τῆς μονάδος.

Αἱ δὲ περὶ τούτων ἀποδείξεις εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς εἰς τοὺς ἀριθ. 85 καὶ 86 ἐκτεθειμένας.

93. Ὅταν ὁ διαιρετέος ᾦναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιος ἀριθμὸς ἢ μικτὸς ἀπὸ μονοψήφιον καὶ κλάσμα τι.

α. Ἄς διαιρεθῇ ὁ 2348 διὰ τοῦ 587, ἥτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ 587^{ον} τοῦ 2348, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 587, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου του 5870.

Λέγω ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιος ἀριθμὸς ἢ μονοψήφιος μὲ κλάσμα τι. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 587 διὰ 587· ὁ 10 εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ δεκαπλασίου του 5870 διὰ 587· λοιπὸν τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ μεγαλύτερου μὲν τοῦ 587, μικροτέρου δὲ τοῦ 5870, οἷον τοῦ 2348, διαιρουμένου διὰ 587 πρέπει νὰ ᾦναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ 1, μικρότερον δὲ τοῦ 10, ἥτοι μονοψήφιος τις ἀριθμὸς μόνος ἢ ὁμοῦ μὲ κλάσμα τι.

Διὰ νὰ εὑρωμεν δὲ τίς τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι τὸ 587^{ον} τοῦ 2348, πράττομεν οὕτω· διαιροῦμεν πρῶτον τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, τὸν ἀριθμὸν 23, διὰ τοῦ πρώτου ἀριστεροῦ ψηφίου 5 τοῦ διαιρέτου, τούτέσιν εὑρίσκομεν τὸ 5^{ον} τοῦ 23, τὸ ὅποιον εἶναι 4 διὰ τὸν 20 καὶ μένουσι 3· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸ 4 τοῦτο ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 2348 εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι 4 εἶναι τὸ 587^{ον} τοῦ 2348 ἥτοι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἄν δὲ ᾦτον δεκάδης ἢ ἑκατοντάδης κτλ. ὁ 2348, φανερόν ὅτι τὸ 587^{ον} αὐτῶν ᾔθελεν εἶσθαι 4, ἀλλὰ δεκάδης ἢ ἑκατοντάδης κτλ.

Ε'. Ἐς διαιρεθῇ καὶ ὁ 854 διὰ τοῦ 398.

Ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι καὶ τούτων τὸ πηλίκον εἶναι ἢ μονοψήφιος ἢ μονοψήφιος μὲ κλάσμα. Διὰ νὰ τὸν εὔρωμεν δὲ, διαιροῦμεν τὸ ἀριστερὸν ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ 3 τοῦ διαιρέτου, ἤγουν εὐρίσκουμεν τὸ 3 τοῦ 8, τὸ ὅποιον εἶναι 2 διὰ τὸν 6 καὶ μένουσι 2· πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον 2 ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 796 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου 854. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι 2 εἶναι τὸ 398^{ον} τοῦ 796, καὶ ὅτι τὸ 398^{ον} τοῦ 854 πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ 2. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸν 796 ἀπὸ τὸν 854 καὶ μένει 58, τοῦ ὁποίου τὸ 398^{ον} εἶναι $\frac{58}{398}$. Λοιπὸν τὸ 398^{ον} τοῦ 854 εἶναι σωστὰ 2 $\frac{58}{398}$.

Σημ. Διαιρετέος μεγαλύτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, ἔχει ψηφία ἢ ὅσα εἶναι τὰ τοῦ διαιρέτου, ὅταν τὸ ἀριστερὸν αὐτοῦ ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου ἢ ἴσον ἐνίῳτε, ἢ καὶ ἐν πλείοτερον τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου, ὅταν τὸ ἀριστερὸν αὐτοῦ ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου ἢ ἴσον ἐνίῳτε. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν διαιροῦμεν τὸ ἐν ἀριστερὸν ψηφίον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου, ὡς εἰς τὸ Ε'. παράδειγμα· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, διαιροῦμεν τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία, ὡς εἰς τὸ Α. παράδειγμα.

Γ'. Ἐς διαιρεθῇ καὶ ὁ 975 διὰ τοῦ 384.

Διαιροῦμεν καὶ ἐδῶ τὸ ἀριστερὸν ψηφίον 9 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ 3 τοῦ διαιρέτου, ἤγουν εὐρίσκουμεν ὅτι τὸ 3^{ον} τοῦ 9 εἶναι 3· πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸ 3 ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 1152 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 975· λοιπὸν τὸ 3 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην τὸ 2, τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ 3, καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 768 εἶναι μικρότερον τοῦ 975· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι

2 καὶ κλάσμα τι. Ἀφαιροῦμεν 768 ἀπὸ 975, καὶ διαιροῦντες τὸ ὑπόλοιπον 207 διὰ 384 ἔχομεν $\frac{207}{384}$. Λοιπὸν 2 $\frac{207}{384}$ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 975 διὰ 384, ἥτοι τὸ 384^{ον} τοῦ 975.

Ἐδῶ ὁ διαιρετέος 975 ἐχωρίσθη εἰς 768^{μον.} καὶ 207^{μον.} τῶν ὁποίων τὰ 384^{τα} εἶναι 2 καὶ $\frac{207}{384}$.

δ°. Ἄς διαιρεθῇ καὶ ὁ 5678 διὰ τοῦ 584.

Ἐπειδὴ ὁ 5678 εἶναι μεταξὺ τοῦ 584 καὶ τοῦ 5840, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10· καὶ ἐπειδὴ ἔχει ἐν ψηφίον πλειότερον τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ δύο ἀριστερά του ψηφία, ὁ 56, διὰ τοῦ ἀριστεροῦ 5 τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ τὸ 5^{ον} τοῦ 56 εἶναι 11, διὰ τὸ 55 καὶ μένει 1, ἐνῶ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ᾖναι μικρότερον τοῦ 10. Διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ὅχι τὸν 11 ἐπὶ 584, ἀλλὰ τὸν 9· καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι τῷ ὄντι 9 $\frac{422}{584}$.

$$\begin{array}{r} 5678 \quad | \quad 584 \\ 5256 \quad | \quad \frac{9 \quad 422}{584} \\ \hline 422 \end{array}$$

Σημ. Ὅλων τῶν προηγουμένων διαιρέσεων ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ ἀκέραιον πηλίκον ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν ἐὰν ᾖναι αὐτὸ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἢ τὸ ἀκέραιόν του μέρος. Ἀλλὰ σπανιώτατα ἔχομεν χρεῖαν νὰ πράττωμεν οὕτω· συχνότατα ἐξαρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἀκέραιον πηλίκον μόνον ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερά ψηφία τοῦ διαιρέτου. Ἐπειδὴ, ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο ἢ τρία ἀριστερά ψηφία τοῦ διαιρέτου, τότε καὶ τὸ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην γινόμενον αὐτοῦ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου θέλει εἶσθαι μεγαλύτερον ἀπὸ ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ ἀνάγκη τότε νὰ δοκιμάζεται ἄλλο ψηφίον μικρότερον. Ἄν δὲ τύχη νὰ ᾖναι ἴσον, τότε πρέπει νὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην κτλ.

Εἶναι καλὸν νὰ γυμνασθῶσι πολὺ οἱ ἀρχάριοι εἰς τοιαύτων

ἀριθμῶν διαιρέσεις· διότι πᾶσα ἄλλη πολυψηφίων ἀριθμῶν διαιρέσεις γίνεται διὰ πολλῶν τοιούτων, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εὐθύς. Ἴδού δὲ καὶ παραδείγματα τινὰ πρὸς γύμνασιν.

$$\begin{array}{r|l} 648 & 216 \\ \hline 648 & 3 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5782 & 826 \\ \hline 5782 & 7 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 739 & 94 \\ \hline 658 & 7 \frac{81}{94} \\ \hline 81 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 874 & 427 \\ \hline 854 & 2 \frac{20}{427} \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6354 & 842 \\ \hline 5894 & 7 \frac{460}{842} \\ \hline 460 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 54328 & 6782 \\ \hline 54256 & 8 \frac{72}{6782} \\ \hline 72 & \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τοῦ τρίτου παραδείγματος καὶ τῶν κατόπιν του οἱ διαιρετέοι ᾗσαν δεκάδες ἢ ἑκατοντάδες κτλ, καὶ τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα ᾗθελον εἶσθαι ὡσαύτως δεκάδες ἢ ἑκατοντάδες κτλ, καὶ τότε ἔπρεπε τὰ ὑπόλοιπα νὰ τραπῶσιν εἰς κατωτέρας τάξεως μονάδας καὶ νὰ διαιρεθῶσιν.

94. Ἄς διαιρεθῇ τώρα ὁ 863696 διὰ τοῦ 368, ᾗτοι ἄς εὑρεθῇ τὸ 368ον τοῦ 863696.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλῆτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι πολυψήφιος ἀριθμός· καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ ἓν τὰ ψηφία του, χωρίζομεν τὸν διαιρετέον εἰς ἄλλους μερικὸν διαιρετέους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες, ὅποιαςδήποτε τάξεως καὶ ἂν ᾗναι, νὰ ᾗναι πλειότεραι μὲν τῶν 368 μονάδων τοῦ διαιρέτου, ὀλιγώτεραι δὲ τῶν 3680 τοῦ δεκαπλασίου του.

$$\begin{array}{r|l} 863696 & 368 \\ \hline 736 & 2347 \\ \hline 1276 & \\ \hline 1104 & \\ \hline 1729 & \\ \hline 1472 & \\ \hline 2576 & \\ \hline 2576 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Καὶ πρῶτον μὲν αἱ 863χιλ. τοῦ διαιρετέου, ὡς πλειότεραι τῶν 368 καὶ ὀλιγώτεραι τῶν 3680, εἶναι πρῶτος μερικός

διαιρετέος, καὶ τὸ 368^{ον} αὐτῶν εἶναι μικρότερον τῶν 10^{χιλ.}. Διαιροῦντες δὲ 8 διὰ 3 ἔχομεν ἀκέραιον πηλίκον 2· καὶ ἐπειδὴ δοκιμάζοντές το, ὡς ἤδη εἰς τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν εἴπομεν, εὐρίσκομεν ὅτι 2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον μικρότερον τοῦ μερικῷ διαιρετέου 863, γράφομεν 2 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, γράφομεν τὸ γινόμενον, ἐνῶ τὸ εὐρίσκομεν, ὑπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 863, καὶ ἀφαιροῦντές το ἔχομεν ὑπόλοιπον 127^{χιλ.}· ἥτοι 1270^{ικ.}.

Εἰς ταύτας τὰς 1270^{ικ.} προσθέτομεν καὶ τὰς 6^{ικ.} τοῦ διαιρετέου, ἥτοι, ὡς συνήθως λεγουσι, καταβιάζομεν δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 127 τὰς 6^{ικ.} τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνονται 1276^{ικ.}, δεύτερος μερικὸς διαιρετέος. Ἐπειτα τὸ 3^{ον} τοῦ 12 εἶναι 4· ἀλλ' ἐπειδὴ δοκιμάζοντες εὐρίσκομεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 368 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μερικῷ διαιρετέου 1276, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ 368 εἶναι μικρότερον τοῦ 1276, γράφομεν 3 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τῶν 2 ἤδη γραμμένων χιλιάδων, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, γράφομεν τὸ γινόμενον, ἐνῶ τὸ εὐρίσκομεν, ὑπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 1276, καὶ ἀφαιροῦντές το ἔχομεν ὑπόλοιπον 172^{ικ.}· ἥτοι 1720^{δεκ.}.

Εἰς τὰς 1720^{δεκ.} προσθέτομεν καὶ τὰς 9 δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἥτοι δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 172 καταβιάζομεν τὰς 9 δεκάδας τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνεται τρίτος μερικὸς διαιρετέος 1729^{δεκ.}. Τὸ 3^{ον} τοῦ 17 εἶναι 5· ἀλλ' ἐπειδὴ δοκιμάζοντες εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μὲν 5 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δέοντος, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 368 εἶναι μικρότερον τοῦ 1729, γράφομεν 4 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τῶν 3^{ικ.}, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, γράφομεν τὸ γινόμενον 1472, ἐνῶ τὸ εὐρίσκομεν, ὑπὸ τὸν 1729, καὶ ἀφαιροῦντές το ἔχομεν ὑπόλοιπον 257^{δεκ.}· ἥτοι 2570^{μον.}.

Καταβιάζοντες δὲ καὶ τὰς 6 μονάδας τοῦ διαιρετέου δεξιά

τοῦ ὑπολοίπου 257, ἔχομεν τέταρτον μερικὸν διαιρετέον 2576^{μον.}. Τελευταῖον διαιροῦντες τὰς μονάδας ταύτας διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἄνωτέρω, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ 368^{ον} τῶν 2576^{μον.} εἶναι σωστὰ⁹ 7, τὸ ὑποῖον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 368 ἔχομεν 0 ὑπόλοιπον.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι διὰ τῆς πράξεως ταύτης ὁ μὲν πρῶτος μερικὸς διαιρετέος 863^{χιλ.} ἐχωρίσθη εἰς 736 καὶ 127, ὁ δὲ δεύτερος 1276^{ἐκ.} εἰς 1104 καὶ 172, ὁ δὲ τρίτος 1729^{δεκ.} εἰς 1472 καὶ 257, ὁ δὲ τέταρτος εἶναι 2576^{μον.}. Ἐκ δὲ τούτων εἶναι φανερόν ὅτι ὁ διαιρετέος 863696 ἐχωρίσθη εἰς 736^{χιλ.} 1104^{ἐκ.} 1472^{δεκ.} 2576^{μον.} τῶν ὁποίων τὰ 368^α εἶναι 2 3 4 7 ἥγουν ὁ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου γραφθεὶς ἀριθμὸς 2347. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἥτοι τὸ 368^{ον} τοῦ 863696.

Ἄλλως δὲ εἶναι φανερόν καὶ ἐκ τῆς ἀντικρῆς 2576 προσθέσεως ὅτι ὁ 863696 εἶναι ἄθροισμα τῶν 1472 1104 736 2576^{μον.}.

95. Ἄς διαιρεθῇ καὶ ὁ 4479264 διὰ τοῦ 7362, ἥτοι ἄς εὔρεθῇ τὸ 7362^{ον} τοῦ 4479264.

4479264	7362
44172	608 ³¹⁶⁸ / ₇₃₆₂
62064	
58896	
3168	

Εἰδὼ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος 44792^{ἐκ.}, διότι εἶναι πλειότεραι τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου καὶ ὀλιγώτεραι τῶν μονάδων τοῦ δεκαπλασίου του. Διαιροῦντες δὲ 44792^{ἐκ.} διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἄνωτέρω, εὐρίσκομεν πηλίκον 6^{ἐκ.} καὶ ὑπόλοιπον 620^{ἐκ.}. Καταβάζοντες δὲ τὰς 6^{δεκ.} τοῦ διαιρετέου δεξιά τοῦ 620, ἔχομεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 6206^{δεκ.}. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ δεκάδες αὗται εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν μονάδων τοῦ

διαιρέτου, τὸ πηλίκον δὲν εἶναι οὐδὲ μία δεκάς, ἀλλὰ κλάσμα τῆς δεκάδος· λοιπὸν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τῶν ἥδη γραμμένων 6^{ix} · πρέπει νὰ γραφθῇ 0. Μετὰ τοῦτο καταβάζομεν δεξιά τοῦ $6206^{\text{δεx}}$ καὶ τὰς $4^{\text{μον}}$ τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχομεν τρίτον μερικὸν διαιρετέον $62064^{\text{μον}}$. Τελευταῖον διαιρούντες καὶ τοῦτον διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν πηλίκον $8 \frac{3168}{7362}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τοῦ 0.

Διὰ τῆς πράξεως ὁ διαιρέτης ἐχωρίσθη εἰς

$$44172^{\text{ix}}. \quad 0^{\text{δεx}}. \quad 58896^{\text{μον}}. \quad 3168^{\text{μον}}.$$

τῶν ὁποίων τὰ 7362^{x} εἶναι 6 0 8 $\frac{3168}{7362}$,
ἅτοι ὁ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου τεθεὶς ἀριθμὸς 608 $\frac{3168}{7362}$.
Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου βλέπομεν ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, ὅστις γίνεται ἀφοῦ κατὰβιάσωμεν ἐν ψηφίον τοῦ διαιρετέου δεξιά ὑπολοίπου τινὸς, ἔχῃ μονάδας τάξεως ὅποιαςδήποτε ὀλιγωτέρας τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου, πρέπει πρῶτον νὰ θέσωμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, καὶ ἔπειτα νὰ κατὰβιάζωμεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ διαιρῶμεν.

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἀρχίζομεν καὶ ταύτας τὰς διαιρέσεις ἀριστερόθεν, εἶναι ὁ ἐν ἀριθμ. 89 ἐκτεθεὶς, ὅπου παραπέμπομεν.

96. Γενικῶς, ἡ διαίρεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελεῖται οὕτως· Ἀφοῦ γράφθῃ ὁ διαιρέτης δεξιά τοῦ διαιρετέου καὶ γραμμὴ μεταξὺ αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸν διαιρέτην, θεωρεῖται ἐκ τῶν ἀριστερῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου ὡς πρῶτος μερικὸς διαιρετέος ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἔχῃ ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, ἂν αἱ μονάδες του, ὅποιαςδήποτε τάξεως καὶ ἂν ᾦναι, ᾦναι ἰσάριθμοι ἢ πλείότεραι τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου· εἰδὲ μὴ, νὰ ἔχῃ καὶ ἐν πλείοτερον. Τοῦ μερικοῦ τούτου διαιρετέου διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὸ ἐν ἀριστερὸν ψηφίον κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, καὶ τὰ δύο

κατὰ τὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀκέραιον τούτων πηλίκον δοκιμάζεται πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου ἢ ἐπὶ ὅλον, ὅταν χρειασθῇ, ἂν παράγῃ γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ μερικοῦ διαιρετέου· ἐὰν δὲ δὲν συμβαίῃ τοῦτο, δοκιμάζεται ὡσαύτως ἄλλο ψηφίον κατὰ μονάδα μικρότερον. — Ἐπειτα τὸ ψηφίον, τὸ ὅποιον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγῃ γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, γράφεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸν μερικὸν διαιρέτην, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτὸν καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβάλλεται τὸ ἀκόλουθον τοῦ διαιρετέου ψηφίον· οὕτω γίνεται δεύτερος μερικὸς διαιρετέος. — Καὶ ἂν μὲν τούτου αἱ μονάδες ἦναι ἰσάριθμοι ἢ πλείότεραι τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου, διαιρεῖται ὡς ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος· ἂν δὲ ἦναι ὀλιγώτεραι, τίθεται Θ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τοῦ ἤδη γραμμένου ψηφίου, καταβάλλεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου δεξιὰ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου καὶ οὕτω γίνεται τρίτος μερικὸς διαιρετέος, ὅστις διαιρεῖται ὡς ὁ πρῶτος, καὶ οὕτω καθέξης ἕως καὶ καταβασθῇ καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, κτ.λ.

Ὁ δὲ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου γραμμένος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

97. Ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται συντομώτερα, ἂν οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ μετὰ τούτους ἀφαιρέσεις γίνωνσι συγχρόνως, ὡς θέλομεν πράξει εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 38645 διὰ τοῦ 4793.

Τὸ 4^{ον} τοῦ 38 εἶναι 9 διὰ τὸν 36· ἀλλ' ἐπειδὴ 9 ἐπὶ 4793 παράγῃ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 38645, 8 δὲ ἐπὶ 4793 παράγῃ μικρότερον, γράφομεν 8 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, καὶ ἔπειτα λέγομεν 3 εἰς 8 24, ἀπὸ 25 (προσθέτοντες νοερῶς 20 μιν· ἦτοι 2^{δεκ.} εἰς τὰς 5 τοῦ διαιρετέου, διὰ νὰ γείνῃ δυνατὴ ἡ ἀφαιρέσις) μένει 1, τὸ ὅποιον γράφομεν ὑπὸ τὸ 8. Ἐπειτα

8 εἰς 9 72, καὶ 2 74 (ἤγουν προσθέτομεν 2^{δεκ.} εἰς τὸ γινόμενον 72 ἀντὶ νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς 4 δεκάδας τοῦ διαιρετέου κατὰ 2 διὰ τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν (62 Σημ.)), 74 ἀπὸ 74 (προσθέτοντες πάλιν νοερῶς 70^{μον.} ἥτοι 7^{δεκ.} εἰς τὰς 4^{δεκ.} τοῦ διαιρετέου, διὰ νὰ γείνη δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις) μένει 0, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 4. Ἐπειτα 7 εἰς 8 56, καὶ 7 63 (διὰ τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν ἀπὸ 74), 63 ἀπὸ 66 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 6. Τελευταῖον 4 εἰς 8 32, καὶ 6 38, ἀπὸ 38 0. Διαιροῦντες ἔπειτα καὶ τὸ ὑπόλοιπον 301 ἔχομεν $\frac{301}{4793}$. Ὡστε τὸ πηλίκον εἶναι $8\frac{301}{4793}$.

Ἰδοὺ ὁ τύπος τοιαύτης διαιρέσεως.

$$\begin{array}{r|l} 768240 & 495 \\ 2732 & \\ \hline 2574 & 1552 \\ 990 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

98. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, τὸ πηλίκον εὐρίσκεται καὶ ἂν ὁ διαιρετέος διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐνὸς παραγοῦτος, καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον πηλίκον διὰ τοῦ ἄλλου.

Ἄς διαιρεθῇ ὁ 648 διὰ 36, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 4.

Ἡ μονάς, ἥτις εἶναι τὸ 36^{ον} τοῦ 36, εἶναι προσέτι καὶ τὸ 4^{ον} τοῦ 9^{ου} τοῦ 36. Λοιπὸν καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 648 διὰ 36, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ᾖ τὸ 36^{ον} τοῦ 648, πρέπει νὰ ᾖ προσέτι καὶ τὸ 4^{ον} τοῦ 9^{ου} τοῦ 648. Λοιπὸν πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 648 διὰ 9, διὰ νὰ εὐρεθῇ τὸ 9^{ον} αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα τὸ πηλίκον 72, ἥτοι τὸ 9^{ον} τοῦ 648, νὰ διαιρεθῇ διὰ 4, διὰ νὰ εὐρεθῇ τὸ 4^{ον} αὐτοῦ 18. Ὁ δὲ 18, ὡς 4^{ον} τοῦ 9^{ου} τοῦ 648, εἶναι καὶ τὸ 36^{ον} τοῦ 648, ἥτοι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἰδοὺ ὁ τύπος.

$$\begin{array}{r|l} 648 & 9 \\ \hline 72 & 4 \\ \hline 18 & \end{array}$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἀριθμὸς τις πρόκηται νὰ διαιρεθῇ

ἐκ ἄλλου καὶ τὸ προκύπτει πηλίκον διὰ τρίτον ἀριθμοῦ, τότε ὁ ἀριθμὸς εἴμπορεῖ νὰ διαιρῇται ἅπαξ διὰ τοῦ γινόμενου τῶν δύο διαιρετῶν. Π. χ. ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ ὁ 648 διὰ 9 καὶ τὸ πηλίκον διὰ 4, εἴμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ ὁ 648 διὰ τοῦ γινόμενου τοῦ 9 ἐπὶ 4, ἥτοι διὰ τοῦ 36, διότι τὸ 4^{ον} τοῦ 9^{ου} τοῦ 648 εἶναι τὸ 36^{ον} αὐτοῦ.

Ὡσχύτως τὸ 7^{ον} τοῦ 8^{ου} ἀριθμοῦ τινος εἶναι τὸ 56^{ον} αὐτοῦ — Τὸ 6^{ον} τοῦ 5^{ου} ἀριθμοῦ τινος εἶναι τὸ 30^{ον} αὐτοῦ.

99. Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἄλλον, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιασθέντα ἀριθμόν. Π. χ. ἂν ὁ 12 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8 καὶ τὸ γινόμενον 96 διαιρεθῇ διὰ 8, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι 12. Ἐπειδὴ ὁ 96 εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ 12, ἢ ἀντιστρόφως ὁ 12 εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ 96· ἀλλὰ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 96 διὰ 8 εὐρίσκεται τὸ ὄγδοον τοῦ 96, λοιπὸν θέλει εὑρεθῇ ὁ 12.

Ἀντιστρόφως, ἂν πρῶτον διαιρεθῇ ὁ 96 διὰ 8, καὶ τὸ πηλίκον 12 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8, δῆλον ὅτι θέλει εὑρεθῇ ὁ 96.

Ἐκ δὲ τούτων γίνεται φανερόν ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τινος, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ, εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς· ὡσαύτως τὸ τρίτον τοῦ τριπλασίου, ἢ τὸ τριπλάσιον τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ τινος, εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Περὶ Λόγου καὶ ἀναλόγων ἀριθμῶν.

100. Ἐὰν ἀριθμὸς τις νοῆται ὅτι σύγκειται ἐξ ἄλλου ἢ ἐκ τινος πολλοστοῦ αὐτοῦ, ὅπως τρίτος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐκ τινος πολλοστοῦ αὐτῆς, ὁ τρίτος ἀριθμὸς, θεωρούμενος ὅτι δεικνύει ἢ λέγει πῶς ὁ πρῶτος σύγκειται ἐκ τοῦ δευτέρου, ὀνομάζεται λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον, ἢ ἀοριστότερον, λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅταν νοῆται ὁ εἷς ὅτι σύγκειται ἐκ

τοῦ ἄλλου, ὡς ἀριθμός τις ἐκ τῆς μονάδος, ἀλλ' ὅχι καὶ τίς ἐκ τίνος. Π. γ. ἐὰν ὁ 24 νοῇται ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ 6, σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ὡς ὁ 4 ἐκ τῆς μονάδος, ἤγουν ὁ 24 εἶναι τετράκις 6· ὁ 4 λοιπὸν εἶναι λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 6. Ὡσαύτως, ἐὰν νοῇται ὁ 18 ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ 12, σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ὡς ὁ $\frac{3}{2}$ ἐκ τῆς μονάδος, ἤγουν ὁ 18 εἶναι $\frac{3}{2}$ τοῦ 12· λοιπὸν ὁ $\frac{3}{2}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 18 πρὸς τὸν 12.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι πάντοτε ὁ λόγος τοῦ γινομένου πρὸς τὸν πολλαπλασιαστὴν· διότι ὅπως σύγκειται αὐτὸς ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐκ τίνος πολλοῦ αὐτῆς, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον σύγκειται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἢ ἐκ τίνος πολλοῦ αὐτοῦ. Καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ πηλίκον· διότι, ὅποια εἶναι ἡ μονάς πρὸς τὸν διαιρέτην, τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον, ἢ ἀντιστρόφως, ὅπως σύγκειται ὁ διαιρέτης ἐκ τῆς μονάδος, οὕτω σύγκειται καὶ ὁ διαιρετέος ἐκ τοῦ πηλίκου. Ἡ ἄλλως, ὁ διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος κτλ ἄλλου ἀριθμοῦ ἔχει λόγον πρὸς αὐτὸν 2, 3, 4, κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις εἶναι ἡμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ, ἄλλου ἀριθμοῦ ἔχει λόγον πρὸς αὐτὸν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτλ.

Ὁ λόγος ἀριθμοῦ ἀκεραίου πρὸς ἄλλον ἀκέραιον εὐς ἴσκειται ἂν διαμεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου.

Ἄς εὕρεθῇ ὁ λόγος π. γ. τοῦ 45 πρὸς τὸν 9, ἥτοι ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, ἐξ ὧν 9 σύγκειται ὁ 45. Διαιροῦμεν τὸν 45 διὰ τοῦ 9, καὶ τὸ πηλίκον 5 λέγω ὅτι εἶναι ὁ λόγος τοῦ 45 πρὸς τὸν 9, ἥτοι ὅτι ὁ 45 εἶναι πεντάκις 9. Ἐπειδὴ ὁ 5, ὡς ἔννατον τοῦ 45, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 παράγει 45· ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδεδειγμένα (69 ἀ., 81) καὶ ὁ 9 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 παράγει 45, ἥτοι ὁ 45 εἶναι καὶ πεντάκις 9· λοιπὸν ὁ 5 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 45 πρὸς τὸν 9.

Ὡσαύτως εὐρίσκεται καὶ ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ὁ λόγος τοῦ 96 πρὸς τὸν 12 εἶναι 8, ὅτι ὁ λόγος τοῦ 144 πρὸς τὸν 24 εἶναι

6, κτλ. Ἀντιστρόφως δὲ ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς 96 εἶναι $\frac{1}{8}$ ἥτοι $\frac{1}{8}$ · διότι, ἀφοῦ ὁ 96 εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ 12, ὁ 12 εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ 96. Ὡσαύτως καὶ ὁ λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 144 εἶναι $\frac{1}{6}$ ἢ $\frac{1}{6}$.

101. Δύο ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, ὀνομάζονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἄλλους. Π. χ. ὁ 45 πρὸς τὸν 9 ἔχει λόγον 5· ὁ 35 πρὸς τὸν 7 ἔχει λόγον 5· λοιπὸν οἱ 45 καὶ 9 εἶναι ἀνάλογοι τῶν 35 καὶ 7, ἢ ἄλλως, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 35 καὶ 7. Ὡσαύτως οἱ 12 καὶ 3 εἶναι ἀνάλογοι τῶν 20 καὶ 5, διότι ὁ λόγος καὶ τῶν δύο πρώτων καὶ τῶν δύο ἄλλων εἶναι ὁ αὐτὸς 4.

Λέγουσιν ἔτι ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 45, 9, 35, 7, καθ' ἓν ἔχουσι τῆξιν, εἶναι ἀνάλογοι· καὶ περὶ ἄλλων ὡσαύτως.

Σημ. Θέλουμεν ἐξετάσει τοὺς ἀναλόγους ἀριθμοὺς τελειότερα εἰς ἄλλαι μέρει. Ἐδῶ θέλομεν εἰπεῖ ὀλίγα τινὰ περὶ γινόμενων καὶ πηλίκων ἀναλόγων, τῶν μὲν πρὸς τοὺς παράγοντάς των, τῶν δὲ πρὸς τοὺς διαιρετέους ἢ τοὺς διαιρέτας.

102. Τὰ γινόμενα δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστήν εἶναι ἀνάλογα τῶν πολλαπλασιασθέντων ἀριθμῶν ἥτοι τῶν πολλαπλασιαστέων. Π. χ. τὰ γινόμενα 432 καὶ 144 τοῦ 72 ἐπὶ 6 καὶ τοῦ 24 ἐπὶ 6 εἶναι ἀνάλογα τῶν 72 καὶ 24. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 72 πρὸς 24 εἶναι 3, ἤγουν ὁ 72 εἶναι 24 καὶ 24 καὶ 24· $\frac{72}{24} = 3$ καὶ ἐνῷ πολλαπλασιάζεται ὁ 72 ἐπὶ 6, πολλα- $\frac{72}{6} = 12$ πλάσιάζεται ὁ 24 καὶ 24 καὶ 24 ἐπὶ 6. Ἀλλὰ $\frac{432}{144} = 3$ 24 ἐπὶ 6 παράγει 144· λοιπὸν 72 ἐπὶ 6 θέλει παράξει 144 καὶ 144 καὶ 144, ἤγουν τρεῖς 144· λοιπὸν ὁ 432 εἶναι τρεῖς 144. Λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 432 καὶ 144 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ 72 καὶ 24. Λοιπὸν τὰ γινόμενα εἶναι ἀνάλογα τῶν πολλαπλασιαστέων, πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ὡς ὁ 72 εἶναι τριπλάσιος τοῦ 24, οὕτω καὶ τὸ 432 εἶναι τριπλάσιον τοῦ 144· ἢ ἀντιστρόφως, ὡς ὁ 24 εἶναι τρίτον τοῦ 72, οὕτω καὶ ὁ 144 εἶναι τρίτον τοῦ 432.

103. Τὰ γινόμενα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ δύο διαφόρους πολλαπλασιαστὰς εἶναι ἀνάλογα τῶν πολλαπλασιαστῶν.

Π. χ. τὰ γινόμενα	1568	καὶ	392	56	56	56
τοῦ 56 ἐπὶ 28 καὶ ἐπὶ 7 εἶναι ἀνά-				28	7	7
λογα τῶν 28 καὶ 7. Ἐπειδὴ ὁ λόγος				448	392	392
τοῦ 28 πρὸς 7 εἶναι 4, ἔχουν ὁ 28	112					4
εἶναι τετράκις 7, ἢ γινόμενον τοῦ 7	1568					1568

ἐπὶ 4. Ἄν λοιπὸν ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 56 ἐπὶ 28 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7 καὶ τὸ γινόμενον 392 ἐπὶ 4 (73 καὶ 80), εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον 1568 τοῦ 56 ἐπὶ 28 θέλει εἶσθαι τετράκις 392. Λοιπὸν τὰ γινόμενα 1568 καὶ 392 εἶναι ἀνάλογα τῶν πολλαπλασιαστῶν 28 καὶ 7, ἐπὶ τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζεται ὁ 56.

Ὡς ὁ 28 εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 7, οὕτω καὶ ὁ 1568 εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 392· ἢ ἀντιστρόφως, ὡς ὁ 7 εἶναι τέταρτον τοῦ 28, οὕτω καὶ ὁ 392 εἶναι τέταρτον τοῦ 1568.

104. Ἐκ τῶν εἰρημένων συμπεραίνομεν τώρα μόνον τοῦτο, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου ἢ τριπλασίου κτλ τοῦ ἐνὸς ἐπὶ τὸ ἡμισυ ἢ τρίτον κτλ τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα. Π. χ. τὸ γινόμενον 288 τοῦ 24 ἐπὶ 12 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ 24 ἥτοι τοῦ 144 ἐπὶ τὸ ἕκτον τοῦ 12 ἥτοι τὸ 2. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ 12 κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα πρέπει νὰ ᾔηται τὸ ἕκτον τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ γινομένου

24	144	
τοῦ 144 ἐπὶ 2. Ἀλλὰ τὸ ἕκτον τοῦ ἑξαπλασίου	12	2

ἀριθμοῦ ὁποιοῦδήποτε εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς

288	288
-----	-----

(99)· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ 12 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ 144 ἐπὶ 2.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις εἰμπορεῖ νὰ γείνη καὶ περὶ ὁποίωνδήποτε ἀριθμῶν ἀκεραίων, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ γιν. κτλ. Τοῦτο δὲ ἐπιβεβαιούται καὶ διὰ τῆς πράξεως.

Σημ. Ἐνίοτε δοκιμάζουσι τὸν πολλαπλασιασμὸν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διπλασίου τοῦ ἐνὸς παράγοντος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἄλλου· καὶ ἂν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου πολλαπλασιασμοῦ ᾖναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ πρώτου, συμπεραίνουσιν ὅτι εἶναι σωστὸν τὸ πρῶτον.

105. Τὰ πηλικά δύο ἀριθμῶν διαιρεθέντων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου εἶναι ἀνάλογα τῶν δύο διαιρεθέντων ἀριθμῶν ἥτοι τῶν διαιρετέων. Π. χ. τὰ πηλικά 30 καὶ 6 τοῦ 240 διὰ 8 καὶ τοῦ 48 διὰ 8 εἶναι ἀνάλογα τῶν 240 καὶ 48. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 240 πρὸς τὸν 48 εἶναι $240 \begin{array}{|l} 8 \\ \hline \end{array} 48 \begin{array}{|l} 8 \\ \hline \end{array}$ 5, ἤγουν ὁ 240 εἶναι 48 καὶ 48 καὶ 48 $\begin{array}{|l} 30 \\ \hline \end{array}$ 6 καὶ 48 καὶ 48· ἀλλὰ διὰ νὰ διαιρεθῇ ὁ 240 διὰ 8, εἴμφορεῖ νὰ διαιρεθῇ ὁ 48 καὶ 48 κτλ διὰ 8· 48 δὲ διὰ 8 δίδει πηλίκον 6· λοιπὸν 240 διὰ 8 θέλει δώσει πηλίκον πεντάκις 6· λοιπὸν ὁ 30 εἶναι πεντάκις 6. Λοιπὸν τὰ πηλικά 30 καὶ 6 εἶναι ἀνάλογα τῶν διαιρετέων 240 καὶ 48. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ὡσαύτως.

Ὡς ὁ 240 εἶναι πενταπλάσιος τοῦ 48, οὕτω καὶ τὸ 30 εἶναι πενταπλάσιον τοῦ 6· ἢ ἀντιστρόφως, ὡς ὁ 48 εἶναι πέμπτον τοῦ 240, οὕτω καὶ τὸ 6 εἶναι πέμπτον τοῦ 30.

106. Τὰ πηλικά τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ δύο διαφόρων διαιρετῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν διαιρετῶν, ἤγουν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πηλίκου πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ δευτέρου διαιρέτου πρὸς τὸν πρῶτον. Π. χ. τὰ πηλικά 8 καὶ $56 \begin{array}{|l} 7 \\ \hline \end{array} 56 \begin{array}{|l} 28 \\ \hline \end{array} 56 \begin{array}{|l} 7 \\ \hline \end{array}$ 2 τοῦ 56 διὰ 7 καὶ διὰ 28 εἶναι $\begin{array}{|l} 8 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|l} 2 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{|l} 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|l} 4 \\ \hline \end{array}$ ἀνάλογα τῶν 28 καὶ 7 καὶ ὅχι τῶν 7 καὶ 28. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 28 πρὸς 7 εἶναι 4, ἥτοι ὁ 28 εἶναι τετράκις 7, ἢ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 4. Ἄν λοιπὸν ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ ὁ 56 διὰ 28 διαιρεθῇ διὰ 7 καὶ τὸ πηλίκον 8 διὰ 4 (98), εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον 2 τοῦ 56 διὰ 28 εἶναι τὸ 4^{ον} τοῦ 8, ἥτοι ὅτι τὸ πηλίκον 8 εἶναι τετραπλάσιον τοῦ 2, ὡς ὁ διαιρέτης 28 εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 7. Λοιπὸν τὰ πηλικά 8 καὶ 2 εἶναι

ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν διαιρετῶν τῶν 7 καὶ 28, ἤγουν εἶναι ἀνάλογα τῶν 28 καὶ 7.

Ἐνῷ ὁ 28 εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 7, τὸ πηλίκον 2 εἶναι τὸ 4^{ον} τοῦ 8· ἡ ἀντιστρόφως, ἐνῷ ὁ 7 εἶναι τὸ 4^{ον} τοῦ 28, τὸ πηλίκον 8 εἶναι τετραπλάσιον τοῦ 2.

107. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων συμπεραίνομεν τώρα μόνον τούτο, ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ πηλίκον ἡ τῶν αὐτῶν πολλαπλασίων των ἡ τῶν αὐτῶν πολλοστῶν των εἶναι ἴσα. Π.χ. τὸ πηλίκον 48 τοῦ 576 διὰ 12 καὶ τὸ πηλίκον τῶν ἐκταπλασίων των 4032 διὰ 84, ἡ τὸ πηλίκον τῶν τετάρτων αὐτῶν 144 διὰ 3 εἶναι ἴσα.

$$4032 \mid 84 \quad 576 \mid 12 \quad 144 \mid 3$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα τὸ μὲν πηλίκον τοῦ 4032 διὰ 84 πρέπει νὰ ᾔναι τὸ ἑξῆς τοῦ ἐκταπλασίου τοῦ πηλίκου τοῦ 576 διὰ 12, τὸ ὁποῖον εἶναι αὐτὸ τὸ πηλίκον τοῦ 576 διὰ 12· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 144 διὰ 3 πρέπει νὰ ᾔναι τὸ τέταρτον τοῦ τετραπλασίου τοῦ πηλίκου τοῦ 576 διὰ 12, τὸ ὁποῖον εἶναι αὐτὸ τὸ πηλίκον τοῦ 576 διὰ 12. Λοιπὸν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν κ.τ.λ. Ἄλλως ἐπιβεβαιούται τοῦτο καὶ διὰ τῆς πράξεως.

Σημ. Ἐνὶστε δοκιμάξοις τὴν διείρεσιν διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἡμίσεων τῶν διαιρεθέντων ἀριθμῶν· καὶ ἂν τὸ δεῦτερον πηλίκον ᾔναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον, συμπεραίνουσιν ὅτι εἶναι σωστὸν τὸ πρῶτον.

108. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσι μηδενικά εἰς τὸ τέλος των, πρῶτον ἐξαλείφονται ἀπὸ τοὺς δύο ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ ἔχων τὰ ὀλιγώτερα καὶ ἔπειτα διαιρεῖται τούτων ὁ εἰς διὰ τοῦ ἄλλου. Ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ π. χ. ὁ 468000 διὰ τοῦ 6900, διαιρεῖται ὁ 4680 διὰ 69. Ἐπειδὴ οὗτοι εἶναι τὰ ἑκατοστὰ ὁ μὲν 4680 τοῦ 468000, ὁ δὲ 69 τοῦ 6900, κατὰ δ. τ' ἀνωτέρω τὸ πηλίκον τοῦ 468000 διὰ 6900 καὶ τὸ πηλίκον τῶν ἑκατοστῶν αὐτῶν 4680 διὰ 69 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Σημ. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ μηδενικά εἰς τὸ τέλος του, οἷον ὁ 4600, τότε διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ 46 καὶ τὸ πηλίκον διὰ 100 (ὡς θελομεν ἰδεῖ εἰς τὸ τέταρτον κεφ.)· διότι ὁ 4600 εἶναι γινόμενον τοῦ 46 ἐπὶ 100.

Σημ. Οἱ θελοντες νὰ λύσωσιν ἀπὸ τώρα προβλήματα, εὕρισκουσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου κεφαλαίου.

*Περὶ Διαιρετῶν καὶ ἰδίως περὶ Μεγίστου
κοινοῦ διαιρέτου.*

109. Εἶδομεν ἤδη ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τινῶν μὲν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀκέραιον, ἄλλων δὲ μικτὸς ἀριθμὸς. Ἡ διαιρέσις, ἣτις φέρει εἰς ἀκέραιον πηλίκον, ὀνομάζεται ἀκριβής, ἡ δὲ φέρουσα εἰς μικτὸν μὴ ἀκ. ιβής. Ὁ δὲ διαιρετέος ἀκριβοῦς διαιρέσεως, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις, ἂν ᾔθελε διαιρεθῇ δι' ἄλλου, ᾔθελε δώσει ἀκέραιον πηλίκον, εἴμπορεῖ νὰ ὀνομάζεται διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἄλλου· οὗτος δὲ ὁ ἄλλος, ὅστις δύναται νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν διαιρέσιμον, λέγεται διαιρέτης αὐτοῦ, ἀλλ' εἰς μερικωτέραν σημασίαν. Κατὰ ταῦτα ἡ διαίρεσις τοῦ 36 διὰ 12 εἶναι ἀκριβής, διότι τὸ πηλίκον 3 εἶναι ἀκέραιον, καὶ ὁ 36 εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 12, ἡ ὁ 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ 36. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις τοῦ 36 διὰ 16 δὲν εἶναι ἀκριβής, διότι τὸ πηλίκον εἶναι μικ. ὃν $2\frac{4}{16}$, καὶ ὁ 36 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 16, ἡ ὁ 16 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 36.

Σημ. α'. Ὁ διαιρέσιμος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, οἷον ὁ 36 εἶναι ἴσος μὲ 3 ἐπὶ 12· ὁ δὲ μὴ διαιρέσιμος εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ γινομένου τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος, οἷον ὁ 36 εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ 2 ἐπὶ 16 ἥτοι 32 καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ 4 τοῦ κλάσματος $\frac{4}{16}$. Τὸ 4 τοῦτο καὶ ὅ,τι ὅμοιον, τὸ ὅποιον μένει ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, θέλομεν τὸ ὀνομάζει εἰς τὸ ἐξῆς κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι ἡ ἀκριβής διαίρεσις δὲν ἀφίνει κατάλοιπον. ἔτι δὲ εἰς τοῦτο τὸ μέρος ἡ λέξις διαιρέτης θέλει ἐκλαμβάνεσθαι πάντοτε εἰς τὴν μερικωτέραν σημασίαν, τὴν ὁποίαν εἶδομεν ἤδη.

Σημ. β'. Πληροφορούμεθα ὅτι τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ δι' ἄλλου

εἶναι ἀκέραιον, καὶ ἐπομένως ὅτι ὁ εἰς εἶναι διαιρέτης τοῦ ἄλλου, ἢ διὰ τῆς διαιρέσεως, ἢ καὶ διὰ τινων χαρακτήρων, τοὺς ὁποίους θέλομεν ἐκθέσει μετ' ὀλίγον. Ἐάν δὲ τύχη νὰ ἡξεύρωμεν ὅπως-δήποτε ὅτι ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρέτης ἄλλου, ἀνάγκη τότε νὰ νοῶμεν καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἶναι ἀκέραιον.

Σημ. γ'. Ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ ἕκαστος ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης ἑαυτοῦ (85).

110. Τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι διαιρέσιμοι ἕκαστος διὰ δύο ἢ πολλῶν ἄλλων, ἢ ἄλλως, ἔχουσιν ἕκαστος δύο ἢ πολλοὺς ἄλλους διαιρέτας, οἷον ὁ 15, ὅστις ἔχει διαιρέτας τὸν 3 καὶ 5, καὶ ὁ 36, ὅστις ἔχει διαιρέτας τοὺς ἐξῆς 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18· οἱ δὲ δὲν εἶναι διαιρέσιμοι δι' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, οἷον οἱ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, κτλ. Τούτους μὲν τοὺς ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν *πρωτοτύπους*, ἐκείνους δὲ *παραγώγους*, ἢ *διαίρεσίμους*. Οἱ πρωτότυποι μόνον ἐκ τῆς μονάδος γίνονται δι' ἐπαναλήψεως, οἱ δὲ λοιποὶ εἴμποροῦν νὰ γείνωσι καὶ ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν, κυρίως δὲ ἐκ τῶν πρωτοτύπων, διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

111. Ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι διαιρέτης δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, ὀνομάζεται *κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν, οἷον ὁ 12 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 36 καὶ 24, ὁ 7 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 35 καὶ 21. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ 36 καὶ 24, 35 καὶ 21, καὶ ὅσοι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην διάφορον τῆς μονάδος, εἴμποροῦν νὰ ὀνομάζωνται *συνδιαίρετοί*. Εἶναι δὲ καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, οἷον οἱ 12 καὶ 5· διότι ὁ 12 ἔχει μὲν διαιρέτας τοὺς 2, 3, 4, 6, ἀλλ' οὐδεὶς τούτων εἶναι καὶ τοῦ 5 διαιρέτης· ὁ δὲ 5 εἶναι μὲν διαιρέτης ἑαυτοῦ, ἀλλ' ὅχι καὶ τοῦ 12· ὥστε οἱ 12 καὶ 5 δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, ὅσοι δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, ὀνομάζομεν *ἀσυνδιαίρετους*. Τοιοῦτοι εἶναι καὶ οἱ 15 καὶ 8, καὶ οἱ 9 καὶ 14.

112. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν. Π. χ. ὁ 12, ὅστις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ τοῦ 36, εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου των 60. Ἐπειδὴ, ὄντος τοῦ 12 διαιρέτου καὶ τοῦ 24 καὶ τοῦ 36, τὰ δύο πηλίκα θέλουσιν εἶσθαι ἀκέραια· λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμά των θέλει εἶσθαι ἀκέραιον. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων πηλίκων εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ κεφαλαίου 60 διὰ 12· λοιπὸν τὸ πηλίκον τοῦ 60 διὰ 12 εἶναι ἀκέραιον· λοιπὸν ὁ 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ 60 ἥτοι τοῦ κεφαλαίου τοῦ 24 καὶ 36 (109). Ἀλλ' αὕτη ἡ ἀπόδειξις εἰμπορεῖ νὰ γείνη καὶ περὶ ὁποίωνδήποτε δύο ἄλλων ἀριθμῶν· λοιπὸν πᾶς κοινὸς διαιρέτης κτλ.

113. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Π. χ. ὁ 9, ὅστις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 108 καὶ τοῦ 45, εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς των 63. Ἐπειδὴ, ἐνῷ ὁ 63 εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ 108 καὶ 45, ὁ 108 εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ 45 καὶ 63 (60), καὶ διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τοῦ 108 διὰ 9 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πηλίκων τοῦ 45 διὰ 9 καὶ τοῦ 63 διὰ 9. Ἀλλ' ὄντος τοῦ 9 διαιρέτου τοῦ 108, τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πηλίκων τοῦ 45 διὰ 9 καὶ τοῦ 63 διὰ 9 εἶναι ἀκέραιον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 εἶναι καὶ τοῦ 45 διαιρέτης, διὰ τοῦτο τὸ ἐν τῶν δύο πηλίκων, τὸ τοῦ 45 διὰ 9, εἶναι ἀκέραιον. Λοιπὸν καὶ τὸ ἄλλο, τὸ τοῦ 63 διὰ 9, πρέπει νὰ ᾖναι ἀκέραιον· διότι ἄλλως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πηλίκων δὲν ἦθελεν εἶσθαι ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Λοιπὸν ὁ 9 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς 63 τοῦ 108 καὶ τοῦ 45. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ἀριθμῶν ὡσαύτως. Ὡστε πᾶς κοινὸς διαιρέτης κτλ.

114. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι διαιρέτης ἄλλου ἀριθμοῦ, εἶναι διαιρέτης καὶ ὁποιοῦνδήποτε πολλαπλασίου αὐτοῦ. Π. χ. ὁ 6, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 24, εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ 120. Ἐπειδὴ εἶδομεν (105) ὅτι τὸ πηλίκον

τοῦ πενταπλάσιου τοῦ 24 ἤτοι τοῦ 120 διὰ 6 πρέπει νὰ ᾔναι πενταπλάσιον τοῦ πηλίκου τοῦ 24 διὰ 6. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ 6 εἶναι ἀκέραιον, διότι ὁ 6 εἶναι διαιρέτης τοῦ 24· λοιπὸν καὶ τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ 120 διὰ 6 θέλει εἶσθαι ἀκέραιον· λοιπὸν ὁ 6 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 120. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ἀριθμῶν ὡσαύτως. Λοιπὸν πᾶς ἀριθμὸς κτλ.

Τὸ αὐτὸ τοῦτο ἐκφράζεται καὶ οὕτω, πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ ἐνὸς τῶν δύο παραγόντων γινομένου τινός, εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ γινομένου αὐτοῦ· διότι πᾶν πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι κυρίως γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἷον ὁ 120 εἶναι γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ 5.

115. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι διαιρέσιμος διὰ δύο ἄλλων ἀσυνδιαιρέτων, εἶναι διαιρέσιμος καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Π. χ. ὁ 36, ὅστις εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 2 καὶ 3, εἶναι διαιρέσιμος καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 6. Ἐπειδὴ ὁ 36, ὢν διαιρέσιμος διὰ τοῦ 2 καὶ 3, ἐὰν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2 καὶ τὸ προκύπτον πηλίκον 18 διὰ τοῦ 3[†] θέλει εὑρεθῇ πηλίκον ἀκέραιον. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἀκέραιον πηλίκον θέλει εὑρεθῇ καὶ ἂν διαιρεθῇ ὁ 36 διὰ τοῦ γινομένου 6 τῶν δύο διαιρετῶν 2 καὶ 3 (98)· λοιπὸν ὁ 36 εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ γινομένου 6 τῶν δύο ἀσυνδιαιρέτων διαιρετῶν του. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ὡσαύτως· Λοιπὸν πᾶς ἀριθμὸς κτλ.

116. Ἄρτιοι ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοὶ, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον ἤτοι τὸ τῶν μονάδων εἶναι 0, 2, 4, 6, 8· περιττοὶ δὲ, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον εἶναι 1, 3, 5, 7, 9.

Σημ. Εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν λέγονται οἱ μὲν ζυγοί, οἱ δὲ μονοί.

Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι διαιρέσιμος διὰ 2. Ἐπειδὴ, ὅσοι ἔχουσι 0 δεξιὸν ψηφίον, οἷον ὁ 570, εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 10· καὶ ἐπειδὴ ὁ 10 εἶναι διαιρέσιμος διὰ 2, διὰ τοῦτο καὶ οἱ πολλαπλάσιοι αὐτοῦ. Ὅσοι δὲ ἔχουσι 2, 4, 6, 8, οἷον ὁ 652, 784, κτλ, εἶναι ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, οἷον τοῦ 650 καὶ

ὁ δὲ ὅστις 18 ἔχει διαιρέσιμον διὰ 3

2, 780 καὶ 4 κτλ. Ἀλλ' οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 2· λοιπὸν καὶ τὰ κεφάλαια αὐτῶν ἦτοι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί. — Οἱ περιττοὶ δὲν εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τοῦ 2.

Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει τὸ τῶν μονάδων ψηφίον ἢ 5 ἢ 0, εἶναι διαιρέσιμος διὰ 5. Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἡ ἀνωτέρω.

117. Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ δύο δεξιά ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρέσιμον διὰ 4 καὶ 25, εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρέσιμος διὰ 4 καὶ 25. Π. γ. ὁ 648, τοῦ ὁποίου τὰ δύο δεξιά ψηφία 48 ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρέσιμον διὰ 4, εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4. Ἐπειδὴ εἶναι κεφάλαιον τοῦ 600 καὶ 48, ὁ δὲ 600 εἶναι ἑξαπλάσιος τοῦ 100· ἀλλ' ὁ 100 εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4, λοιπὸν καὶ ὁ 600 (114). Ἀλλ' εἶναι διαιρέσιμος καὶ ὁ 48 διὰ 4, λοιπὸν καὶ ὁ 648 (112).

Οἱ δὲ διὰ 25 διαιρέσιμοι ἀριθμοὶ εἶναι, ὅσων τὰ δύο δεξιά ψηφία ἀποτελοῦσι τοὺς ἀριθμοὺς 25, 50, 75, ἢ εἶναι 00, καὶ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἥδη ἐκτεθείσα.

118. Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία, ὡς μονάδες νοούμενα, προστιθέμενα δίδουσι κεφάλαιον διαιρέσιμον διὰ 3 ἢ δι' 9, εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρέσιμος διὰ 3 ἢ δι' 9. Ὁ 78453, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα 27, διαιρέσιμον καὶ διὰ 3 καὶ δι' 9, εἶναι διαιρέσιμος διὰ 3 καὶ δι' 9.

Ἐπειδὴ αὐτὸς εἶναι ἄθροισμα τῶν 70000, 8000, 400, 50, 3· καὶ ἂν ἀπὸ τὸν πρῶτον ἀφαιρεθῶσιν 7 μονάδες, ἀπὸ τὸν δεύτερον 8, ἀπὸ τὸν τρίτον 4, ἀπὸ τὸν τέταρτον 5, μένουσι 69993, 7992, 396, 45· οἵτινες εἶναι γινόμενα δύο παραγόντων, τοῦ 9 καὶ ἄλλου ἀριθμοῦ, ἔχουν ὁ 69993 εἶναι 7777 ἐπὶ 9, ὁ 7992 εἶναι 888 ἐπὶ 9, ὁ 396 εἶναι 44 ἐπὶ 9, ὁ 45 εἶναι 5 ἐπὶ 9. Καὶ ἔπειδὴ ὁ εἶς τῶν παραγόντων, ὁ 9, εἶναι διαιρέσιμος διὰ 3 καὶ 9, καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 69993, 7992, 396, 45 εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3 καὶ 9 (114)· ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 78426 εἶναι διαιρέσιμον διὰ 3 καὶ 9. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 78453 εἶναι ἄθροισμα τοῦ 78426 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 27, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 78453 νοουμένων ὡς μονάδων· λοιπὸν, ἔπειδὴ καὶ ὁ 78426 καὶ ὁ 27 εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3 καὶ δι' 9, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμά των 78453 εἶναι διαιρέσιμον διὰ 3 καὶ δι' 9 (112).

Παρατήρησις
ὅτι ἔστιν ὅτι
ἂν ἀφαιρέσωμεν
ἀπὸ τοῦ 78453
τὰς μονάδας
τοῦ 78426 καὶ
τοῦ 27, μένουσι
οἱ ἀριθμοὶ 69993,
7992, 396, 45
οἵτινες εἶναι
γινόμενα τοῦ 9
καὶ ἄλλου ἀριθμοῦ.

78453

Οἱ ἀριθμοὶ 462, 7536 εἶναι διαιρέσιμοι μόνον διὰ 3· οἱ δὲ 657, 839745 εἶναι διαιρέσιμοι καὶ διὰ 3 καὶ δι' 9.

119. Διὰ 6 εἶναι διαιρέσιμοι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3· ἐπεὶ δὲ ὁ 6 εἶναι γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 3, κατὰ δὲ τὸν ἀριθμ. 115 ὅσοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 2 καὶ 3, εἶναι διαιρέσιμοι καὶ διὰ τοῦ γινομένου των. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 46596, 74382 κτλ εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 6.

Εὐκόλως δὲ καταλαμβάνει τις ὅτι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 12, 15, 18, κτλ οἱ ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τῶν παραγόντων των, ἤγουν διὰ 3 καὶ 4, διὰ 3 καὶ 5, διὰ 2 καὶ 9, κτλ.

120. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πολλοὺς κοινούς διαιρέτας, ὁ μεγαλύτερος ὧν αὐτῶν λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ 36 ἔχει ἰδίους διαιρέτας τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, ὁ δὲ 24 τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24· ἐκ τούτων κοινοὶ διαιρέται τοῦ 36 καὶ 24 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 12· ὁ δὲ 12, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὧν τῶν κοινῶν διαιρετῶν, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 36 καὶ 24.

Σημ. Οἱ ἀσυνδιαίρετοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἓνα μόνον κοινὸν διαιρέτην, τὴν μονάδα, ὅστις δὲν εἰσπάρει νὰ ὀνομάζηται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης· καὶ ὅμως πολλὰκις τὸν ὀνομάζουσιν οὕτως.

121. Περί μὲν ὧν τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ ὅποιουδήποτε καὶ περὶ ὧν τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ὅποιωνδήποτε ἀριθμῶν ἐδῶ δὲν λέγομεν τίποτε, καὶ διότι εἶναι ὀλιγώτερον χρησίμου εἰς τὰς ἐξῆς, καὶ διότι εἶναι πολυπλοκώτερον. Ὁ δὲ μ. κ. δ. (α) δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται ἀπλούστατα οὕτως.

Διαιρεῖται ὁ μεγαλύτερος διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, αὐτὸ τὸ πρῶτον κατάλοιπον εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου τοῦ δευτέρου καταλοίπου διαιρεῖται τὸ

(α) Συντομίας χάριν ἀντὶ ὁλοκλήρων τῶν λίξεων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης θέλωμεν μεταχειρίζεσθαι τ' ἀρκτικὰ των γράμματα μ. κ. δ.

πρῶτον κατάλοιπον, καὶ ἂν μὲν δὲν μείρη κατάλοιπον, τὸ δεύτερον κατάλοιπον εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν· ἂν δὲ μείρη, διὰ τούτου τοῦ τρίτου καταλοίπου διαιρεῖται τὸ δεύτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως νὰ εὕρεθῇ κατάλοιπόν τι, τὸ ὅποιον νὰ ᾔηται διαιρέτης τοῦ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου, καὶ αὐτὸ θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν. Πῶς δὲ διατάσσονται οἱ ἀριθμοὶ ἐνθ γίνεται ἡ πράξις, τὸ βλέπει τις εἰς τὰ παραδείγματα.

α'. Ἐὰν ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν ᾔηται διαιρέτης τοῦ μεγαλύτερου, αὐτὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο. Π. χ. ὁ 321, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 963 (τὸ ὅποιον πληροφοροῦ-
3
μεθα διὰ τῆς διαιρέσεως), εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν 963 $\overline{321}$
δύο. Ἐπειδὴ πρῶτον ὁ 321 εἶναι διαιρέτης ἑαυτοῦ 0 |
καὶ τοῦ 963 ἤτοι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Ἐπειτα οὐδεὶς ἀριθ-
μὸς μεγαλύτερος τοῦ 321 εἴμπορεῖ νὰ ᾔηται κοινὸς διαιρέτης τοῦ
321 καὶ 963, ὥς μὴ ὦν διαιρέτης τοῦ 321. Λοιπὸν ὁ 321
εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

β'. Ἐὰν τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλύτερου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου ᾔηται διαιρέτης τοῦ μικροτέρου, αὐτὸ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν. Π. χ. $\overline{1} \overline{6}$
Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ 252 διὰ τοῦ 216, εὐρίσκεται 252 $\overline{216} \overline{36}$
πηλίκον 1 καὶ κατάλοιπον 36· ἐὰν ἔπειτα διαι- 36 | 0 |
ρεθῇ ὁ 216 διὰ τοῦ 36, εὐρίσκεται πηλίκον 6 καὶ 0 κατὰ-
λοιπον. Λέγω λοιπὸν ὅτι τὸ κατάλοιπον 36, τὸ ὅποιον εἶναι
διαιρέτης τοῦ 216, τοῦ μικροτέρου τῶν δύο ἀριθμῶν 252 καὶ
216, εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὁ 36, ὅστις εἶναι κοινὸς
διαιρέτης ἑαυτοῦ καὶ τοῦ 216, εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 252,
ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοῦ 216 καὶ τοῦ 36 (112)· λοιπὸν
πρῶτον ὁ 36 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 216 καὶ τοῦ 252.
Ἐπειτα, ἐπειδὴ ὁ 36 εἶναι διαφορὰ τοῦ 216 καὶ 252, πᾶς δὲ
κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πρέπει νὰ ᾔηται διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς

δ'. Ἐὰν τὸ τρίτον κατάλοιπον ᾦναι διαιρέτης τοῦ δευτέρου καταλοίπου, αὐτὸ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν. Λαμβάνομεν παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς 360 καὶ 276, καὶ γενομένης τῆς πράξεως βλέπομεν ὅτι τὸ τρίτον

		1	3	3	2
κατάλοιπον 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ	360	276	84	24	12
δευτέρου καταλοίπου 24· λοιπὸν 12	84	24	12	0	

εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 276. Ἐπειδὴ ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω πρῶτον ὅτι ὁ 12 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276· ἔπειτα ὅτι οὐδεὶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ 276 εἴμπορεῖ νὰ ᾦναι μεγαλύτερος τοῦ 12· ἐκ δὲ τούτων συμπεραίνεται ὅτι 12 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ 276. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἰδού καὶ ἄλλο παράδειγμα, ὅπου βλέπει τις ὅτι τὸ τέταρτον κατάλοιπον, τὸ ὁποῖον εἶναι διαιρέτης τοῦ τρίτου, εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν 624 καὶ 348.

	1	1	3	1	5
624	348	276	72	60	12
276	72	60	12	0	

Σημ. Ἐὰν εὐρεθῇ ὅτι ἡ μονὰς εἶναι τὸ κατάλοιπον τὸ ὁποῖον εἶναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου, σημεῖον ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. Ἰδού παράδειγμα.

	2	1	2	1	25	1	2
871	317	237	80	77	3	2	1
237	80	77	3	2	1	0	

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων κλασματικῶν
καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

*Περὶ τροπῆς κλασματικῶν εἰς ἀκεραίους
ἢ μικτοὺς καὶ τὰν ἀπαλιν.*

122. Εἴπομεν (34—41) τί εἶναι κλασματικὴ μονάς, τί εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς, πῶς γράφεται, πῶς ἀπαγγέλλεται, τίς εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος ἢτοι κλάσμα, τίς ἰσοδύναμος με αὐτὴν καὶ τίς μεγαλήτερος. Ἐδῶ θέλομεν δεῖξει πῶς ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν κλασματικῶν αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, ἀφοῦ πρῶτον ἴδωμεν πῶς κλασματικὸς ἀριθμὸς μεγαλήτερος τῆς μονάδος τρέπεται εἰς ἀκέραιον ἢ εἰς μικτὸν ἰσοδύναμον, καὶ ἀντιστρόφως, πῶς ἀκέραιος ἢ μικτὸς τρέπεται εἰς κλασματικὸν ἰσοδύναμον.

Εἶδομεν (86—87) ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ ἀκεραίου δι' ἄλλου ἀκεραίου δύναται νὰ παριστάνηται διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, μικροτέρου μὲν ἀκεραίου διὰ μεγαλήτερου, πάντοτε, μεγαλήτερου δὲ διὰ μικροτέρου, ὅταν θέλῃ τις. Π. χ. τὸ 4^{ον} τοῦ 20 εἶναι $\frac{20}{4}$ τῆς μονάδος, τὸ 5^{ον} τοῦ 17 εἶναι $\frac{17}{5}$ τῆς μονάδος.

Τώρα δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι πᾶς κλασματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοῆται ὅτι παριστάνῃ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ὁ κλασματικὸς π. χ. $\frac{20}{4}$ τῆς μονάδος δύναται νὰ νοῆται ὅτι παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 20 διὰ 4, ἢτοι τὸ 4^{ον} τοῦ 20, ὁ $\frac{17}{5}$ ὅτι παριστάνει τὸ 5^{ον} τοῦ 17, κτλ.

Οὕτω δὲ νοοῦντες πάντα κλασματικὸν ἀριθμὸν μεγαλήτερον τῆς μονάδος, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, εὐρίσκομεν

ἀκέραιον ἢ μικτὸν ἀριθμὸν ἰσοδύναμον μὲ τὸν κλασματικόν, ἀκέραιον μὲν, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, μικτὸν δὲ, ὅταν δὲν ᾖ διαιρέσιμος. Οὕτως ὁ $\frac{20}{4}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον ἀκέραιον 5, ὁ $\frac{17}{5}$ εἰς τὸν ἰσοδύναμον μικτὸν $3\frac{2}{5}$, ὁ $\frac{34}{7}$ εἰς τὸν $4\frac{6}{7}$, ὁ $\frac{56}{8}$ εἰς τὸν 7, κτλ.

Γενικῶς λοιπὸν, κλασματικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀκέραιον ἢ μικτὸν, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον· τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ ἰσοδύναμος ἀκέραιος ἢ μικτός.

Σημ. Ἄλλως εἶναι φανερόν ὅτι ὁ $\frac{20}{4}$ εἶναι $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$, ἥτοι ἰσοδύναμος μὲ 5 μονάδας, ὁ δὲ $\frac{17}{5}$ εἶναι $\frac{5}{5}$ καὶ $\frac{5}{5}$ καὶ $\frac{5}{5}$ καὶ $\frac{2}{5}$, ἥτοι $3\frac{2}{5}$.

123. Ἀντιστρόφως, ἂς τραπῇ ὁ ἀκέραιος 5 εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τετάρτων. Ἐπειδὴ ἡ μία μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{4}$, αἱ 5 ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{4}{4}$, ἥτοι μὲ $\frac{20}{4}$. Ὡσαύτως τρέπεται καὶ ὁ 3 εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν πέμπτων· ἡ γὰρ μία μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{5}{5}$, αἱ 3 ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{5}{5}$ καὶ $\frac{5}{5}$ καὶ $\frac{5}{5}$, ἥτοι μὲ $\frac{15}{5}$.

Ἐκ δὲ τούτων εἶναι φανερόν ὅτι τρέπεται ἀκέραιος εἰς κλασματικὸν ἰσοδύναμον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ αὐτὸς ὁ παρονομαστής. Οὕτως ὁ 7 τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον $\frac{76}{6}$, ὁ 9 εἰς $\frac{54}{6}$ κτλ.

Μικτὸς δὲ τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἐὰν τραπῇ ὁ ἀκέραιός του εἰς κλασματικὸν ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν του προστεθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, ἡγοῦν ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γραφθῇ ὁ παρονομαστής αὐτοῦ. Οὕτως ὁ $5\frac{6}{7}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον $\frac{41}{7}$, ὁ $9\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{39}{4}$ κτλ.

Σημ. Πᾶς ἀκέραιος γράφεται ὑπὸ μορφήν κλασματικὴν καὶ ἐὰν ὑπὲρ αὐτὸν τεθῇ παρονομαστής ἡ μονὰς, οἷον $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{12}{1}$ κτλ.

*Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαίρεσως κλασματικῶν
καὶ μικτῶν ἀριθμῶν δι' ἀκεραίων.*

124. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι τῶν κλασματικῶν μονάδων ἦτοι τῶν πολλοστῶν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$, κτλ, τὸ ἔχον μεγαλύτερον παρονομαστὴν εἶναι μικρότερον τοῦ ἔχοντος μικρότερον παρονομαστὴν, καὶ τὰνάπαλιν· καὶ ὅτι, ὅσον μεγαλύτερον παρονομαστὴν ἔχει, τόσον μικρότερον εἶναι. Π. χ. τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον παρονομαστὴν τοῦ $\frac{1}{2}$, εἶναι ἥμισυ αὐτοῦ, διότι $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος· τὸ $\frac{1}{6}$, ἔχον παρονομαστὴν τριπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{1}{2}$, εἶναι τρίτον τοῦ $\frac{1}{2}$, διότι $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος. Ὡσαύτως τὸ $\frac{1}{8}$, τὸ $\frac{1}{10}$, τὸ $\frac{1}{12}$ κτλ. εἶναι τέταρτον, πέμπτον, ἕκτον κτλ τοῦ $\frac{1}{2}$. Ὡσαύτως ἔτι τὸ $\frac{1}{6}$, τὸ $\frac{1}{9}$, τὸ $\frac{1}{12}$ κτλ εἶναι ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ τοῦ $\frac{1}{3}$. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{6}$, τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{9}$, τετραπλάσιον τοῦ $\frac{1}{12}$ κτλ.

125. Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι τρέπεται κλασματικὴ τις μονὰς εἰς ἄλλην, ἥτις γὰρ ἦναι τὸ ἥμισυ αὐτῆς, τὸ τρίτον κτλ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής της ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ, καὶ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὴν μονάδα. Κατὰ ταῦτα τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος τρέπεται εἰς ἄλλην κλασματικὴν μονάδα, ἥτις γὰρ ἦναι τὸ πέμπτον αὐτῆς, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7 ἐπὶ 5, καὶ τὸ γινόμενον 35 τεθῇ ὑπὸ τὴν μονάδα, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{1}{35}$ τῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ πέμπτον τοῦ $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος. Ὡσαύτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ 4^{ον} τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς μονάδος, εἶναι $\frac{1}{24}$ τῆς μονάδος.

Σημ. Ἄλλ' εἶναι φανερόν καὶ ἐκ τοῦ ἀρ. 98 ὅτι τὸ 5^{ον} τοῦ $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{35}$ αὐτῆς, καὶ τὸ 4^{ον} τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς μονάδος εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{24}$ αὐτῆς.

126. Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, τρέπεται κλασματικὴ τις μονὰς εἰς ἄλλην διπλασίαν αὐτῆς, τριπλασίαν κτλ, ἐὰν διαι-

ρεθῇ ὁ παρονομαστής της διὰ 2, 3, 4 κτλ, καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὴν μονάδα. Τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς μονάδος ἀφοῦ διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής διὰ 5, καὶ τὸ πηλίκον 7 τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὴν 1, ἔχομεν $\frac{1}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι πενταπλάσιον τοῦ $\frac{1}{35}$ · ὡσαύτως εὐρίσκεται καὶ ὅτι τὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\frac{1}{24}$.

Σημ. Εἶναι φανερόν ἐκ τούτων ὅτι κλασματικὴ μὲν μονάς, ἣτις νὰ ᾖναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλης κλασματικῆς μονάδος, εὐρίσκεται πάντοτε, διότι εὐρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· κλασματικὴ δὲ μονάς πολλαπλασίᾳ ἄλλης εὐρίσκεται ἐνίοτε, μόνον ὅταν ὁ παρονομαστής τῆς δεδομένης κλασματικῆς μονάδος ᾖναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Λοιπὸν πενταπλάσιον τοῦ $\frac{1}{8}$ μονάς δὲν εὐρίσκεται, διότι ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 5.

127. Κλασματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του, ἢ ἂν τραπῇ ἡ κλασματικὴ του μονάς εἰς ἄλλην, ἣτις νὰ ᾖναι τοιαύτη πολλασία αὐτῆς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

α. Πολλαπλασιάζεται μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, διότι αὐτὸς παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων του, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλασματικοῦ, διότι τὸ γινόμενον πρέπει νὰ ᾖναι ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον (67).

Ἐὰν οὕτω πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 2, 3, 4, κτλ, εὐρίσκονται οἱ κλασματικοὶ $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{3}$ κτλ· καὶ εἶναι φανερόν ὅτι εἶναι ὁ μὲν διπλάσιος, ὁ δὲ τριπλάσιος κτλ τοῦ $\frac{2}{3}$. Ὡσαύτως $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 3 παράγει γινόμενον $\frac{15}{7}$ ἥτοι $1 \frac{1}{7}$ — $\frac{1}{7}$ ἐπὶ 6 παράγει $\frac{30}{7}$ ἥτοι $10 \frac{2}{7}$.

β. Τρέπεται δὲ ἡ κλασματικὴ μονάς εἰς ἄλλην τόσον μεγάλην πρὸς αὐτήν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλασματικοῦ διὰ τοῦ ἀκέραιου πολλαπλασιαστοῦ (126), καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ ὑπὸ τὸν ἀριθ-

μητὴν τοῦ κλασματικοῦ, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ κλασματικοῦ δὲν πρέπει νὰ μεταβάλληται. Ἐὰν οὕτω πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{6}{24}$ ἐπὶ 2, 3, 4, εὐρίσκονται $\frac{6}{12}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{6}{6}$, τῶν ὁποίων εἶναι ἤδη φανερόν ὅτι τὸ μὲν εἶναι διπλάσιον, τὸ δὲ τριπλάσιον κτλ τοῦ $\frac{6}{24}$. Ὡσαύτως $\frac{7}{8}$ ἐπὶ 4 παράγει γινόμενον $\frac{7}{2}$ ἥτοι 3 $\frac{1}{2}$ — τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$ εἶναι $\frac{5}{4}$ ἥτοι 1 $\frac{1}{4}$.

Σημ. Τὸ αὐτὸ τοῦτο γίνεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Π. χ. ὅταν 4 μονάδες νοηθῶσι 4 δεκάδες, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ 10 ἐνῶ ἡ μονὰς τρέπεται εἰς δεκάδα καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 μένει ὁ αὐτός, κτλ.

128. Γενικῶς λοιπὸν, κλασματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλασματικοῦ, ἢ ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ κλασματικοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου, ὅταν ἦναι διαιρέσιμος, καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστής ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ. Ὁ δ' οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον.

Σημ. Ὁ δεῦτερος τρόπος εἶναι προτιμητέος, ὅταν ἦναι δυνάτος.

129. Καὶ μικτὸς δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς, ἢ πολλαπλασιάζεται πρῶτον τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἔπειτα τὸ ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστίθενται ὅσαι μονάδες προκύψωσιν ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ κλάσματος, ἢ τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς κλασματικόν (123), καὶ οὗτος ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὡς ἡδη εἵπομεν. Κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὐρίσκεται ὅτι $5 \frac{6}{8}$ ἐπὶ 3 παράγει $17 \frac{2}{8}$ — τὸ γινόμενον τοῦ $7 \frac{5}{8}$ ἐπὶ 9 εἶναι $68 \frac{5}{8}$ — Τὸ τετραπλάσιον τοῦ $9 \frac{4}{12}$ εἶναι $37 \frac{1}{3}$.

130. Καὶ ἡ διαίρεσις κλασματικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου γίνεται διττῶς, ἥτοι ἂν διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του, ἢ ἂν διαιρεθῇ ἡ μονὰς του, ἡγουν ἂν τραπῇ εἰς ἄλλην, ἥτις νὰ ἦναι τοιοῦτον πολλοστὸν αὐτῆς, ὅποιον εἶναι τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου ἢ μονάς του.

α. Διαιρείται μὲν διὰ τοῦ ἀκεραίου ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ κλασματικοῦ, ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς του, ὅστις παριστάνει αὐτόν, διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον τεθῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ, διότι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ᾖ ὁμόνυμον μὲ τὸν διαιρετέον (87). Ἐάν οὕτω διαιρεθῇ ὁ $\frac{24}{9}$, διὰ 2, 3, 4 κτλ, εὐρίσκονται πηλίκα $\frac{12}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{6}{9}$ κτλ, καὶ εἶναι φανερόν ὅτι εἶναι ὁ μὲν ἥμισυ τοῦ $\frac{24}{9}$, ὁ δὲ τρίτον κτλ. Ὡσαύτως $\frac{8}{5}$ διὰ 4 δίδει πηλίκον $\frac{2}{5}$ — τὸ 5ον τοῦ $\frac{20}{12}$ εἶναι $\frac{4}{12}$ — τὸ 3ον τοῦ $\frac{9}{11}$ εἶναι $\frac{3}{11}$.

Σημ. Ἡ διαίρεσις γίνεται οὕτω τότε μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀκεραίου.

β'. Διαιρείται δὲ διὰ τοῦ ἀκεραίου ἡ μονὰς τοῦ κλασματικοῦ, ἥγουν τρέπεται εἰς ἄλλην μονάδα ἥτις νὰ ᾖ τοιοῦτον πολλοστὸν αὐτῆς, ὅποιον εἶναι τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου ἡ μονὰς του, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς του ἐπὶ τὸν ἀκεραῖον (125), καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων δὲν πρέπει νὰ μεταβάλληται. Ἐάν οὕτω διαιρεθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ διὰ 2, 3, 4 κτλ, εὐρίσκονται πηλίκα $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{16}$ κτλ· καὶ εἶναι φανερόν ὅτι τὸ μὲν εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ τρίτον, τὸ δὲ τέταρτον κτλ. Ὡσαύτως $\frac{7}{4}$ διὰ 6 δίδει πηλίκον $\frac{5}{42}$ — τὸ 9ον τοῦ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{3}{45}$ — τὸ 8ον τοῦ $\frac{9}{4}$ εἶναι $\frac{9}{32}$.

Σημ. Οὕτω διαιρείται καὶ ἀκέραιος διὰ 10, ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τῶν 70 ἦτοι τῶν 7δεκ. διὰ 10 εἶναι 7μον. κτλ.

131. Γενικῶς λοιπὸν, κλασματικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου διττῶς, ἢ ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς του διὰ τοῦ ἀκεραίου, ὅταν ᾖ διαιρέσιμος, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστὴς ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς του ἐπὶ τὸν ἀκεραῖον καὶ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ. Ὁ δ' οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημ. Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι προτιμητέος, ὅταν ᾖ δυνατός.

132. Μικτός ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἂν τραπῇ εἰς κλασματικὸν (123), καὶ διαιρεθῇ οὗτος διὰ τοῦ ἀκεραίου ὡς ἥδη εἵπομεν. Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ $6\frac{4}{5}$ διὰ 7 εἶναι $\frac{4}{5}$ — τὸ 9^{ον} τοῦ $4\frac{6}{12}$ εἶναι $\frac{6}{12}$ — τὸ 4^{ον} τοῦ $5\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{3}{8}$ ἥτοι $1\frac{10}{8}$.

Εἰνότε δὲ διαιρεῖται ὁ ἀκέραιος τοῦ μικτοῦ πρῶτον, ἔπειτα τὸ κλάσμα, καὶ τὰ δύο μερικὰ πηλικά ἐνόνονται εἰς ἓνα μικτὸν ἀριθμὸν, ὡς οἱ ἀκέραιοι. Οὕτω τὸ 7^{ον} τοῦ $21\frac{5}{6}$ εἶναι $3\frac{5}{6}$ — τὸ 9^{ον} τοῦ $36\frac{4}{7}$ εἶναι $4\frac{4}{7}$ — τὸ 3^{ον} τοῦ $9\frac{6}{7}$ εἶναι $3\frac{2}{7}$ — ἔτι τὸ 5^{ον} τοῦ $13\frac{2}{6}$ εἶναι 2 διὰ τὸ 10 καὶ μένουσι 3 ἥτοι $\frac{18}{6}$, καὶ $\frac{2}{6}\frac{20}{6}$. τὸ 5^{ον} τοῦ $\frac{20}{6}$ εἶναι $\frac{4}{6}$. λοιπὸν τὸ 5^{ον} τοῦ $13\frac{2}{6}$ εἶναι $2\frac{4}{6}$.

133. Ἐκ τῶν ἥδη εἰρημένων γίνεται δῆλον ὅτι, ἂν κλασματικοῦ, οἷον τοῦ $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ 2, 3, 4, κτλ, καὶ ὑπὸ τὰ γινόμενα τεθῇ ὁ παρονομαστὴς 4, ἐκ τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{12}{4}$ κτλ, ὁ μὲν $\frac{6}{4}$ εἶναι διπλάσιος τοῦ $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ $\frac{9}{4}$ τριπλάσιος, ὁ δὲ $\frac{12}{4}$ τετραπλάσιος κτλ. Ἔτι δὲ ὅτι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ μὲν $\frac{6}{4}$ ἐπὶ 2, τοῦ δὲ $\frac{9}{4}$ ἐπὶ 3, τοῦ δὲ $\frac{12}{4}$ ἐπὶ 4 κτλ, καὶ τὰ γινόμενα τεθῶσι παρονομασταὶ τὸ μὲν ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν 6, τὸ δὲ ὑπὸ τὸν 9, τὸ δὲ ὑπὸ τὸν 12 κτλ, ἐκ τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ κτλ, ὁ μὲν εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ τρίτον τοῦ $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ τέταρτον τοῦ $\frac{3}{4}$ κτλ.

Ἐκ δὲ τούτων ἐξάγεται ὅτι, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἐνταυτῷ καὶ οἱ δύο ὅροι κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ, ὁ δεύτερος οὗτος κλασματικὸς θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον. Π. χ. ἐὰν τοῦ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ, προκύπτουσιν οἱ $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ κτλ, τῶν ὁποίων ὁ μὲν $\frac{6}{8}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ διπλάσιου τοῦ $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ $\frac{9}{12}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριπλάσιου τοῦ $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ $\frac{12}{16}$ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ τετραπλάσιου κτλ. οὗτοι δὲ

κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 99 παρατηρηθέντα εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὸν $\frac{3}{4}$.

Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, ἂν διαιρεθῶσιν ἐνταυτῷ καὶ οἱ δύο ὅροι κλασματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ τεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ παρονομαστοῦ, ὁ δεύτερος οὗτος κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον. Ἐπειδὴ εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν τοῦ μὲν $\frac{5}{6}$ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 2, τοῦ δὲ $\frac{9}{12}$ διὰ 3, τοῦ δὲ $\frac{12}{16}$ διὰ 4 κτλ, θέλει προκύβει πάλιν ὁ $\frac{3}{4}$, ὅστις κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν $\frac{5}{6}$, μὲ τὸν $\frac{9}{12}$ κτλ.

Σημ. Τὰ δύο ταῦτα γίνονται φανερά καὶ ἐκ τοῦ ἀριθ. 107. Ἐπειδὴ, ἂν ὁ κλασματικὸς νοηθῇ ὡς πηλίκον διαιρέσεως, ὁ ἀριθμητῆς ὡς διαιρετέος καὶ ὁ παρονομαστῆς ὡς διαιρέτης, ὁ δεύτερος κλασματικὸς, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, θέλει εἶσθαι τὸ πηλίκον ἢ τῶν αὐτῶν πολλαπλασίων ἢ τῶν χυτῶν πολλοστῶν τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου κλασματικοῦ· καὶ διὰ τοῦτο θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.

Περὶ τροπῆς ἑτερώνυμων κλασματικῶν

εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους.

134. Δύο, τρεῖς ἢ πλείότεροι ἑτερώνυμοι κλασματικοὶ τρέπονται πάντοτε εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, ἔχοντας κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Καὶ δύο μὲν ἑτερώνυμων κλασματικῶν ἢ τροπὴ γίνεται οὕτω· πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου.

Ἄς τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα, ἔχοντα κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, τὰ δύο ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{4}{7}$. Πρῶτον πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν δεύτερον παρονομαστὴν 7, καὶ οὕτω τρέπεται

εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 6}$ ἔπειτα πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὄροι τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν πρῶτον παρονομαστήν 8, καὶ οὕτω τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6}$. Τὰ δὲ $\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 6}$ καὶ $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6}$ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστήν 56, τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν 8 ἐπὶ 7, ἢ 7 ἐπὶ 8, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (81).

Ὡσαύτως τὰ $\frac{9}{11}$ καὶ $\frac{6}{7}$ τρέπονται εἰς τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμά των $\frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 7}$ καὶ $\frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 7}$ — τὰ $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{9}{7}$ εἰς τὰ $\frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 8}$ καὶ $\frac{6 \cdot 1}{2 \cdot 8}$ — τὰ $\frac{8}{5}$ καὶ $\frac{1 \cdot 2}{7}$ εἰς τὰ $\frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5}$ καὶ $\frac{6 \cdot 0}{3 \cdot 5}$.

135. Τριῶν δὲ ἢ πλειοτέρων ἑτερονύμων κλασματικῶν ἡ τροπὴ εἰς ἰσοδύναμους ὁμωνύμους γίνεται οὕτω· πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὄροι τοῦ πρῶτου ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, οἱ δὲ δύο ὄροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, οἱ δὲ δύο ὄροι τοῦ τρίτου ὡσαύτως μέχρι τοῦ τελευταίου.

Ἄς τραπῶσι π. χ. τὰ $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{4}{9}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα ἔχοντα κοινὴν παρονομαστήν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὄροι τοῦ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 99, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{4 \cdot 9 \cdot 5}{6 \cdot 9 \cdot 3}$, οἱ δὲ δύο ὄροι τοῦ $\frac{6}{11}$ ἐπὶ 63, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ τρέπεται οὕτως εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{3 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 9 \cdot 3}$. οἱ δὲ δύο ὄροι τοῦ $\frac{4}{9}$ ἐπὶ 77, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{3 \cdot 0 \cdot 8}{6 \cdot 9 \cdot 3}$. Τὰ δὲ $\frac{4 \cdot 9 \cdot 5}{6 \cdot 9 \cdot 3}$, $\frac{3 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 9 \cdot 3}$, $\frac{3 \cdot 0 \cdot 8}{6 \cdot 9 \cdot 3}$ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστήν 693, τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, πολλαπλασιασθέντων οὕτως 11 ἐπὶ 9 ἐπὶ 7, ἢ οὕτως 7 ἐπὶ 9 ἐπὶ 11, ἢ οὕτως 7 ἐπὶ 11 ἐπὶ 9· κατὰ δὲ τὰ ἐν ἀριθ. 83, ὅπως καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν πολλοὶ ἀριθμοὶ, τὸ γινόμενόν των θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

Ὡσαύτως τρέπονται καὶ τὰ $\frac{7}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{7}$ εἰς τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα $\frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 0 \cdot 5}$, $\frac{8 \cdot 4}{1 \cdot 0 \cdot 5}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 0}{1 \cdot 0 \cdot 5}$, ἔχοντα κοινὸν παρονομαστήν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παρονομαστῶν.

136. Εὐρῆκαμεν ἤδη τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν πλὴν ἐνὸς διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Ἀλλὰ περπατοῦντες

ὅτι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν 693 εἶναι διαίρεσιμον δι' ἐνὸς ἐκάστου παρονομαστοῦ 7, 11, 9, καὶ δίδει πηλίκον 99, 63, 77, ἥτοι τὰ γινόμενα ὅλων τῶν παρονομαστῶν πλὴν ἐνὸς ἐκείνου, δι' οὗ διαιρεῖται, εἰμποροῦμεν νὰ εὗρωμεν αὐτὰ καὶ διὰ διαιρέσεως τοῦ γινόμενου ὅλων τῶν παρονομαστῶν δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζονται πρῶτον ὅλοι οἱ παρονομασταὶ, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται τὸ γινόμενον αὐτῶν δι' ἐνὸς ἐκάστου παρονομαστοῦ. Τὸ δ' ἐπίλοιπον τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

Αὕτη ἡ πράξις εἶναι προτιμητέα μάλιστα ὅταν ᾖναι τέσσαρες ἢ πλείότεροι κλασματικοί. Ἄς τραπῶσι π. χ. τὰ $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{13}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κτλ. Πρῶτον πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους ὅλοι οἱ παρονομασταὶ, ἔπειτα τὸ γινόμενόν των 2808 διαιρεῖται διὰ τοῦ πρώτου παρονομαστοῦ 6, ἐπὶ δὲ τὸ πηλίκον 468 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{5}{6}$, καὶ οὕτω τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{2340}{2808}$. Ἀκολουθῶς ὁ 2808 διαιρεῖται διὰ τοῦ δευτέρου παρονομασμοῦ 4, ἐπὶ δὲ τὸ πηλίκον 702 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{3}{4}$, καὶ τρέπεται οὕτως εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{2106}{2808}$. Ὡσαύτως τρέπεται καὶ τὸ $\frac{7}{9}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{2184}{2808}$, καὶ τὸ $\frac{11}{13}$ εἰς $\frac{2376}{2808}$.

Σημ. Εἰς τὴν πράξιν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζεται μόνον ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸ πηλίκον, διότι τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι γνωστὸν, δηλ. εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Ἄς τραπῶσιν οὕτως καὶ τὰ $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{14}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα.

137. Ἐνίοτε οἱ ἑτερόνυμοι κλασματικοὶ δύνανται νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδυνάμους ὁμώνυμους, οἵτινες νὰ ἔχωσι παρονομαστήν, ὅχι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἀλλ' ἀριθμὸν ἄλλον πολὺ μικρότερον. Τοῦτο δὲ γίνεται, ὅταν ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν ᾖναι διαίρεσιμος δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ τότε ὁ μεγαλύτερος παρονο-

μαστής θέλει εἶσθαι ὁ κοινὸς παρονομαστής. Ἡ δὲ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἤδη εἴπομεν.

α. Ἄς τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$. Ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής εἶναι δικιρέσιμος διὰ τοῦ 4, διαιρεῖται, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὄροι τοῦ $\frac{3}{4}$ · οὕτω τὸ $\frac{3}{4}$ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{6}{8}$, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸ ἄλλο $\frac{5}{8}$. Ὡσαύτως ἐκ τῶν δύο $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{9}{12}$ τρέπεται τὸ $\frac{2}{3}$ εἰς $\frac{8}{12}$ — ἐκ τῶν $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{20}{35}$ τρέπεται τὸ $\frac{5}{7}$ εἰς $\frac{25}{35}$ — ἐκ τῶν $\frac{6}{5}$ καὶ $\frac{35}{32}$ τρέπεται τὸ $\frac{6}{5}$ εἰς $\frac{72}{32}$.

β. Ἄς τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{27}{30}$. Ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής 36 εἶναι διαίρεσιμος δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, διαιρεῖται πρῶτον διὰ 3, ἐπὶ τὸ πηλίκον 12 πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς 2, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφεται παρονομαστής ὁ 36· ἔπειτα διαιρεῖται ὁ 36 διὰ 4, ἐπὶ τὸ πηλίκον 9 πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς 3, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον 27 γράφεται παρονομαστής ὁ 36· οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ὡς τε τ' ἀνωτέρω κλάσματα τρέπονται εἰς ταῦτα

οὕτω τρέπονται καὶ οἱ $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{24}$, καὶ οἱ $\frac{17}{2}$, $\frac{25}{18}$, $\frac{40}{36}$.

γ. Ἐὰν δ' ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν δὲν ᾖναι διαίρεσιμος δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἀλλὰ τὸ διπλάσιόν του, ἢ τὸ τριπλάσιόν του κτλ, τότε λαμβάνεται αὐτὸ ὡς κοινὸς παρονομαστής, καὶ ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις ὡς ἤδη εἴπομεν. Π. χ. τῶν $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{16}{18}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{25}{36}$ ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής 36 δὲν εἶναι διαίρεσιμος δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἄλλων, τὸ δὲ διπλάσιόν του 72 εἶναι. Γενομένης λοιπὸν τῆς πρᾶξεως ὡς ἀνωτέρω, τρέπονται εἰς $\frac{54}{72}$, $\frac{63}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{64}{72}$, $\frac{57}{72}$, $\frac{50}{72}$. Ὡσαύτως τὰ $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{18}{12}$ τρέπονται εἰς $\frac{63}{36}$, $\frac{20}{36}$, $\frac{54}{36}$.

Σημ. Βλέπει τις ἐκ τῶν τελευταίων ὅτι ἡ τροπὴ τῶν ἑτερονόμων κλασματικῶν εἰς ἰσοδύναμους ὁμώνυμους ἀπαιτεῖ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς διαίρεσιμος δι' ἐνὸς ἐκάστου παρονομαστοῦ, καὶ αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὁ κοινὸς παρονομαστής τῶν νέων κλασματικῶν. Ὑπάρχει δὲ τρόπος τοῦ εὑρίσκειν τὸν ἐλάχιστον διαίρεσιμον ἀριθμὸν δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν, ἀλλ' ἐδῶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐκτεθῇ.

*Περὶ ἀγωγῆς (α) κλασματικῶν εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους
μὲ μικροτέρους ὅρους.*

138. Ὁ μόνος τρόπος, καθ' ὃν ἄγεται ἢ τρέπεται κλασμα-
τικός εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους, εἶναι νὰ διαι-
ρῶνται οἱ δύο τοῦ ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὑπὸ τῷ
πηλίκῳ τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ τίθηται τὸ πηλίκον τοῦ παρονο-
μαστοῦ· διότι διὰ τῆς διαιρέσεως εὐρίσκονται ὅροι μικρότεροι,
διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ προκύπτει κλα-
σματικός ἰσοδύναμος μὲ τὸν διδόμενον. Π. χ. τοῦ $\frac{2}{3} \frac{4}{5}$ ἀφοῦ
διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 12,
ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{2}{3}$, τὸ ὁποῖον ἔχει πολὺ μικροτέρους
ὅρους.

139. Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι ὠφελιμωτάτη, διότι παρέχει πρὸς
χρήσιν κλασματικόν, ὅστις εἶναι κατὰ πάντα ἀπλυστέρος, ἀντὶ
ἄλλου ἔχοντος πολὺ μεγάλους ὅρους, ὅστις καὶ δυσνοητότερος εἶναι
καὶ δυσκολίαν πλείωτέραν φέρει εἰς τὰς πρᾶξεις. Ἀλλὰ δὲν εἶναι
πάντοτε δυνατὴ δι' αὐτὸ τοῦτο, ὅτι ἐκτελεῖται μόνον διὰ τῆς
διαίρεσεως τῶν δύο ὁρῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἥτις ἔχει χῶ-
ραν μόνον ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἔχωσι κοινόν τινα
διαιρέτην. Λοιπὸν ὅσοι κλασματικοὶ ἔχουσι τοὺς ὅρους των
ἀσυνδιαιρέτους, εἶναι ἀδύνατον ν' ἄγωνται εἰς ἄλλους ἰσοδυ-
νάμους μὲ μικροτέρους ὅρους, καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζονται ἀνά-
γωγοι.

140. Ὅταν λοιπὸν πρόκηται ν' ἀχθῇ κλασματικός εἰς
ἄλλον ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους, πρῶτον πρέπει νὰ
παρατηρῶμεν ἂν οἱ ὅροι τοῦ ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην (116
—119). Καὶ ἂν μὲν ἔχωσι, διαιροῦμεν αὐτούς δι' αὐτοῦ (133).
ἔπειτα, ἂν καὶ τοῦ προκύπτοντος κλασματικοῦ οἱ ὅροι ἔχωσι

(α). Συνήθως ἡ πρᾶξις αὕτη ὀνομάζεται ἀναγωγή. Ἐπρωτίμησα δὲ τὴν ἀπλὴν
ἀγωγή καὶ ἄγω πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως αὐτῶν μὲ τὸ ἀνάγωγα
κλάσματα, τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸ ἀντίθετον.

κοινὸν διαιρέτην, διαιροῦμεν καὶ τούτους δι' αὐτοῦ, ἂν θέλωμεν, καὶ προάγομεν οὕτω τὴν πράξιν, ἕως νὰ καταντήσωμεν εἰς κλασματικὸν, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ᾖναι ἀσυνδιαίρετοι. Ἄν ὅμως δὲν ἔχωσιν, ὁ κλασματικὸς εἶναι ἀνάγωγος.

Π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3} \frac{4}{7} \frac{1}{2}$ οἱ ὅροι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τοῦ 2, καὶ τοῦ προκύπτοντος $\frac{1}{186}$ μετὰ τὴν διὰ τοῦ 2 διαίρεσιν εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τοῦ 2· ἀλλὰ τοῦ προκύπτοντος $\frac{64}{93}$ μετὰ τὴν δευτέραν διαίρεσιν δὲν εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τοῦ 2, ἀλλὰ διὰ τοῦ 3, καὶ μετὰ τὴν διὰ τοῦ 3 διαίρεσιν καταντῶμεν εἰς τὸ $\frac{2}{31}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγωγον, διότι οἱ ὅροι του εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. Λοιπὸν τὸ $\frac{2}{3} \frac{4}{7} \frac{1}{2}$ ἄγεται κατὰ σειρὰν εἰς τὰ ἰσοδύναμα $\frac{1}{196}, \frac{6}{93}, \frac{2}{31}$.

Πολλάκις ὅμως, ὅταν μάλιστα οἱ ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ᾖναι πολὺ μεγάλοι, εἶναι προτιμότερον νὰ ζητῶμεν τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν, καὶ δι' αὐτοῦ νὰ τοὺς διαιρῶμεν. Π. χ. τῶν ἄρων τοῦ $\frac{2}{3} \frac{4}{7} \frac{1}{2}$ ὁ μ. κ. δ. εὐρίσκεται (121) ὅτι εἶναι 12. Διὰ τούτου λοιπὸν διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του καὶ ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{2}{31}$, τὸ ὁποῖον εὐρήκαμεν καὶ διὰ τῶν διαδοχικῶν διαίρεσεων.

Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{3}{5} \frac{1}{7} \frac{2}{2}$ ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{1}{94}$. Τοῦ δὲ $\frac{5}{9} \frac{6}{9} \frac{2}{2}$ οἱ ὅροι μόνον διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 37 εἶναι διαιρέσιμοι, καὶ ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{1}{27}$. Τοῦ δὲ $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{1}{1}$ οἱ ὅροι εἶναι ἀσυνδιαίρετοι (121), καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγωγον.

*Περὶ Προσθέσεως καὶ Αφαιρέσεως κλασματικῶν
καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.*

141. Κλασματικὸς ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον ὁμώ-
νυμόν του, ἔὰν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ των καὶ τεθῇ ὑπὸ
τὸ ἄθροισμὰ των ὁ κοινὸς παρονομαστὴς των.

Ἄς προστεθῇ τὸ $\frac{5}{12}$ εἰς τὸ $\frac{6}{12}$. Προστίθεται ὁ ἀριθμητὴς 5
εἰς τὸν 6, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμὰ των 11 τίθεται ὁ κοινὸς παρο-
νομαστὴς 12· τὸ δὲ οὕτω προκύπτον $\frac{11}{12}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ

$\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{6}{12}$. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς καὶ τῶν δύο εἶναι ἡ αὐτή, τὸ $\frac{1}{12}$, καὶ τὸ ἄθροισμά των πρέπει νὰ ἴναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν των διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ των (56). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των πρέπει νὰ ἴναι ὁμώνυμον με τοὺς ἀριθμούς, ἔχουν δωδέκατα διὰ τοῦτο ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πρέπει νὰ τεθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστής των 12.

Ἄλλως εἶναι φανερόν ὅτι 5δωδέκ. καὶ 6δωδέκ. κάμνουσιν 11δωδέκ. ἥτοι $\frac{11}{12}$.

Οὕτω λοιπὸν εὐρίσκεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{7}{12}$ εἶναι $\frac{12}{12}$ ἢ $\frac{2}{3}$ — Τὸ τοῦ $\frac{5}{9}$ καὶ $\frac{8}{9}$ εἶναι $\frac{13}{9}$ ἢ $1\frac{4}{9}$ — Τὸ τῶν τριῶν $\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$ εἶναι $\frac{20}{12}$ ἢ $1\frac{5}{3}$ — Τὸ τοῦ $\frac{7}{11}$ καὶ $\frac{15}{11}$ καὶ $\frac{28}{11}$ εἶναι $\frac{50}{11}$ ἢ $4\frac{6}{11}$.

Οἱ δ' ἑτερόνυμοι κλασματικοὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσθῶνται ὡς εἶναι, δι' αὐτὸ τοῦτο ὅτι αἱ μονάδες των εἶναι ἀνισοὶ (56). Ἀνάγκη λοιπὸν πρῶτον νὰ τρέπωνται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμώνυμους, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέωνται οὗτοι ὡς ἤδη εἵπομεν. Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὁμώνυμων θέλει εἶσθαι καὶ τῶν ἑτερόνυμων ἄθροισμα.

Π. χ. τὰ $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{5}{7}$ προσθέτονται, ἀφοῦ τραπῶσιν εἰς τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμά των $\frac{28}{63}$ καὶ $\frac{45}{63}$, καὶ ταῦτα προστεθῶσιν. Τὸ δὲ ἄθροισμά των $\frac{73}{63}$ ἢ $1\frac{10}{63}$ εἶναι τὸ τοῦ $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{5}{7}$. — Τὸ ἄθροισμα τοῦ $\frac{8}{11}$ καὶ $\frac{6}{9}$ καὶ $\frac{5}{12}$ εἶναι $\frac{215}{132}$ ἢ $1\frac{107}{132}$.

142. Μικτὸς δ' ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον μικτόν, ἂν προστεθῶσι πρῶτον τὰ κλάσματα, ἔπειτα οἱ ἀκέραιοι, καὶ μετ' ὃ τὸ ἄθροισμα τούτων ἐνωθῶσι καὶ ὅσαι μονάδες προκύψωσιν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, ἂν προκίψωσιν ἢ ἂν τραπῶσιν οἱ μικτοὶ εἰς κλασματικούς, καὶ οὗτοι προστεθῶσιν ὡς ἀνωτέρω.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ $6\frac{7}{8}$ καὶ τοῦ $5\frac{2}{3}$ εἶναι $12\frac{1}{4}$ — Τὸ τοῦ $8\frac{7}{12}$ καὶ $9\frac{5}{6}$ εἶναι $18\frac{5}{4}$.

Σημ. Ἐκ δὲ τούτων νοεῖται εὐκόλως πῶς προστίθεται καὶ κλάσμα εἰς ἀκέραιον, καὶ ἀκέραιος εἰς μικτόν, καὶ κλάσμα εἰς μικτόν.

143. Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον ὁμω-
νυμὸν τοῦ μεγαλῆτερον, ἂν ἀφαιρεθῇ τοῦ πρώτου ὁ ἀριθμητικὸς
ἀπὸ τὸν τοῦ δευτέρου καὶ τεθῇ ὑπὸ τὸ ὑπόλοιπον ὁ κοινὸς
παρονομαστὴς των.

Ἄς ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{7}{13}$ ἀπὸ τὸ $\frac{11}{13}$. Ἀφαιρεῖται ὁ 7 ἀπὸ τὸν
11 καὶ ὑπὸ τὸ ὑπόλοιπον 4 τίθεται ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 13·
τὸ δὲ οὕτω προκύπτον $\frac{4}{13}$ εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $\frac{11}{13}$ ὑπὲρ τὸ $\frac{7}{13}$.
Ἐπειδὴ ἡ μονὰς καὶ τῶν δύο εἶναι ἡ αὐτὴ, τὸ $\frac{1}{13}$ καὶ ἡ ὑπε-
ροχὴ τοῦ $\frac{11}{13}$ ὑπὲρ τὸ $\frac{7}{13}$ εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀριθμητοῦ 11
ὑπὲρ τὸν 7· διὰ τοῦτο πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 7 ἀπὸ τὸν 11.
Ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ πρέπει νὰ ᾖναι ὁμώνυμος μὲ τοὺς ἀριθμοὺς,
ἥγουν δέκατα τρίτα· διὰ τοῦτο ὑπὸ τὸ ὑπόλοιπον τῶν ἀριθ-
μῶν πρέπει νὰ τεθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς των 13.

Ἄλλως εἶναι φανερόν ὅτι 7 δέκ. τρίτ. ἀπὸ 11 δέκ. τρίτ. δίδουσι
4 δέκ. τρίτ. ἥτοι $\frac{4}{13}$.

Οὕτως ἀφαιροῦντες $\frac{5}{9}$ ἀπὸ $\frac{7}{9}$ ἔχομεν ὑπόλοιπον $\frac{2}{9}$ — Ἡ ὑπε-
ροχὴ τοῦ $\frac{7}{9}$ ὑπὲρ τὸ $\frac{5}{9}$ εἶναι $\frac{2}{9}$ ἢ $\frac{1}{3}$ — Ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{7}{9}$
καὶ $\frac{5}{9}$ εἶναι $\frac{2}{9}$.

Οἱ δ' ἑτερόνυμοι κλασματικοὶ πρῶτον τρέπονται εἰς ἰσο-
δυνάμους ὁμωνύμους, καὶ ἔπειτα γίνεται τούτων ἡ ἀφαίρεσις
ὡς ἥδη εἵπομεν. Ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ἡ δια-
φορὰ τῶν ἑτερονύμων. Π. χ. τὸ $\frac{6}{11}$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ $\frac{7}{8}$, ἀφοῦ
τραπῶσιν εἰς τὰ ἰσοδύναμά των $\frac{48}{88}$ καὶ $\frac{77}{88}$ · γενομένης δὲ τῆς
ἀφαίρεσεως τούτων, εὐρίσκεται διαφορὰ τοῦ $\frac{6}{11}$ ἀπὸ $\frac{7}{8}$ τὸ $\frac{29}{88}$
— Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $\frac{7}{8}$ ὑπὲρ τὸ $\frac{6}{11}$ εἶναι $\frac{29}{88}$ ἢ $\frac{1}{3}$ — Τὸ $\frac{7}{8}$
ὑπερέχει τὸ $\frac{6}{11}$ κατὰ $\frac{1}{3}$.

Ἄς ἀφαιρεθῇ καὶ τὸ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὸν 8. Τρέπεται μίᾳ τῶν μονά-
δων τοῦ 8 εἰς $\frac{4}{4}$ καὶ μένουσιν 7, ἀπὸ τὰ $\frac{4}{4}$ ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{3}{4}$
καὶ μένει $\frac{1}{4}$ · λοιπὸν 7 $\frac{1}{4}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὸν 8 —
Ὡσαύτως ἀφαιρεῖται $\frac{6}{11}$ ἀπὸ 5 καὶ μένουσι 4 $\frac{5}{11}$.

144. Μικτὸς δ' ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον μικτόν, ἢ
ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρέτου ἀπὸ τὸ τοῦ ἀφαιρέτου,

καὶ ἔπειτα ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον· ἢ ἂν τραπέσω εἰς κλασματικούς καὶ οἱ δύο, καὶ ἔπειτα ἡ ἀφαίρεσις τούτων γείνη ὡς ἀνωτέρω. Οὕτως ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ $4\frac{2}{8}$ ἀπὸ τὸν $6\frac{5}{8}$, μένει ὑπόλοιπον $2\frac{3}{8}$ ἢ $2\frac{1}{4}$ — Ὁ $8\frac{5}{9}$ ὑπερέχει τὸν $3\frac{3}{7}$ κατὰ $5\frac{1}{63}$ — Ὁ $12\frac{9}{12}$ ὑπερέχει τὸν $5\frac{6}{9}$ κατὰ $7\frac{3}{36}$ ἢ $7\frac{1}{12}$.

Ἄς ἀφαιρεθῇ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ὁ $8\frac{5}{9}$ ἀπὸ τὸν $12\frac{3}{4}$. Τρέπονται τὰ κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα ταῦτα $\frac{21}{12}$ καὶ $\frac{45}{36}$ · καὶ ἐπειδὴ τὸ τοῦ ἀφαιρέτου $\frac{45}{36}$ εἶναι μεγαλῆτερον, διὰ νὰ γείνη δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, τρέπεται μία τῶν 12 μονάδων τοῦ ἀφαιρέτου εἰς $\frac{63}{36}$, καὶ προσθίτεται εἰς τὸ $\frac{21}{36}$ · ἔπειτα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\frac{84}{36}$ ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{45}{36}$, καὶ μένει $\frac{39}{36}$ ἢ $\frac{13}{12}$ · τελευταῖον ἀφαιρεῖται 8 ἀπὸ 11 καὶ μένει 3. Ὡστε ὁ $12\frac{3}{4}$ ὑπερέχει τὸν $8\frac{5}{9}$ κατὰ $3\frac{13}{12}$.

Σημ. Ἐκ δὲ τούτων εἶναι φανερόν καὶ πῶς ἀφαιρεῖται ἀκέραιος ἀπὸ μικτὸν, μικτὸς ἀπὸ ἀκέραιον, καὶ κλάσμα ἀπὸ μικτόν.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαίρεσεως ἀριθμῶν

διὰ κλασματικῶν καὶ μικτῶν.

145. Περὶ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπ' ἄλλον γενικῶς σημαίνει ἐκτελεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἡ αὐτὴ πράξις, καθ' ἣν γίνεται ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος, καὶ ἐπειδὴ ἐδῶ ὁ δεύτερος, κλασματικός ὢν, γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἐὰν πρῶτον εὑρεθῇ πολλοστὸν τι μέρος αὐτῆς καὶ τοῦτο ἐπαναληφθῇ πολλάκις, διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖ κλασματικός, ὁ πολλαπλασιαστέος κυρίως συνίσταται εἰς τὸν νὰ εὑρίσκηται πρῶτον τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅποιον πολλοστὸν τῆς μονάδος εἶναι ἡ κλασματικὴ μονὰς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα νὰ ἐπαναλαμβάνηται τὸ προκύπτον πηλίκον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· ἢ ἄλλως, νὰ διαιρῆται ὁ πολλαπλασιαστέος διὰ τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ νὰ

πολλαπλασιάζεται τὸ προκύπτον πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

146. *Ἀκέραιος ἐπὶ κλασματικόν.* Ὡς πολλαπλασιασθῇ ὁ 20 ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι τρεῖς τὸ τέταρτον τῆς μονάδος· λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ ᾖ τρεῖς τὸ τέταρτον τοῦ 20. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ πρῶτον τὸ τέταρτον τοῦ 20, ἥτοι νὰ διαιρεθῇ ὁ 20 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν πηλίκον 5· ἔπειτα τὸ πηλίκον 5 νὰ τριπλασιασθῇ, ἥτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν 3 εἰς 5 15. Ὁ 15 λοιπὸν εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, διότι εἶναι τρεῖς 5, ἥτοι τρεῖς τὸ τέταρτον τοῦ 20, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι τρεῖς τὸ τέταρτον τῆς μονάδος.

Ὡσαύτως καὶ ὁ 14 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{5}{8}$ · δηλ. διαιρεῖται ὁ 14 διὰ 8, καὶ τὸ 8^{ον} τοῦ 14 ἥτοι ὁ $\frac{14}{8}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5 (128). Τὸ δὲ προκύπτον γινόμενον $\frac{70}{8}$ ἢ 8 $\frac{6}{8}$ εἶναι πεντάκις τὸ ὄγδοον τοῦ 14, ὡς ὁ $\frac{5}{8}$ εἶναι πεντάκις τὸ ὄγδοον τῆς μονάδος — Τὸ γινόμενον τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ εὑρίσκεται οὕτως ὅτι εἶναι 18.

Γενικῶς, ἀκέραιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ἐὰν διαιρεθῇ αὐτὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασματικοῦ, καὶ τὸ προκύπτον πηλίκον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ.

Σημ. Εἰς τὴν πρᾶξιν συνήθως πρῶτον πολλαπλασιάζουσι τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ἔπειτα διαιροῦσι τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· διότι καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

147. *Κλασματικὸς ἐπὶ κλασματικόν.* Ὡς πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι πεντάκις τὸ ὄγδοον τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον πρέπει νὰ ᾖ καὶ αὐτὸ πεντάκις τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{4}$. Λοιπὸν καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{4}$, ἥτοι νὰ διαιρεθῇ τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ 8, καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5. Ἀλλὰ διαιρεῖται τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ 8, ἐὰν πολ-

λαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής τοῦ ἐπὶ 3 (131), καὶ ἔχομεν $\frac{1}{32}$. πολλαπλασιάζεται δὲ τοῦτο ἐπὶ 5, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής τοῦ ἐπὶ 5 (128), καὶ ἔχομεν $\frac{15}{32}$. Τὸ δὲ $\frac{15}{32}$ δηλὸν ὅτι εἶναι πεντάκις τὸ $\frac{3}{32}$, ἥτοι πεντάκις τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{1}{8}$, ὡς ὁ $\frac{5}{8}$ εἶναι πεντάκις τὸ ὄγδοον τῆς μονάδος.

Βλέπει δέ τις ἐκ τούτου ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη, ὅπως ἔγεινεν, ἀπαιτεῖ νὰ πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής 3 ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 5, ὁ παρονομαστής 4 ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 8, καὶ τὸ γινόμενον 32 τῶν παρονομαστών νὰ τεθῇ ὑπὸ τὸ τῶν ἀριθμητῶν 15. Τοῦτο δὲ φαίνεται καὶ εἰς πᾶν ἄλλο παράδειγμα. Λοιπὸν γενικῶς, κλασματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον κλασματικόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμητής ἐπὶ ἀριθμητὴν παρονομαστής ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστών τεθῇ ὑπὸ τὸ τῶν ἀριθμητῶν.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{6}{9}$ ἐπὶ $\frac{7}{12}$ εἶναι $\frac{42}{108}$ ἢ $\frac{7}{18}$ — $\frac{8}{9}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$ παράγει $\frac{40}{63}$ ἢ $1 \frac{13}{63}$ — $\frac{9}{12}$ ἐπὶ $\frac{10}{7}$ παράγει $\frac{90}{84}$ ἢ $1 \frac{3}{4}$ — $\frac{12}{7}$ ἐπὶ $\frac{17}{9}$ παράγει $\frac{204}{63}$ ἢ $3 \frac{5}{21}$.

Μικτὸς δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ἀποῦ τραπῇ εἰς κλασματικόν. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι $4 \frac{7}{9}$ ἐπὶ $\frac{3}{5}$ παράγει $\frac{127}{45}$ ἢ 2, $\frac{32}{45}$ — $8 \frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{7}{9}$ παράγει $\frac{343}{36}$ ἢ $6 \frac{23}{36}$.

Σημ. α'. Ἡ φράσις πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς π. χ. ἐπὶ $\frac{7}{8}$, καὶ ἡ φράσις εὐρίσκονται τὰ πέντε ὄγδοα αὐτοῦ εἶναι ταυτοσημοί, καὶ εἰμπορῶμεν νὰ τὰς μεταχειρίζομεθα ἀδιαφόρως· καὶ περὶ ἄλλων ὡσαύτως.

Σημ. β'. Ὅταν ὁ ἀριθμητής τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ᾖ διαιρέσιμος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τότε εἶναι προτιμότερον νὰ διαιρῇται αὐτὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ὅχι νὰ πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστής. Π. χ. ἐὰν πρὶν νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{12}{9}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$ διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής 12 δι' 6, καὶ τὸ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, καὶ οὕτω προκύπτει εὐθὺς κλασματικὸς ἀπλούστερος ὁ $\frac{10}{3}$. — Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητής τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ᾖ ἴσος μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τότε εἶναι φανερόν ὅτι αὐτοὶ ἐξαλείφονται, καὶ τὸ γινόμενον τῶν θάλει εἶσθαι κλασματικὸς, ἔχων ἀριθμητὴν τὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ παρονομαστὴν τὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{6}{8}$ ἐπὶ $\frac{3}{6}$ εἶναι $\frac{3}{8}$.

Σημ. γ'. Ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ᾖ διαιρέσιμος

διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἶναι προτιμότερον διὰ τούτου νὰ διαιρῇται ἐκεῖνος, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής. Π. χ. ἐὰν πρῶ-
κται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ $\frac{4}{5}$, τὸ γινόμενον κατὰ ταῦτα θέλει εἶσθαι
 $\frac{7}{15}$, τὸ ὅποιον εἶναι ἀπλούστερον τοῦ $\frac{28}{60}$, τοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα
εὑρισκομένου. Ὡσαύτως πολλαπλασιαζομένου καὶ τοῦ $\frac{6}{9}$ ἐπὶ $\frac{9}{11}$, εὑρίσκεται
γινόμενον $\frac{6}{11}$.

148. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής ᾖται μικτὸς ἀριθμὸς, τρέπεται πρῶτον εἰς κλασματικόν, καὶ ἐπὶ τούτον ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὅποιοςδήποτε καὶ ᾖ ᾗται, ὡς ἤδη εἴπομεν (146—147). Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι 12 ἐπὶ $9\frac{3}{7}$ παράγει $\frac{792}{7}$ ἢ $113\frac{4}{7}$ — $\frac{5}{6}$ ἐπὶ $4\frac{3}{5}$ παράγει $\frac{115}{6}$ ἢ $2\frac{7}{6}$ — $6\frac{7}{8}$ ἐπὶ $3\frac{5}{9}$ παράγει $\frac{1760}{72}$ ἢ $24\frac{4}{9}$.

Σημ. Ἐνίστε εἶναι προτιμότερον νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος πρῶτον ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἀκέραιόν του, καὶ αἱ προκύπτουσαι μονάδες ἐκ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ προσθῶνται εἰς τὸ δεύτερον.

149. Πολλοὶ κλασματικοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους καθὼς καὶ οἱ ἀκέραιοι (82). Π. χ. οἱ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{9}$, πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$, ἔπειτα τὸ γινόμενον τῶν $\frac{15}{24}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$, τελευταῖον τὸ γινόμενον $\frac{105}{192}$ τούτων ἐπὶ $\frac{6}{9}$, καὶ οὕτω προκύπτει γινόμενον τῶν τεσσάρων κλασματικῶν ὁ $\frac{630}{1728}$. Ὁ κλασματικὸς δὲ οὗτος, ὅστις εἶναι $\frac{630}{1728}$ τῆς μονάδος, εἶναι ἔτι καὶ $\frac{6}{9}$ τῶν $\frac{7}{8}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ $\frac{3}{4}$, ἡγουν κλάσμα κλάσματος κλάσματος τοῦ $\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν ὅτι ὁ $\frac{630}{1728}$ εἶναι τὰ $\frac{6}{9}$ τοῦ $\frac{105}{192}$ · ἀλλ' ὁ $\frac{105}{192}$ εἶναι τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ $\frac{15}{24}$, λοιπὸν ὁ $\frac{630}{1728}$ εἶναι τὰ $\frac{6}{9}$ τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ $\frac{15}{24}$ · ἀλλὰ καὶ ὁ $\frac{15}{24}$ εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ $\frac{3}{4}$. Λοιπὸν ὁ $\frac{630}{1728}$ εἶναι τὰ $\frac{6}{9}$ τῶν $\frac{7}{8}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς μονάδος.

150. Ἡ δὲ σειρά τῶν ἀνωτέρω πολλαπλασιασμῶν δεικνύει ὅτι τοῦ γινομένου $\frac{630}{1728}$ ὁ μὲν ἀριθμητής εἶναι γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασματικῶν, ὁ δὲ παρονομαστὴς γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Λοιπὸν γενικῶς, πολλοὶ κλασματικοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι οἱ

ἀριθμηταὶ ἐπ' ἀλλήλους, οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως, καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον τεθῇ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Εἶναι δὲ χρήσιμον νὰ πολλαπλασιάζωνται πολλοὶ κλασματικοὶ ἐπ' ἀλλήλους, ὅταν ζητῇται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ᾖναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος κτλ, ἄλλου ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ. Ἐὰν ζητῶνται τὰ $\frac{6}{7}$ τῶν $\frac{3}{6}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τοῦ 14, ἀφοῦ γραφθῇ ὁ 14 οὕτω $\frac{14}{1}$ (123), πολλαπλασιάζονται ὡς ἤδη εἶπομεν, καὶ εὐρίσκεται ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0}{3 \cdot 7 \cdot 8}$ τῆς μονάδος, ἥτοι $\frac{10}{3}$ ἢ $3 \frac{1}{3}$ τῆς μονάδος.

Σημ. α'. Εἶναι καλὸν πρῶτον νὰ ἐξαλείφωται οἱ ἀριθμοὶ, ὅσοι εἶναι ἐνταυτῷ ἀριθμηταὶ καὶ παρονομασταὶ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ μένοντες (147 σημ. β'. γ'), διότι οὕτως εὐκολύνεται πολὺ ἡ πράξις. Ἀνωτέρω ἐξελίσφεται ὁ 6, ὁ 3 καὶ ὁ 7, ἔπειτα γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ εὐρίσκεται εὐθὺς ὁ $\frac{10}{3}$.

Σημ. β'. Ἐπειδὴ πολλαπλασιάζονται πολλοὶ κλασματικοὶ ἐπ' ἀλλήλους, ἔαν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ ἐπ' ἀλλήλους καὶ οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως, καὶ ἔπειδὴ τὸ γινόμενον καὶ τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν, ὡς ἀκεραίων, εἶναι τὸ αὐτὸ κατ' ὁποιοδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν (83), διὰ τοῦτο καὶ ὁποιοδήποτε καὶ ὁποιοιδήποτε κλασματικοὶ εἰμπορεύναι νὰ πολλαπλασιάζωνται κατ' ὁποιοδήποτε τάξιν θέλη τις, καὶ θέλει εὐρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον.

151. *Περὶ διαιρέσεως.* Ἐπειδὴ διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου εἶναι ἡ πράξις, κατ' ἣν εὐρίσκεται ἀριθμὸς τοιοῦτος πρὸς τὸν πρῶτον, ὅποιά εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν δεύτερον, καὶ ἔπειδὴ, ὅταν ὁ δεύτερος ἢ ὁ διαιρέτης ᾖναι κλασματικός, ὁ προκύπτων ἐκ τῆς ἀναστροφῆς τῶν ὅρων τοῦ κλασματικοῦ παριστάνει ὅποιά εἶναι ἡ μονὰς πρὸς αὐτὸν τὸν διαιρέτην [43], διὰ τοῦτο ὁ κλασματικὸς διαιρέτης ἀνεστραμμένος τοὺς ὅρους περὶστάνει καὶ ὅποιον εἶναι τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον. Π. χ. ὅταν πρόκειται ἀριθμὸς τις νὰ διαιρεθῇ διὰ $\frac{5}{7}$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ διαιρετέου· τὰ δὲ $\frac{7}{5}$ τοῦ διαιρετέου εὐρίσκονται, ἂν πρῶτον εὐρεθῇ τὸ ἐν πέμπτῳ αὐτοῦ καὶ αὐτὸ ἐπταπλασιασθῇ, ἡγοῦν ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος ἐπὶ $\frac{7}{5}$ κατὰ τοὺς κανόνας τῶν ἀρ. 145, 146 καὶ 147. Καὶ περὶ ἄλλων λέγομεν τὰ

αὐτά. Λοιπὸν, πᾶς ἀριθμὸς, ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτὸς διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀντιστραφέντον τοῦ ὅρου κλασματικοῦ διαιρέτην κατὰ τοῦ κανόνα τῶν ἀρ. [145—147].

Σημ. Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι ἡ διαίρεσις τρέπεται εἰς πολλαπλασιασμὸν διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ὁρῶν τοῦ διαιρέτου.

α. Ἄς διαιρεθῇ ὁ ἀκέραιος 5 διὰ $\frac{2}{3}$.

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι τὰ $\frac{3}{3}$ τοῦ διαιρέτου $\frac{2}{3}$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι καὶ αὐτὸ τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ 5. Ἀλλὰ τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ 5 εὐρίσκονται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 5 ἐπὶ $\frac{3}{2}$ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 146· λοιπὸν, γενομένου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εὐρίσκεται $\frac{15}{2}$ ἢ 6 $\frac{1}{2}$, ὅστις εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 5 διὰ $\frac{2}{3}$. Ὡσαύτως ἐὰν διαιρεθῇ ὁ 8 διὰ $\frac{4}{5}$, εὐρίσκεται πηλίκον ὁ ἀκέραιος 10, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ 8, ὡς ἡ μονὰς εἶναι τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ διαιρέτου $\frac{4}{5}$. 6 διὰ $\frac{7}{8}$ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ 6 ἐπὶ $\frac{8}{7}$, τὸ ὁποῖον παράγει $\frac{48}{7}$ ἢ 7 $\frac{1}{7}$.

β. Ἄς διαιρεθῇ ὁ $\frac{5}{8}$ διὰ $\frac{3}{7}$.

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ διαιρέτου $\frac{3}{7}$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι καὶ αὐτὸ τὰ $\frac{8}{3}$ τοῦ διαιρέτου $\frac{3}{7}$. Ἀλλὰ τὰ $\frac{8}{3}$ τοῦ $\frac{5}{8}$ εὐρίσκονται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 147 ὅτι εἶναι $\frac{30}{4}$ ἢ 1 $\frac{1}{4}$. λοιπὸν τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{5}{8}$ διὰ $\frac{3}{7}$ εἶναι 1 $\frac{1}{4}$. Ὡσαύτως $\frac{2}{3}$ διὰ $\frac{8}{9}$ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{9}{8}$, τὸ ὁποῖον παράγει $\frac{27}{40}$ — 4 $\frac{5}{9}$ διὰ $\frac{10}{12}$ ἢτοι $\frac{41}{9}$ διὰ $\frac{10}{12}$ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ $\frac{41}{9}$ ἐπὶ $\frac{12}{10}$, δηλ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{492}{90}$ ἢ 5 $\frac{7}{15}$.

152. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης ᾗται μικτὸς ἀριθμὸς, πρῶτον τρέπεται εἰς κλασματικόν, καὶ ἔπειτα διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ διαιρετέος κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι 4 διὰ 7 $\frac{3}{4}$ δίδει πηλίκον $\frac{16}{11}$ — $\frac{5}{11}$ διὰ 4 $\frac{3}{8}$ δίδει πηλίκον $\frac{5}{16}$ — 6 $\frac{3}{8}$ διὰ 8 $\frac{5}{7}$ δίδει $\frac{450}{16}$.

135. Ὅλων τῶν ἤδη προηγουμένων διαιρέσεων τὸ πηλίκον εἶναι τοιοῦτον, ὅποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Π. χ. τὸ πηλίκον $\frac{40}{6}$ τοῦ 5 διὰ $\frac{6}{5}$ εἶναι τὰ $\frac{6}{6}$ τοῦ 5. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ὁ 5 εἶναι

τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ $\frac{4}{6}$, ἤγουν ἀριθμὸς ὅστις σύγκειται ἐκ τοῦ $\frac{4}{6}$, ὅπως ὁ $\frac{5}{6}$ σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος· διότι τὸ δυν τοῦ $\frac{4}{6}$ εἶναι $\frac{5}{6}$, ἐξάκως δὲ τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι ὁ 5. Τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{4}{6}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{6}{6}$ παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Τὰ αὐτὰ λέγομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἵστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ὁποιοιδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

154. Ἀλλ' εἶδομεν (81 καὶ 150) ὅτι ὁπότερος δύο ὁποιοιδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, θέλει εὑρεθῇ γινόμενον ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς· λοιπὸν καὶ ὁ διαιρέτης πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ πηλίκον παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ πηλίκον εἴμπορεῖ νὰ νοῆται καὶ ὡς ἀριθμὸς, ὅστις σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος, ὅπως ὁ διαιρετέος σύγκειται ἐκ τοῦ διαιρέτου, καὶ διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον δύναται νὰ νοῆται ὅτι παριστάνῃ καὶ τὸν λόγον τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην.

Ἵστε πρὸς εὑρεσιν τοῦ λόγου ὁποιοιδήποτε ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον ὁποιοιδήποτε πρέπει νὰ διαιρῇται ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ λόγος. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ $\frac{3}{4}$ πρὸς τὸν $\frac{5}{7}$ εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$ ἢ $\frac{7}{5}$ τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, ἥτοι ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ $\frac{5}{7}$.

155. Ἐκ τούτων ἐξάγονται τὰ ἐξῆς·

α. Ὅτι δύο ὁμώνυμοι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κατ' εὐθεΐαν ἀνάλογοι τῶν ἀριθμητῶν των, ἤγουν ὁ τοῦ πρώτου κλασματικοῦ λόγος πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ πρώτου ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν δεύτερον. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{12}{15}$ καὶ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν των 12 πρὸς 4· διότι, ἂν διαιρῇται ὁ $\frac{12}{15}$ διὰ $\frac{4}{15}$, εὑρίσκεται πηλίκον $\frac{3}{4}$ ἥτοι ὁ λόγος 3 τῶν ἀριθμητῶν των 12 καὶ 4·

β. Ὅτι δύο κλασματικοὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν παρονομαστῶν των, ἤγουν ὁ

λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ δευτέρου παρονομαστοῦ πρὸς τὸν πρώτον. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{7}{9}$ εἶναι ἀνάλογα τῶν 9 καὶ 12. Ἐπειδὴ ἂν διαιρεθῇ ὁ $\frac{7}{12}$ διὰ τοῦ $\frac{7}{9}$, εὐρίσκεται πηλίκον $\frac{9}{12}$, ἥτοι ὁ λόγος $\frac{9}{12}$ τοῦ 9 πρὸς τὸν 12.

γ'. Ὅτι ὁ λόγος δύο ὁποιωνδήποτε κλασματικῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ πρώτου, καὶ ἐπομένως ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ $\frac{6}{5}$ πρὸς τὸν $\frac{4}{7}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 6 ἐπὶ 7 πρὸς τὸν 4 ἐπὶ 5, ἥτοι μὲ τὸν λόγον τοῦ 42 πρὸς τὸν 20. Ἐπειδὴ, ἂν διαιρεθῇ ὁ $\frac{6}{5}$ διὰ τοῦ $\frac{4}{7}$, εὐρίσκεται πηλίκον $\frac{42}{20}$, οὗτος δὲ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 42 πρὸς τὸν 20, καὶ ἐνταυτῷ ὁ λόγος τοῦ $\frac{6}{5}$ πρὸς τὸν $\frac{4}{7}$.

Σημ. Ἐπιθεωρῶν τις ὅσα ἐξηγήθησαν μέχρι τοῦδε περὶ τῶν πράξεων, θέλει ὅτι ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις πανταχοῦ εἶναι αἱ αὐταὶ πράξεις, καὶ ἐκτελοῦνται ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, καὶ ἐπὶ μόνον ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀπαιτεῖται δὲ πάντοτε νὰ ᾖναι ὁμώνυμοι οἱ ἀριθμοὶ ἐπὶ τῶν ὑποίων μέλλουσι νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις αὗται.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμός καὶ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι πανταχοῦ αἱ αὐταὶ πράξεις. Ἐπειδὴ, ὁ μὲν πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖναι ἀκέραιος, εἶναι πρᾶξις ἀπλῇ, καὶ συνίσταται εἰς πολλὰς ἁλλεπαλήλους προσθέσεις τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἑαυτὸν, εἰς τὸ διπλάσιόν του κτλ, αἵτινες ὅμως ἐκτελοῦνται μὲ τρόπον σύντομον· τὸ δὲ γινόμενον τότε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἡ δὲ διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖναι ἀκέραιος, εἶναι καὶ αὕτη ἀπλῇ κατὰ τοῦτο, ὅτι εὐρίσκεται δι' αὐτῆς μόνον πολλοστόν τι τοῦ διαιρετέου, ἂν καὶ ἄλλως ἐκτελεῖται διὰ πολλαπλασιασμῶν, ἀφαίρέσεων καὶ προσθέσεων. Ὅταν δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ διαιρέτης ᾖναι κλασματικοί, τότε καὶ ὁ πολλαπλασιασμός καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι σύνθετοι πράξεις ἐκ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως δι' ἀκεραίων, καὶ διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι πολλαπλασιάζεται μὲν ἀριθμός, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ καὶ τὸ γινόμενον διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· διαιρεῖται δὲ ἀριθμός, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ καὶ τὸ γινόμενον διαιρῆται διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ. Καὶ τότε τὸ γινόμενον εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος τοῦ πολλαπλασια-

στέου, καὶ τὸ πηλίκον ὡσαύτως εἶναι πολλαπλάσιον πολλοῦ τινος τοῦ διαιρέτου.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμοῦ ἀρμόζει μὲν, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, ὅχι δὲ καὶ ὅταν ᾖ κλασματικός. Τὸ δὲ ὄνομα διαίρεσις δὲν ἀρμόζει οὔτε ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ ἀκέραιος, οὔτε ὅταν ᾖ κλασματικός· διότι διαιρῶ σημαίνει κοινῶς χωρίζω τι εἰς μέρη, ἐνῶ ἡ ἀριθμητικὴ διαίρεσις δὲν εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς χωρίζεται ἀριθμὸς εἰς μέρη, ἀλλὰ πρᾶξις γινομένη δι' ὅλων τῶν ἄλλων πρὸς εὐρεσιν ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ ἔχη τοιαύτην σχέσιν πρὸς τὸν διαιρέτην, ὅποιον ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην. Διὰ τοῦτο τὴν ἀριθμητικὴν σημασίαν αὐτῶν τῶν καθιερωμένων λέξεων πρέπει νὰ ἐννοήσῃ τις ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῶν, καὶ ὅχι ἐκ τῆς κοινῆς σημασίας αὐτῶν.

Τελευταίῳ, ὅσα θέλομεν εἰπεῖ περὶ τῶν αὐτῶν τούτων πράξεων γινομένων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν κτλ., εἶναι κυρίως ἐφαρμογὴ τῶν ὅσα ἕως ἐδῶ ἐξηγήσαμεν.

Χρησις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς λύσιν προβλημάτων.

156. Τοιούτους ἀριθμούς, ὅποιοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ἔχομεν χρειάν συχνότατα εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον νὰ εὐρίσκωμεν. Ὁ γεωργός, ὁ ποιμὴν, ὁ τεχνίτης, ὁ ἔμπορος, ὁ πολιτικός καὶ ὁ παντὸς ἄλλου ἐπαγγέλματος ἄνθρωπος ἔχει μυριάκις εἰς τὴν ζωὴν του χρειάν νὰ γνωρίζῃ ἀριθμούς πραγμάτων διαφόρων, συσχετισμένους πρὸς ἄλλους γνωστούς ἔχοντας σχέσεις καὶ αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους.

Εἶναι δὲ συσχετισμένοι οἱ ἀριθμοὶ κατὰ διαφόρους τρόπους. α'. Εἶναι συσχετισμένοι ὡς οἱ ἀριθμοὶ τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως, ἥτοι ὁ μὲν εἶναι ἄθροισμα δύο ἢ πολλῶν ἄλλων, ὁ δὲ εἶναι διαφορὰ δύο ἄλλων. β'. Εἶναι συσχετισμένοι ὡς οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἀριθμοὶ, ἥτοι τριῶν ἀριθμῶν ὁ μὲν σύγκειται ἐξ ἑνὸς τῶν δύο ἄλλων, ὡς ὁ τρίτος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος. γ'. Εἶναι συσχετισμένοι ἐκ συνθήκης, ὡς ὅταν δύο ἀριθμῶν ὁ μὲν φανερόναι πρᾶγμα τι, ὁ δὲ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κτλ. ἢ ἐκ φύσεως, οἷον εἰς ἓν δεύτερον λεπτόν ὁ ἥχος διατρέχει διάστημα 340^{πῆλ}, κτλ. ἢ ἐκ περιστάσεως ἢ τύχης, οἷον ἄνθρωπός τις εἰς 3^{μῆν} ἐκέρδισε 528^{δρ}. κτλ. δ'. Εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ καὶ ὁμώνυμοι, κτλ.

157. Εἶναι πολλαὶ καὶ διάφοροι αἱ περιστάσεις, καθ' ἃς εἶναι συσχετισμένοι κατὰ ἓνα ἢ πλείονους τρόπους γνωστοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἄγνωστος, ὅστις πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῶν γνωστῶν.

Ἡ ζήτησις ἀριθμοῦ συσχετισμένου μὲ ἄλλους γνωστὸς συσχετισμένους πρὸς ἀλλήλους, ἐκ τῶν ὁποίων μέλλει νὰ προσδιορισθῇ ὁ ζητούμενος, ὀνομάζεται ἀριθμητικὸν πρόβλημα. Ἡ δὲ σειρὰ τῶν λέξεων, δι' ὧν συνιστᾶται πρόβλημα, λέγεται ἐκθεσις τοῦ προβλήματος. Ὅλα τὰ κατωτέρω εἶναι ἐκθέσεις προβλημάτων διαφόρων.

Εἶναι δὲ ἀναγκαιότατον εἰς προβλήματος σύστασιν α'. νὰ ὑπάρχῃ τοῦλάχιστον εἰς ἄγνωστος, β'. δύο ἢ πλείότεροι γνωστοί, καὶ γ'. νὰ ᾖναι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οὕτω συσχετισμένοι, ὥστε νὰ ᾖναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ δι' ἀριθμητικῶν πράξεων ὁ ἄγνωστος ἐκ τῶν γνωστῶν. Π. χ. τὸ 345 πύλ. τσόχας ἐτιμήθησαν 4915 δρ., 12 πύλ. τῆς αὐτῆς τσόχας πόσον ἀξίζουν εἶναι πρόβλημα, διότι ἐμπεριέχει ὅλα, ὅσα ἤδη εἶπομεν. Ἀλλὰ τὰ 345 πύλ. τσόχας ἀξίζουν 4915 δρ. — ἀπὸ Χριστοῦ γεννήσεως ἕως τώρα εἶναι 1842 ἔτη κατὰ δὲν εἶναι πρόβλημα, διότι δὲν ἐμπεριέχουσιν ἄγνωστον. Οὐδὲ τὰ 12 πύλ. τσόχας πόσον ἀξίζουν — πόσοι εἶναι οἱ κάτοικοι τῶν Ἀθηνῶν κατὰ εἶναι πρόβλημα, διότι δὲν ἐμπεριέχουσιν γνωστὸς ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων νὰ ᾖναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ ἄγνωστοι. Οὐδὲ τὸ 70 κτίσ. ἔκτισαν οἰκίαν εἰς 45 ἡμ., 12 πύλ. τσόχας πόσον ἀξίζουν εἶναι πρόβλημα, ἂν καὶ ἔχῃ μορφήν προβλήματος, διότι δὲν εἶναι οὕτω συσχετισμένοι οἱ ἀριθμοί, ὥστε νὰ ᾖναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἄγνωστος ἐκ τῶν γνωστῶν.

158. Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων ἀριθμῶν ἀπαιτεῖται νὰ γείνωσιν ἐπὶ τῶν γνωστῶν μία ἢ πλείότεραι ἀριθμητικαὶ πράξεις, τῶν ὁποίων τὸ ἐξαγόμενον θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Διὰ νὰ ἡζεύρῃ δὲ τις τίνα πράξιν πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ καὶ ἐπὶ τίνων ἀριθμῶν, εἶναι ἀνάγκη, ἐνθυμούμενος

καλὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, νὰ ἐξετάζῃ πῶς εἶναι συσχετισμένοι οἱ ἀριθμοί. Καὶ ἂν μὲν γνωρίσῃ ὅτι εἶναι συσχετισμένοι ὡς οἱ τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως ἀριθμοί, καὶ ὁ ζητούμενος εἶναι κεφάλαιον ἢ διαφορὰ τῶν γνωστῶν, ἐκτελεῖ πρόσθεσιν ἢ ἀφαιρέσιν· ἂν δὲ ἴδῃ ὅτι εἶναι συσχετισμένοι ὡς οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως, καὶ ὁ ζητούμενος εἶναι γινόμενον ἢ πηλίκον ἢ λόγος τῶν γνωστῶν, ἐκτελεῖ πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν ἐπὶ τῶν ἀρμοδίων γνωστῶν (ἰδὲ τὰ προβλήματα).

Ὅταν δὲ ᾖναι πολύπλοκον τὸ πρόβλημά, ἀπαιτεῖται σκέψις πολλή, ἕως νὰ δυνηθῇ τις νὰ διακρίνῃ ἀκριβῶς τὰς διαφόρους σχέσεις τῶν εἰς τὴν ἐκθεσιν τοῦ προβλήματος ἀριθμῶν, καὶ οὕτω νὰ προσδιορίσῃ τὴν σειρὰν ὅλων τῶν ἐκτελεσθησομένων πράξεων ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ ὅσων εὐρίσκονται κατὰ σειρὰν, ἕως νὰ προκύψῃ τέλος πάντων ὁ ζητούμενος. Τὴν τοιαύτην διάκρισιν καὶ χωρισμὸν τῶν διαφορῶν σχέσεων ἀπ' ἀλλήλων, ὥστε νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐκτελεσθησόμεναι πράξεις πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, ὀνομάζουσι συνήθως ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος.

Τοῦ προβλήματος τούτου

Τὸ ὕδωρ δεξαμενῆς τιτος ($400^{\text{ακβδ}}$) χύνεται διὰ τριῶν διαφορῶν στροφίγγων (πείρων)· ἐνῶ δὲ διὰ τοῦ πρώτου ὅλου τὸ ὕδωρ αὐτῆς χύνεται εἰς $2^{\text{ωρ}}$ $\frac{1}{4}$, διὰ τοῦ δευτέρου εἰς $3^{\text{ωρ}}$ $\frac{1}{2}$, διὰ τοῦ τρίτου εἰς $4^{\text{ωρ}}$ $\frac{2}{3}$, διὰ τῶν τριῶν ὁμοῦ εἰς πόσας ὥρας θέλει χυθῇ;

Ἡ ἀνάλυσις συνίσταται εἰς τὸ νὰ καταλάβῃ τις ὅτι, ἐὰν εὐρεθῇ εἰς $1^{\text{ωρ}}$ πόσον τοῦ ὅλου ὕδατος χύνεται διὰ τῶν τριῶν στροφίγγων, θέλει εὐρεθῇ ἔπειτα εὐκόλως (διὰ μιᾶς διαιρέσεως) καὶ εἰς πόσας ὥρας θέλει χυθῇ ὅλον τὸ ὕδωρ· καὶ ὅτι, διὰ νὰ εὐρεθῇ πόσον τοῦ ὅλου ὕδατος χύνεται εἰς $1^{\text{ωρ}}$ διὰ τῶν τριῶν, ἀπαιτεῖται νὰ εὐρεθῇ πόσον τοῦ ὅλου ὕδατος χύνεται δι' ἐνὸς ἐκάστου εἰς $1^{\text{ωρ}}$, καὶ οἱ τρεῖς ἀριθμοί, οἱ παριστάνοντες τοῦτο, νὰ

προστέθωσιν· καὶ ὅτι, διὰ νὰ εὑρεθῇ πόσον τοῦ ὅλου ὕδατος χύνεται δι' ἐνὸς ἐκάστου στροφιγγῶς εἰς 1 ὥρ., πρέπει ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστάνων τὸ ὅλον ὕδωρ νὰ διαιρεθῇ δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$. Τώρα διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς 400 διὰ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, τὰ πηλίκα $\frac{1600}{9}$, $\frac{800}{7}$, $\frac{1200}{14}$ προσθέτονται, διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{47600}{126}$ διαιρεῖται τὸ ὅλον ὕδωρ 400, καὶ τὸ πηλίκον $\frac{1200}{119}$ ἢ, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ δι' 7, $\frac{12}{19}$ ἢ 1 ὥρ. $\frac{1}{19}$, φανερόν ἐστι τὸν χρόνον, καθ' ὃν χύνεται διὰ τῶν τριῶν στροφιγγῶν τὸ ὕδωρ τῆς δεξαμενῆς.

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος καὶ ἡ ἐκτέλεσις ὧν τῶν πράξεων ἕως νὰ εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὀνομάζεται *λύσις τοῦ προβλήματος*. Τῶν ἀπλῶν προβλημάτων ἡ λύσις ἢ δὲν ἐμπεριέχει τινὰ ἀνάλυσιν, ἢ περιέχει πολλὰ ἀπλῆν καὶ εὐκτολῶν. Προβαίνων δὲ τις ἐκ τῶν ἀπλῶν εἰς τὰ πολυπλοκώτερα προβλήματα, καὶ λύων πολλὰ, αποκτᾷ βεβαιότητα καὶ ἀνεπαισθήτως δύναμιν τινα τοῦ νὰ ἀναλύῃ καὶ λύῃ ἔπειτα καὶ τὰ δυσκολώτερα.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅλοι σχεδὸν ὑπερσυγκεκριμένοι (33), ἀνάγκη νὰ προσεγγίξῃ τις νὰ προσδιωρίξῃ τὸ ζητούμενον ἕκαστον ἐντελῶς, ἤγουν καὶ τὸν ἀριθμὸν, καὶ τὴν μονάδα αὐτοῦ, καὶ τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ, καὶ ἔτι τίνος πράγματος πόσον παριστάνει.

159. Προβλήματα πρὸς λύσιν.

α. *Λυόμενα διὰ μόνης προσθέσεως.*

1. Τραπεζίτης ἔδωκεν ἐκ τοῦ ταμείου τοῦ δραχμὰς πρῶτον 7743, ἔπειτα 504, ἔπειτα 10108, τελευταῖον 756· πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ὅλας; Ἀπ. 19111.

2. Ἐργοστασιάρχης ἐπεμψεν εἰς ἔμπορον τέσσαρα κομμάτια λινοῦ ὑφάσματος, τὸ μὲν 40 πήχ., τὸ δὲ 49, τὸ δὲ 15, τὸ δὲ 89· πόσους πήχεις ὑφάσματος ἐπεμψεν ὅλους; 193.

3. Ἐμπορος ἡγόρασε πέντε κιβώτια σαπουνίου, ζυγίζοντα τὸ μὲν 45 ὀκ., τὸ δὲ 108, τὸ δὲ 121, τὸ δὲ 24, τὸ δὲ 544· πόσας ὀκάδας σαπουνίου ἡγόρασεν ὅλας; 842.

4. Οἶνοπώλης ἐπώλησεν οἴνου εἰς τὸν μὲν 7248 ὀκ., εἰς τὸν δὲ 49587, εἰς τρίτον 906, εἰς τέταρτον 38278· πόσας ὀκάδας οἴνου ἐπώλησεν ὅλας; 96019.

5. Γεωργὸς τις ἐσύναξε περίσυν 1200 κοιλὰ σίτου, 954 βρώμης, 2350 κριθῆς, 850 φαολίων καὶ 74 πιζελίων· πόσα κοιλὰ ἦσαν ὅλα; 5428.

8. Δύο ἀριθμῶν ὁ μικρότερος εἶναι 8671, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν 858· τίς εἶναι ὁ μεγαλύτερος; 9529.

7. Ἡγόρασέ τις ἵππον 638 δρ., καὶ ἐξοδεύσας εἰς πέντε μῆνας πρὸς τροφήν του 184 δρ. τὸν ἐπώλησε κερδίσας 55 δρ.· πόσας δραχμὰς τὸν ἐπώλησεν;

8. Πόσα ἔτη εἶναι ἕως τῶρα ἀπὸ τῆς ἐν ~~Ἰσταν~~ ναυμαχίας, ἣτις ἐγένετο 480 ἔτη Π. Χ; 2322.

9. Ὁ Οὐασιγκτῶν ἐγεννήθη τὸ 1732 καὶ ἀπέθανεν 67 ἐτῶν· εἰς τὰ πόσα ἔτη ἀπὸ Χ. ἀπέθανεν;

10. Δανεισθεὶς τις χρήματα ἀπέδωκε πρῶτον 2784 δρ., ἔπειτα 585, χρεωστεὶ δὲ ἔτι 1738· πόσας δραχμὰς ἐδανείσθη;

11. Ἀπὸ κτίσεως κόσμου μέχρι τῆς ἐξ Αἰγύπτου ἐξόδου τῶν Ἰουδαίων ἐπέρασαν 2513 ἔτη, ἕκτοτε δὲ μέχρι τοῦ Τρωικοῦ πολέμου 307, μέχρι δὲ τῆς κτίσεως τοῦ ναοῦ τοῦ Σολομῶντος 180, μέχρι δὲ τῆς κτίσεως τῆς Ῥώμης 251, μέχρι τῆς ἐξώσεως τῶν βασιλέων ἐκ τῆς Ῥώμης 244, μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ Ἰουλίου Καίσαρος 464, μέχρι Χρ. γεννήσεως 44· πόσα ἔτη εἶναι ἀπὸ κτίσεως κόσμου μέχρι σήμερον;

12. Πατὴρ τις ἔδωκεν εἰς τὸν πρωτότοκον υἱὸν του 4758 δρ., εἰς τὸν δευτερότοκον 6374, εἰς τὴν κόρην του 3889, εἰς τὸν νεωτέρον του υἱὸν 3285 περισσότερον παρ' αἷς τὴν κόρην του, ἐράτησε δ' αὐτὸς μὲ τὴν γυναῖκα του 12594· πόσας δραχμὰς εἶχεν ὅλας;

13. Εἰς τὰς Ἀθήνας κατοικοῦσι 24500 ψυχαί, εἰς τὴν Σύρον 17200, εἰς τὰς Πάτρας 10520, εἰς τὸ Ναύπλιον 6300, εἰς τὴν Ὑδραν 15000· πόσοι εἶναι οἱ κάτοικοι τῶν πέντε πόλεων;

14. Ἐρωτηθεὶς τις πόσων ἐτῶν ἦτον, ἀπεκρίθη, Ἡμῶν 34 ἐτῶν ὅτε ἐγεννήθη ὁ πρωτότοκός μου υἱός, ὅστις εἶναι τῶρα 15 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν ἦτον αὐτός;

Ε'. *Διὰ μόνης ἀφαιρέσεως, ἢ δι' ἀφαιρέσεως καὶ πρὸς-θέσεως.*

15. Δανεισθεὶς τις 3584 δρ., τὰς μὲν ἀπέδωκε, 584 δὲ χρεωστεὶ ἀκόμῃ· πόσας ἀπέδωκε; 3000. Ἄν δ' ἀπέδωκε 2345, πόσας χρεωστεὶ ἀκόμῃ; 1239.

16. Πόσα δραχμὰ πρέπει νὰ προστεθῶσιν εἰς 7289, διὰ νὰ γείνωσιν ὅλα 10000.

17. Δύο ἀριθμῶν ὁ μεγαλύτερος εἶναι 15687, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν 8764· τίς εἶναι ὁ μικρότερος;

18. Ἀπὸ κομμᾶτιον τσόχας 45 πηχ. ἐπωλήθησαν 37 πηχεῖς· πόσοι πηχεῖς ἔμειναν;

19. Ἀλατοπώλης εἶχε γράψει νὰ τοῦ πέμψωσι 52349 ὀκ. ἄλτου, καὶ τοῦ ἐπέμψαν 70000· πόσας ὀκάδας πρέπει ν' ἀποστείλῃ ὀπίσω; 17651.

20. Τοῦ Λονδίνου εἰς κάτοικοι εἶναι 1275000, εἰς τῶν Παρισίων 774000· πόσους ἔχει περισσότερους κατοίκους τὸ Λονδῖνον;

21. Ἡγόρασέ τις ἄμπελον καὶ ἀγρὸν 12375 δρ., ἐὰν ἡ ἄμπελος ἐκτιμηθῇ 7345 δρ., ὁ ἀγρὸς πόσον ἀξίζει; 5030.

22. Ἡ Ἀμερική ἀνεκλύφθη τὸ 1492· ἔκτοτε ἕως τῶρα πόσα ἔτη εἶναι; 380.

23. Ἡ Κωνσταντινουπόλις ἐκυριεύθη ὑπὸ τῶν Τούρκων τὸ 1453· ἐὰν τὴν ἀνεκτίσωσιν οἱ Ἕλληνες, τὸ 1848, πόσα ἔτη θέλει εἶσθαι ὑπὸ τὴν ἐξουσίαν τῶν Τούρκων;

24. Ὁ γεννηθεὶς τὸ 1821, ἡτῆς τὸ πρῶτον ἔτος τῆς Ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως, τὸ 1842 πόσων ἐτῶν εἶναι; Ἐὰν δὲ τις ᾗτον 68 ἐτῶν τὸ 1840, πότε ἐγεννήθη;

25. Δύο ἀριθμοὶ το κεφάλαιον εἶναι 7528, ὃ δὲ μικρότερος αὐτῶν 3750· τίς εἶναι ὁ μεγαλύτερος;

26. Ἀπονήσκων τις ἐκ τῆς περιουσίας του οὔσης 12500 δρ. ἀφῆσεν ἀνὰ 2500 εἰς ἑκατέραν τῶν θυγατέρων του καὶ τὰ λοιπὰ εἰς τὸν υἱόν του· πόσας δραχμὰς ἀφῆσεν εἰς αὐτόν;

27. Ἐπώλησέ τις οἰκίαν 5784 δρ. κερδίσας 568 δρ· πόσας δρ. ἐδαπάνησε γὰ τὴν κτίσιν; Ἢ ἂν τὴν ἡγόρασε 5216 δραχμ. καὶ τὴν ἐπώλησε 5784, πόσον ἐκέρδισεν;

28. Τῶν Ἀθηνῶν οἱ κάτοικοι τὸ 1833 ᾗσαν 12000, καὶ τὸ 1842 εἶναι 24500 κατὰ πόσους ἐπλήθυναν οἱ κάτοικοι τῶν Ἀθηνῶν; καὶ εἰς πόσα ἔτη;

29. Παῖ, τις ἐρωτηθεὶς πόσων ἐτῶν ᾗτον, ἀπεκρίθη, Εἴμαι 25 ἐ. ὧν μικρότερος τοῦ πατρός μου, ὅστις εἶναι 38 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν ᾗτον;

30. Βουζῆς τις πωλήσας 85 δραχμῶν χοίρινον κρέας, 76 δρ. τυρὸν καὶ 89 βούτυρον, ἔλαβε ἀντ' αὐτῶν 90 δραχμῶν ἄλευρον, 24 σάκχαρι, 30 μέλι καὶ τὰ ἐπίλοιπα δραχμὰς· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν; 56.

31. Ἐκ 3528 ὀκ. αἶνος ἐπώλησέ τις πρῶτον 545 ὀκ., ἔπειτα 428 καὶ ἔπειτα 1350· πόσαι ὀκάδες τοῦ ἔμειναν; 1205.

32. Ἐχρεώσται τις 6450 δρ., ἀπέδωκε δὲ πρῶτον 568, ἔπειτα 935, τελευταίον 475· πόσας χρεωστῇ ἀκόμῃ;

33. Τέσσαρες τινες ἡγόρασκον ἄμπελον 784 δρ., καὶ ὁ μὲν ἔδωκε 820 δρ., ὁ δὲ 175 ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, ὁ δὲ 30 ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου· πόσας ἔδωκεν ἑκάστος τῶν τελευταίων;

34. Διὰ τὰ πληρώσῃ τις χρεὴν 45819 δραχμῶν, ἐπώλησεν 6390 δρ. ἐν λαιβαδάκιον, 8345 δρ. ἐν οἰκόπεδον καὶ 35740 μίαν οἰκίαν· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

35. Ἐκ 19309 δρ. ἐδαπάνησέ τις 11409 εἰς τοὺς κτίστας καὶ ξυλουργοὺς, 3519 εἰς πέτρας καὶ 2119 εἰς ξυλικὴν καὶ ἄλλο ὄλικόν· πόσαι δρ. τοῦ ἔμειναν;

36. Τὸ πρῶτ' ἐκινήσαν ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως δύο ὁδοιποροὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ὁ μὲν ὁδεύει 96 στάδια (τὸ στάδιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 πῆχεις) τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ 75· πόσα στάδια μακρὰν ὁ εἰς τοῦ ἄλλου θέλουσιν εἶσθαι εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ἡμέρας, τῆς δευτέρας κατλ. — Ἀν δ' ὁ δευτέρος κινή τὴν ἀκολουθοῦν ἡμέραν, εἰς τὸ τέλος ταύτης τῇ ἡμέρᾳ πόσα στάδια θέλει ἀπέχει τοῦ πρώτου;

Υ'. Διὰ μόνου πολλαπλασιασμοῦ, ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως.

37. Πόσον ἀξίῳσι 475 ὀλ. αἰνου πρὸς 85 λεπτά ἢ ὀκά; 40375 λεπ.
38. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ τις διὰ 25 πήχεις τσόχας πρὸς 18 δραχμὰς τὸν πῆχυν; 5517460 ὀργ.
39. Ὀδοιπορῶν τις 6345 ὀργ. εἰς 1 ὥραν, πόσας ὀργυιάς θέλει ὀδεύσει εἰς 62 ἡμέρας ἀνὰ 14 ὥρας τὴν ἡμέραν; 5517460 ὀργ.
40. Ἀμάξης ὁ τροχὸς περιστρέφεται 316 στροφὰς εἰς διάστημα ἐνὸς σταδίου· πόσας περιστροφὰς θέλει κάμει εἰς διάστημα 95 στ;
41. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν 27 ἄνθρωποι, διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀνὰ 115; 3105.
42. 46 ἄνθρωποι τελειοῦσιν ἔργον τι εἰς 60 ἡμ.· πόσοι ἄνθρωποι θέλουσι τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς μίαν ἡμέραν; ἢ εἰς πόσας ἡμέρας θέλει τὸ τελειώσῃ εἰς ἄνθρωποις; 2760 ἄ.θ. ἢ ἡμ.
43. Στρατιῶται 10700 διήρπασαν πόλιν, καὶ μοιρασθέντες τὰ χρήματα ἔλαβαν ἕκαστος ἀνὰ 275 δρ.· πόσας δρ. διήρπασαν;
44. Πλοῖον πλέει 7 μίλια τὴν ὥραν· πόσα μίλια θίλει διαπλεύσει εἰς 45 ἡμ.; καὶ πόσα εἰς ἓν ἔτος (365 ἡμέρ.); Τὸ μίλιον ὑποτίθεται ἰσοδύναμον μὲ 1854 πῆχ. περίπου.
45. Τὸ ἡμερονύκτιον ἔχει 24 ὥρας, ἡ δὲ ὥρα 60 λεπτά· πόσα λεπτά ἔχει ὁ Φεβρουάριος μῆν.
46. Οἰκόπεδον 835 τετραγωνικῶν πήχεων ἐπωλήθη πρὸς 15 δρ. ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· πόσας δρ. ἐπωλήθη; (Τί εἶναι τετραγωνικὸς πῆχυς;)
47. Ἡ εἰς Πειραιᾶ φέρουσα ὁδὸς εἶναι μακρὰ 8340 πήχεις καὶ πλατιὰ 6 πῆχ.· μὲ πόσους τετραγωνικοὺς πῆχεις εἶναι ὁδ.; Πόσαι δὲ δραχμαὶ ἴδαπανήθησαν εἰς κατασκευὴν αὐτῇ; πρὸς 90 λεπ. τὸν τετραγωνικὸν πῆχυν; 50040 τετραγωνικοὶ πῆχεις.
48. Αἱ οἰκίαι πόλεως τινος εἶναι 2570, εἰς ἑκάστην αὐτῶν κατοικοῦσι 2 οἰκογένειαι ἐκ 5 ψυχῶν ἑκατέρω· πόσαι ψυχαὶ κατοικοῦσι τὴν πόλιν ταυτην;
49. 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι κέρδος ἢ τόκον 8 δρ.· 1 δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος πόσον κέρδος ἢ τόκον φέρει; ($\frac{8}{100}$ τῆς δραχμῆς ἔσται 8 λεπτά). Ἡ αἰ 100 δρ. εἰς 7 ἔτη πόσον κέρδος φέρουσιν;— Ἡ, ἐνθ' 1 δρ. εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 8 λεπ., 465 δρ. εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον πόσον τόκον φέρουσιν;
50. 245 δραχ. ἐκέρδισαν εἰς 30 ἡμέρας 35 δρ.· 1 δρ. εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε κερδίσει τὰς αὐτὰς 35 δρ; Ἡ εἰς 1 ἡμ. πόσαι δρ. ἤθελαν φέρει κέρδος 35 δρ. 7350 δρ. ἢ ἡμ.
51. Πόσον κερδίζει τις εἰς 20 ἑβδομάδας πρὸς 150 λεπ. τὴν ἡμέραν;
52. Ἀμπέλου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 258 πῆχ., τὸ δὲ πλάτος 75· πόσων τετραγωνικῶν πήχεων εἶναι ἡ ἐπιφάνεια;
53. Στρατὸς τις σύγκειται ἐξ 7680 στρατιωτῶν καὶ 500 ἀξιωματικῶν· ἐὰν Κυβέρνησις δαπανᾷ τὴν ἡμέραν δι' ἕκαστον μὲν στρατιωτὴν 130 λεπτ., δι'

ἑκαστον δι' ἀξιωματικῶν, ἕνα μὲ τὸν ἄλλον, 5 δρ., εἰς ἓν δτος πόσον δαπαρῆ δι' ἑλιν τὸν στρατόν;

54. Ἀφ' ἧς στιγμῆς ἤστραψεν ἑως νὰ θρονήσῃ ἡρόθυμσέ τις 48 κυτῆματα σφυγμῶ (4 δεύτερα λεπ.)· εἰὰν εἰς κτύπημα σφυγμῶ ἀντιστοιχῇ εἰς μῆκος 340 πῆχ. (διατεταγμένον ὑπὸ τοῦ ἡέου τῆς θρονήσεως), πόσον μακρὰν εἶναι τὸ σύννεφον, ὅπου εἴγινε, ἢ ἀστραπιβοδότησις; 16320 πῆχ.

55. Βασιλεὺς τις διέταξε νὰ θεθῶσιν εἰς ζημιοθέτας κατὰ τὸν πολέμιν πρὸς ἀπεξημῶσιν, εἰς μὲν 859 ἀνὰ 634 δρ. εἰς ἑκαστον, εἰ δὲ 169 ἀ. ἀ 933 δρ., εἰς δὲ 87 ἀνὰ 3687 δρ. πόσαι δραχμαὶ θέλουσι διδοῖν δαί;

56. Κυβερνήσις τις χρεωστεῖ 80 ἑκατέμ. δρ. πρὸς ἐξόφλησιν δὲ τοῦ χρέους τοῦτου συνεισφέρουσιν 80 χιλ. πολίται ἀνὰ 20 δρ. ἑκάστις, 25 χιλ. πολ. ἀνὰ 45 δρ., 5 χιλ. ἀνὰ 96., 238 πολ. ἀ. ἀ 580 δρ., τὰς δὲ λοιπὰς θέλει δώσει ἢ Κυβερνήσις. Πόσας δραχμάς θέλει δώσει οὗτος;

57. Ἀπὸ τὴν αὐτὴν ῥῆσιν κινεῖσιν δύο ὁδοιπόροι τὴν αὐτὴν στιγμὴν, ὁ μὲν πρὸς ἀνατιλάς ὁδοῦν 112 στάδ. τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ πρὸς δυσμας ὁδοῦν 84 στάδ. τὴν ἡμέραν. Εἰς τὸ τέλος 6 ἡμ. πόσα στάδια θέλει ἀπέχει ὁ εἰς τοῦ ἄλλου; — Ἄν δὲ διευθύνωνται καὶ εἰς δύο πρὸς ἀνατιλάς, εἰς τὸ τέλος 10 ἡμερ. πόσον θέλει εἶσθαι μακρὰν ὁ εἰς τοῦ ἄλλου;

58. Ἡγόρασέ τις 5 κομμάτια τσόχας πρὸς 220 δρ. τὸ κομμάτιον, 974 ζεύγη ὑποδημάτων πρὸς 18 δρ. τὸ ζεῦγος, καὶ 35 φάσια πρὸς 15 τὸ ἓν ἔδωκε δ' ἀντ' αὐτῶν 254 δκ. ἐβύτυρεν πρὸς 245 λεπ. τὴν δκ, καὶ 345 δκ. τυρὸν πρὸς 75 λεπ. τὴν δκ, τὰ δὲ λοιπὰ δραχμὰς Πόσας δραχ. ἔδωκεν;

δ'. *Διὰ μόνης διαί. ἔσεως, ἢ καὶ δι' ἄλλων πράξεων.*

59. Βυεῖται εἰνεν 2540 ἀξίζουσι 33020 δρ., πόσον ἀξίζει ἡ βαρέλα; 13. Ἄν δὲ ἡ βαρέλα ἰσδυναμῇ μὲ 60 δκ., πόσον τιμᾶται ἡ δα;

60. Πόσον πωλεῖται ὁ πῆχυς ὑψάσματος, τοῦ ὁπίου 12498 πῆχ. ἐμπληρώθηκα. 699888 δρ.; Ἡ μὲ μίαν δραχ. πόσον ἀγοράζει τις;

61. Τίς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 349 παράγει 20374264;

62. Κληρονομίαν 797985 δρ. ἔχοντι νὰ μοιρασθῶσιν ἐξίσου 69 ἄνθρωποι· πόσας θέλει λάβει ἑκάστις; — Ἄν δὲ λαβῇ 257 δραχ. ἑκάστος, πόσοι εἰ μέλλοντες νὰ μοιρασθῶσιν;

63. Ἐργάται 704 ἴσον ἐργαζόμενοι ἐξετέλεσαν ἔργον 60163340 ὄργ. πόσας ὄργων ἑκάστος;

64. Ὁδοιπόρων τι. 12 στάδ. τὴν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θέλει ὁδεύσει 96 στάδ.;

65. Εἰς τὰ εἰς λίον εἶναι 360 δένδρα, καὶ ἀποτελεῖν 15 χοίρους· πόσα δένδρα εἶναι εἰς ἑκάστην δενδρоставρίαν; Ἄν δὲ εἰς ἑκάστην δενδρоставρίαν 90 δένδρα, πόσαι εἰ δενδρоставρίαι;

66. Ἐβώχας τις το 12εν τοῦ 180 πρεβάτων του, πότα πρόβατα ἐπώλησεν;

67. Ἡγόρασέ τις ἀρνία πρὸς 7 δραχ. τὸ ἓν, καὶ ἐμπλήρωσε 63 δραχ. πόσα ἤγόρασεν;

68. Ὁ 352348 μὲ πόσων ἀριθμῶν ἴσος; ἑκαστον μὲ τὸν 2472 εἶναι ἴσος;

69. Τὸ ἐτάσιον εἰσόδημά τις ἐστὶν 12478 δραχμ. πόσον εἶσι τὰ μηνιαῖα, καὶ πόσον τὸ ἐξοδαμαδιαῖον;

70. Ἐπὶ τίνι ἀριθμῷ πολλαπλασιαζόμενος ὁ 135 παράγει 505710;

71. 1500 στρατιῶται διαπράσαντες πόλιν τινὰ ἐμοιράσθησαν τὰς ἐκ τῆς διαπραγῆς δραχμὰς; 2625000· πόσα ἐπὶ τρεῖς ἑκάστοι;

72. Ἀθροισαί τινες πρὸς ἐξόφλησιν χρέου; 18950 δρ. ἐπληρώσαν ἀνὰ 25 δρ. ἑκάστοι· πόσοι ἦσαν;

73. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 704, ὁ δὲ εἷς τούτων, ὁ πολλαπλασιαστικὸς, εἶναι 14, τίς εἶναι ὁ ἄλλος; ὁ πολλαπλασιαστικός; ἢ ἂν ὁ πολλαπλασιαστικός ᾖναι 64, τίς εἶναι ὁ πολλαπλασιαστικός;

74. Διὰ νὰ φθάσῃ τις εἰς 5 ἡμέρας ἀπὸ πόλιν εἰς ἄλλην ἀπέχουσαν 585 στάδια, πόσα στάδια πρέπει νὰ ὁδεύῃ καθ' ἡμέραν; — Ἐὰν δὲ ὁδοιπορῇ 85 στάδια ἡν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θέλει φθάσῃ ἀπὸ τὴν μίαν εἰς τὴν ἄλλην πόλιν;

75. Ἀμάξης τροχὸς περιστρέφεται 32870 στροφάς; ἕως νὰ διαστρεῖσθ 95 στάδια πόσας στροφάς περιστρέφεται εἰς ἓν στάδιον;

76. Ἐμπόριος ἀγοράσας 144740 ὀν. σιγχάρεως ἀντὶ 289480 δρ., τὸ ἐπώλησε 433220 δραχμὰς· πόσον ἐκέρδισε τὴν ὁλὴν; 1 δρ.

77. Πόσον ἀξίζουσι 42897 πηχ. ὑφάσματος, εἴαν 245 πηχ. ἐπληρώθησαν 3480 δραχμὰς;

78. 4270 ὀν. σίνου τιμήθησαν 2380 δρ.· πόσον ἀξίζουσι 37954 ὀν. κατὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν;

79. 2760 σκαφεῖς ἐσταψαν ὑδραγωγεῖον εἰς 1 ἡμ.· 46 σκαφεῖς εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν σκάψαι τὸ αὐτὸ ὑδραγωγεῖον; — Διὰ νὰ τὸ σκάψωσι δὲ εἰς 15 ἡμ.· πόσοι σκαφεῖς χρειαζονται;

ἐ. *Προβλήματα ἐμπεριέχοντα κλασματικούς ἢ μικτοὺς ἀριθμούς.*

1. Εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα ταῦτα, 2, 3, 5, 7, — 16, 17, 18, 21, 25, 27, 30 — 37, 38, 41, 44, 46, 51, 52, 58 — 59, 60, 61, 67, 72, 74, 75, 77, 78, νὰ θεωροῦσι κλασματικοὶ ἢ μικτοὶ ἀριθμοί.

2. Τὰ ἐξῆς.

80. Ἴππος τρώγει κριθῇ; $\frac{2}{3}$ τοῦ κοιλοῦ εἰς 3 ἡμ.· πόσον τρώγει τὴν ἡμέραν;

81. 3 Ἴπποι εἰς ἓνα μῆνα ἐφάγαν τὰ $\frac{1}{3}$ τοῦ εἰς ἀχυρῶνα ἀχυρῶν· πόσον ἐφάγαν ἑκάστοι εἰς ἓνα μῆνα, καὶ πόσον εἰς μίαν ἡμέραν;

82. 5 εἰκογόνεισι ἐμοιράσθησαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἐνὸς σάκκου ἀλεύρου· πόσον τοῦ σάκκου ἔλαβεν ἑκάστος;

83. Δαπανῶν τις $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμ. καθ' ἡμέραν, πόσον θέλει δαπανῆσαι εἰς ἓνα μῆνα; καὶ πόσον εἰς ἓν ἔτος;

84. Ἐπώλησέ τις τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ ἀγροῦ τινος· τί μέρος τοῦ ἀγροῦ ἐπώλησεν;
85. Ἐξώδευσε τις εἰς γυῦμα $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{7}{8}$ ἐνὸς πενταδράχμου· ποσοστὸν τοῦ πενταδράχμου ἰδαπάνησεν;
86. Ἠγόρασέ τις $\frac{7}{8}$ πῆχews ὑφάσματος τινος πρὸς $\frac{6}{25}$ τοῦ πενταδρ. τὸν πῆχυν· πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ;
87. Δύο τινὲς ἐκέρδισαν ὁμοῦ 1000 δρ., καὶ ὁ μὲν ἔλαβε $\frac{3}{5}$ τοῦ κέρδους, ὁ δὲ $\frac{6}{15}$ · πόσας δραχ. ἔλαβεν ἑκάτερος;
88. Μὲ 87 δρ. πόσας ὀργυιάς πετρίνου τοίχου εἴμποραῖ νὰ κτίσῃ τις, ἀφοῦ μὲ $\frac{5}{6}$ τοῦ πενταδρ. ἔκτισε 1 ὀργυιάν;
89. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχ. ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου $\frac{7}{8}$ τοῦ πῆχ. ἐτιμήθη $\frac{3}{7}$;
90. Κύριος ὢν τις τῶν $\frac{4}{5}$ πλοιαρίου, ἐπώλησε τούτων τὰ $\frac{2}{3}$ ἀντὶ 957 δρ.· κατὰ ταύτην τὴν τιμὴν πόσον ἤξιζεν ὅλον τὸ πλοιάριον;

ζ'. Διάφορα ἄλλα προβλήματα ἀνάμικτα.

91. Ἐργολάβοι ἀνέλαβεν νὰ ἐνδύσῃ τάγμα ἐξ 897 στρατιωτῶν καὶ 58 ἀξιωματικῶν πρὸς 198 δρ. τὸν στρατιώτην ἕκαστον καὶ 576 τὸν ἀξιωματικόν, ἕνα μὲ τὸν ἄλλον· πόσας δραχ. θέλει λάβει;
92. Ἀγέλη βοδίων 97 ἐπωλήθη 44426· δρ. πόσα βόδια τούτων ἀξίζουσιν 27022 δραχμαίς;
93. Τὸ φῶς φθάνει ἀπὸ τὸν ἥλιον εἰς τὴν γῆν εἰς 8 λεπτά· ἂν ὁ ἥλιος ἀπέχῃ τῆς γῆς 153525000 στάδ. πόσα στάδ. διατρέχει τὸ φῶς εἰς ἕκαστον λεπ., καὶ πόσα εἰς ἕκαστον δεύτερον λεπτόν; (τὸ λεπτὸν εἶναι 60 δεύτ. λεπτά).
94. Παῖς τις ἠγόρασε μῆλα, δέκα τῶν ὁποίων ἐχάρισεν εἰς τοὺς συμμαθητάς του· ἔπειτα ἀγοράσας καὶ ἄλλα 34, ἐμοίρασε τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα εἶχε τότε εἰς 4 συμμαθητάς του, οὔτινες ἔλαβον ἀνὰ 8 ἕκαστος· πόσα μῆλα ἠγόρασεν ὁ παῖς τὸ πρῶτον; 40.
95. Ἄν εἰς ἀριθμὸν τινα προστεθῇ 4, καὶ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ἀφαιρεθῇ 7, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 3, προκύπτει 64· τίς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός; 27.
96. Παιδίον ἠγόρασε κωδῶνιον 86 λεπτ. καὶ τὸ ἐπώλησεν 8 ὀκ. καρύδια, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἥμισυ ἐπώλησε πρὸς 12 λεπτά τὴν ὁκάν, τὰ δὲ λοιπὰ ἀντήλχξε ἀντὶ μαχαιριδίου πωληθέντος 34 λεπτά. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τὸ παιδίον, καὶ πόσον;
97. Δωματίου τὸ ἔδαφος, 6 πῆχ. μακρὸν καὶ 5 πλατὺ, θέλω νὰ σκεπάσω μὲ τάπητα 1 πῆχ. πλατὺν, ἀφίνων ὅμως ἀσκεπάστους 3 πῆχ. τετραγωνικοὺς· πόσοι πῆχεις τάπητος χρειάζονται;
98. Ἡ γῆ κινεῖται περὶ τὸν ἥλιον 109904 στάδ. τὴν ὥραν· πόσα στάδ. διατρέχει τὸ ἡμερονύκτιον; Ἐν δέ τις ἤθελε νὰ ἐδεύσῃ ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον διάστημα πρὸς 240 στάδ. τὸ ἡμερονύκτιον, εἰς πόσας ἡμ. ἤθελε τὸ διατρέξει; πόσα δὲ ἔτη ἀποτελοῦσιν;
99. Ἐνυμφεῦθη τις 23 ἐτῶν, καὶ μετὰ 14 ἔτη ἀπέθανεν ἡ γυνὴ τοῦ ἀφῆ-
στος θυγατέρος 12 ἐτῶν, ἥτις ἐνυμφεῦθη μετὰ 8 ἔτη ἄνδρα 5 ἐτῶν πρεσβύ-

τερον αὐτῆς, καὶ ὄντα 40 ἔτων ὅτε ἀπέθανεν ὁ πατὴρ τῆς γυναικὸς του· πόσων ἔτων ἀπέθανεν ὁ πατήρ; 60.

100. Ἐμπορος ἠγόρασε κάμποσα κομμάτια βελούτου, περιέχοντα ἕκαστον πηχ. 129 $\frac{1}{2}$, πρὸς 7 δρ. τοὺς 5 πηχ., καὶ πωλήσας αὐτὰ πρὸς 11 δρ. τοὺς 7 πηχ. ἐκέρδισε 200 δραχ.· πόσα ἦσαν τὰ κομμάτια;

101. Ῥάβδου καθέτου ἐπὶ τῆς γῆς καὶ 3 $\frac{2}{3}$ πηχ. μακρᾶς ἡ σκιὰ εἶναι 5 πηχεῖς· κωδωνοστάσιον, τοῦ ὁποίου ἡ σκιὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ὥραν εἶναι 78 πηχεῖς μακρὰ, πόσου; πηχεῖς εἶναι ὑψηλόν;

102. Πόσα κομμάτια ὑφάσματος πρὸς δρ. 20 $\frac{3}{8}$ τὸ ἓν πρέπει ν' ἀνταλλαχθῶσιν ἀντὶ 240 κομματίων πρὸς 12 $\frac{3}{5}$ τὸ ἓν;

103. Οἰκογένειά τις ἐκ 5 ψυχῶν ἐπιεν εἰς μίαν ἐβδομάδα εἶναι ὁκάδ. 7 $\frac{4}{5}$ · ἡ αὐτὴ οἰκογένεια μὲ ἄλλους τρεῖς ἀνθρώπους εἰς 22 $\frac{3}{7}$ ἐβδομ. πόσον θέλουσι πει;

104. 9 μαθηταὶ ἐξοδεύουσιν εἰς 18 ἡμ. πεντὰδραχμα 10 $\frac{7}{9}$ · 20 μαθηταὶ εἰς 30 ἡμ. πόσον θέλουσιν ἐξοδεύσει;

105. Ἀντήλαξέ τις 4 $\frac{3}{4}$ πηχ. ὑφάσματος ἀντὶ 3 $\frac{3}{5}$ ὀκ. σακχάρως· πόσον σάκχαρι πρέπει ν' ἀνταλλάξῃ ἀναλόγως ἀντὶ 7 $\frac{3}{5}$ πηχ. ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ἀξίας;

106. Χαρτοπαίκτης εἶχε μόνον τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν ὅσα ἔφερον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παιγνιδίου, καὶ ἔχασε προσέτι καὶ τὰ $\frac{1}{11}$ τῶν ὅσα εἶχεν ἔπειτα· πόσα τοῦ ἔμειναν;

107. Ἐμπορος ἔχασε τὰ $\frac{9}{13}$ τῆς ἀρχικῆς του καταστάσεως, καὶ χρεωστῆ· ἀκόμη καὶ τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν ὅσα ἔχασε· πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχὴν;

108. 100 δραχ. φέρουσι 8 δρ. κέρδος εἰς ἓν ἔτος· 3550 δρ. πόσον κέρδος φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος, καὶ πόσα εἰς 5 ἔτη;

109. 100 δρ. φέρουσι κέρδος 10 δρ. εἰς ἓν ἔτος· πόσαι δρ. θέλουσι φέρει κέρδος ἢ τόκον 75 δρ. εἰς 4 ἔτη;

110. Ἐνῶ 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος φέρουσι κέρδος 12 δρ., εἰς πόσα ἔτη 650 δρ. θέλουσι φέρει τόκον 120 δραχμῶν;

111. Ἐὰν 578 δραχ. εἰς ἓν ἔτος ἔφεραν τόκον 65 δρ., αἱ 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος πόσον κέρδος θέλουσι φέρει; Ἡ ἐὰν εἰς 3 ἔτη ἔφεραν 95 δρ. τόκον, αἱ 100 εἰς ἓν ἔτος πόσον φέρουσιν;

112. Μεσίτη; ἔλαβεν 988 δρ. διὰ ν' ἀγοράσῃ πραγματείας, ἀροῦ κρατῆσῃ αὐτὸς μεσιτικὸν 4 τὰς 100· πόσαι μένουσι πρὸς ἀγοράν πραγματευθῶν;

113. Ἐκ 1627 δραχ. τὰς ὑποίας κωμὸπολις μέλλει νὰ πληρώσῃ φόρον, ὁ συνάξων τοὺς φόρους λαμβάνει 2 $\frac{1}{2}$ τὰς 100· πόσον θέλει λάβει;

114. Ἀγοράσας τις πραγματείας ἀντὶ 580 δρ. τὰς ἐπώλησε κερδίσας 12 $\frac{1}{2}$ τὰς 100· πῶσον ἐκέρδισε καὶ πόσον ἔλαβεν ἀπὸ τὴν πώλησιν;

115. Πόσον μεσιτικὸν πρὸς 3 $\frac{1}{2}$ τὰς 100 πρέπει νὰ πληρώσῃ τις εἰς μεσίτην πωλήσαντα 2817 δρ. πραγματείας;

116. ἠγόρασέ τις 114 ὀκ. αἶνου πρὸς 96 λεπτά τὴν ὀκάν, καὶ τὰς ἐπώ-

λῆσε πρὸς 125 λεπ. πόσον ἐκέρδισε τὸ ὄλεον, καὶ πρὸς πόσον τὰς 100 ἐρχεται τὸ κέρδος;

117. 600 δρ. εἶναι ἡ ἀγορὰ 30 ἀσπῶν ἐλκίου, 20 δρ. τὸ τελώνιον, 30 δρ. ὁ ναυλίκος, 6 δρ. ἡ μετακόμισις καὶ 30 δρ. τὸ ἀσφαλιστικόν· ἐὰν πωληθῇ ἑκατὸς ἀσπὶς πρὸς 26 δραχ., πόσον τὰς 100 θίλει εἶθαι τὸ κέρδος;

118. Διὰ νὰ πληρώσῃ τις εἰς Παρίσι 3560 δρ. θίλει νὰ ὠφεληθῇ 4 δρ. τὰς 100· πόσας δραχ. πρέπει νὰ τοῦ δώσω εἰς Ἀθήνας; Ἡ, διὰ νὰ πληρώσῃ ἐκτὶ 3569 φράγκα ὠφελούμενος 4 φράγκα τὰ 100, πόσας δρ. πρέπει νὰ τοῦ δώσω ἐδῶ, γνωρίζων ὅτι 9 φρ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 10 δραχμάς;

119. 5 φράγκα ἰσοδυναμοῦσι μὲ δρ. 5 καὶ 58 λεπτά· 24 φράγκα μὲ πόσας δρ. ἰσχυμῶνται; Καὶ ἂν δρ. 15 καὶ 75 λεπ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 3 φλουρία τουρκικά, τὰ 24 φράγκα μὲ πόσας φλουρ. ἰσχυμῶνται;

120. 245 ὀκ. οἴνου πωλοῦνται πρὸς 80 λεπ. ἡ ἑκά, 549 ὀκ. ἄλλου πωλοῦνται πρὸς 60 λεπ., καὶ 749 ὀκ. ἄλλου πρὸς 45 λεπτά. Ἄν ἀναμιχθῶσιν εἰς ἓν ὄλοι, πόσον ἡ ἑκά τῶν μίγματος πρέπει νὰ πωλῇται, διὰ νὰ συναχθῶσιν ὅσα λεπτά ἦθελαν συναχθῆναι ἂν ἐπωλοῦντο χωριστά;

121. Σακχάρως 20 ὀκ. πρὸς 150 λεπτά ἡ ὀκά, 55 ὀκ. πρὸς 112 δρ. ἡ ὀκ. καὶ 75 ὀκ. πρὸς 136 δρ. ἡ ὀκά, ἀνemiχθησαν εἰς ἓν· πόσον ἀξίζει μία ὀκά τοῦ μίγματος;

122. Ἡμέραν τινὰ παρατηρήθη ὅτι θερμόμετρον ἐδείκνυεν 64 βαθμοὺς 5 ὥρας τῆς ἡμέρας, 70 βαθμοὺς 4 ὥρας, 2 ὥρας 75 βαθμ., καὶ 3 ὥρας 73 βαθ. Ποία ἦτον ἡ μέση θερμότης κατὰ τὴν ἡμ. ἐκείνην; (Τί εἶναι μέση θερμότης;)

69 $\frac{3}{4}$ βαθμ.

123. Μαθηματικὸς τις ἐρωτηθεὶς τίς ὥρα ἦτον, ἀπεκρίθη, τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{4}{7}$ τῶν 24 ὥρῶν. Τίς ὥρα ἦτον;

7 $\frac{1}{2}$ π. μ.

Ἄλλοτε ἐρωτηθεὶς πόσαι ἡμέραι εἶχαν περάσει ἀπὸ τὴν πρώτην τοῦ ἔτους, ἀπεκρίθη, τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τοῦ ἔτους. Τίνες ἡμέραι τίνες μηνὲς ἐρωτηθῶν Τὴν 25 Μαρτίου περὶ τὴν 10 ὥραν π. μ. ἦτοι τὴν ἐπόμενον πρώτην ἡμέραν τῆς Ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

Τί διαφέρουσι τῶν ἀκεραίων καὶ μικτῶν οἱ συμμιγεῖς.

160. Εἵπομεν εἰς τὸν ἀριθ. 47 καὶ 48 ὅτι συμμιγῆς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος ἐκ πολλῶν ἄλλων ὁμοειδῶν μὲν, ἀλλ' ἑτερονύμων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλοστὸν, ἢ ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλαπλάσιον, ἔτι δὲ καὶ πῶς γράφεται. Εἰδὼ πρῶτον θέτομεν πίνυκα τῶν δικφόρων μονάδων ἐκείνων τῶν ποσῶν, ὅσων ἡ χρῆσις εἶναι κοινοτέρα· ἄλλως δὲ διὰ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους θέλομεν μεταχειρίζεσθαι, θέλουσι νοηθῇ τελειότερα ὅσα μέλλομεν νὰ ἐξηγήσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο.

Μονάδες μῆκους. Ὀργυῖά, ποῦς, δάκτυλος, γραμμή. Ἡ ὀργυῖα εἶναι ἴση μὲ 6 πόδας, ἢ μὲ 12 δακτύλους, ἢ μὲ 864 γραμμάς—Ὁ ποῦς εἶναι ἕκτον τῆς ὀργυῖας, καὶ ἴσος μὲ 12 δακτύλους, ἢ μὲ 144 γραμμάς—Ὁ δάκτυλος 72^{ον} τῆς ὀργυῖας, 12^{ον} τοῦ ποδὸς, καὶ ἴσος μὲ 12 γραμμάς—Ἡ γραμμὴ 864^{ον} τῆς ὀργυῖας, 144^{ον} τοῦ ποδὸς, 12^{ον} τοῦ δακτύλου (α).

Μοιᾶδες χρόνου. Ἑτος, ἡμέρα, ὥρα, λεπτὸν πρῶτον, λεπτὸν δεύτερον κτλ. Τὸ ἔτος ἴσον μὲ 365 ἡμ., καὶ τὸ δίτεκτον μὲ 366 ἡμ., ἡ ἡμέρα [ἢτοι τὸ ἡμερονύκτιον] ἴση μὲ 24 ὥρας, ἡ ὥρα ἴση μὲ 60 λεπτ., τὸ λεπτὸν ἴσον μὲ 60 δεύτερα λεπτά κτλ.

Ενίοτε εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ οἱ μῆνες καὶ αἱ ἐβδομάδες. 12 μῆνες τὸ ἔτος, ἀλλ' ὅχι ἴσοι οἱ μῆνες. 52 ἐβδομ. καὶ 1 ἡμέρ. τὸ ἔτος [β].

Μονάδες βάρους. Στατήρ (καρτάρι), ὀκά, δράμιον. Ὁ στατήρ ἴσος μὲ 44 ὀκάδας, ἢ μὲ 17600 δράμια—Ἡ ὀκά

(α) Εἶναι Γαλλικά.

[β]. Εἶναι καὶ νῦν εἰς πλείστα εἴδη.

44^{ον} τοῦ στατήρος καὶ ἴση μὲ 400 δράμια — Τὸ δράμιον 17600^{ον} τοῦ στατήρος, καὶ 400^{ον} τῆς ὀκτῆς [γ].

Μονάδες νομίσματος. Ὀθώριον χρυσοῦν, ὀθώριον ἀργυροῦν ἢ πεντάδραχμον, δραχμή, λεπτόν. Τὸ ὀθώριον εἶναι ἴσον μὲ 4 πεντ., ἢ μὲ 20 δραχ., ἢ μὲ 2000 λεπ. — Τὸ πεντάδραχμον εἶναι 5 δρ., ἢ 500 λεπτά. — Ἡ δραχ., 100 λεπτά.

161. Συμμιγῆς ἀριθμὸς, οἷον ὁ 8^{ον}. 4^{ποδ} 7^δ. 9^{γρ}., διαφέρει ἀκεραίου κατὰ ταῦτα, α'. ὅτι αἱ μονάδες του εἶναι ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλοστὸν, ἢ ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλαπλάσιον, οἷον ὁ μὲν ποῦς εἶναι 6^{ον} τῆς ὀργυιᾶς, ὁ δὲ δάκτυλος 12^{ον} τοῦ ποδὸς, ἢ δὲ γραμμή 12^{ον} τοῦ δακτύλου· οὐδεμία δὲ μονὰς εἶναι ἄλλης δέκατον ἢ ἑκατοστὸν, ὡς τῶν ἀκεραίων αἱ μονάδες, τῶν ὁποίων ἄλλη ἄλλης εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν, καὶ μόνον τὸ δέκατον ἢ ἑκατοστὸν κτλ. β'. ὅτι διακρίνονται εἰς τὴν γραφὴν αἱ μονάδες διὰ τῶν ἀρχικῶν στοιχείων τῶν ὀνομάτων των, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, καὶ ὅχι δι' ἀπλῆς τῆς θέσεως, ὡς τῶν ἀκεραίων· καὶ γ'. ὅτι οἱ συμμιγεῖς εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι. Μικτοῦ δὲ ἀριθμοῦ διαφέρει ὁ συμμιγῆς, καθότι εἶναι συνθετώτερος, ὅτι γράφεται διαφορετικῶς, καὶ ὅτι εἶναι πάντοτε συγκεκριμένος. Ἀλλὰ καὶ συμμιγῆς συμμιγοῦς διαφέρει, οἷον ὁ ἀνωτέρω τοῦ 15^{στ}. 20^{ικ}. 150^δ., καθότι ἡ σχέσις τῶν μονάδων των εἶναι διάφορος καὶ ὅχι ἡ αὐτή.

Διὰ ταῦτα δὲ τὰς διαφορὰς εἶναι ἀνάγκη νὰ εἰπωμεν ὀλίγα τινὰ καὶ περὶ τῶν συμμιγῶν ἰδιαιτέρως, καὶ νὰ θεωρῶμεν ἐνταυτῷ συμμιγεῖς διαφόρου εἵδους ποσοῦ.

Περὶ τροπῆς συμμιγῶν εἰς κλασματικοὺς καὶ τινάπαλιν.

162. Ἄς τραπῇ π. χ. ὁ 12^{ον}. 5^{ποδ} 9^δ 7^{γρ}. εἰς κλασματικὸν ἰσοδύναμον.

[γ]. Ταῦτα εἶναι Ἑλληνικὰ καὶ Τουρκικὰ, τὰ δὲ νομίσματα μόνον Ἑλληνικὰ.

Πρῶτον τρέπεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς γραμμὰς, ἔπειτα τίθεται ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν παρενομαστής ὅστις νὰ δεικνύῃ πόσαι γραμμαὶ ἰσοδυναμοῦσι μὲ μίαν ὀργυιάν, καὶ ὁ προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν συμμιγῆ.

Διὰ νὰ τραπῇ δὲ ὁ συμμιγῆς εἰς γραμμὰς, τρέπονται πρῶτον αἱ 12^ρ. εἰς πόδας ἢ εἰς ἕκτα, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 6 (123), εἰς δὲ τὸ γινόμενον 72^{ποδ.} προστίθενται ἔπειτα καὶ οἱ 5^{ποδ.} τοῦ συμμιγοῦς. Ἐπειτα τὸ κεφάλαιον 77^{πόδ.} τρέπονται εἰς δακτύλους ἢ εἰς δωδέκατα πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 12, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 924^{δακ.} προστίθενται καὶ οἱ 9^{δακ.} τοῦ συμμιγοῦς. Τελευταῖον τὸ ἄθροισμα 933^{δακ.} τρέπονται εἰς γραμμὰς ἢ

$$12^ρ. 5^π. 9^δ. 7^ρ.$$

$$\underline{6}$$

$$72$$

$$\underline{5}$$

$$77^{\text{ποδ.}}$$

$$\underline{12}$$

$$154$$

$$77$$

$$\underline{924}$$

$$9$$

$$\underline{933^{\text{δακ.}}}$$

$$\underline{12}$$

$$1866$$

$$933$$

$$\underline{11196}$$

$$7$$

$$\underline{11203^{\text{γραμ.}}}$$

εἰς δωδέκατα πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 12, εἰς δὲ τὸ γινόμενον 11196^ρ. προσθέτονται καὶ αἱ 7^ρ. τοῦ συμμιγοῦς, καὶ γίνονται 11203^{γραμ.} Ὁ συμμιγῆς λοιπὸν ἀριθμὸς 12^ρ. 5^{ποδ.} 9^{δ.} 7^ρ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 11203^ρ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γραμμὴ εἶναι $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς (160), διὰ τοῦτο αἱ 11203^{γραμ.} εἶναι $\frac{11203}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Λοιπὸν ὁ 12^ρ. 5^{π.} 9^{δ.} 7^ρ. τραπεῖς εἰς γραμμὰς ἢ εἰς 864^α τῆς ὀργυιᾶς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{11290}{864}$ αὐτῆς ἢ μὲ 11203^{γραμ.}.

Ἐκ δὲ τούτων ἐννοεῖ τις εὐκόλως πῶς τρέπεται καὶ ὁποῖος-δήποτε ἄλλος συμμιγῆς ἀριθμὸς εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μονάδων, τῶν μικροτέρων. Ἰδοὺ παραδείγματα ἄλλων συμμιγῶν.

15⁴μ. 18⁶ρ. 35³λεπ.

24

60

30

360

18

378⁶ρ.

60

22680

35

22715³λεπ. (α)8³θ. 3πεντ. 3³ρ. 75³λεπ.

4

32

3

35³πεν.

5

175

3

178³ρ.

100

17800

75

17875³λεπ. (β)5στ. 25³κ. 370³ρ.

44

220

25

245³κ.

400

98000

370

98370³ρ. (γ)

(α) Ἐπειδὴ δὲ τὸ λεπτόν ἐῖναι $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας [160], τὰ 22715³λεπ. εἶναι $\frac{22715}{1440}$ τῆς ἡμέρας, καὶ οὗτος ἰσοδύναμος μὲ τὸν συμμιγῆ 15⁴μ. 18⁶ρ. 35³λεπ.

(β) Καὶ ἐπειδὴ τὸ λεπτόν ἐῖναι $\frac{1}{2000}$ τοῦ ὀθωνίου [160], τὰ 17875³λεπ. εἶναι $\frac{17875}{2000}$ τοῦ ὀθωνίου, καὶ οὗτος ἐῖναι ἰσοδύναμος μὲ 8 θ. 3πεντ. 3³ρ. 75³λεπ.

(γ) Τὸ ἐν δράμι ἐῖναι $\frac{1}{17600}$ τοῦ στατῆρος· λοιπὸν τὰ 98370³ρ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{98370}{1760}$ τοῦ στατῆρος, καὶ οὗτος ἐῖναι ἰσοδύναμος μὲ 5στ. 25³κ. 370³ρ.

163. Ἀντιστρόφως, ἄς τραπῇ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{615}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.

Ἐάν νοηθῇ ὅτι ὁ $\frac{615}{23}$ τῆς ὀργ. παριστάνει τὸ 23^{ον} τῶν 615³ρ.

[122], καὶ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμ. 615 | 23
μητῆς 615 διὰ τοῦ παρονο- 155 | 26³ρ. 4πόδ. 5δκκ. 2π. $\frac{14}{23}$
μαστοῦ 23, τὸ πηλίκον θέλει 17³ρ.
εἶσθαι 26³ρ. καὶ μένουσι 17³ρ. 6
Καὶ ἐπειδὴ ἡ μία ὀργυιὰ ἰσο- 102³πόδ.

ἴσυνάμει με 6πρ. αἱ 17ρ. 10
 ἰσοδυναμοῦσι με δεκαεπτάκις 12
 6πρ. ἥτοι με 102 πρ. τὸ 120^{πρ.}
 δὲ 23^{ρ.} τῶν 102πρ. εἶναι 5
 4πρ. καὶ μένουσι 10πρ. Ἀλλ' 12
 1π. ἰσοδυναμεῖ με 12δ, λοι-
 πὸν οἱ 10π. ἰσοδυναμοῦσι με 60ρ.
 δεκάκις 12δ, ἥτοι με 120δ. 14

τὸ δὲ 23^{ρ.} τῶν 120δ. εἶναι 5δ, καὶ μένουσι 5δ ἥτοι 60ρ,
 τῶν ὁποίων τὸ 23^{ρ.} εἶναι 2ρ. καὶ $\frac{1}{2}$ τῆς γραμμῆς. Ὡστε ὁ
 $\frac{415}{23}$ τῆς ὀργυῖας ἰσοδυναμεῖ με 26ρ. 4πρ. 5δ. 2ρ. σχεδόν.

Εἶναι δὲ φανερόν ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου ὅτι κλασμα-
 τικὸς τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον σιμμιγῇ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθ-
 μητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ κατὰλοιπον, τραπὲν εἰς
 μονάδας ἀμέσως κατωτέρως διὰ τοῦ πολλ. π. λασιασμοῦ αὐτοῦ
 ἐπὶ ἀριθμὸν παριστάνοντι με πόσας μονάδας κατωτέρας
 ἰσοδυναμεῖ μία μονὰς τοῦ κατὰλοιπ. διαφρεθῇ πάλιν διὰ
 τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἴδου παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

$\frac{874}{56}$ τῆς ἡμέρας ἰσοδυναμεῖ με 15ῆμ. 14ρ. 34λεπ. 17δευτ. $\frac{1}{2}$.

$\frac{98370}{17600}$ τοῦ στατήρος ἰσοδυναμεῖ με 5π. 25^{ρ.} 370δρ.

$\frac{684}{32}$ τοῦ πενταδ. ἰσοδυναμεῖ με 21πεντ. 1δρ. 87λ. $\frac{1}{2}$

874	56	
314	15ῆμ. 14ρ. 34λεπ. 17δευτ. $\frac{1}{2}$	
34		
24		
136	98370	17600
68	10370	5π. 25 ^{ρ.} 370δρ.
	44	
816	41480	684
256	41480	44
32	456280	12
60	104280	5
1920	16280	60

240	400	28
16	<u>6512000</u>	<u>100</u>
60	123200	2800
<u>960</u>	000000	240
400		16
8		

	98370	17600
Ὁ δεύτερος κλασματικὸς	10370	
τρέπεται εἰς συμμιγῇ καὶ κατ'	2370	400 5στ. 25κ. 370δρ.
ἄλλον ἀπλούστερον τρόπον.	370	

Ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ τρόπου τούτου συνίσταται εἰς τὸ ὅτι, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κατάλοιπον 10370 ἐπὶ 44, διαιρεῖται ὁ διαιρέτης διὰ 44, καὶ διὰ τοῦ πηλίκου 400 διαιρεῖται τὸ κατάλοιπον 10370. Τὸ δὲ κατάλοιπον 370 ὡς τετρακοσιοστὰ τῆς ὁκτῆς εἶναι δράμια.

Ὅλα τοῦ ἀριθ. 162 τὰ παραδείγματα τρέπονται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον. Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα.

11203	864
2563	
835	144 12ρ. 5π. 9δ. 7δρ.
115	12
7	

Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν συμμιγῶν.

164. Ἡ πρόσθεσις τῶν ὁμοειδῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων. Δηλ. πρῶτον προσθέτονται οἱ δεξιοὶ ὁμώνυμοι ἀριθμοί, ἥτοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς μικροτάτης μονάδος· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ἄθροισμα ᾖναι μικρότερον μιᾶς μονάδος ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν· ἐὰν δὲ ᾖναι μεγαλύτερον, διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσαι μικρότεραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ μίαν ἀμέσως ἀνωτέραν, καὶ τὸ μὲν κατάλοιπον γράφεται ὑποκάτω, τὸ δὲ πηλίκον προστίθεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀμέσως πρὸς ἀριστεράν ἀριθμῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα

16 ^δ	2 ^{πεντ}	3 ^{δρ}	75 ^{λεπ}	24 ^ρ	4 ^π	7 ^δ	9 ^{γρ}
12	2	0	24	54	3	5	
6	0	4			5	9	11
35	2	3	78	38	0	5	2
71	0	1	77	118	2	3	10

28 ^{στατ}	35 ^{οκ}	240 ^{δρ}
6	40	150
4	8	350
39	40	340

45 ^{ημ}	20 ^{ωρ}	15 ^{λεπ}
24	16	35
5	22	50
6	12	48
83	0	28

165 Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ὁμοειδῶν συμμιγῶν ἐκτελεῖται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων. Δηλ. πρῶτον ἀφαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς μικροτάτης μονάδος, ἂν ὁ τοῦ ἀφαιρετέου ᾖναι μεγαλύτερος παρὰ τὸν τοῦ ἀφαιρέτου· ἂν δὲ ᾖναι μικρότερος, προστίθεται πρῶτον εἰς αὐτὸν μία τῶν ἀμέσως μεγαλύτερων μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἔπειτα ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παραδείγματα

81 ^δ	0 ^{πεν}	1 ^{δρ}	77 ^{λεπ}	118 ^ρ	2 ^π	4 ^{δακ}	10 ^{γρ}
26	2	3	75	24	4	7	9
54	1	3	2	93	3	9	1
42 ^{στατ}	40 ^{οκ}	150 ^{δρ}		83 ^{ημ}	0 ^{ωρ}	28 ^{λεπ}	
28	35	240		45	20	15	
14	4	310		37	4	13	

Σημ. α. Προσθέτονται δὲ καὶ ἀφαιροῦνται οἱ συμμιγεῖς καὶ οὕτω δηλ. τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους κλασματικούς, προσθέτονται ἢ ἀφαιροῦνται οἱ ἀριθμηταὶ τούτων, καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν διαιρούμενων διὰ τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ τρέπεται εἰς ὁμοειδῆ συμμιγῇ ἀριθμὸν, ὅστις θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν συμμιγῶν. — Ὁ πρῶτος τρόπος ὁμως εἶναι προτιμητέος, διότι εἶναι ἀπλούστερος.

Σημ. 6'. Ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀφρημένος ποτὲ δὲν προστίθεται εἰς συμμιγῇ, ὅστις εἶναι πάντοτε συγκεκριμένος. Ἐάν δὲ ὁ κλασματικὸς ᾖναι συγκεκριμένος καὶ ὁμοειδὴς μὲ τὸν συμμιγῇ, προστίθεται εἰς αὐτόν, ἀφοῦ, τραπῇ εἰς συμμιγῇ. ἢ τῆς ὁμοειδῆς προστίθεται εἰς 5^α 4^π 3^δ αὐ, ἀφοῦ τραπῇ εἰς 4^π 6^δ αὐ. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαιρέσεως συμμιγῶν.

α. Ἐπὶ ἀκέραιον.

166. Συμμιγῆς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον ἀκέραιον, ὡς πολυψήφιος ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 54^{\text{α}} 12^{\text{ω}} 35^{\text{λπ}} \\ \quad \quad \quad 8 \\ \hline 436 \quad 4 \quad 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \overline{) 60} \\ 40 \overline{) 4} \\ \hline 96 \\ \hline 100 \overline{) 24} \\ 4 \overline{) 4} \\ \hline 432 \\ \hline 436 \end{array}$$

Πρῶτον πολλαπλασιάζονται τὰ 35^{λπ} ἐπὶ 8, καὶ τὸ γινόμενον 280^{λπ} διαιρούμενον διὰ 60 [διότι 60 λεπτὰ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1^ω] τρέπεται εἰς 4^ω καὶ 40^{λπ}. γράφονται τὰ 40^{λπ} ὑπὸ τὰ λεπτὰ, πολλαπλασιάζονται ἔπειτα αἱ 12^ω ἐπὶ 8, εἰς τὸ γινόμενον 96 προσθέτονται καὶ αἱ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν λεπτῶν προκύψασαι 4^ω, καὶ τὸ ἄθροισμα 100^ω δαιρούμενον διὰ 24 [δὲ ὅτι 24^ω ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1^η] τρέπεται εἰς 4^η καὶ 4^ω. γράφονται αἱ 4^ω ὑπὸ τὰς ὥρας, πολλαπλασιάζονται αἱ 54^η ἐπὶ 8, εἰς τὸ γινόμενον 432 προσθέτονται αἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὥρων προκύψασαι 4^η, καὶ τελευταῖον τὸ ἄθροισμα 436 γράφεται ὑπὸ τὰς ἡμέρας. Οὕτω πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ 28^{στα} 38^{ικ} 250^δ ἐπὶ 9 — καὶ ὁ 14^ε 5^π 6^δ 4^ρ ἐπὶ 6.

167. Ὅταν δὲ ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς ᾖναι πολυψήφιος, εἴμπορεῖ μὲν νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ὡς ἥδη εἵπομεν, ἀλλ' εἶναι προτιμότερος ὁ ἀκόλουθος τρόπος.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ $78^{\text{ημ}}$ $15^{\text{ωρ}}$ $40^{\text{λεπ}}$ ἐπὶ 48.

Πρῶτον χωρίζεται ὁ πολλαπλασιαστέος εἰς μέρη τῶν ὁποίων τὸ ἐν νὰ ᾔναι πολλοσὺν τι τοῦ ἄλλου, οὕτως $78^{\text{ημ}}$ $12^{\text{ωρ}}$ $3^{\text{ωρ}}$ $30^{\text{λεπ}}$ $10^{\text{λεπ}}$, ὅπου βλέπει τις ὅτι αἱ $12^{\text{ωρ}}$ εἶναι ἥμισυ τῆς ἡμέρας, αἱ $3^{\text{ωρ}}$ εἶναι $4^{\text{ον}}$ τῶν $12^{\text{ωρ}}$, τὰ $30^{\text{λεπ}}$ ἥμισυ τῆς ὥρας ἢ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῶν $3^{\text{ωρ}}$, τὰ $10^{\text{λεπ}}$ εἶναι $3^{\text{ον}}$ τῶν $30^{\text{λεπ}}$. Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιασθῇ χωριστὰ ἐν ἑκάστων μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 48, γινομένης ἀρχῆς ἐξ ἀριστερῶν, τὰ γινόμενα κατὰ τὰ ἀποδεδειγμένα [102] θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα τῶν πολλαπλασιαστέων, διότι πολλαπλασιαστικῆς εἶναι ὁ αὐτός.

$$\begin{array}{r} 78^{\text{ημ}} \quad 15^{\text{ωρ}} \quad 40^{\text{λεπ}} \\ 48 \end{array}$$

$$624$$

$$312$$

$$12^{\text{ωρ}}, \text{ ἥμισυ τῆς ἡμέρ.} \quad 24$$

$$3^{\text{ωρ}}, 4^{\text{ον}} \text{ τῶν } 12^{\text{ωρ}}. \quad 6$$

$$(1^{\text{ωρ}}), 3^{\text{ον}} \text{ τῶν } 3^{\text{ωρ}} \quad (2)$$

$$30^{\text{λεπ}}, \frac{1}{2} \text{ τῆς ὥρας} \quad 1$$

$$10^{\text{λεπ}}, 3^{\text{ον}} \text{ τῶν } 30^{\text{λεπ}} \quad 0 \quad 8$$

$$3775 \quad 8$$

Ἀφοῦ λοιπὸν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ $78^{\text{ημ}}$ ἐπὶ 48, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ ἄλλος πολλαπλασιαστέος ᾔτον $1^{\text{ημ}}$, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 48 ἤθελε παρᾶξει γινόμενον $48^{\text{ημ}}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστέος εἶναι $12^{\text{ωρ}}$, ἥτοι ἥμισυ τῆς ἡμέρας, τὸ γινόμενον τῶν $12^{\text{ωρ}}$ ἐπὶ 48 πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ ᾔναι ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς $1^{\text{ημ}}$ ἐπὶ 48, ἥτοι $24^{\text{ημ}}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἀρμοδίως ὑπὸ τὰ πρῶτα μερικὰ γινόμενα τῶν $78^{\text{ημ}}$ ἐπὶ 48. Ἐπειτα, ἐπειδὴ ὁ τρίτος πολλαπλασιαστέος $3^{\text{ωρ}}$ εἶναι $4^{\text{ον}}$ τοῦ δευτέρου $12^{\text{ωρ}}$, το γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 48 πρέπει νὰ ᾔναι $4^{\text{ον}}$ τοῦ γινομένου τῶν $12^{\text{ωρ}}$ ἐπὶ 48, ἤγουν $4^{\text{ον}}$ τῶν $24^{\text{ημ}}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $6^{\text{ημ}}$. γράφονται καὶ αἱ $6^{\text{ημ}}$ ὑπὸ τὰς πρώτας.

Τώρα χρειάζεται νὰ γείνη ἐν βοηθητικὸν γινόμενον, τὸ τῆς $1^{\omega\rho}$ ἐπὶ 48. Εἶναι δὲ τὸ $3^{\omega\rho}$ τοῦ γινομένου τῶν $3^{\omega\rho}$ ἐπὶ 48, ἤγουν τὸ $3^{\omega\rho}$ τῶν $6^{\eta\mu}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $2^{\eta\mu}$. τοῦτο δὲ γράφεται μὲν ὑπὸ τὰ πρῶτα, ἀλλὰ καὶ παρεγγράφεται, διὰ νὰ μὴ προστεθῇ ἔπειτα εἰς τ' ἄλλα, ὡς μὴ οὐσιῶδες ἀλλὰ βοηθητικόν. Ἐπειτα, ἐπειδὴ τὰ $30^{\lambda\epsilon\pi}$, ὁ τέταρτος πολλαπλασιαστέος, εἶναι ἥμισυ τῆς ὥρας, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 48 πρέπει νὰ ᾔναι ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς $1^{\omega\rho}$ ἐπὶ 48, ἤγουν ἥμισυ τῶν $2^{\eta\mu}$, ἥτοι $1^{\eta\mu}$. γράφεται καὶ αὕτη ὑπὸ τὰς πρώτας. Τελευταῖον, ἐπειδὴ ὁ πέμπτος πολλαπλασιαστέος εἶναι $10^{\lambda\epsilon\pi}$ ἤγουν $3^{\omega\rho}$ τῶν $30^{\lambda\epsilon\pi}$, τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ 48 πρέπει νὰ ᾔναι τρίτον τοῦ γινομένου τῶν $30^{\lambda\epsilon\pi}$ ἐπὶ 48, ἤγουν $3^{\omega\rho}$ τῆς $1^{\eta\mu}$. τὸ ὁποῖον εἶναι $8^{\omega\rho}$. γράφονται καὶ αἱ $8^{\omega\rho}$ ὑπὸ τὰς ὥρας. Τώρα προσθέτονται ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, ἐκτὰς τοῦ βοηθητικοῦ, καὶ προκύπτει οὕτω γινόμενον τοῦ $78^{\eta\mu}$ $15^{\omega\rho}$ $40^{\lambda\epsilon\pi}$ ἐπὶ 48 ὁ ἀριθμὸς $3775^{\eta\mu}$ $8^{\omega\rho}$.

Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολλαπλασιάζειν, καθ' ὃν ἀπαιτεῖται νὰ χωρίζεται ὁ συμμιγῆς πολλαπλασιαστέος εἰς μέρη πολλοστὰ τὸ ἐν τοῦ ἄλλου, καὶ ἔπειτα διὰ διαιρέσεως νὰ σχηματίζωνται γινόμενα ἀνάλογα τῶν μερικῶν πολλαπλασιαστέων, εἰμφορεῖ νὰ ὀνομάζεται μέθοδος τῶν πολλοστῶν, καὶ νὰ λέγωμεν πολλαπλασιάζομεν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν. Οὕτω γίνονται οἱ ἀκόλουθοι πολλαπλασιασμοὶ πρὸς γύμνασιν.

	$18^{\omega\rho}$	4^{π}	9^{δ}	$10^{\eta\rho}$
	324			
	72			
	36			
	54			
3^{π} , ἥμισυ τῆς ὀργ.	162			
1^{π} , $3^{\omega\rho}$ τῶν 3^{π}	54			
6^{δ} , ἥμισυ τοῦ ποδ.	27			
3^{δ} , ἥμισυ τῶν 6^{δ}	13	3^{π}		
$[1^{\delta}]$, $3^{\omega\rho}$ τῶν 3^{δ}	(4	3)		
$6^{\eta\rho}$, ἥμισυ τοῦ δακτ.	2	1	6^{δ}	
$3^{\eta\rho}$, ἥμισυ τῶν $6^{\eta\rho}$	1	0	9	
$1^{\eta\rho}$, $3^{\omega\rho}$ τῶν $3^{\eta\rho}$	0	2	3	
	6092	1	6	

45^{δρ} 3^{πεντ} 4^{δρ} 75^{λεπ}
96

270

405

2^{πεν}, ἡμισυ τοῦ ὀθ. 48

1^{πεν}, ἡμισυ τῶν 2^{πεντ} 24

1^{δρ}, 5^ν τοῦ πενταδ. 4 3^{πεν} 1^{δρ}

1^{δρ} 4 3 1

1^δ 4 3 1

1, 4 3 1

50^{λεπ}, ἡμισυ τῆς δράχ. 2 1 3

25^{λεπ}, ἡμισυ τῶν 50^{λεπ} 1 0 4

4414 3 1

Οὕτω νὰ πολλαπλασιασθῶσι καὶ 128^{στατ.} 38^ν 250^{δρ} ἐπὶ 784, καὶ 14^ρ 5^{πεντ} 9^{δρακ} 4^{γρ} ἐπὶ 578.

168. Συρμιγῆς ἡ ἰσότης διηγεῖται δι' ἀκεραίων, ὅπως διηγεῖται ἀκέαιος δι' ἀκεραίων.

Παράδειγμα.

Πρῶτον διαιροῦνται αἱ 3775^{γρ} διὰ 48, καὶ εὐρίσκειται πηλίκον 78^{γρ}, τὸ ὅπου οὐ γράφεται εἰς τὴν θέσιν του, καὶ μένουσι 31^{γρ}, αἵτινες πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 24, διὰ νὰ τραπῶσιν εἰς ὥρας, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστίθενται καὶ αἱ 8^{γρ} τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνονται 752^{γρ}. Αὗται δὲ διαιροῦνται διὰ 48, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 15^ρ, τὸ ὅπου οὐ γράφεται δεξιὰ τῶν ἡμερῶν εἰς τὴν θέσιν του, μένουσι δὲ 32^{γρ}, αἵτινες τρέπονται εἰς 1920^{λεπ} πολλαπλασιάζόμεναι ἐπὶ 60. Διαιροῦνται καὶ τὰ 1920^{λεπ} διὰ τοῦ διαιρετέου 48, καὶ προκύπτει πηλίκον σωστὰ 40^{λεπ}, τὸ ὅπου οὐ γράφεται εἰς τὴν θέσιν του.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα.

$$\begin{array}{r|l} 6092^{\circ\rho} & 1\pi. \quad 6^{\delta\alpha\kappa}. \quad 324 \\ 2852 & \\ 260 & \\ \hline 6 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 18^{\circ\rho} \quad 4\pi^{\circ\delta} \quad 9^{\delta\alpha\kappa} \quad 10^{\gamma\rho}. \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1561 & 58^{\sigma\tau} \quad 35^{\circ\kappa} \quad 270^{\delta} \quad 35 \\ 265 & 23 \\ 12 & 44 \\ \hline 530 & 92 \\ 265 & 92 \\ 6 & 35 \\ \hline 3186 & 1047 \\ 270 & 347 \\ 12 & 32 \\ \hline 540 & 400 \\ 270 & 12800 \\ \hline 3240 & 270 \\ \hline & 13070 \\ & 257 \\ & 120 \\ & 15 \end{array}$$

Ε'. Ἐπὶ κλάσμα καὶ μικτόν.

169. Συμμιγῆς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα ἢ ὡς ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἢ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν. Αὕτη δὲ ἐδῶ συνίσταται εἰς τὸ νὰ χωρισθῇ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς μέρη, τὰ ὅποια νὰ ᾖναι ἄλλο ἄλλου πολλοστόν τι.

Ἀς πολλαπλασιασθῇ ὁ $245^{\eta\mu}$ $18^{\omega\rho}$ $50^{\lambda\epsilon\pi}$ ἐπὶ $\frac{10}{12}$.

α. Πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 10, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 12.

245 ^{ημ} 18 ^{ωρ} 50 ^{λεπ}			
	10		
2457	20	20	12
9			204 ^{ημ} 19 ^{ωρ} 41 ^{λεπ} 40 ^{δευτ}
24			
216			
20			
236			
116			
8			
60			
480			
20			
500			
20			
8			
60			
480			
0			

500	60
20	8
	180
188	24
20	7
	2450
	2457

Ε'. Χωρίζεται ὁ πολλαπλασιαστικὸς $\frac{1}{12}$ εἰς $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{12}$ ἄγουν, εἰς ἥμισυ τῆς μονάδος, εἰς ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος, καὶ εἰς τρίτον τούτου τοῦ ἡμίσεος. Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιαστικὸς ᾗ τον ἢ μονάς, τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶσθαι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον 245^{ημ} 18^{ωρ} 50^{λεπ}. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ πρῶτος πολλαπλασιαστικὸς $\frac{6}{12}$ εἶναι ἥμισυ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον τοῦ 245^{ημ} 18^{ωρ} 50^{λεπ} ἐπὶ $\frac{6}{12}$, πρέπει νὰ ᾗναι ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἄγουν 122^{ημ} 21^{ωρ} 25^{λεπ}. Ἐπειτα, ἐπειδὴ ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστικὸς $\frac{3}{12}$ εἶναι ἥμισυ τοῦ πρώτου $\frac{6}{12}$, τὸ γινόμενον τοῦ 245^{ημ} 18^{ωρ} 50^{λεπ} ἐπὶ $\frac{3}{12}$ πρέπει νὰ ᾗναι ἥμισυ τοῦ πρώτου μερικῶν γινομένου 122^{ημ} 21^{ωρ} 25^{λεπ}, ἄγουν 61^{ημ} 10^{ωρ} 42^{λεπ} 30^{δευτ}. Τελευταῖον τὸ γινόμενον τοῦ 245^{ημ} 18^{ωρ} 50^{λεπ} ἐπὶ $\frac{1}{12}$ εἶναι 3ον τοῦ 61^{ημ} 10^{ωρ} 42^{λεπ} 30^{δευτ},

ἔχουν 20^η 11^{ωρ} 34^{λεπ} 10^{δευτ}. Τώρα προσθέτονται τὰ τρία μερικὰ γινόμενα, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 245^η 18^{ωρ} 50^{λεπ} ἐπὶ $\frac{1}{12}$ θέλει εἶσθαι 204^η 19^{ωρ} 41^{λεπ} 40^{δευτ}, ὡς ἀνωτέρω.

	245 ^η	18 ^{ωρ}	50 ^{λεπ}	
	$\frac{1}{12}$	$\frac{0}{12}$		
$\frac{6}{12}$, $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος	122	21	25	
$\frac{3}{12}$, $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{6}{12}$	61	10	42	30 ^{δευτ} .
$\frac{1}{12}$, $3^{\text{ον}}$ τοῦ $\frac{3}{12}$	20	11	34	10
	204	19	41	40

Ὁ τρόπος οὗτος εἶναι προτιμητέος.

170. Συμμιγῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέλειον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα προστεῶσιν (149).

Παράδειγμα.

	64 ^{ωρ}	4 ^π	10 ^δ	9 ^π	
	38	$\frac{9}{15}$			
	512				
	192				
3 ^π δ, ἥμισυ τῆς ὀργάνης	19				
1 ^π , $3^{\text{ον}}$ τῶν 3 ^π	6	2 ^π			
6 ^δ ακ, ἥμισυ τοῦ πρῶτου	3	1			
3 ^δ , ἥμισυ τῶν 6 ^δ ακ	1	3	6 ^δ ακ		
1 ^δ , $3^{\text{ον}}$ τῶν 3 ^δ	0	3	2		
6 ^π ρ, ἥμισυ τοῦ δακτύλου	0	1	7		
3 ^π ρ, ἥμισυ τῶν 6 ^π ρ	0	0	9	6 ^π ρ	
$\frac{3}{5}$, πέμπτον τῆς μονάδος τοῦ πολλα-	12	5	9	4	$\frac{4}{5}$
$\frac{3}{15}$, ὡσαύτως	12	5	9	4	$\frac{4}{5}$
$\frac{3}{15}$, ὡσαύτως	12	5	9	4	$\frac{4}{5}$
	2501	5	4	6	$\frac{4}{5}$

Σημ. Εἰμπορεύ νὰ τοαπῇ ὁ 38 $\frac{9}{15}$ εἰς κλασματικόν, καὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς ἐπὶ τὸν κλασματικόν ὡς ἐν ἀριθμ. 169· ἀλλ' εἶναι προτιμητέον ὡς ἐπολλαπλασιάζαμεν.

171. Διαφεύεται συμμιγῆς διὰ κλισματικοῦ ἢ διὰ μικτοῦ,

ὅπως διαμερίζεται ἀκέραιος διὰ κλασματικοῦ ἢ διὰ μικτοῦ (151—152).

Ἄς διαμερεθῇ ὁ 35 πέν 3ος 75 λ. π. διὰ $\frac{2}{7}$.

35 πέντ 3ος 75 λ. π.

8

$$\begin{array}{r} \hline 286 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \\ 30 \quad 200 \quad | \quad 40 \text{ πέν } 4 \text{ος } 28 \text{ λ. π. } \frac{1}{7} \\ \hline \end{array}$$

60

Ἄς διαμερεθῇ ὁ 48 πέν 26ος 250ος διὰ 55 $\frac{2}{12}$ ἔχον διὰ $\frac{6}{12}$.

48 πέν 26ος 250ος

12

$$\begin{array}{r} \hline 583 \quad 11 \quad 200 \quad | \quad 681 \\ 44 \quad \quad \quad | \quad 37 \text{ος } 274 \text{ος } \frac{6}{12} \\ \hline \end{array}$$

2332

2332

11

25663

5233

466

400

186400

200

186600

5040

2730

6

γ'. Ἐπὶ συμμιγῆ.

172. Συμμιγῆς πολλοπλασιαστέα ἐπὶ ἄλλον συμμιγῆ, ἢ ὡς ἐν ἀρ. 169, ἀφ' ὃ τραπῇ ὁ συμμιγῆς εἰς κλασματικόν, ἢ ποσομιότερον, ἐὰν πολλοπλασιασθῇ ὁ συμμιγῆς πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ πολλοπλασιαστοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὰ ἄλλα κλασματικά μέρη του ὡς ἐν ἀριθ. 170.

Κτίστης τις ευσυμφώνησε νὰ κτίσῃ τοῖχον πρὸς τὴν πεντάδραχμον τὰς 4^ορ 3^πδ 7^{δα}κ 9^{γρ}κ, καὶ πληρωθεὶς διὰ τὸ ἔργον του ἔλαβεν 24^{πεν} 2^{δρ} 40^{λεπ} πόσων ὀργυιῶν τοῖχον ἔκτισεν;

Εἶναι φανερόν ὅτι διὰ πολλαπλασιασμοῦ θέλει εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, καὶ ὅτι 4^ορ 3^πδ κτλ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος. Ἐδῶ δὲ πολλαπλασιάζομεν μόνον κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον.

	4 ^ο ρ	3 ^π δ	7 ^{δα} κ	9 ^{γρ} κ	
	24 ^{πεν}	2 ^{δρ}	40 ^{λεπ}		
	96				
3 ^π δδ	12				
(1 ^π)	(4)				
6 ^δ	2				
1 ^δ	0	2 ^π			
6 ^{γρ}	0	1			
3 ^γ	0	0	6 ^{δα} κ		
1 ^{δρ}	0	5	6	4 ^{γρ} κμ.	$\frac{1}{5}$
1 ^{δρ}	0	5	6	4	$\frac{1}{5}$
20 ^{λεπ}	0	1	1	3	$\frac{6}{25}$
20 ^{λεπ}	0	1	1	3	$\frac{6}{25}$
	112	4	9	2	$\frac{22}{25}$

Δὲν ἐξηγοῦμεν τὰ τῆς πράξεως ταύτης, διότι ὅλα εἶναι γνωστά ἐκ τῶν προειρημένων. Ἄλλως δὲ, καὶ ἐκ μόνης ὑψέως καταλαμβάνει τις πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμός οὗτος.

173. Ἐυσυμφώνησε σκαφεύς τις ν' ἀνοίξῃ χάνδακα μακρὸν 4^ορ 3^π 7^δ 9^{γρ} εἰς πετρώδη τόπον, πρὸς 24^{πεν} 2^{δρ} 40^{λεπ} τὴν ὀργυιάν· πόσον ἔλαβε δι' ὅλον τὸ ἔργον;

Καὶ ἐδῶ εἶναι φανερόν ὅτι διὰ πολλαπλασιασμοῦ θέλει εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἀλλὰ πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 24^{πεν} 2^{δρ} 40^{λεπ}.

	24 ^{πεν}	2 ^{δρ}	40 ^{λεπ}	
	4 ^{ερ}	3 ^{ποδ}	7 ^{δρακ}	9 ^{γρ}
	96			
1 ^{δρ}	0	4 ^{δρ}		
1 ^{δρ}	0	4		
20 ^{λεπ}	0	0	80 ^{λεπ}	
20 ^{λεπ}	0	0	80	
3 ^{ποδ}	12	1	20	
(1)	(4	0	40)	
6 ^{δρακ}	2	0	20	
1 ^δ	0	1	70	
6 ^{γρ}	0	0	85	
3 ^{γρ}	0	0	42	$\frac{1}{2}$
	112	3	97	$\frac{1}{2}$

Σημ. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τοῦτον τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἂν καὶ οἱ πολλαπλασιαζόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ αὐτοί, οὔτινες ἐπολλαπλασιασθήσονται καὶ ἄνωτέρω, τὸ γινόμενον δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ, ἀλλὰ διαφέρει, ἂν ὅχι κατὰ τὰς ἀρχικάς μονάδας, τοῦλάχιστον κατὰ τὰς κατωτέρας μονάδας. Ἡ διαφορά αὕτη προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὸν τελευταῖον πολλαπλασιασμὸν πολλαπλασιαστέος δὲν εἶναι ὁ 4^{οργ.} 3^{ποδ.} κτλ, ὡς εἰς τὸν προηγούμενον, ἀλλὰ ὁ 24^{πεντ.} 5^{δρ.} 20^{λεπ.}, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες, ἡ δραχμὴ καὶ τὸ λεπτὸν, δὲν ἔχουσι πρὸς τὸ πεντάδραχμον τὸν αὐτὸν λόγον, ὅποιον ἔχουσιν ὁ πῶς, ὁ δάκτυλος κτλ πρὸς τὴν ὀργυιάν. Ὡστε εἰς τοὺς συμμιγεῖς δὲν εἶναι ἀδιάφορον, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους (81), νὰ πολλαπλασιάζωμεν ὅποιον τύχη ἐπὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσδιορίζωμεν ἐκ τοῦ ζητήματος τίς εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, τὸ ὅποιον εἶναι εὐκόλον, διότι εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (67), καὶ αὐτὸν νὰ πολλαπλασιάζωμεν.

174. Ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ συνμιγῆς, καὶ ἑτεροειδὴς πρὸς τὸν διαιρετέον, πάντοτε τρέπεται εἰς κλασματικὸν καὶ ἔπειτα διαιρεῖται δι' αὐτοῦ ὁ διαιρετέος, ὡς ἐν ἀριθμ. 171.

Κτίσθης κτίσας τοῖχον 112^ρ 4^π 9^δ 3^{γρ} ἔλαβεν 24^{πεντ} 2^{δρ} 40^{λεπ}· μετ' ἐν πεντάδραχμον πόσαι ὀργυιαί κτίζονται;

Εἶναι φανερόν ὅτι, ὁποῖα εἶναι ἡ μονάς, τὸ πεντάδραχμον, πρὸς τὸν 24^{πεν} 2^{δρ} 40^{λεπ}, τοιοῦτος πρέπει νὰ ᾖ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὀργ. πρὸς τὸν 112^ρ 4^π 9^δ 3^{γρ}, καὶ

ἐπομένως ὅτι διὰ διαιρέσεως πρέπει νὰ εἴρῃ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, καὶ ὅτι ὁ 112:ρ 4 πιδ κτλ εἶναι ὁ διαιρετέος. Τρέπεται λοιπὸν ὁ διαιρέτης 24 πιν 2^ρ 40 λ:π εἰς κλασματικὸν τοῦτον $\frac{1}{300}$, πολλὰ π. αὐτῷ ζέται ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 500, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 12240.

	112:ρ 4π 9 ^δ 3:ρ	24 πιν 2 ^ρ 40 λ:π
	500	5
	56900	122
3 πιδ	250	100
1 π	83 2 ^π	
6 δακ	41 4	12240
3 δακ	20 5	
(1 ^δ)	(6 5 8 ^δ)	12210
3:ρ	1 4 5	
		500
	56397:ρ 3 ^π 5 ^δ	12210
	7437	
	6	4:ργ 3 πιδ 7 δακ 9 γρ σχεδόν
	44625	
	7905	
	12	
	15810	
	7905	
	5	
	94865	
	9185	
	12	
	110220	
	60	

175. Ὅταν δὲ οἱ πρὸς διαίρεσιν ἀριθμοὶ ἴγαι ὁμοειδέες (ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἰτεροειδὴς πρὸς αὐτοὺς, καὶ ἴσος μὲ τὸν λόγον αὐτῶν), τότε τὴν ἐκδομένην εἰς ἰσοδινάμους τῆς μικροτάτης μονάδος, καὶ διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 163.

4^ρ 3^{πδ} 7^{δακ} 9^{τρ} τοίχων κτίζονται με 3^ρ πεντάγραμμν.
π'σα πεντάγραμμα κτλ πρός τὴν πληρώσῃ τις, διὰ τὰ κτι-
σθῶσιν 112^ρ 4^{πδ} 9^α 3^ρ τοίχων τοῦ αὐτοῦ;

Εἶναι φανερόν ὅτι, ὅν λόγον ἔχει ὁ 112^ρ 4^π κτλ πρὸς τὸν
4^ρ 3^τ κτλ, τόσα πεντάγραμμα πρέπει νὰ πληρώσῃ, καὶ διὰ
τῷτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ, ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, ὡς εἴπομεν.

$$112^{\rho} 4^{\pi\delta} 9^{\tau\rho} 3^{\alpha\kappa}$$

$$4^{\rho} 3^{\pi\delta} 7^{\delta\alpha} 9^{\tau\rho}$$

6

6

676

27

12

12

8121

331

12

12

97455^{ρακ}3981^{ρακ}

97455 | 3981

17835 | 2^α πιν 2^ρ 40^λ π

1911

5

9555

159300

60

Προβλήματα εἰς λύτην πολλὰ τῶν τοῦ ἀριθ. 159, ἀφοῦ εἰς
αὐτὰ τ' ὧσι συμμιγείς ἀριθμοὶ καὶ κλασματικοὶ ἢ μικροί, ἔτι
δε καὶ τ' ἀκόλουθα.

1. Ἐν παιδὸς ἡ ἡλικία ἔναι 15^τ. 19^λ. 11^ρ. 37^λ π., πῶτα δεύτερα
λεπτά ἐπέρασαν ἀπὸ τοῦ ἐγεννηθῆαι; (τὸ ἔτος ν. λογισθῇ 3 5 ἡρ. 6 ὅρα)

2. Πόσα λεπτά εἶναι ἀπὸ τῆς πρώτης ἰανουαρίου μέχρι τῆς 14 αὐγούστου;
--- Πόσαι δὲ ἡμέραι, ὅρα καὶ λεπτά εἶναι ἀπὸ τῆς 14 αὐγούστου 10^ρ.
καὶ 50^λ π. πρὸ τῆς μεσημέρας μέρι τῆς τοῦ ἔτους, καὶ πόσα λεπτά εἶναι
ἡ διαφορά τοῦ παρ' ἑλόντος καὶ ἐλλόντος χρόνου;

3. Ὁμιληγία, μηνοληγία 28 δεκα ὅριον 1840, καὶ πληρωθεῖσα 2 ἰα-
νουαρίου 1842, πόσον καιρὸν ἔμεινεν εἰς χαῖρας τοῦ θανειστοῦ;

4. Πῆχει τὸ ὄλος 30 -- πρὸς 3 πει. 4 ρ 5 λε. πόσον ἀξίζουσιν;

5. Πόσα ἐργαζαὶ τοίχων κτίζει τις με 54 πεντ. 3^{δρ}. 2^λ π., πρὸς 2 ἐργ.
πῶδ. 9^{δακ}. τὸ ἐν πενταδρ;

6. Εάν εἰς 1 ἡμ. ἔδωκεται τις 68540 ἔργ. 5 π. 7 δ. εἰς 4 ἡμ. 16 ὥρ. 50 λεπ. πόσον θελεῖ ἔδωκε παρήσει;

7. Εἰς 12 ἡμ. 6 ὥρ. 35 λεπ. ἔκοψε τις 200 σατ. 30 ἔκ. 200 δρ. ζύλα, πόσον ἔκοπτε τὴν ἡμέραν;

8. 15 σατ. 24 ἔκ. 300 δρ. σταφύλια ἀξίζουσιν 1 ὀθών· 38 σατ. 30 ἔκ. 100 δρ. πόσον ἀξίζουσιν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Δεκαδικῶν κλασματικῶν.

*Τί εἶναι δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ
καὶ πῶς γράφονται.*

176. Εάν συμφωνηθῇ νὰ ᾔναι εἰς χρῆσιν ἐξ ὅλων τῶν πολυαριθμῶν κλασματικῶν μονάδων μόνον αἱ ἐξῆς, τὸ δέκατον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς, τὸ χιλιοστὸν, τὸ δεκαχιλιοστὸν, τὸ ἑκατοχιλιοστὸν, τὸ ἑκατομμυριοστὸν (ἢ μιλλιονιστὸν ἢ ἔτι χιλιονιστὸν), τὸ δεκαεκατομμυριοστὸν κτλ, ἐπειδὴ τούτων ἐκάστη εἶναι τῆς μὲν ἀμέσως ἀνωτέρας τῆς δέκατον, τῆς δὲ ἀμέσως κατωτέρας τῆς δεκαπλασίας, ὡς ἡ δεκάς, ἡ ἑκατοντάς, ἡ χιλιάς κτλ, εἶναι εὐκόλον νὰ ἴδωμεν ὅτι οἱ τούτων τῶν κλασματικῶν μονάδων ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γράφωνται ὡς οἱ ἀκέραιοι, καὶ ὅτι ἐπομένως αἱ ἐπὶ τούτων τῶν ἀριθμῶν πράξεις ἐκτελοῦνται ἀπλούστατα, ὡς αἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, καὶ ὅχι μὲ τὴν δυσκολίαν, ὅσην ἔχουσιν αἱ ἐπὶ τῶν ἄλλων κλασματικῶν, καὶ μάλιστα αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

Σημ. Ὅλαι αἱ προειρημέσαι κλασματικαὶ μονάδες ὀνομάζονται δεκαδικαὶ δι' αὐτὸ τοῦτο, ὅτι ἐκάστη αὐτῶν εἶναι τῆς μὲν ἀμέσως ἀνωτέρας τῆς δέκατον, τῆς δὲ ἀμέσως κατωτέρας τῆς δεκαπλασίας. Τὸ δὲ ἰδιαίτερον ὄνομα ἐκάστης συνηθέστερα ἔχει τὴν κατὰληξιν *ημόριον*, οἷον *δεκατημόριον*, *ἑκατοστημόριον* κτλ.

177. Δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ ἐκ τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων συγκείμενοι, καὶ ἰδίως δεκαδικὰ κλάσματα, τὰ κλάσματα τὰ συγκείμενα ἐκ τῶν δεκαδικῶν τούτων μονάδων. Οἱ ἀριθμοὶ 6 δεκατημόρια ἢ $\frac{6}{10}$, 28 δεκατημόρια ἢ $\frac{28}{10}$, 75 ἑκατοστημόρια ἢ $\frac{75}{100}$, 498 ἑκατοστημόρια ἢ $\frac{498}{100}$, 9 χιλιοστημόρια ἢ $\frac{9}{1000}$, 4578 χιλιοστημόρια ἢ $\frac{4578}{1000}$, κτλ, εἶναι δεκαδικοὶ κλασματικοί, καὶ ἰδίως τὰ $\frac{6}{10}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{9}{1000}$ εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα.

Σημ. Συντομίας χάριν εἰς τὸ ἐξῆς θέλομεν συχνάκις ὀνομάζει τοὺς ἀριθμοὺς τούτους μόνον δεκαδικούς, καὶ τὰ κλάσματα ἐνίοτε μόνον δεκαδικά.

178. Δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἡ κλασματικὴ μονὰς διακρίνεται εἰς τὴν γραφὴν καὶ διὰ τοῦ ὀνόματός της ἢ διὰ παρονομαστοῦ, ὡς ἄνωτέρω, ἀλλὰ τὸ κοινότερον διαστέλλεται δι' ὑποδιαστολῆς, ὡς λέγομεν εὐθύς.

ἀ. Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἐν τῶν ψηφίων παριστάνει μονάδας, τὰ δὲ δεξιὰ τούτου παριστάνουσι κατὰ σειρὰν τὸ μὲν δεκατημόρια, τὸ δὲ ἑκατοστημόρια, τὸ δὲ χιλιοστημόρια, κτλ. Τοῦ 28 δεκατημόρια π. χ. τὸ μὲν 8 παριστάνει δεκατημόρια, τὸ δὲ 2 δεκάδας δεκατημορίων ἤτοι μονάδας. Τοῦ 498 ἑκατοστημόρια τὸ μὲν 8 παριστάνει ἑκατοστημόρια, τὸ δὲ 9 δεκάδας ἑκατοστημορίων ἤτοι δεκατημόρια, τὸ δὲ 4 ἑκατοντάδας ἑκατοστημορίων ἤτοι μονάδας. Τοῦ δὲ 63458 χιλιοστημόρια τὸ μὲν 8 παριστάνει χιλιοστημόρια, τὸ δὲ 5 ἑκατοστημόρια, τὸ δὲ 4 δεκατημόρια, τὸ δὲ 3 μονάδας· καὶ περὶ ἄλλων τὰ αὐτά.

Ἐὰν λοιπὸν ἀμέσως πρὸς δεξιὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὁποιοῦδήποτε δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τῆς μονάδος τεθῇ ὑποδιαστολή, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς χωρίζεται εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς θέλει εἶσθαι τὸ ἀκέραιον μέρος, τὸ δὲ πρὸς δεξιὰν τὸ κλάσμα. Τούτου δὲ το πρῶτον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν παριστάνει δεκατημόρια, τὸ δεύ-

τερον εκατοστημόριον, τὸ τρίτον χιλιοστημόριον, τὸ τέταρτον δεκα-
χιλιοστημόριον, τὸ πέμπτον εκατοχιλιοστημόριον, καὶ οὕτω κα-
θεξῆς. Οὕτω δε προσδιορίζεται δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς θέσις
τις δι' ἑκαττον ἀριθμὸν δεκαδικῶν μονάδων, ὡς εἶναι προσδιο-
ρισμένη διὰ τὰς δεκάδας, εκατοντάδας κτλ.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ὁ 28 δεκατημόριον γράφεται 2,8, ὃ ὅτι
τὰ δεκατημόρια πρέπει νὰ ἔχωσιν ἐν ψηφίον δεξιὰ τῆς ὑποδια-
στολῆς· ἀπαγγέλλεται δε ἡ 28 δεκατημόριον, ὡς εἶς ἀριθμὸς, ἡ
δύο μονάδες καὶ 8 δεκατημόριον ὡς μικτός. Ὁ 498 εκατοστη-
μόριον γράφεται 4,98, διότι τὰ εκατοστημόρια πρέπει νὰ ἔχωσι
δύο ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς· ἀπαγγέλλεται δε ἡ 498
εκατοστημόριον, ἡ 4 μονάδες καὶ 98 εκατοστημόριον. Ὁ 21789
χιλιοστημόριον γράφεται 21,789, καὶ ἀπαγγέλλεται 24789
χιλιοστημόριον, ἡ 21 μονάδες καὶ 789 χιλιοστημόριον.

β'. Τῶν δε δεκτικῶν κλασμάτων, ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν
κλασματικῶν μονάδων ἔχη τόσα ψηφία, ὅσα πρέπει νὰ ὑπάρ-
χωσι δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου
γράφεται ἡ ὑποδιαστολή καὶ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς 0, τὸ
ὁποῖον δεικνύει ὅτι δὲν ἔχει ἀκεραῖας μονάδας ὁ ἀριθμὸς, οἷον 6
δεκατημόριον γράφονται 0,6, 75 εκατοστημόρια γράφονται
0,75 κτλ. Ἐὰν δε ὁ ἀριθμὸς τῶν κλασματικῶν μονάδων ἔχη
ὀλιγώτερα τοῦ δέοντος ψηφία, τότε τίθενται πρῶτον ἀριστερὰ
τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσα μηδενικὰ ἀπαι-
τοῦνται, καὶ ἔπειτα τίθεται ἀριστερὰ ἡ ὑποδιαστολή καὶ τὸ 0.
οἷον 9 χιλιοστημόριον πρέπει νὰ γραφθῇ οὕτω 0,009, διότι
τὰ χιλιοστημόρια πρέπει νὰ ἔχωσι τὴν τρίτην θέσιν δεξιὰ τῆς
ὑποδιαστολῆς, τὰ δε 9 χιλιοστημόρια γράφονται μὲ ἐν ψηφίον,
λοιπὸν πρέπει νὰ τεθῶσι 00 ἀριστερὰ τοῦ 9, καὶ ἔπει αὐτὸ 0·
διὰ νὰ ἔχη τὸ 9 τὴν τρίτην θέσιν δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς· τὰ
38 χιλιοστημόρια πρέπει διὰ τὸν αὐτὸν λόγον νὰ γραφθῶσιν
οὕτω 0,038· τὰ 76 εκατομμυριοστημόρια γράφονται οὕτω
0,000076.

Ἐδῶ εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐνδιατρίψωσιν ὀλίγον οἱ ἀρχάριοι, ἕως νὰ γυμναθῶσι καλὰ νὰ γράψωσιν ἀμέσως καὶ ἀλανθίστως πᾶν α δεκαδικὸν ἀριθμὸν. Ἰδὲ καὶ τινὰ παραδείγματα πρὸς εὐκολίαν, ὅπου βλέπει τις ὅτι ἄλλοτε μὲν ἀπαγγέλλεται ὁ δεκαδικὸς ὡς εἰς ἀριθμὸς, ἄλλοτε δὲ ὡς μικτὸς ἀριθμὸς, καὶ τότε εἶναι δυσκολώτερον ἐνίοτε νὰ γράψῃ τις τὸν ἀριθμὸν.

528 δεκατημόρια ἢ 52 μονάδες καὶ 8 δεκατημόρια γράφεται $\frac{528}{10}$ ἢ 52 $\frac{8}{10}$ ἢ 52, 8 — 4789 ἑκατοστημόρια ἢ 47 μονάδες καὶ 89 ἑκατοστημ. γράφεται $\frac{4789}{100}$ ἢ 47 $\frac{89}{100}$ ἢ 47,89 — 12032 χιλιοστημόρια ἢ 12 $\frac{32}{100}$ χιλιοστημ. γράφεται $\frac{12032}{100}$ ἢ 12 $\frac{32}{100}$ ἢ 12,032 — 30004 δεκαχιλιοστημ. ἢ 3 μονάδ. καὶ 4 δεκαχιλιοστημ. γράφεται $\frac{30004}{10000}$ ἢ 3 $\frac{4}{10000}$ ἢ 3,0004 — 94 χιλιοστημόρια γράφεται $\frac{94}{1000}$ ἢ 0,094 — 48 ἑκατοχιλιοστημόρια γράφεται $\frac{48}{100000}$ ἢ 0,00048.

Σημ. Ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τόσα εἶναι καὶ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὰ ψηφία.

179. Ἄν καὶ εἶναι φανερόν ἐκ τῶν προειρημένων πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς, μολοντοῦτο λέγομεν πάλιν ὅτι ἡ ἀπαγγέλλεται ὅλος ὡς ἀκέραιος καὶ εἰς τὸ τέλος λέγεται τὸ ὄνομα τῆς μικροτάτης δεκαδικῆς μονάδος ἥτοι τῆς δεξιάς, ἥτις προδιρίζεται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ δεξιοῦ ψηφίου, οἷον ὁ 4,783 ἀπαγγέλλεται 4783 χιλιοστημόρια, ὁ 0,6432 ἀπαγγέλλεται 6432 δεκαχιλιοστημόρια, ὁ 0,0034, 34 δεκαχιλιοστημόρια, ὁ 0,460, 460 χιλιοστημόρια, κτλ. ἡ ἀπαγγέλλεται ὡς μικτὸς ὁ ἔχων καὶ μονάδας ἀκεραίας, οἷον ὁ 54,3024 ἀπαγγέλλεται 54 μονάδες καὶ 3024 δεκαχιλιοστημόρια.

Σημ. Ἦθελεν εἶσθαι ἀπλοῦστερον καὶ συμφωνότερον μὲ τὴν ἀπαγγελίαν τῶν ἀκεραίων, ἂν τῶν δεκαδικῶν κλάσματων, τῶν πολλὰ ψηφία ἔχόντων, ἀπαγγέλλοντο τὰ ψηφία ἀνὰ τρία συναπαγγελλόμενοι εἰς τὸ τέλος τῶν τριῶν ψηφίων τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τοῦ τρίτου, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ κλάσματος ἀπαγγελλομένου τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τοῦ τρίτου ἢ τοῦ

δευτέρου ἢ τοῦ πρώτου, ἂν τύχη νὰ ᾖναι δύο ἢ ἐν. Τὸ 0,5643805428 εἰμπορεῖ νὰ ἀπαγγελθῇ οὕτως, 564 χιλιοστημόρια 380 ἑκατομμυριοστημόρια 542 διλιονιστημόρια 8 δεκαδιλιονιστημόρια.

180. Ὅσα μηδενικὰ καὶ ἂν τεθῶσιν εἰς τὰ δεξιά δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, δὲν τοῦ ἀλλάσσουσι τὴν δύναμιν. Ἐὰν δεξιά τοῦ 26,745 τεθῶσι 0 ἢ 00 ἢ 000 κτλ, γίνεται 26,7450, 26,74500, 26,745000 κτλ, ὅλοι δὲ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ σημαντικὸν ψηφίον εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς παριστάνει ἀριθμὸν τῶν αὐτῶν μονάδων, ἔχουν τὸ 2 εἰς ὅλους παριστάνει δεκάδας, τὸ 6 εἰς ὅλους παριστάνει μονάδας, τὸ 7 εἰς ὅλους δεκατημόρια κτλ. Λοιπὸν ὡς συγκεῖμενοι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἐκ τῶν αὐτῶν μερικωτέρων εἶναι ἰσοδύναμοι. Τὰ δὲ θεμένα εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ καθ' αὐτὰ δὲν προσθέτουσι τίποτε.

Ἡ μόνη μεταβολή, τὴν ὁποίαν ἐπιφέρουσι τὰ μηδενικὰ, εἶναι ἡ τροπὴ τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ εἰς δεκαχιλιοστημόρια, εἰς ἑκατοχιλιοστημόρια, εἰς ἑκατομμυριοστημόρια κτλ, ἀλλ' εἰς ἰσοδύναμα πάντοτε μὲ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τῶν χιλιοστημορίων, ἐνῶ εἰς τὸ τέλος τῶν ἀκεραίων τιθέμενα μεταβάλλουσι τὴν θέσιν τῶν ψηφίων, καὶ ἐπομένως τὰς μονάδας.

181. Τοῦτο δὲ γνωρίζοντες, τρέπομεν τοὺς ἑτερονύμους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους εὐκολώτατα. Οἱ ἑτερονύμιοι 5,48, 25,023, 2,49538 τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, ἐὰν δεξιά τοῦ πρώτου τεθῶσι 000, καὶ δεξιά τοῦ δευτέρου τεθῶσι 00, ὥστε νὰ ἔχωσιν ὅλοι πέντε ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ γίνονται 5,48000, 25,02300, 2,49538. Οὗτοι δὲ εἶναι ἰσοδύναμοι κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, καὶ ὁμωνύμοι, διότι ὅλοι, ἔχοντες πέντε ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, παριστάνουσιν ἑκατοχιλιοστημόρια ἥτοι ἔχουσι παρονομαστὴν 100000.

Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.

182. *Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.* Αἱ δύο αὗται πράξεις ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, ἤγουν γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἰς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ ᾔναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἔπειτα προσθέτονται ἢ ἀφαιροῦνται αἱ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μονάδες, γενομένης ἀρχῆς ἐκ δεξιῶν κτλ, ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Πρέπει δὲ νὰ προσέχη τις νὰ θέτῃ πάντοτε εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰξὺ τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκατημορίων.

Παραδείγματα.

24,782		679,38
578,40032		84,250
6,0598		352,78043
53,698		28,549382
5,32		12,05
668,26012		1157,009832
643,5493	65,043	ἢ οὕτως 65,04300
28,6352	38,59624	38,59624
614,9141	26,44676	26,44676

183. Ἐκ τοῦ τελευταίου παραδείγματος βλέπει τις ὅτι, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος ἔχῃ ὀλιγώτερα ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς παρὰ τὸν ἀφαιρέτην, τότε ἡ θέτονται δεξιά του τόσα μηδενικά, ὥστε νὰ γείνη ὁμώνυμος μετὰ τὸν ἀφαιρέτην, καὶ ἔπειτα γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ἢ καὶ χωρὶς νὰ τεθῶσιν αὐτὰ, ἀφαιρεῖται τὸ δεξιὸν ψηφίον τοῦ ἀφαιρέτου ἀπὸ 10 καὶ τὰ ἄλλα ἀπὸ 9 ἕως εἰς τὸ δεξιὸν ψηφίον τοῦ ἀφαιρέτου, τὸ ὁποῖον νοεῖται ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα κτλ. Ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι φανερός.

Ἐὰν δὲ ὁ ἀφαιρέτέος ἔχῃ πλείονερα ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, τότε καταιβάζονται τὰ δεξιά αὐτοῦ εἰς τὴν θέσιν τοῦ υπολοίπου, ἕως εἰς τὸ κείμενον ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ψηφίου τοῦ ἀφαι-

ρέτου, καὶ ἐκείθεν ἀρχίζει ἡ ἀραίρεσις. Καὶ τοῦτου ὁ λόγος εἶναι φανερός.

Παράδειγμα.

542,89132

24,732

518,16232

184. Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως. Πρῶτον δεκαδικῶς ἀξιωματικῶς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, ἔνν μετατεθεῖται ἡ ἑκατομμύριος πρὸς δεξιάν ἢ ὑποδιαστολὴν, ἐπὶ 100, ἔνν μετατεθεῖται ἡ δύο θέσεις, ἐπὶ 1000, ἔνν τρεῖς, καὶ οὕτω καὶ ἑξῆς. Π. γ. ὁ 54,6852 γίνεσθαι 546,852, ἀποῦ μετατεθεῖται ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς δεξιάν· ὁ δὲ 546,852 εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 54,6852. Διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων καὶ τῶν δύο εἶναι ὁ αὐτὸς ἥτοι 546852, αἱ δὲ μονάδες τοῦ μὲν 54,6852 εἶναι δεκαχιλιοστημόρια, τοῦ δὲ 546,852 εἶναι χιλιοστημόρια, τὰ ὅποια εἶναι δεκαπλάσια τῶν δεκαχιλιοστημορίων· διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 546,852 εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 54,6852.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ἂν μετατεθεῖται ἡ ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις πρὸς δεξιάν, ὁ ἀριθμὸς 5468,52 εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ 54,6852, ἂν μετατεθεῖται τρεῖς θέσεις, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 1000, καὶ οὕτω καθεξῆς. Διότι οὕτως ἑκατονταπλασιάζονται ἢ χιλιοπλασιάζονται καὶ αἱ μονάδες του, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν μένει ὁ αὐτός.

Διαιρεῖται δὲ δεκαδικῶς κλασματικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, 100 καὶ αἰτιστρέφουσιν, ἔνν μετατεθεῖται ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν, δύο, τρεῖς καὶ θέσεις πρὸς ἀριστεράν. Τοῦτο εἶναι φανερόν ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων. Ἄλλως ἀποδεικνύεται ὡς ἑνωτέρω.

Σημ. Παρατηρεῖται δὲ ὅτι καὶ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 10, 100 καὶ ἔνν τριπλάσιος, ἑκατοστημόρια καὶ διὰ τῆς ἀρραδιας θέσεως ὑποδιαστολῆς.

185. Δεκαδικῶς δὲ καὶ σματικῶς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἐν ἀκέραιον ἢ ἐν ἄλλων δεκαδικῶν, καὶ ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ δεκαδικῶν, ὡς ἂν ἦσαν καὶ οἱ δύο

ἀριθμοὶ ἀκέραιοι· ἀλλ' εἰς τὸ οὕτως εὐρισκόμενον γινόμενον τίθεται ὑποδιαστολή εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ᾔῃαι δεξιὰ αὐτῆς τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ εἰς τοὺς δύο ὁμοῦ.

Παραδείγματα.

57,389	6,752	695
25	8,24	3,24
286945	27008	2780
114778	13504	1390
1434,725	54016	2085
	55,63648	2251,80

Τοῦ πρώτου παραδείγματος ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος 25, καὶ πρόκειται νὰ εἰκοσιπενταπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 57,389, ἥτοι τὰ 57389 χιλιοστημόρια. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι χιλιοστημόρια, διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι χιλιοστημόρια· ὅθεν πρέπει εἰς τὸ γινόμενον νὰ τεθῇ ὑποδιαστολή οὕτως, ὥστε νὰ μείνωσι δεξιὰ αὐτῆς τρία ψηφία, ὅσα ἔχει καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Τοῦ δευτέρου παραδείγματος ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 824 ἑκατοστημόρια, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τῶν 824 μονάδων. Ἀφοῦ λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 6752 χιλιοστημόρια ἐπὶ 824 μονάδας, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, τὸ εὐρεθὲν γινόμενον 5563,648 θέλει εἶσθαι ἑκατονταπλάσιον τοῦ ζητούμενου γινομένου, διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς 824 μονάδες εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ ἀληθοῦς πολλαπλασιαστοῦ 824 ἑκατοστημόρια (107). Τὸ ἀληθὲς λοιπὸν γινόμενον εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 5563,648, ἥτοι ὁ 55,63648 (184), ὁ εὐρεθεὶς ἀνωτέρω κατὰ τὸν κανόνα.

Καὶ εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 324 ἑκατοστημόρια, τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει εἶσθαι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ γινομένου τοῦ 695 ἐπὶ 324 μονάδας· διὰ

τοῦτο εἰς τὸ γινόμενον τούτων πρέπει νὰ χωριθῶσι δύο ψηφία διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Ὡστε καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος πρέπει νὰ γείνη κατὰ τὸν κανόνα.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ νὰ πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ εὐρεθῶσι γινόμενα.

4,0567	ἐπὶ 9,503	παράγει 38,5508201
6,63	ἐπὶ 0,235	παράγει 1,55805
0,274	ἐπὶ 0,08	παράγει 0,02192
0,0056	ἐπὶ 0,00024	παράγει 0,000001344

Παρατηρητέον δὲ περὶ τοῦ τελευταίου ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 56 ἐπὶ 24 εἶναι 1344· καὶ ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ ἔχῃ ἐννέα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀνάγκη ἀριστερὰ τοῦ 1344 νὰ θεθῶσι 00000 καὶ ἔπειτα τὸ 0,.

Ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων καταλαμβάνει τις πῶς πρέπει νὰ ἐκτελῇται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ὅταν ὁ εἰς τῶν παραγόντων ᾖ κλασματικὸς ἢ ἄλλος ἀριθμὸς.

186. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν διακρίνομεν τέσσαρας περιπτώσεις, ἡγουν δεκαδικὸς διαιρετέος νὰ διαιρεθῇ ἀ. δι' ἀκεραίου διαιρέτου, β'. διὰ δεκαδικοῦ διαιρέτου ὅστις νὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν παρὰ τὸν διαιρετέον, γ'. διὰ δεκαδικοῦ διαιρέτου ὅστις νὰ ἔχῃ ἰσάριθμα μὲ τὸν διαιρετέον ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, δ'. διὰ δεκαδικοῦ διαιρέτου ἔχοντος πλείονερα τοῦ διαιρετέου ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

α. Ἄς διαιρεθῇ ὁ 1499,264 διὰ 64, ἡγουν ἄς εὐρεθῇ τὸ 64ον τοῦ 1499,264. Τοῦτο εὐρίσκεται κατὰ τοὺς κανόνας τῶν ἀρ. 91 καὶ 96, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Ἰδοὺ ἡ πράξις.

$$\begin{array}{r}
 1499,264 \quad | \quad 64 \\
 \underline{219} \\
 27,2 \\
 \underline{1,66} \\
 0,384 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

Ε'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 444,00378 διὰ 12,54. Πρῶτον μετατίθεται πρὸς δεξιὰν ἡ ὑποδιαστολή καὶ εἰς τοὺς δύο τόσας θέσεις, ὥστε νὰ γείνη ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, ἤγουν δύο θέσεις ἐδῶ, καὶ γίνονται ὁ μὲν, 44400,378, ὁ δὲ, 1254· τῶρα διαιρεῖται ὁ 44400,378 διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου 1254 ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, καὶ τὸ πηλίκον τούτων 35,407 εἶναι τὸ ζητούμενον. Διότι καὶ ὁ 44400,378 εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ δεδομένου διαιρετέου, καὶ ὁ 1254 εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ δεδομένου διαιρέτου, τὸ δὲ πηλίκον τῶν ἑκατονταπλασίων δύο ἀριθμῶν εἶναι καὶ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν (107).

Οὕτως, ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ ὁ 55,63648 διὰ 8,24, διαιρεῖται ὁ 5563,648 διὰ 824, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 6,752.

Γ'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 1499,264 διὰ 23,426. Μετατίθεται καὶ εἰς τοὺς δύο πρὸς δεξιὰν ἡ ὑποδιαστολή τρεῖς θέσεις, ὥστε νὰ τραπῶσι καὶ οἱ δύο εἰς ἀκεραίους 1499264 καὶ 23426, καὶ ἔπειτα διαιροῦνται οὗτοι οἱ ἀκέραιοι καὶ εὐρίσκεται πηλίκον 64 μονάδες. Τοῦτο δὲ εἶναι καὶ πηλίκον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· διότι καὶ ὁ 1499264 εἶναι χιλιοπλάσιος τοῦ 1499,264, καὶ ὁ 23426 τοῦ 23,426, τὸ δὲ πηλίκον τῶν χιλιοπλασίων εἶναι καὶ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν 1499,264 καὶ 23,426.

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ 138,552 διὰ τοῦ 5,773, διαιρεῖται ὁ 138552 διὰ 5773, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 24.

Δ'. Ἀς διαιρεθῇ ὁ 43,047 διὰ τοῦ 2,53698. Ἐδῶ τίθεται πρῶτον 00 δεξιὰ τοῦ διαιρετέου (τὰ ὅποια δὲν τὸν μεταβάλλουσιν), ὥστε νὰ ἔχῃ καὶ ὁ διαιρετέος δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἰσάριθμα ψήγια μὲ τὸν διαιρέτην· ἔπειτα διαιρεῖται ὁ 43,04700 διὰ τοῦ 2,53698 ὡς εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν, ἤγουν διαιρεῖται ὁ 4304700 διὰ 253698, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 17 σχεδόν.

187. Καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς διὰ δεκαδικοῦ διαιρεῖται κατὰ

τοῦτον τὸν τρόπον. Ἄς διαιρεθῇ ὁ 526 διὰ 37,65. Πρῶτον τίθενται 00 δεξιά τοῦ 526 καὶ γίνεται 526,00· ἔπειτα διαιρεῖται ὁ 526,00 διὰ τοῦ 37,65 ὡς εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν, ἡγουν διαιρεῖται ὁ 52600 διὰ τοῦ 3765, καὶ τὸ πηλίκον των $12\frac{3}{3}\frac{6}{7}\frac{5}{5}$ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 526 διὰ τοῦ 37,65.

Σημ. Δὲν λέγομεν τίποτε περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἢ κλασματικῶν καὶ μικτῶν διὰ δεκαδικῶν, ἢ ἀντιστρόφως δεκαδικῶν διὰ κλασματικῶν καὶ μικτῶν, διότι ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων εὐκόλως εὐρίσκει τις πῶς ἐκτελοῦνται τοιαῦται πράξεις ἐπὶ τοιούτων ἀριθμῶν.

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν.

188. Ἐδῶ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ κλάσμα δεκαδικὸν ἰσοδύναμον μὲ κλάσμα κοινὸν δεδομένον. Οἱ δὲ πρὸς εὔρεσιν αὐτοῦ συλλογισμοὶ καὶ αἱ πράξεις εἶναι κατὰ πάντα ὅμοια μὲ τὰ ἐν ἀριθ. 163 ἐκτεθέντα. Ἄς τραπῇ π. χ. τὸ $\frac{5}{8}$ εἰς δεκαδικὸν ἰσοδύναμον κλάσμα, ἥτοι ἃς εὑρεθῇ δεκαδικὸν κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$.

Τὸ $\frac{5}{8}$ τῆς μονάδος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ 8^{ον} τῶν 5 μονάδων· καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶναι ἀκέραιον τὸ 8^{ον} τῶν 5, τρέπομεν τὰς 5 μονάδας εἰς 50 δεκατημόρια, τῶν ὁποίων τὸ 8^{ον} εἶναι 6 δεκατημόρια, καὶ μένουσι 2 ἥτοι 20 ἑκατοστημόρια· τούτων δὲ τὸ 8^{ον} εἶναι 2, καὶ μένουσι 4 ἑκατοστημόρια ἥτοι 40 χιλιοστημόρια, τῶν ὁποίων τὸ 8^{ον} εἶναι 5 χιλιοστημόρια σωστά.

Ὥστε τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς μονάδος ἰσοδυναμοῦσι μὲ 6 δεκατημόρια καὶ 2 ἑκατοστημόρια καὶ 5 χιλιοστημόρια, ἥτοι μὲ 0,625.

Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι, διὰ νὰ τραπῇ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, ἀφοῦ γραφθῶσι δεξιά τοῦ ἀριθμητοῦ ὁ παρονομαστής, αἱ ἀναγκαῖαι γραμμαὶ ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν, καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου τὸ 0, πρέπει νὰ τίθηται 0 δεξιά τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον θέλει παριστάνει δεκατημόρια, τὰ ὅποια γράφονται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιά τοῦ 0, , εἰς

δὲ τὸ κατάλοιπον πρέπει νὰ τίθεται 0 καὶ πάλιν νὰ διαιρῇ-
ται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ μὲν πηλίκον θέλει παρι-
στάνει ἑκατοστημόρια, τὰ ὅποια γράφονται δεξιὰ τῶν δεκα-
τημορίων, εἰς δὲ τὸ κατάλοιπον πρέπει νὰ τίθεται 0, νὰ
διαιρῇται πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ πηλίκον νὰ
γραφθῇ δεξιὰ τῶν ἑκατοστημορίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἰδοὺ ὁ τύπος εἰς τινὰ παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} \text{Τὸ ἀνωτέρω } \frac{5}{8} \text{ ἐτρέπη εἰς } 0,625 \\ 50 \overline{) 8} \\ 20 \overline{) 0,625} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Τὰ } \frac{13}{25} \text{ τρέπονται οὕτως εἰς } 0,52. \\ 130 \overline{) 25} \\ 50 \overline{) 0,52} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Τὰ } \frac{11}{40} \text{ τρέπονται εἰς } 0,275 \\ 110 \overline{) 40} \\ 300 \overline{) 0,275} \\ 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Τὰ } \frac{6}{7} \text{ τρέπονται εἰς } 0,85714285 \dots \\ 60 \overline{) 7} \\ 40 \overline{) 0,8571428\dots} \end{array}$$

Καὶ τὰ μὲν πρῶτα τρέπονται εἰς ἰσο-
δύναμα δεκαδικὰ, διότι μετὰ τινὰς διαιρέ-
σεις εὐρέθη διαιρετέος διαιρέσιμος διὰ
τοῦ παρονομαστοῦ. Τοῦ δὲ τελευταίου $\frac{6}{7}$
δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὐρεθῇ ἰσοδύναμον
δεκαδικόν, διότι, ὅσον καὶ ἂν προαχθῇ ἡ
πρᾶξις, δὲν θέλει εὐρεθῇ διαιρετέος ἄλλος
παρὰ τοὺς 60, 40, 50, 10, 30, 20, τῶν ὁποίων κανεὶς δὲν εἶναι
διαρέσιμος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7.

189. Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, ὡς καὶ εἰς πᾶν ἄλλο τοιοῦ-
τον, κρατοῦνται ὀλίγα τινὰ ψηφία ἐκ τῶν ἀριστερῶν, ὅσα θέλῃ τις,
καὶ τᾶλλα παραιτοῦνται. Ἀλλὰ τότε δῆλον ὅτι τὸ δεκαδικόν
τοῦτο κλάσμα δὲν θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν κοινόν,

ἀλλὰ μικρότερον, κατὰ ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος τοῦ τελευταίου δεξιοῦ ψηφίου τῶν ὅσα κρατοῦνται, διότι τὸ παραιτούμενον μέρος εἶναι ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος τοῦ τελευταίου δεξιοῦ ψηφίου τῶν κρατουμένων. Ἐὰν τοῦ ἀνωτέρω κρατήσωμεν τὰ δύο μόνον, ἤγουν τὸ 0,85, καὶ παραιτήσωμεν τὰ λοιπὰ, τὸ 0,85 εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{6}{7}$ κατὰ ὀλιγώτερον ἐνὸς ἑκατοστημορίου, διότι τὸ παραιτούμενον 0,007142 . . . εἶναι μικρότερον ἐνὸς ἑκατοστημορίου. Ἐὰν δὲ κρατήσωμεν τὰ τρία, ἤγουν τὸ 0,857, τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{6}{7}$ κατ' ὀλιγώτερον ἐνὸς χιλιοστημορίου.

Εἰς τὸ ἐξῆς αὐτὴ νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ 0,85 εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{6}{7}$ κατ' ὀλιγώτερον ἐνὸς ἑκατοστημορίου, θέλομεν λέγει συντομώτερα, ἂν καὶ ὄχι ἀκριβῶς, ὅτι τὸ 0,85 εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{6}{7}$ μείον ἑκατοστημορίου, ἢ οὕτω, μείον 0,01. Ὡσαύτως τὸ 0,857 εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{6}{7}$ μείον χιλιοστημορίου ἢ μείον 0,001. Τὸ 0,8571 εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{6}{7}$ μείον 0,0001.

Ἄς τραπῇ τὸ $\frac{5}{9}$ εἰς δεκαδικὸν μείον 0,001, σημαίνει ἅς τραπῇ τὸ $\frac{5}{9}$ εἰς δεκαδικὸν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τρία ψηφία δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ εὐρίσκεται ἴσον μὲ 0,555 μείον 0,001. Τὸ $\frac{14}{15}$ μείον 0,00001 εἶναι ἴσον μὲ 0,93333.

Σημ. Εἰνότε, ὅταν τὸ πρῶτον τῶν παραιτουμένων ψηφίων ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ 5, αὐξάνουσι κατὰ μονάδα τὸ τελευταῖον τῶν κρατουμένων ψηφίων, καὶ τότε τὸ κρατούμενον δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κοινοῦ κλάσματος· διότι ἐνῷ τὸ παραιτούμενον μέρος ὅλον εἶναι μικρότερον μιᾶς μονάδος τοῦ δεξιοῦ ψηφίου τῶν κρατουμένων, προστίθεται εἰς τοῦτο μία μονάς, ἤγουν κατὰ περισσότερον παρ' ὅ,τι ἔπρεπεν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀντὶ τοῦ 0,85 μεταχειρίζονται τὸ 0,86, διότι τὸ πρῶτον ψηφίον τῶν παραιτουμένων εἶναι 7· τὸ δὲ 0,86 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{6}{7}$, διότι τὸ παραιτούμενον 0,007142 . . . εἶναι μικρότερον ἐνὸς ἑκατοστημορίου, εἰς δὲ τὸ 0,85 προστίθεται ἐν ἑκατοστημόριον, ἤγουν κατὰ περισσότερον τοῦ δέοντος. Τὸ δὲ 0,86 διαφέρει τοῦ $\frac{6}{7}$ ὀλιγώτερον παρὰ τὸ 0,85, καὶ διὰ τοῦτο προτιμᾶται ἢ χρῆσις αὐτοῦ καὶ ὄχι ἢ τοῦ 0,85.

190. Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα συνηθέστατα ἔχομεν χρειάν νὰ τρέπωμεν εἰς δεκαδικὰ, εἶναι μάλιστα τὰ μέλλοντα νὰ συμπληρῶνῃσι τὰ πηλίκον διαιρέσεως πολυψηφίων ἀριθμῶν, ὡς

συμβαίνει εἰς τοὺς δεκαδικοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς. Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ ὁ 43,047 διὰ 2,53698, κατὰ τὰ ἀνωτέρω [186, δ'] πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 4304700 διὰ 253698, καὶ εὐρίσκεται πηλίκον $16 \frac{2455320}{253698}$. Τοῦτο δὲ τὸ κλάσμα τρέπεται ἔπειτα εἰς δεκαδικὸν μείον 0,001, ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ τότε τὸ πηλίκον εἶναι 16,967 μείον 0,001. Ἰδοὺ ἡ πράξις ὅλη.

$$\begin{array}{r} 4304700 \overline{) 253698} \\ 1767720 \overline{) 16,967} \\ 2455320 \\ 1720380 \\ 1981920 \\ 206034 \end{array}$$

Ὡσαύτως εὐρίσκεται πηλίκον τοῦ 3,4703 διὰ 0,027 μείον 0,0001 ὁ 128,5296· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 0,0596 διὰ 0,00201 μείον 0,01 εἶναι 296,51.

Δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν.

191. Τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1836 ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις διέταξε νὰ εἰσαχθῶσι βαθυμετρῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ νὰ ᾔναι εἰς χρῆσιν αἱ ἐξῆς μονάδες.

Μονάδες μήκους. Πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς, *παλάμη*, δέκατον τοῦ πήχεως, *δάκτυλος*, δέκατον τῆς παλάμης, ἢ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως, *γραμμὴ*, δέκατον τοῦ δακτύλου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς παλάμης, ἢ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως. — *Στάδιον* ἴσον μὲ 1000 πῆχεις, *σχοινίς* ἴση μὲ 10 στάδια, ἢ μὲ 10000 πῆχεις.

Σημ. Ὁ πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ τὸ Γαλλικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι δεκαεκατομμυριοστημόριον (0,0000001) τοῦ ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου μέχρι τοῦ ἰσημερινοῦ διαστήματος, λογισθέντος ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων. Το δὲ στάδιον καὶ ἡ schoinís εἶναι ὁδοπορικὰ μέτρα, ἥτοι δι' αὐτῶν μετροῦνται μέγала μήκη.

Εἰκοστὸν τοῦ πήχεως ἦτοι ἡμίσεια παλάμη.

Μονάδες ἐπιφανείας. *Τετραγωνικὸς πῆχυς*, ἀρχικὴ μονάς, *στρέμμα*, ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικοὺς πῆχεις.

Σημ. Ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τετράγωνον, τοῦ ἐκείνου ἢ πλευρὰ εἶναι

ἴση με ἓνα πῆχυν. Ἄν δὲ τὸ στρέμμα νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ τοῦ εἶναι ἴση με πῆχεις 31,62 μῆτρον 0,01.

Μονάδες στερεῶν καὶ ρευστῶν, ἥτοι ὄγκου καὶ χωρητικότητος. Λίτρα, ἀρχικὴ μονάς, κυβίλη, δεκάτον τῆς λίτρας, μύστρον, δέκατον τῆς κοτύλης, ἡ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας, κύβις, δέκατον τοῦ μύστρου, ἡ ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης, ἡ χελιστὸν τῆς λίτρας—Κοιλὸν, ἴσον με 100 λίτρας.

Σημ. Ἡ λίτρα εἶναι ὄγκος ἴσος με κυβικὴν παλῆμην, ἥτοι με κύβον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση με παλῆμην, ἡ ἄλλως εἶναι ὄγκος ἴσος με τὸ χελιστὸν τοῦ κυβικοῦ πῆχεως. (α). Τὸ δὲ κοιλὸν, χρῆσιμον διὰ τὰ γεννήματα, εἶναι ἴσον με τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πῆχεως.

Μονάδες βάρους. Δραχμὴ (δράμμιον), ὀβολὸς, δέκατον τῆς δραχ.—κόκκος, δέκατον τοῦ ὀβολοῦ, ἡ 100^{ον} τῆς δραχμῆς—Μνα, ἴση με 1500 δραχμᾶς (β), τάλαντον, ἴσον με 100 μνᾶς, τόκος, ἴσος με 10 τάλαντα ἢ με 1000 μνᾶς.

Σημ. Ἡ δραχμὴ εἶναι βάρος ὄγκου, ἴσου με ἓνα κυβικὸν δάκτυλον, καθαροῦ ὕδατος κατὰ τὴν μεγίστην αὐτοῦ πυκνότητά. Ἡ δραχμὴ, ὁ ὀβολὸς καὶ ὁ κόκκος εἶναι χρήσιμα εἰς τὸ ζυγίζειν πλῆτιστα πράγματα, ἡ μνα καὶ ἡ δραχμὴ δια τὰς συνήθειςπραγματείας, τὸ δὲ τάλαντον καὶ ὁ τόκος διὰ τὰ πολλὰ βαρέα.

Σημ. α. Εἰς τὴν Ἑλλάδα ὕλαι αὗται αἱ μονάδες λέγονται βασιλικαί.

Σημ. β. Τὸ δεκαδικὸν τοῦτο σύστημα τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον ἐνομάζεται μετρικόν, διότι θάσις αὐτοῦ εἶναι τὸ Γαλλικὸν μέτρον, ἔχει τρία προτερήματα. α. Ὅτι ὁ πῆχυς εἶναι ὠρισμένον πολλοστὸν σταθεροῦ καὶ ἀμεταβλήτου πράγματος, ὁποῖον εἶναι τὸ μεταξὺ τοῦ βορείου πόλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ διάστημα, λογισθὲν ἐπὶ ὠρισμένου μεσημβρινοῦ, καὶ ὅχι μῆκος ἀπλῶς καὶ ὡς ἐτυχεν διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν ν' ἀγνοῶσιν αἱ ἐπερχόμεναι γενεαὶ πόσον μῆκος εἶναι ὁ πῆχυς, ὡς ἡμεῖς περὶ τῶν ἀρχαίων μέτρων κτλ. β. Ὅτι ὕλαι αἱ λοιπαὶ ἀρχικαὶ μονάδες, οἷον ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς, ἡ λίτρα, ἡ δραχμὴ, εἶναι προσδιορισμέναι πρὸς τὸν πῆχυν καὶ πρὸς ἀλλήλας οὕτως, ὥστε, ὅταν μία ᾖναι γνωστὸν πόση εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐρίσκονται μ' εὐκολίαν. γ. Ὅτι αἱ ἄλλαι μονάδες ἐνδὸς ἑκάστου εἶδους ποσῶ ἔχουσι τὸν λόγον 10, (ἐκτὸς τῆς μνᾶς πρὸς τὴν δραχμὴν), καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἐπὶ ἀριθμῶν τοιούτων μονάδων πράξεις γίνονται εὐκολώτατα ὡς αἱ ἐπὶ τῶν ἀνεραίων, καθὼς εἶδαμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο, καὶ ὅχι ὡς αἱ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν, αἵτινες εἶναι δυσκολώτεραι.

(α). Κυβικὸς πῆχυς εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἥτοι ἡ κώχη εἶναι ἴση με πῆχυν.

(β). Ἐδῶ δὲν ἐφυλάχθη ἡ δεκαδικὴ σχέσις.

Ἄν δὲ ᾔθελον εἶσθαι καὶ αἱ μονάδες τῶν ἄλλων ποσῶν, οἷον τοῦ χρόνου κατὰ προσδιορισμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον τρόπον, καὶ ἔλαι ᾔθελον γείνει παραδεκταὶ παρὰ πᾶσιν ἀνθρώποις, ἢ ὠφέλεια ᾔθελον εἶσθαι ἀνεκτίμητος. Ἀλλὰ διὰ διαφόρους αἰτίας οὐδ' εἰς τὴν Γαλλίαν αὐτὴν εἶναι ἀκόμῃ εἰς γενικὴν χρῆσιν, πολὺ ἐλιγώτερον εἰς τὴν Ἑλλάδα.

192. Εἶναι εὐκλόων νὰ γράψῃ τις ἀριθμὸν τριούτων μονάδων, ἢ γραμμένον νὰ διακρίνῃ τὰς μονάδας. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 5στ 248πῆλ 6παλ καὶ 9δακ, γράφεται οὕτω 5248,69. Ὁ 25λίτ 7κόκ 8μύς καὶ 4κύθ οὕτως 25,784. Ὁ 6παλ 5μν 352δρ 4κύθλ 9κόκ οὕτως 605μν 352δρ,49.

Σημ. Μναῖ καὶ δραχμαὶ ὁμοῦ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ γραφθῶσιν ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς, διότι δὲν ἔχουσι δικαδικὴν σχέσιν, καὶ τοῦτο φέρει δυσκολίαν.

Ἀντιστρόφως, ὁ 35645,328 τοῦ πῆχεως εἶναι 35στ 645πῆλ 3παλ 2δακ 8γρ· καὶ περὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως.

193. Ὁ λόγος τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας, καὶ ὁ τῶν νέων πρὸς τὰς παλαιάς, κατὰ τὰ προμνημονευθὲν διὰ-ταγμα εἶναι οὗτος·

Ὁ βασ. πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ πῆχυν μικρὸν τῆς Κωνσταντινουπόλεως [ἐνδεξέ] 1,5432, καὶ ἀντιστρόφως, ὁ τῆς Κωνσταντινουπόλ. μικρὰς πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ 0,648 τοῦ βασ. πῆχεως.

Ὁ βασ. πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ μεγάλον πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως [ἄρσχιν] 1,495, ὁ δὲ ἄρσχιν ἴσος μὲ 0,669 τοῦ βασιλικοῦ.

Ὁ βασ. πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ 0,513 τῆς ὀργυιᾶς μείον 0,001, ἢ δε ὀργυιά εἶναι ἴση μὲ πῆχυν 1,949 μείον 0,001. [Ὁ λόγος τούτων εἶναι ἐκ Γαλλικῶν βιβλίων].

Ἡ βασ. μναῖ ἴση μὲ ὀκλὸν 1,1719, ἢ ἴση μὲ 468 $\frac{3}{4}$ παλαιὰ δράμια, ἢ δὲ ὀκλὰ ἴση μὲ 0,8533 τῆς μναῖς.

Ἡ βασ. λίτρα ἴση μὲ 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, τὸ δὲ παλαιὸν κοιλὸν ἴσον μὲ λίτρας 33,166.

Ὁ βασ. τετραγωνικὸς πῆχυς ἴσος μὲ τετραγωνικοὺς πῆχεις [ἐνδεξέ] 2,381.

Τὸ βασ. στρέμμα ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ Πελοποννη-

σιακού στρέμματος, ὡς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 55 πήχεις (ἐνδεξί), καὶ τὸ ὅποιον εἶναι ἴσον μὲ 3025 τοιούτους τετραγωνικοὺς πήχεις· τὸ δὲ παλαιὸν Ἡελοπονησιακὸν στρέμμα ἴσον μὲ βασιλ. στρέμμα 1,27.

194. Ταῦτα εἶναι χρήσιμα εἰς τὸ νὰ τρέπη τ.ς ἀριθμὸν παλαιῶν πήχεων εἰς ἀριθμὸν ἰσοδύναμον βασιλ. πήχεων καὶ τάνάπαλιν, ἀριθμὸν ὀκάδων εἰς ἀριθμὸν μνῶν καὶ τάνάπαλιν, κτλ. Π. γ. 4στ 28^{οκ} 50^{δρ} μὲ πόσας μνᾶς καὶ δραχμ. ἰσοδυναμοῦσι; Πρὸς εὐρεσιν τούτου, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς 204^{οκ} $\frac{400}{1000}$ ἥτοι 204^{οκ} $\frac{1}{8}$. Ἐπειτα, ἐπειδὴ 1^{οκ} ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,8533 τῆς μνᾶς, αἱ 204^{οκ} $\frac{1}{8}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 0,8533 ἐπὶ 204 $\frac{1}{8}$, ἥτοι μὲ μνᾶς 174,1798, ἢ 174,180 μείον 0,001· καὶ ἐπειδὴ 0,001 τῆς μνᾶς ἰσοδυναμεῖ μὲ 1 $\frac{1}{2}$ δραχμὴν, τὰ 0,180 ἰσοδυναμοῦσι μὲ 270 δραχμ. Λοιπὸν 4στ 28^{οκ} 50^{δρ} ἰσοδυναμοῦσι μὲ 174 μνᾶς καὶ 270^{δρ} ἢ μὲ 1^{οκ} 74 μνᾶς 270^{δρ}.

Ἀντιστρόφως, διὰ νὰ τραπῇ ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἰς στ. ὀκ. καὶ δρ, πρῶτον τρέπομεν τὰς 270^{δρ} εἰς χιλιοστημόρια, γνωρίζοντες ὅτι 1 $\frac{1}{2}$ δραχ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,001 τῆς μνᾶς, ἢ ὅτι 3^{δρ} ἰσοδυναμοῦσι μὲ 0,002· λοιπὸν αἱ 270^{δρ} ἰσοδυναμοῦσι μὲ 0,180 τῆς μνᾶς. Ἐπειτα, ἐπειδὴ 1 μνᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀκλὴν 1,1719, αἱ 174,180 ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1,1719 ἐπὶ 174,180, ἥτοι μὲ ὀκάδας 204,121 μείον 0,001. Ἐπειδὴ δὲ 1000 χιλιοστημόρια τῆς ὀκάς ἰσοδυναμοῦσι μὲ 400 δράμια, τὸ 1 χιλ. ἰσοδυναμεῖ $\frac{400}{1000}$ ἢ $\frac{2}{5}$ τοῦ δρ., καὶ 0,121 τῆς ὀκάς ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 121, ἥτοι μὲ 48 $\frac{1}{2}$ δράμια. Καὶ ἐπειδὴ αἱ 204^{οκ} ἰσοδυναμοῦσι μὲ 4στ 28^{οκ}, αἱ ὀκάδες 204,121 ἰσοδυναμοῦσι μὲ 4στ 28^{οκ} 48^{δρ} $\frac{1}{2}$, ὅστις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ 174 μν 270^{δρ} σχεδόν.

Σημ. α'. Δὲν εὐρέθησαν σωστά 50 δρ, διότι οἱ ἀριθμοὶ καὶ τῆς πρώτης πράξεως καὶ τῆς δευτέρας δὲν εἶναι ἀκριβεῖς.

Σημ. β'. Ὁ συμμιγῆς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς μνᾶς κτλ καὶ οὕτως· ὁ 4στ 28^{οκ} 50^{δρ} ἰσοδυναμεῖ μὲ 81650^{δρ}· ἀλλ' 1^{οκ} δρ ἰσοδυναμεῖ μὲ δραχ. 3,1995,

ἢ ἀπλούστερα μὲ 3,2 σχεδὸν λοιπὸν 81650 δρ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 3,2 ἐπὶ 81650 ἦτοι μὲ δραχ. 261280· αἵτινες διαιρούμεναι διὰ 1500 τρέπονται εἰς μνᾶς 174,187 μὲν 0,001, ἢ εἰς 174μν 280δραχ. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν 10 δραχ. προέρχεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω μνημονευθεισῶν αἰτιῶν.

Διὰ νὰ τραπῶσι δὲ οὕτως αἱ μναὶ κτλ εἰς ὀκάδας κτλ, ἀπαιτεῖται νὰ ἤξεύρῃ τις ὅτι 1 δραχ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,31 σχεδὸν τοῦ δραμιῦ.

Ἰδού καὶ τινα προβλήματα πρὸς γύμνασιν.

1. 54,235 τοῦ βας. πῆχεως μὲ πόσους μικροὺς πῆχεις καὶ ὄγδρα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦσιν;

2. 125 καὶ 7 ὄγδρα τοῦ μικροῦ πῆχεως (ἐνδεξὲς) μὲ πόσους βας. πῆχεις, παλάμας κτλ ἰσοδυναμοῦσιν;

3. Β. πῆχεις 35,648 μὲ πόσας ὀργυῖας, πόδας κτλ ἰσοδυναμοῦσιν;

4. 12 ὀργ. 5 πόδ. 9 δάκτ. μὲ πόσους ἥρασιλ. πῆχεις ἰσοδυναμοῦσιν;

5. 55 μναὶ 245 δραχ. μὲ πόσους στατήρας κτλ ἰσοδυναμοῦσιν;

6. 35 στατ. 12 ὀκάδ. 200 δραχ. μὲ πόσας μνᾶς κτλ ἰσοδυναμοῦσιν;

7. Β. λίτραι 945,384 μὲ πόσα παλαιὰ καὶ νέα καὶ ἐκείνα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦσιν;

8. 18 καὶ 9 εἰκοστά αὐτοῦ μὲ πόσας λίτρας κτλ ἰσοδυναμοῦσιν;

9. 12. βας. στρέμ. 28 τετραγωνικαὶ πῆχεις μὲ πόσα Πελοποννησιακὰ ἰσοδυναμοῦσιν;

10. 25 Π. στρέμματα μὲ πόσα βας. ἰσοδυναμοῦσιν;

11. Ὁ βας. πῆχυς ἰσοδυναμεῖ μὲ πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως μικρὸν 1,5432, οὗτος μὲ τί μέρος τοῦ βας. ἰσοδυναμεῖ;

12. Ἡ μναὶ εἶναι ἴση μὲ ὀκά, 1,1719, ἢ ὀκά μὲ τί μέρος τῆς μνᾶς ἰσοδυναμεῖ; Ἡ δὲ δραχμὴ μὲ τί μέρος τοῦ δραμιῦ εἶναι ἴση; Ἡ τὸ δράμιον μὲ πόσας δραχμάς ἰσοδυναμεῖ;

13. Τίς εἶναι ὁ λόγος τῆς παλαιᾶς γραμμῆς πρὸς τὴν νέαν, ἐνῶ μία ὀργυῖα ἰσοδυναμεῖ μὲ πῆχυν 1,949; Καὶ τίς ὁ λόγος τῆς νέας γραμμῆς πρὸς τὴν παλαιάν;

Προβλήματα νὰ λυθῶσι πολλὰ τῶν τοῦ ἀριθμ. 159, ἀρκεῖ τεθῶσιν ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ στοστήματος εἰς αὐτὰ, τὰ δ' ἐξαγόμενα νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς ἀριθμούς· εἴ τι δὲ τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν, ὅπως εἶναι ἐκεῖ, ἢ ἀρκεῖ τεθῶσι συμμιγεῖς ἀριθμοί, νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικούς ἀριθμούς.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Τί εἶναι τετράγωνον καὶ τετραγωνικὴ ρίζα.

195. Ὅποιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρῇται ὡς γινόμενον δύο ἴσων ἀριθμῶν, ἢ ἄλλως, γινόμενον ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, λέγεται *τετράγωνον* αὐτοῦ· κατὰ ταῦτα ὁ 9 εἶναι τετράγωνον τοῦ 3, ὁ 16 τετράγωνον τοῦ 4, ὁ 25 τετράγωνον τοῦ 5—ὁ $\frac{9}{25}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{5}$, ὁ $\frac{16}{9}$ τετράγωνον τοῦ $\frac{4}{3}$ κτλ. Ἀντιστρόφως δὲ ὁ 3 λέγεται *τετραγωνικὴ ρίζα* τοῦ 9, ὁ 4 τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 16, ὁ 5 τοῦ 25, ὁ $\frac{3}{5}$ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{9}{25}$, ὁ $\frac{4}{3}$ τοῦ $\frac{16}{9}$ κτλ.

Σημ. α'. Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, εἶναι τοιοῦτος πρὸς τὸν ἄλλον, ὅποιος εἶναι ὁ ἄλλος πρὸς τὴν μονάδα, οἷον ὁ 9 εἶναι τρις 3, ὡς ὁ 3 εἶναι τρις 1—16 εἶναι τετράκις 4, ὡς ὁ 4 εἶναι τετράκις 1—ὁ $\frac{9}{25}$ εἶναι τρις τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{3}{5}$, ὡς ὁ $\frac{3}{5}$ εἶναι τρις τὸ πέμπτον τῆς μονάδος, κτλ. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι τιαυτὴ πρὸς τὸ τετράγωνον, ὅποια εἶναι ἡ μονὰς πρὸς αὐτήν, οἷον ὡς ἡ 1 εἶναι τρίτον τοῦ 3, οὕτω καὶ ὁ 3 εἶναι τρίτον τοῦ 9, ὡς ἡ 1 εἶναι $\frac{5}{3}$ τοῦ $\frac{3}{5}$, οὕτω καὶ ὁ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{5}{3}$ τοῦ $\frac{9}{25}$.

Σημ. β'. Τὸ ὄνομα *τετράγωνον* εἶναι ἐκ τῆς γεωμετρίας· ὁ δὲ ἄλλος ὀνομάσθη *ρίζα*, διότι ἐθεωρήθη ὡς ἀριθμὸς, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀναφύεται τὸ τετράγωνον.

196. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἰμποροῦν νὰ ᾔναι τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν, διότι δὲν εἰμποροῦν νὰ γίνωνται ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν, ὡς οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς μονάδος, ἢ ἄλλως, δὲν ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἐφ' ἑαυτοὺς νὰ παράγwsιν ἐκεῖνους. Π. χ. ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ τῆς 1 καὶ τοῦ 100 μόνον οὗτοι 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 εἶναι τετράγωνα τῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, καὶ ἔχουσι τετραγωνικὰς ρίζας τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς, ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι δὲν εἶναι τετράγωνα οὔτε ἀκεραίων οὔτε κλασματικῶν ἀριθμῶν, ὡς θέλει ἀποδειχθῇ ἄλλου. Μολοντοῦτο συχνότατα

ἐκλαμβάνουσι καὶ αὐτοὺς ὡς τετράγωνα, ἀλλὰ πρὸς διάκρισιν τοὺς ὀνομάζουσιν ἀτελῆ τετράγωνα, καὶ θεωροῦσιν ὡς τετραγωνικάς ῥίζας αὐτῶν ἄλλους ἀριθμούς, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἐφ' ἑαυτοὺς παράγουσιν ὅχι τοὺς θεωρουμένους ὡς τετράγωνα ἀτελῆ, ἀλλ' ἄλλους μικροτέρους αὐτῶν, καὶ ὅσον θέλῃ τις μικροτέρους· τὰς ῥίζας δὲ ταύτας ὀνομάζουσιν προσεγγιζούσας τετραγωνικάς ῥίζας τῶν ἀτελῶν τετραγώνων. Ὡστε ὅλων τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι τετράγωνοι ἄλλων, οἱ δὲ εἶναι ἀτελεῖς τετράγωνοι ἄλλων· αἱ δὲ ῥίζαι εἶναι ἢ σωταὶ ἢ προσεγγιζούσαι.

Σημ. Ἡ μονάς εἶναι τετράγωνον τῆς μονάδος, καὶ πάλιν ἡ μονάς εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς μονάδος.

197. Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ὁποιοῦδήποτε εὐρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὸν, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ ὁποιοῦδήποτε οὔτε διὰ διαιρέσεως εὐρίσκεται, διότι αὕτη ἀπαιτεῖ δύο γνωστοὺς ἀριθμούς, ἐνῶ ἐδῶ εἶναι εἷς μόνος, οὔτε διὰ τίνος τῶν τριῶν ἄλλων, ἀλλὰ διὰ πέμπτης ἄλλης πράξεως, ἣτις ὀνομάζεται ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ῥίζης, περὶ τῆς ὁποίας ἐδῶ λέγομεν ὀλίγα τινά.

Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυψηφίων

καὶ κλασματικῶν τετραγώνων.

198. α. Ἄς ἐξαχθῇ πρῶτον ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τριψηφίου ἢ τετραψηφίου ἀκεραίου τετραγώνου, οἷον τοῦ 529.

Γράφομεν πρῶτον δύο γραμμάς δεξιὰ τοῦ 529, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν, ἡ δὲ θέσις τοῦ διαιρέτου ἐδῶ εἶναι θέσις τῆς ζητούμενης τετραγωνικῆς ῥίζης (ἰδὲ ἀντικρὺ). ἔπειτα ἀποχωρίζοντες διὰ στιγμῆς τὰ δύο πρὸς δεξιὰν ψηφία τοῦ 529, καὶ παρατηροῦντες ὅτι 4 εἶναι τὸ πλησιέστερον τετράγωνον εἰς τὸν ἀριστερὸν ἀριθμὸν 5, γράφομεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν 2 εἰς τὴν θέσιν τῆς, τὸ δὲ διπλάσιόν τῆς 4 ὑπὸ τὴν

$$\begin{array}{r|l} 529 & 23 \\ 4 & \underline{43} \\ \hline 129 & 3 \\ 5 & \underline{129} \\ & 0 \end{array}$$

γραφμῶν· ἔπειτα ἀφαιρούμεν τὸ τετραγώνον τοῦ 2 ἀπὸ τὸν 5, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 1 καταβάλλομεν τὰ δύο δεξιὰ ψηφία τοῦ 529, καὶ ἀποχωρίζομεν τὸ δεξιὸν 9 διὰ σιγμῆς, τὸν ἀριστερόν ἀριθμὸν 12 διαιρούμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ τεθέντος εἰς τὴν θέσιν τῆς ρίζης ἀριθμοῦ, ἤτοι διὰ τοῦ 4, καὶ γράφουεν τὸ πηλίκον 3 δεξιὰ τοῦ 4, καὶ ἔτι ὑπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον τελευταῖον πολλαπλασιάζομεν τὸν 43 ἐπὶ 3· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 129 εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὑπὸ τὸν 529, σημειῖον ὅτι 3 εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, καὶ ἡ ζητούμενη τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι 23.

Ὡσαύτως εὐρίσκεται ὅτι 29 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 841. Ἀλλὰ παρατηρητέον ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ 44 διὰ 4 δίδει πηλίκον 11, καὶ ὡς

$$\begin{array}{r|l} 8.41 & 29 \\ 4 & 49 \\ \hline 44.1 & 9 \\ 441 & 441 \\ \hline 0 & \end{array}$$

ἔδοκιμάσθη ὁ 9, ἔπρεπε πρῶτον νὰ δοκιμασθῇ ὁ 11, ἔπειτα ὁ 10, καὶ ἂν τὰ γινόμενα ἤθελαν εἶσθαι μεγαλύτερα τοῦ 441, τότε ἔπρεπε νὰ δοκιμασθῇ ὁ 9. Ἀλλὰ γενικῶς ποτὲ δὲν δοκιμάζεται ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 9.

Ὡσαύτως ἔτι εὐρίσκεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2916 εἶναι 54.

$$\begin{array}{r|l} 29.16 & 54 \\ 25 & 104 \\ \hline 41.6 & 4 \\ 416 & 416 \\ \hline 0 & \end{array}$$

199. Τετραγώνου πενταψηφίου ἢ ἑξαψηφίου, οἷον τοῦ 322624, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐξάγεται σχεδὸν ὡς ἥδη εἵπομεν. Ἀφοῦ ἀποχωρισθῶσι τὰ δύο δεξιὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ τετραψηφίου ἀριστεροῦ 3226 ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ὡς ἄνωτέρω, εὐρίσκεται δὲ 56 καὶ μένει ὁ ἀριθμὸς 90. Δεξιὰ τούτου καταβάλλονται τὰ δύο δεξιὰ ψηφία 24 τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀποχωρίζεται τὸ δεξιὸν 4, ὁ ἀριστερὸς

$$\begin{array}{r|l} 32.26.24 & 568 \\ 25 & 106 \\ \hline 72.6 & 6 \\ 636 & 636 \\ \hline 902.4 & 1128 \\ & 8 \\ \hline & 9024 \end{array}$$

ἀριθμός 902 διαιρείται διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 56 ἤτοι διὰ τοῦ 112, καὶ τὸ πηλίκον 8 γράφεται δεξιὰ τοῦ 112 καὶ ὑποκάτω. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ 1128 ἐπὶ 8 εἶναι ἴσον μὲ τὸν 9024, τὸν ὑπὸ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, σημειοῦν ὅτι 8 εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης, καὶ ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 322624 εἶναι 568.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 34969 εἶναι 187.

Ἐκ δὲ τούτων νοεῖται καὶ πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἄλλων μεγαλειτέρων τετραγώνων.

3.49.69	187
1	28
24.9	8
224	224
256.9	
2569	367
0	7
	2569

τέρω, καὶ τεθῇ ἡ δευτέρα παρονομαστής τῆς πρώτης. Π. χ. τοῦ $\frac{64}{81}$ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οὕτως εὐρίσκεται ὅτι εἶναι $\frac{8}{9}$ ἢ τοῦ $\frac{529}{841}$ εἶναι $\frac{23}{29}$ (ιδεὲς ἀνωτέρω).

Τῶν δὲ συμμιγῶν καὶ δεκαδικῶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἐξάγονται, ἀφοῦ αὐτοὶ τραπῶσιν εἰς κλασματικούς μὲ παρονομαστήν, καὶ τούτων ἐξαχθῶσιν αἱ ῥίζαι.

Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀτελῶν τετραγώνων.

201. Ἐπειδὴ τὸ ἀτελὲς τετράγωνον δὲν ἔχει ῥίζαν τετραγωνικὴν, ἀλλ' ἀντὶ ταύτης εἶναι εἰς χρῆσιν ἀριθμός, ὅστις νὰ προσεγγίξῃ ὅσον θέλῃ τις εἰς αὐτὴν τὴν ἀνύπαρκτον ῥίζαν, ἐδῶ λέγομεν πῶς εὐρίσκεται τοιοῦτος ἀριθμός.

Πρῶτον πρέπει νὰ προσδιορίζηται ὁ βαθμὸς τῆς προσεγγίσεως τὸν ὁποῖον θέλομεν, ὅστις εἶναι μονάς τις ἀκεραία ἢ κλασματικὴ ὅποιαδήποτε, ἢ ἄλλως, πρέπει νὰ προσδιορίζηται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς διαφέρων τῆς ἀνυπάρχου τετραγωνικῆς ῥίζης ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος ἀκεραίας ἢ κλασματικῆς, καὶ τότε λέγομεν, νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μείον μονάδος μικρᾶς.

202. α. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 56 μείον μονάδος, εἶναι 7, ἥτοι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πλητιστέρου εἰς τὸν 56 τετραγώνου 49. Ὡσαύτως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 40 μείον μονάδος εἶναι 6.

Ἄς εὑρεθῇ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2378 μείον μονάδος. Ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ἡ τοῦ ἀριθ. 198 πράξις ἐπὶ τοῦ 2378, εὐρίσκεται, ὅτι 48 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2304, καὶ μένει ὁ ἀριθ. 74. Ὁ 48 λοιπὸν εἶναι ἡ ζητούμενὴ τετραγωνικὴ ρίζα μείον 1.

β. Ἄς εὑρεθῇ ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ 14 μείον $\frac{1}{6}$.

Πολλαπλασιάζεται ὁ 14 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 6 ἥτοι ἐπὶ 36, τοῦ γινομένου 504 ἐξάγεται ἡ ρίζα μείον 1, ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ εὐρίσκεται 22, ὑπὸ τὸν ὅποσον τίθεται παρονομαστής ὁ 6, καὶ ὁ $\frac{22}{6}$ ἢ $3\frac{2}{3}$ εἶναι ἡ ζητούμενὴ τετραγ. ρίζα τοῦ 14 μείον $\frac{1}{6}$.

Ἡ τοῦ 72 μείον $\frac{1}{10}$ εὐρίσκεται ὡσαύτως ὅτι εἶναι $\frac{84}{10}$ ἢ 8,4. Ἡ τοῦ 328 μείον $\frac{1}{100}$ εἶναι $\frac{1811}{100}$ ἢ 18,11.

203. Ἄς ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μείον $\frac{1}{15}$. Πολλαπλασιάζεται τὸ $\frac{5}{7}$, ἥτοι ὁ ἀριθμητικὸς τὸν 5 (127) ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 15, ἥτοι ἐπὶ 225, τὸ γινόμενον 1125 διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7, τοῦ πηλίκου 160 $\frac{5}{7}$ ἀφίρεται τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$, τοῦ δὲ ἀκεραίου 160 ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα μείον μονάδος καὶ εὐρίσκεται 12, ὑπὸ τὸν ὅποσον γράφεται παρονομαστής ὁ 15· καὶ ἡ ζητούμενὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μείον $\frac{1}{15}$ εἶναι $\frac{12}{15}$ ἢ $\frac{4}{5}$, ἥτις εἶναι κυρίως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{16}{25}$.

Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{221}{23}$ μείον $\frac{1}{23}$ εἶναι $\frac{123}{23}$ ἢ 5 $\frac{4}{23}$. Ἡ δὲ τοῦ $\frac{7}{13}$ μείον $\frac{1}{30}$ εἶναι $\frac{22}{30}$ ἢ $\frac{11}{15}$.

Ὡσαύτως τοῦ $\frac{310}{13}$ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα μείον $\frac{1}{100}$ εἶναι $\frac{488}{100}$ ἢ 4,88. Ἡ τοῦ $\frac{41}{14}$ μείον $\frac{1}{1000}$ εἶναι $\frac{886}{1000}$ ἢ 0,886.

Ὡσαύτως τοῦ 3,425 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα μείον $\frac{1}{1000}$ εἶναι 1,849· (3,425 ἐπὶ 1000000, τὸ τετράγωνον τοῦ 1000, εἶναι 3425000, διότι ὁ 1000000 εἶναι 1000 ἐπὶ 1000,

καὶ ὁ 3,425 πολλαπλασιάζεται πρῶτον ἐπὶ 1000, καὶ τὸ γινόμενον 3425 ἐπὶ 1000). Ἡ τοῦ αὐτοῦ δὲ 3,425, μείον $\frac{1}{10}$ εἶναι 1,8. Ἡ τοῦ 31,027 μείον 0,001 εἶναι 5,570.

Σημ. Πρὸς εὐρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $\frac{4}{9}$ μείον $\frac{1}{7}$, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητῆς 4 ἐπὶ 7, καὶ ὅχι ἐπὶ τὸ τετράγωνόν του 49, ἀλλὰ τὸ γινόμενον 28 δὲν διαιρεῖται διὰ 7, ἀλλ' ἐξάγεται αὐτοῦ ἡ ῥίζα μείον μονάδος, καὶ αὕτη, οὖσα 5, διαιρεῖται διὰ 7, καὶ ἔχομεν $\frac{5}{7}$ ὡς ῥίζαν τοῦ $\frac{4}{9}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

Περὶ Ἀναλογιῶν καὶ Μεθόδων.

204. Πολλὰ τῶν προβλημάτων, ὅσα μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν, καὶ πολλὰ εἰσι ἄλλα, συνηθέστατα καὶ αὐτὰ εἰς τὸν κοινωρικὸν βίον ἀναφαινόμενα, ἔχουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀναλόγων, καὶ δύνανται ν' ἀναλυθῶσι καὶ λυθῶσι καὶ κατὰ τινὰς ἄλλας μεθόδους. Διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐδῶ τὰ περὶ ἀναλογικῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς μεθόδους ταύτας.

Α'. Περὶ Ἀναλογιῶν.

205. Εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 100 τί ὀνομάζεται λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον, ἢ λόγος δύο ἀριθμῶν, καὶ διὰ τίνος πράξεως εὐρίσκεται. Ἐδῶ δὲ προσθέτομεν ὅτι, ὅταν θέλῃ τις νὰ σημειώσῃ μόνον δύο ἀριθμοὺς νοουμένους κατὰ λόγον, ἢ ἄλλως, τὸν λόγον δύο ἀριθμῶν διὰ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, γράφει μεταξὺ αὐτῶν δύο στιγμᾶς, ἢ γράφει τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον χωρίζων αὐτοὺς διὰ γραμμῆς, οἷον ὁ λόγος τοῦ 30 πρὸς τὸν 6 σημειοῦνται οὕτω 30:6, ἢ οὕτω $\frac{30}{6}$. ἀπαγγέλλεται δὲ σύντομα 30 πρὸς 6, τιθεμένης τῆς πρὸς ἀντὶ τῶν : ἢ ἀντὶ τῆς —, καὶ σημαίνει τοιαύτη γραφὴ τὸν λόγον τοῦ 30 πρὸς τὸν 6.

Σημ. α. Κυρίως ὁ λόγος τοῦ 30 πρὸς τὸν 6 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5, τὸ δὲ 30:6 ἢ $\frac{30}{6}$ εἶναι σημειώσεις διὰ γρηγορίας τῶν ἀριθμῶν

30 καὶ 6 τοιαύτα, ὥστε νὰ νοῦται δι' αὐτῆς ὁ λόγος αὐτῶν. Ἀλλὰ καὶ τὸ ὅλον $30:6$ ἢ $\frac{3}{1}$ λέγεται λόγος καὶ αὐτοῦ οὕτω νοούμενου ὁ μὲν 30 λέγεται ἡγούμενος, ὁ δὲ 6 ἐπόμενος, οἱ δὲ δύο δὲ ὁμοῦ ὄροι τοῦ λόγου.

Σημ. β'. Τὸ $\frac{3}{1}$ παριστάνει καὶ κλασματικὸν ἀριθμὸν, καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 30 διὰ 6 ἔσται τὸ ἕκτον τοῦ 30, καὶ τὸν λόγον τοῦ 30 πρὸς τὸν 6, τὰ ὅποια εἶναι τρία πράγματα διαφορά. Διὰ τοῦτο, ὅταν πρόκηται τοιοῦτόν τι, ὅποιον εἶναι τὸ $\frac{3}{1}$ πρέπει νὰ προσέχητις νὰ διακρίνη τὴν σημασίαν του.

Σημ. γ'. Εἶναι φανερόν ἐκ τοῦ ὅτι ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εὐρίσκεται διὰ διαιρέσεως ὅτι τινῶν μὲν ἀριθμῶν ὁ λόγος εἶναι ἀκέραιος, ἄλλων δὲ κλασματικός.

206. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 201 εἶδόμεν ὅτι τέσσαρες ἀριθμοί, τῶν ὁποίων οἱ δύο ἔχουσι λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἄλλων δύο, λέγονται ἀνάλογοι. ἐδῶ δὲ προσθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον τεσσάρων ἀναλόγων ἀριθμῶν ὀνομάζεται ἀναλογία. Ἡ ἀναλογία σημειώνεται διὰ γραφῆς οὕτω, πρῶτον γράφεται ὁ ἕτερος τῶν λόγων, ὡς ἡδὴ εἶπομεν, ἔπειτα τέσσαρες στιγμαὶ οὕτω: $\cdot$, καὶ μετὰ ταύτης ὁ ἄλλος λόγος. Π. χ. ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 12 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 9 πρὸς τὸν 3, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ὄντες γράφονται οὕτω $36:12::9:3$, ἢ $\frac{36}{12}::\frac{9}{3}$.

Ἀπαγγέλλονται δὲ 36 πρὸς 12 ὡς 9 πρὸς 3, τιθεμένου τοῦ ὡς ἀντὶ τῶν $\cdot$, καὶ νοεῖται ὅτι, ὃν λόγον ἔχει ὁ 36 πρὸς τὸν 12, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ 9 πρὸς τὸν 3.

Σημ. Ἐνῶστε ἀντὶ τῶν $\cdot$ γράφουσι τὸ $=$, τὸ ὅποιον σημαίνει γενικῶς ἰσότητα, καὶ ὅχι ἰσότητα λόγων ὡς αἱ $\cdot$. Ὡστε ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία γράφεται καὶ οὕτω $36:12=9:3$ ἢ $\frac{36}{12}=\frac{9}{3}$. Αὕτη δὲ ἡ σημείωσις σημαίνει καὶ ἰσότητα δύο κλασματικῶν ἢ δύο πηλίκων.

207. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ πάσης ἀναλογίας λέγονται ὄροι αὐτῆς, πρῶτος ὁ ἀριστερός, δεύτερος ὁ κατόπιν, τρίτος ὁ ἄλλος

καὶ τέταρτος ὁ δεξιός. Τῶν δὲ λόγων τῆς ὁ μὲν ἀριστερός λέγεται πρῶτος, ὁ δὲ δεξιὸς δεύτερος· καὶ ἐπομένως ὁ πρῶτος ὁρος λέγεται ἡγούμενος τοῦ πρώτου λόγου ἢ πρῶτος ἡγούμενος, ὁ δεύτερος, ἐπόμενος τοῦ πρώτου λόγου ἢ πρῶτος ἐπόμενος, ὁ τρίτος, ἡγούμενος τοῦ δευτέρου λόγου ἢ δεύτερος ἡγούμενος, ὁ τέταρτος, ἐπόμενος τοῦ δευτέρου λόγου ἢ δεύτερος ἐπόμενος. Ὁ πρῶτος καὶ τρίτος κοινῶς λέγονται ἡγούμενοι τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τέταρτος ἐπόμενοι αὐτῆς. Ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος ὁμοῦ ὀνομάζονται ἄκρα τῆς ἀναλογίας ἢ ἄκροι ὅροι αὐτῆς, ὁ δεύτερος καὶ τρίτος μέσα ἢ μέσοι ὅροι αὐτῆς. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις εὑρίσκεται διὰ τῆς διαίρεσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου διὰ τοῦ τέταρτου, καὶ ὅστις εἶναι ὁ αὐτός, λέγεται κοινὸς λόγος.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

208. α. Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης ἀναλογίας εἶναι ἴσον μετὰ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Π. χ. τῆς $12:3::24:6$ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων 12 καὶ 6 εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τῶν μέσων 3 καὶ 24. Τοῦτο ἐπιβεβαιούται μὲν ἐὰν ἐκτελεσθῶσιν οἱ δύο πολλαπλασιασμοί, ἀποδεικνύεται δὲ οὕτως. Ὁ πρῶτος ἡγούμενος 12 εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπομένου τοῦ 3 ἐπὶ τὸν λόγον τῶν 4· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων 12 καὶ 6 θέλει εἶσθαι γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν, τοῦ πρώτου ἐπομένου 3, τοῦ λόγου 4 τῶν δύο ἀριθμῶν 12 καὶ 3, καὶ τοῦ δευτέρου ἐπομένου 6. Πάλιν ὁ δεύτερος ἡγούμενος 24 εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπομένου τοῦ 6 ἐπὶ τὸν λόγον τῶν 4· λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον τῶν μέσων 3 καὶ 24 θέλει εἶσθαι γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν, τοῦ πρώτου ἐπομένου 3, τοῦ δευτέρου ἐπομένου 6, καὶ τοῦ λόγου 4 τῶν δύο ἀριθμῶν 24 καὶ 6. Ἀλλ' ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται ἐκάτερον γινόμενον, οἱ μὲν δύο εἶναι αὐτοὶ, ὁ πρῶτος ἐπόμενος 3 καὶ ὁ δεύτερος 6· καὶ ὁ τρίτος

εἶναι ὁ αὐτός, διότι εἶναι ὁ κοινὸς λόγος τῆς ἀναλογίας· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ὡς γινόμενα τῶν αὐτῶν τριῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ ᾖναι ἴσα. Ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἰμφορεῖ νὰ γείνη καὶ περὶ ὁποιασδήποτε ἄλλης ἀναλογίας· λοιπὸν πάσης ἀναλογίας κτλ.

Β'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται δῆλον καὶ ὅτι, ἂν τέσσαρες ἀριθμοὶ κατὰ σειράν δὲν ᾖναι ἀνάλογοι, οἷον οἱ $15:5, 24:6$, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου δὲν θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. Ἐπειδὴ τὰ γινόμενα ταῦτα εἰμφοροῦν μὲν νὰ νοηθῶσιν ὡς γινόμενα τριῶν ἀριθμῶν, τῶν δύο ἐπομένων καὶ ἐνὸς λόγου, ἀλλ' ὄντων ἀνίσων τῶν λόγων, θέλουσιν εἶσθαι ἄνισα καὶ τὰ γινόμενα.

Ἵστε μόνον τῶν ἀναλογιῶν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Γ'. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου τεσσάρων κατὰ σειράν ἀριθμῶν ᾖναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ καθ' ἡν κεῖνται τάξιν εἶναι ἀνάλογοι. Ἐπειδὴ μόνον τῆς ἀναλογίας τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων. Ἄλλως, ἂν δὲν ᾖσαν ἀνάλογοι, ἔπρεπε κατὰ τ' ἀνωτέρω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου νὰ μὴ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου.

Σημ. α'. Καὶ ἂν δὲν ᾖναι κατὰ σειράν τέσσαρες ἀριθμοὶ, φθάνει μόνον τὸ γινόμενον τῶν δύο νὰ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων δύο, καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογοι· καὶ γράφονται ὡς εἰς ἀναλογίαν τιθέμενοι οἱ δύο παράγοντες τοῦ ἐνὸς γινομένου ἄκροι, καὶ οἱ ἄλλοι δύο μέσοι, οἷον $6 \text{ ἐπὶ } 8 \text{ εἶναι ἴσον μὲ } 16 \text{ ἐπὶ } 3$, λοιπὸν γράφονται οὕτω

$$6:3::16:8.$$

Σημ. β'. Καὶ τῶν ἀναλογιῶν, τῶν ὁποίων οἱ ἡγούμενοι εἶναι μικρότεροι τῶν ἐπομένων τῶν ἥτοι ὁ κοινὸς λόγος εἶναι κλάσμα, οἷον τῆς $6:18::8:24$, καὶ τοῦτ' αὖτ' τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων· διότι καὶ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο εἶναι γινόμενον τῶν αὐτῶν τριῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ὅτι

τῶν δύο ἐπομένων καὶ τοῦ κοινοῦ λόγου, ὡς ἐπὶ τῶν προηγουμένων ἀναλογιών, ἀλλὰ τῶν δύο ἡγουμένων καὶ τοῦ κοινοῦ λόγου.

209. Ἐκ τοῦ ὅτι πάσης ἀναλογίας τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων ἐξάγεται ὁ κανὼν, καθ' ὃν προσδιορίζεται ὁρος τις ἄγνωστος ὁποιασδήποτε ἀναλογίας, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι αὐτῆς ὅροι ᾖναι γνωστοί.

Τῆς ἀναλογίας $20:5::36:\chi$ ὁ τέταρτος ὅρος, ὅστις εἶναι σημειωμένος διὰ τοῦ γράμματος χ , εἶναι ἄγνωστος. Ἰδοὺ δὲ πῶς εὐρίσκεται. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 180 τῶν μέσων 5 καὶ 36 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων 20 καὶ χ , ὁ 180 εἴμπορεῖ νὰ νοηθῇ ὅτι εἶναι γινόμενον καὶ τῶν ἄκρων 20 καὶ χ . Ἄν λοιπὸν τὸ γινόμενον 180 διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐνὸς παράγοντος 20, τὸ πηλίκον 9 θέλει εἶσθαι ὁ ἄγνωστος παράγων χ . (Καὶ τῷ ὄντι ὁ λόγος τοῦ 36 καὶ 9 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 20 καὶ 5). Λοιπὸν διὰ τὰ εὐρεθῇ ὁ τέταρτος ὅρος ἀναλογίας, ὅταν ᾖναι ἄγνωστος, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς γνωστοί, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ μέσοι, καὶ τὸ γινόμενον τῶν νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ἡγούρου τοῦ πρώτου ὅρου.

Σημ. α'. Ἐὰν δὲ ᾖναι τις τῶν μέσων ἄγνωστος, τότε πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ ἄκροι, καὶ νὰ διαιρῇται τὸ γινόμενον τῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Σημ. β'. Ὁ χ , ᾗτοι ὁ ἄγνωστος, συνήθως λέγεται τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων καὶ γενικῶς τέταρτος ἀνάλογος τριῶν ἄλλων δεδομένων εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις ὁμοῦ μὲ τοὺς τρεῖς ἄλλους ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.

Σημ. γ'. Ἡ ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ δύο μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι, οἷα ἡ $36:12::12:4$, λέγεται συνεχῆς ἀναλογία, καὶ ὁ μέσος ὅρος αὐτῆς μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων 36 καὶ 4 καὶ γενικῶς μέσος ἀνάλογος δύο δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις ἀποτελεῖ τὰ δύο μέσα ἀναλογίας, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα ἀποτελοῦσιν οἱ δύο δεδομένοι. Ἡ $18:\chi::\chi:2$ εἶναι συνεχῆς ἀναλογία, τῆς ὁποίας ὁ μέσος ἀνάλογος εἶναι ἄγνωστος.

Ἀλλ' ἔπε δὴ τὸ γινόμενον τοῦ χ ἐπὶ χ εἶναι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (195), τὸ γινόμενον 36 τῶν ἄκρων 18 καὶ 2 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου, καὶ ἐπομένως ὁ μέσος ἀνάλογος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 36 ἥτοι ὁ 6. Καὶ γενικῶς ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν.

210. Ἐξαι εὐκολον ν ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τινος ἀναλογίας
π. χ. τῆς $30:6::45:9$

προκύπτουσιν αἱ ἐξῆς ἀναλογίαι,

α. συμμεταθέσει τῶν ἄκρων μόνον $9:6::45:30$

β. συμμεταθέσει τῶν μέσων μόνον $30:45::6:9$

γ. συμμεταθέσει τῶν ἄκρων καὶ τῶν μέσων
ἐνταῦτῳ $9:45::6:30$

δ. συναλλαγῇ τῶν ἄκρων καὶ μέσων $6:30::9:45$.

Ἐπειδὴ μετὰ τὰς μεταθέσεις ταύτας τῶν ὅρων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διαμένει ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τέσσαρες δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι (208, γ.).

211. Ἐὰν δύο ἀναλογίαι ἔχωσι τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοὺς αὐτοὺς, οἱ δύο τελευταῖοι εἶναι ἀνάλογοι, ἢ ἂν ἔχωσι τοὺς δύο τελευταίους ὅρους τοὺς αὐτοὺς, οἱ δύο πρώτοι εἶναι ἀνάλογοι. Ἐκ τῆς $24:6::36:9$

καὶ τῆς $24:6::20:5$

προκύπτει $36:9::20:5$.

Ἐπειδὴ δύο λόγοι $36:9$ καὶ $20:5$ ἴσοι μὲ τρίτον $24:6$ εἶναι ἴσοι καὶ πρὸς ἀλλήλους.

Ὡταύτως καὶ ἐκ τῆς $24:6::36:9$

καὶ τῆς $16:4::36:9$

προκύπτει $24:6::16:4$.

212. Ἐὰν δύο ἀναλογίαι ἔχωσι τοὺς δύο ἡγουμένους τοὺς αὐτοὺς, οἱ ἐπόμενοι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι ἢ ἂν ἔχωσι τοὺς δύο ἐπομένους τοὺς αὐτοὺς, οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἀνάλο-

γὰρ. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς $24:6::12:3$
καὶ τῆς $24:8::12:4$
συμμεταθέσει τῶν μέσων προκύπτει ἡ $24:12::6:3$
καὶ ἡ $24:12::8:4$

ἐκ δὲ τούτων κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα
προκύπτει ἡ $6:3::8:4$
ἢ συμμεταθέσει τῶν μέσων αὕτη $6:8::3:4$
ὅπου ἑλέπει τις ὅτι οἱ ἐπόμενοι τῶν ἀνωτέρω ἀναλογικῶν εἶναι
ἀνάλογοι.

Ὡσχύτως καὶ ἐκ τῆς $24:6::12:3$
καὶ τῆς $18:6::9:3$
προκύπτει ἡ $24:12::18:9$
ἢ αὕτη $24:18::12:9$,
ὅπου οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἀνάλογοι.

213. Ἐὰν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ προκύψοντα γινόμενα ἢ πηλίκα θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα πρὸς τοὺς δύο τελευταίους ὅρους αὐτῆς. Ἐπειδὴ τὰ γινόμενα ἢ πηλίκα ταῦτα, ἀνάλογα ὄντα πρὸς τοὺς δύο πρῶτους ὅρους τῆς ἀναλογίας [102 καὶ 105], θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα καὶ πρὸς τοὺς δύο τελευταίους ὅρους τῆς αὐτῆς.

Ὡστε ἐκ τῆς $36:18::12:6$ προκύπτει
πολλαπλασιάσει μὲν ἐπὶ 3 ἡ $108:54::12:6$
διαιρέσει δὲ διὰ 6 $6:3::12:6$.

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει λεγόμενον καὶ περὶ τῶν δύο τελευταίων ὁρων τῆς ὥστε ἐκ τῆς αὐτῆς ἔχομεν
πολλαπλασιάσει μὲν ἐπὶ 2 $36:18::24:12$
διαιρέσει δὲ διὰ 3 $36:18::4:2$.

214. Ἐὰν οἱ ἡγούμενοι ἢ οἱ ἐπόμενοι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ δύο προκύψοντα γινόμενα ἢ πηλίκα ὡς ἡγούμενοι πρὸς τοὺς δύο ἐπομένους τῆς ἀναλογίας, ἢ ὡς ἐπόμενοι πρὸς τοὺς δύο ἡγούμενους αὐτῆς, εἶναι εἰς ἀναλογίαν. Π. χ. ἐκ τῆς $30:6::45:9$ προκύπτει

πολλαπλασιάσει τῶν ἡγουμένων ἐπὶ 3 90:6::135:9
 διαιρέσει δὲ αὐτῶν διὰ 3 10:6:: 15:9
 πολλαπλασιάσει τῶν ἐπομένων ἐπὶ 4 30:24::45:36
 διαιρέσει δὲ αὐτῶν διὰ 3 30: 2::45:3.

Ἐπειδὴ, τριπλασιαζομένων τῶν ἡγουμένων μόνον, τριπλασιάζονται καὶ οἱ δύο λόγοι. Ἀλλὰ οἱ δύο λόγοι 30:6 καὶ 45:9 εἶναι ἴσοι· λοιπὸν καὶ οἱ τριπλασιοῦτων 90:6 καὶ 135:9 εἶναι ἴσοι. Ὁμοίᾳ ἀπόδειξις καὶ περὶ τῶν ἄλλων.

215. Τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὄρων πάσης ἀναλογίας ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν δεύτερον. ὃν ἔχει τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον. Οὕτως ἐκ τῆς

12:3::28:7
15:3::35:7
9:3::21:7.

προκύπτει προσθέσει μὲν ἢ
 ἀφαιρέσει δὲ ἢ

Ἐπειδὴ α'. οἱ λόγοι 15:3 καὶ 35:7 εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλύτεροι ὁ μὲν 15:3 τοῦ 12:3, ὁ δὲ 35:7 τοῦ 28:7. Ἀλλ' οἱ λόγοι 12:3 καὶ 28:7 εἶναι ἴσοι· λοιπὸν καὶ οἱ λόγοι 15:3 καὶ 35:7, οἱ κατὰ μονάδα μεγαλύτεροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι· λοιπὸν 15:3::35:7.

β'. οἱ λόγοι 9:3 καὶ 21:7 εἶναι κατὰ μονάδα μικρότεροι ὁ μὲν 9:3 τοῦ 12:3, ὁ δὲ 21:7 τοῦ 28:7. Ἀλλ' οἱ λόγοι 12:3 καὶ 28:7 εἶναι ἴσοι· λοιπὸν καὶ οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι αὐτῶν λόγοι 9:3 καὶ 21:7 εἶναι ἴσοι· λοιπὸν 9:3::21:7.

Προσέτι, τὸ κεφάλαιον 15 ἢ ἡ διαφορὰ 9 ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρώτον 12, ὃν ἔχει τὸ κεφάλαιον 35 ἢ ἡ διαφορὰ 21 πρὸς τὸν τρίτον 28.

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀρχικῆς

12:3::28:7
15:3::35:7
9:3::21:7
12:28::3:7
15:35::3:7
9:21::3:7

καὶ τῶν δύο ἤδη ἀποδεδειγμένων
 προκύπτουσι συμμεταθέσει τῶν μέσων αὗται

ἐκ δὲ τούτων κατὰ τὰ εἰρημένα (211)

προκύπτουσιν αὗται αἱ δύο

$$15:35::12:28$$

$$9:21::12:28$$

συμμεταθέσει δὲ τῶν μέσων ἔχομεν

$$15:12::35:28$$

$$9:12::21:28$$

ὅ,τι ἔπρεπε ν' ἀποδειχθῇ.

216. Τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πάσης ἀναλογίας ἔχει λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων, ὅν ἔχει ἐκάτερος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἐπόμενόν του. Οὕτως ἐκ τῆς

$$32:8::24:6$$

προκύπτει προσθέσει μὲν ἢ

$$56:14::32:8 \text{ ἢ } 24:6$$

ἀφαιρέσει δὲ ἢ

$$8:2::32:8 \text{ ἢ } 24:6.$$

Ἐπειδὴ συμμεταθέσει τῶν μέσων ἡ πρώτη ἀναλογία τρέπεται εἰς ταύτην

$$32:24::8:6.$$

ἐκ ταύτης δὲ κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα (215)

προκύπτει προσθέσει μὲν ἢ

$$56:24::14:6$$

ἀφαιρέσει δὲ ἢ

$$8:24::2:6$$

συμμεταθέσει δὲ τῶν μέσων ἔχομεν

$$56:14::24:6 \text{ ἢ } 32:8$$

$$8:2::24:6 \text{ ἢ } 32:8$$

ὅ,τι ἔπρεπε ν' ἀποδειχθῇ.

Ἐκ τῶν τελευταίων τούτων πορίζεται κατὰ τὰ προειρημένα (211) καὶ ἡ ἐξῆς $56:14::8:2$, δηλονότι τῆς ἀναλογίας $32:8::24:6$ (καὶ πάσης ἀναλογίας ἐπομένως, διότι ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ) τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομένων, ὅν ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων.

Συμμεταθέσει δὲ τῶν μέσων τῆς

$$56:14::8:2$$

ἔχομεν ταύτην

$$56:8::14:2,$$

ἡγουν τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἡγουμένων, ὡς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων.

217. Καὶ σειρᾶς ἴσων λόγων, ὅποια εἶναι αὕτη

$$20:5::8:2::16:4::24:6$$

τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον.

πρὸς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐπομένων, ὃν ἔχει εἰς τις ἡγουμένος πρὸς τὸν ἐπόμενον του.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν δύο πρώτων λόγων, τῶν συνιστούντων ἀναλογίαν $20:5::8:2$, ἔχομεν κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα (216) $28:7::8:2$. Ἀλλ' ἐκ τῆς σειρᾶς ἔχομεν ἀκόμη καὶ $8:2::16:4$ λοιπὸν ἐκ τῶν δύο τούτων προκύπτει (211) ἡ $28:7::16:4$.

Ταύτης δὲ πάλιν τὸ κεφάλαιον 44 τοῦ 28 καὶ 16 εἶναι πρὸς τὸ κεφάλαιον 11 τοῦ 7 καὶ 4, ὡς 16 πρὸς 4, ἥτοι

$$44:11::16:4$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς σειρᾶς ἔχομεν ἔτι

$$16:4::24:6$$

λοιπὸν ἐκ τῶν δύο τούτων προκύπτει (211) $44:11::24:6$.

Τελευταῖον ἐκ ταύτης ἔχομεν τὸ κεφάλαιον 68 τοῦ 44 καὶ 24 πρὸς τὰ κεφάλαιον 17 τοῦ 11 καὶ 6, ὡς 24 πρὸς 6, ἥτοι $68:17::24:6$.

Ἀλλ' ὁ 68 εἶναι τὰ κεφάλαιον ὅλων τῶν τῆς σειρᾶς ἡγουμένων 20, 8, 16 καὶ 24, ὁ δὲ 17 εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἐπομένων 5, 2, 4 καὶ 6· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων κτλ.

218. Τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὄρων πολλῶν ἀναλογιῶν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων ὄρων των, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον τῶν τρίτων ὄρων των πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τετάρτων.

Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοίων τῆς τάξεως ὄρων τῶν ἀναλογιῶν

$$6:2::9:3$$

$$5:8::10:16$$

$$7:5::21:15$$

εἶναι 210, 80, 1890, 720, ταῦτα δὲ εἶναι ἀνάλογα, ἥτοι $210:80::1890:720$.

Ἐπειδὴ, ἐὰν αἱ ἀναλογίαι γραφθῶσιν οὕτω [206 σημ.]

$$\begin{array}{r} \frac{6}{2} = \frac{9}{3} \\ \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \\ \frac{7}{5} = \frac{21}{15} \end{array}$$

καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασθεῖσιν ἐπ' ἀλλήλους οἱ τρεῖς πρώτοι
κλασματικοὶ $\frac{6}{2}$ καὶ $\frac{5}{3}$ καὶ $\frac{7}{5}$, καὶ πάλιν ἐπ' ἀλλήλους οἱ ἄλλοι
τρεις ἴσοι τῶν $\frac{9}{3}$ καὶ $\frac{10}{6}$ καὶ $\frac{21}{15}$, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ γινόμε-
νον $\frac{210}{720}$ τῶν τριῶν πρώτων θέλει εἰσθαι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον
 $\frac{1890}{720}$ τῶν τριῶν ἄλλων. Ἀλλ' ὁ $\frac{210}{720}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 210
πρὸς τὸν 80, καὶ ὁ $\frac{1890}{720}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 1890 πρὸς τὸν
720· λοιπὸν οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν ἔχομεν

210:80::1890:720, ὅ,τι ἔπρεπε ν' ἀποδειχθῇ.

Ἄλλη βεβαιότης ὅτι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι ἴσοι πορίζεται
ἐκ τούτου ὅτι, ἂν διαιρεθῶσι τοῦ δευτέρου λόγου οἱ δύο ὅροι
διὰ 9, προκύπτει 210:80, λόγος ὅστις εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν
πρῶτον καὶ ἴσος μὲ τὸν δεύτερον.

Σημ. Ὄταν ἐκ πολλῶν ἀναλογιῶν πρόκηται νὰ πορισθῶμεν
μίαν, ὥς ἀνωτέρω ἐκ τῶν τριῶν τῇν

$$210:80::1890:720,$$

θέλομεν λέγει σύντομα πολλαπλασιάσει τῶν ὁμοίων ὄρων.
Οὕτως ἀνωτέρω, ἐκ τῶν τριῶν ἀναλογιῶν πολλαπλασιάσει τῶν
ὁμοίων ὄρων ἡῶραμεν

$$210:80::1890:720.$$

219. Τῶν προηγουμένων ἀναλογιῶν οἱ ὅροι ἦσαν ἀκέραιοι,
καὶ περὶ τοιούτων ὄντων αὐτῶν ἀπεδείχθησαν ὅσα ἤδη ἀπε-
δείχθησαν. Ἀναλογία δὲ, τῆς ὁποίας ὅλοι ἢ τινὲς μόνον ὅροι
εἶναι κλασματικοὶ ἢ ὅποιοιδήποτε ἄλλοι ἀριθμοί, τρέπεται εἰς
ἄλλην, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι νὰ ἦναι ἀκέραιοι. Π. χ. ἡ $\frac{5}{12}:\frac{2}{3}::$
 $\frac{4}{3}:\frac{32}{15}$, τῆς ὁποίας ὁ μὲν λόγος $\frac{5}{12}:\frac{2}{3}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον
15:24, ὁ δὲ $\frac{4}{3}:\frac{32}{15}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν 60:96 (155, γ'), τρέ-
πεται εἰς ταύτην 15:24::60:96, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀρμόζουσιν
ὅλα τὰ προαποδειχθέντα. Ἄν δὲ οἱ ὅροι ἦναι μικτοὶ ἢ συμμιγεῖς,
πρῶτον τρέπονται εἰς κλασματικούς καὶ οὗτοι ἔπειτα εἰς ἀκε-
ραίους.

Ἐπειδὴ δὲ, ὅποιοιδήποτε καὶ ἂν ἦναι οἱ ὅροι τῶν ἀναλογιῶν,
αὗται τρέπονται εἰς ἄλλας μὲ ἀκεραίους ὄρους, καὶ ἐπειδὴ περὶ

τούτων ἀρμόζουσι λεγόμενα ὅσα ἤδη ἀπεδείχθησαν, διὰ ταῦτα καὶ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν, ὅποιοιδήποτε καὶ ἂν ἦναι οἱ ὅροι τῆς, ἀρμόζουσι τὰ ἤδη ἀποδείχθέντα.

220. Ὅταν δὲ οἱ ὅροι ἀναλογίας τινὸς ἦναι συγκεκριμένοι ἢ ὑπερσυγκεκριμένοι, τότε δύο εἶναι ὁμοειδεῖς, καὶ οἱ ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς μὲν πρὸς ἀλλήλους, ἑτεροειδεῖς δὲ συνηθέστατα πρὸς τοὺς δύο πρώτους. Οἱ δύο ὁμοειδεῖς εἶναι πάντοτε ὅροι τοῦ αὐτοῦ λόγου, καὶ εἶναι ὁ μὲν ἡγούμενος, ὁ δὲ ἐπόμενος αὐτοῦ, τὸ ὅποιον καταλαμβάνει τις ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ λόγου. Ἀλλ' ὅταν γίνηται συμμετάθεσις τῶν μέσων ἢ ἄλλη τις μεταβολή, τότε οἱ ὅροι τοῦ λόγου δὲν εἶναι ὁμοειδεῖς· ἀλλὰ τότε δὲν θεωροῦνται τὰ εἶδη τῶν ποσῶν, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀριθμοὶ, ὡς ἀριθμοὶ ἀφηρημένοι, καὶ ἀρμόζουσιν ὅλα τὰ προειρημένα.

Ἐὰν δὲ τοιαύτης τινὸς ἀναλογίας ὁ τέταρτος ὅρος ἦναι ἄγνωστος καὶ πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ, ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμός τῶν μέσων, καὶ ἡ διὰ τοῦ πρώτου διαίρεσις τοῦ γινομένου, χωρὶς νὰ λογίζεται ὁποῖου εἶδους ποσὸν παριστάνουσιν οἱ ἀριθμοὶ, ἀλλὰ θεωρουμένων αὐτῶν ὡς ἀφηρημένων· ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς νοεῖται ἔπειτα ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Περὶ ἰσοδιαφορῶν.

221. Λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἰσοδιαφορῶν τινα, ἀλλ' ὀλίγα καὶ μετὰ τὰ περὶ ἀναλογιῶν, διότι εἶναι πολλὰ ὀλίγον χρήσιμοι αἱ ιδιότητες τῶν ἰσοδιαφορῶν, καὶ διότι ἐδῶ εἰμποροῦμεν μὲ συντομίαν νὰ εἴπωμεν περὶ αὐτῶν τὰ οὐσιωδέστερα.

Τί εἶναι διαφορὰ δύο ἀριθμῶν τὸ εἴπομεν εἰς τὴν σημ. α. τοῦ ἀριθ. 50. Ἀλλ' ὅταν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν δύο ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε νὰ παριστάνῃ ἡ σημείωσις ὅτι οἱ ἀριθμοὶ νοοῦνται κατὰ διαφορὰν, γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο μίαν *σιγμὴν*, οὕτως 6.4, 12.3 κτλ. Ἀπαγγέλλονται δὲ 6 πρὸς 4, 12 πρὸς 3, καὶ νοεῖται ὅτι ὁ 6 ὑπερέχει τὸν 4, ἢ ἡ διαφορὰ τοῦ 6

πρὸς τὸν 4 κτλ. Τὸ ὅλον δὲ 6.4 λέγεται *διαφορά*, τῆς ὁποίας ὁ 6 καὶ 4 λέγονται *ῥεῖοι*, ὁ μὲν 6 ἢ *ἡμέριος*, ὁ δὲ 4 *ἐπόμενος*.

222. Τέσσαρες ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων δύο ἔχουσι διαφορὰν ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων δύο, λέγονται *ισοδιαφοροὶ* οἷον οἱ 12, 8, 9, 5, τῶν ὁποίων οἱ 12 καὶ 8 ἔχουσι διαφορὰν 4, ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ 9 καὶ 5· τὴ δὲ σύνολον τῶν τεσσάρων τούτων *ισοδιαφόρων ἀριθμῶν* λέγεται *ισοδιαφορά*. Διὰ νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι εἶναι *ισοδιαφοροὶ*, μεταξὺ τῶν ὁρῶν τῶν διαφορῶν, ἤτοι τοῦ 12 καὶ 8, τοῦ 9 καὶ 5 τίθεται μίαι ἐτιγμὴ, μεταξὺ δὲ τῶν δύο ἴσων διαφορῶν, ἤτοι μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 9, γράφονται δύο σ.γ.μαί, αἵτινες παριστάνουσιν *ισότητα διαφορῶν*, ἡ τὸ $=$, τὸ ὅποιον παριστάνει γενικῶς *ισότητα*, οὕτω $12.8 : 9.6$ ἢ $12.8 = 9.5$. Απαγγέλλεται δὲ ὡς *ἀναλογία*, 12 πρὸς 8 ὡς 9 πρὸς 5, ἀλλὰ νοεῖται ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 12 καὶ 8 εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ 9 καὶ 5.

Ὅσα δὲ εἵπομεν περὶ τῶν ὀνομάτων τῶν ὁρῶν τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὸν ἀριθμ. 207, τὰ αὐτὰ ἀρμύζουσιν καὶ εἰς τοὺς ὁρῶνς τῶν *ισοδιαφορῶν*.

Ἰδιότητες τῶν *ισοδιαφορῶν*.

223. α. Τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων πάσης *ισοδιαφορεᾶς* εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων αὐτ. σ. Π. γ. τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων τῆς $12.7 : 18.13$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων αὐτῆς. Ἐπειδὴ, ὅντος τοῦ ἡγουμένου 12 ἴσου μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐπομένου του 7 καὶ τῆς διαφορᾶς των 5, καὶ τοῦ ἡγουμένου 18 ἴσου μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐπομένου του 13 καὶ τῆς διαφορᾶς των 5, τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν ἄκρων 12 καὶ 18 θέλει εἶσθαι ἄθροισμα τῶν δύο ἐπομένων καὶ τῆς πρώτης διαφορᾶς 5, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν μέσων 7 καὶ 13 θέλει εἶσθαι ἄθροισμα τῶν δύο ἐπομένων καὶ τῆς δευτέρας διαφορᾶς· καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο διαφοραὶ εἶναι ἴσαι, τὰ δύο κεφάλαια, τὸ τῶν μέσων καὶ τὸ τῶν ἄκρων, ὡς ἄθροισμα τῶν αὐτῶν τριῶν ἀριθ-

μῶν, θέλουσιν εἶσθαι ἴσα. Ἀλλὰ παρομοία ἀποδείξεις γίνονται καὶ περὶ πάσης ἄλλης ἰσοδιαφορίας· λαμβάνον τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων κτ.λ.

6'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεταί ὁ λόγος καὶ ὅτι, ἂν τέσσαρες κατὰ σειράν ἀριθμοὶ δὲν ἦναι ἰσοδιαφοροί, οἱ εἶναι αἱ 12, 7, 18, 15, τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου δὲν θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια ταῦτα εἰμπορόδυν νὰ νοηθῶσιν ὡς ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, τούτων δὲ εἶναι μὲν δύο οἱ αὐτοί, ὁ δεύτερος 7 καὶ ὁ τέταρτος 15, ἀλλ' ὁ τρίτος ὅστις εἶναι ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι ὁ αὐτός, διότι αἱ διαφοραὶ δὲν εἶναι ἴσαι· διὰ τοῦτο καὶ τὰ δύο κεφάλαια δὲν θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.

Ὡστε μόνον τῶν ἰσοδιαφορῶν τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων.

γ'. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τέσσαρων κατὰ σειράν ἀριθμῶν τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ἦναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ καθ' ἑνὲν κεῖνται τάξιν συγισταῶσιν ἰσοδιαφορίαν. Ἐπειδὴ μόνον τῆς ἰσοδιαφορίας τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων. Ἐὰν δὲ δὲν συνίστων ἰσοδιαφορίαν, ἔπρεπε κατὰ τ' ἀνωτέρω τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων νὰ μὴ ᾖ ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων.

224. 1ης διαφορᾶς 20. 12. 35. γ' ὁ τέταρτος ὅρος, ὅστις εἶναι σημειωμένος διὰ τοῦ γράμματος γ, εἶναι ἄγνωστος, καὶ προσκεταί οὕτως. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων 20 καὶ γ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων 12 καὶ 35, τούτων δὲ τὸ ἄθροισμα εἶναι 47, διὰ τοῦτο καὶ τοῦ 20 καὶ γ τὸ κεφάλαιον εἶναι 47· ἀνὰ δὲ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον 47 τοῦ 20 καὶ γ ἀφαιρῆθ' ὁ 20, τὸ ὑπολοιπὸν 17 θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος τῆς ἰσοδιαφορίας. Λαμβάνον διὰ τὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος ὅρος ἰσοδιαφορίας, ὅταν ἦναι ἄγνωστος, πρέπει νὰ προσθέτῳται οἱ μέσοι, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των ν' ἀφαιρῆται ὁ γνωστός ἄκρος ἤτοι ὁ πρῶτος ὅρος.

σημ. Ἡ ἰσοδιαφορά, τῆς ὁποίας οἱ δύο μέσοι ὄροι εἶναι ἴσοι, οἷα ἡ 18.12. 12.6, λέγεται συνεχῆς ἰσοδιαφορά, καὶ ὁ μέσος ὄρος αὐτῆς μέσος ἰσοδιαφορᾶς τῶν δύο ἄκρων 18 καὶ 6. Ἡ 24.χ:χ.8 εἶναι συνεχῆς ἰσοδιαφορᾶ, τῆς ὁποίας ὁ μέσος ἰσοδιαφορᾶς εἶναι ἄγνωστος. Εἶναι δὲ ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων, ἡτοι μὲ τὸν 16.

225. Εἶναι εὐχάλον νὰ πληροφρήθῃ τις ὅτι ἐκ τῆς

20.8:36.24

προκύπτουσιν αἱ ἐφεξῆς ἰσοδιαφοραί

συμμεταθέσει τῶν ἄκρων μόνον

24.8:36.20

συμμεταθέσει τῶν μέσων μόνον

20.36:8.24

συμμεταθέσει τῶν ἄκρων καὶ μέσων

24.36:8.20

συναλλαγῇ τῶν ἄκρων καὶ μέσων

8.20:24.36.

Ἐπειδὴ μετὰ τὰς μεταθέσεις ταύτας διακρίνεται τὸ ἀθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, τέσσαρες δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἰσοδιαφορὰν καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν [223].

Ἀληθεύει ἔτι ὅτι, ἐὰν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτοῦ ἀριθμὸς ἢ εἰς τοὺς δύο ὅρους τῆς αὐτῆς διαφορᾶς, ἢ εἰς τοὺς ἡγουμένους, ἢ εἰς τοὺς ἐπομένους πάσης ἰσοδιαφορᾶς, οἱ δύο προκύψοντες ἀριθμοὶ μὲ τοὺς δύο ἄλλους ὅρους τῆς ἰσοδιαφορᾶς θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδιάφοροι. Διότι οὕτως αὐξάνεται ἢ ἐλαττωῖται τὸ ἀθροισμα τῶν ἄκρων καὶ τὸ τῶν μέσων κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ πρὸ τῆς αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως τὰ ἀθροίσματα ἦσαν ἴσα, λοιπὸν καὶ μετὰ θέλουσιν εἶσθαι ἴσα· λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδιάφοροι.

σημ. Μέχρι τοῦ νῦν ἔτι ὀνομάζουσι κοινῶς λόγον καὶ τὸν ἀνωτέρω λόγον καὶ τὴν διαφορὰν, πρὸς διάκρισιν δὲ τὴν μὲν λέγουσιν ἀριθμητικὸν λόγον, τὸν δὲ γεωμετρικὸν λόγον. Ἐπομένως τὴν μὲν ἰσοδιαφορὰν ὀνομάζουσιν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, τὴν δὲ ἀναλογίαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἀλλὰ τοιαῦτα ὀνόματα δὲν νομίζω ὅτι εἶναι προτιμητέα.

Β'. Περὶ Μεθόδων.

Ἐδὼ θέλομεν εἰπεῖ πῶς οἱ ἀριθμοὶ διαφόρων προβλημάτων, ἀνάλογοι ὄντες, διατάσσονται, ὥστε ν' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐπειτα κατὰ τον κανόνα τοῦ αριθμ. 209 προσδιορίζεται ὁ ἄγνωστος.

Περὶ μεθόδου τῶν Τριῶν.

226. Πολλοτάτων προβλημάτων οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι τρεῖς καὶ ζητεῖται τέταρτος, οἱ δὲ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ ἀνὰ δύο εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀνὰ δύο δὲ πάλιν ἄλλως συνδυασμένοι εἶναι συσχετισμένοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, οἱ δὲ δύο ὁμοειδεῖς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἄλλους ὁμοειδεῖς. Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τ' ἀκόλουθα·

α'. 200% οἴνου ἀξίζουσιν 80^{δρ}, 1000% τοῦ αὐτοῦ πῶσον ἀξίζουσιν;

β'. Κτίσται, κτίσαντες τοῖχον μακρὸν 45^{ορ} εἰς 12^{ημ}, εἰς πόσας ἤθελον κτίσει ἄλλον τοῖχον 180^{ορ} μακρὸν;

γ'. 25 κτίσται ἔκτισαν οἰκίαν τινὰ εἰς 72^{ημ}, 100 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν κτίσει τὴν αὐτὴν οἰκίαν;

Τούτων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τέσσαρες, τρεῖς μὲν γνωστοί, εἷς δ' ἄγνωστος. Οἱ δὲ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ οὕτω γραμμένοι

α'. $\left\{ \begin{array}{l} 200\% \quad 80^{\delta\rho} \\ 1000 \text{ αἰ ζητούμ.} \end{array} \right.$ β'. $\left\{ \begin{array}{l} 45^{\circ\rho} \quad 12^{\eta\mu} \\ 180 \text{ αἰ ζητούμ.} \end{array} \right.$ γ'. $\left\{ \begin{array}{l} 25^{\kappa\tau} \quad 72^{\eta\mu} \\ 100 \text{ αἰ ζητούμ.} \end{array} \right.$

καθέτως μὲν εἶναι ἀνὰ δύο ὁμοειδεῖς, ὀριζοντίως δὲ εἶναι ἀνὰ δύο συσχετισμένοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἡγουν τοῦ α'. ὁ μὲν παραστάνει βάρος πράγματος, ὁ δὲ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, τοῦ β'. ὁ μὲν παριστάνει ἔργον, ὁ δὲ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἔργεινε, τοῦ δὲ γ'. ὁ μὲν ἐργάτας, ὁ δὲ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἔκαμαν ἔργον τι.

Σημ. Εἰς τὸ ἐξῆς τοὺς ὁμοίως συσχετισμένους, οἷον τοὺς 200% καὶ 80^{δρ}, τοὺς 45^{ορ} καὶ 12^{ημ}, τοὺς 25^{κτ} καὶ 72^{ημ},

θέλωμεν ὀνομάζει συστοίχους, καὶ δῆλον ὅτι τοιαῦτα προβλή-
ματὰ ὡς τ' ἀνωτέρω ἔχουσι δύο συστοιχίας ἀνὰ δύο ἀριθμούς
ἐκατέραν.

Ὅτι δὲ οἱ δύο ὁμοειδεῖς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἄλλους
ὁμοειδεῖς γίνεται δῆλον ἐκ τούτου, α'. ὅτι διπλάσιος ἀριθμὸς
τῶν 200^α ἀξίζει διπλάσιον ἀριθμὸν τῶν 80 δραχμῶν, τρι-
πλάσιος τριπλάσιον κτλ· λοιπὸν, ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ
τῶν ὀκτάδων, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν δραχμῶν.
Ὡσαύτως καὶ οἱ τοῦ β'. προβλήματος. Ἡ β'. ὅτι διπλάσιος ἀριθ-
μὸς τῶν 25 κτιστῶν κτίζει τὴν αὐτὴν οἰκίαν εἰς ἡμιτυν ἀριθμὸν
τῶν 72 ἡμερῶν, τριπλάσιος εἰς τρίτον, τετραπλάσιος εἰς τέ-
ταρτον κτλ· λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ τῶν κτιστῶν εἶναι ἀντιστρόφως
ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν, ἡγουν ὡς ὁ 100^α εἶναι
τετραπλάσιος τοῦ 25^α, οὕτω καὶ ὁ 72^α, ὁ σύστοιχος τῶν
25^α, εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν,
τοῦ συστοίχου τοῦ 100^α.

227. Τοιούτων προβλημάτων λοιπὸν ὁ ἄγνωστος εἶναι τέ-
ταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν, καὶ εὐρίσκεται κατὰ τὸν
κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 209, ἀφοῦ πρῶτον διατεταχθῶσιν οἱ τέσσα-
ρες ἀριθμοὶ οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δευτε-
ρον νὰ ᾖ ἵσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτον.
Ἡ διάταξις δὲ αὕτη γίνεται οὕτω, σημειοῦται ὁ ἄγνωστος διὰ
τοῦ γράμματος χ⁺, ἔπειτα, ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ ᾖναι κατ' εὐ-
θεῖαν ἀνάλογοι, γράφονται ἀριστερὰ τῶν ἤδη γεγραμμένων
οἱ ἄλλοι δύο κατὰ τάξιν τὴν τῶν συστοίχων των, ἥτοι ὁ σύστοι-
χος τοῦ χ δεύτερος ἢ ἐπόμενος, καὶ ὁ σύστοιχος τοῦ ἄλλου
πρώτος ἢ ἡγούμενος· ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμοὶ ᾖναι ἀντιστρόφως
ἀνάλογοι, γράφονται κατὰ τάξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν συστοί-
χων των, ἥτοι ὁ σύστοιχος τοῦ ἀγνώστου πρῶτος ἢ ἡγού-
μενος, καὶ ὁ σύστοιχος τοῦ ἄλλου δεύτερος ἢ ἐπόμενος. Διότι,
οὕτω διατεταγμένων τῶν τεσσάρων, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν
δεύτερον εἶναι ἵσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτον.

καὶ ἀριστερὰ γράφει
ὁ ἀγνώστου.

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων θελου-
σιν εἶσθαι διατεταγμένοι οὕτω

$$200\alpha : 1000\alpha :: 80\beta : \chi\beta, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον με } 400\beta$$

$$45\gamma : 180\gamma :: 12\eta : \chi\eta, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον με } 48\eta$$

$$100\kappa : 25\kappa :: 72\mu : \chi\mu, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον με } 18\mu$$

Σημ. Πρὶν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ μέσοι καὶ διαιρεθῇ τὸ γι-
νόμενον διὰ τοῦ πρώτου εἶναι καλὸν νὰ διαιρῶνται ἢ οἱ δύο
πρώτοι ὅροι, ἢ οἱ δύο ἡγούμενοι, διὰ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, ἂν
ἔχωσι, διότι οὕτως οἱ ὅροι τῶν ἀναλογιῶν γίνονται πολλὰ
μικροὶ ἀριθμοί, ἐνίοτε μάλιστα καὶ ἴσοι μετὰ τὴν μονάδα, καὶ
τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις καταντῶσιν ἀπλούστατα.
Κατὰ ταῦτα αἱ ἀνωτέρω ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας

$$1:5::80:\chi, \quad 4:4::12:\chi, \quad 1:1::18:\chi.$$

228. Ἡ τῶν ἀριθμῶν τοσούτων προβλημάτων τοιαύτη διά-
ταξις, ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ ἀνάλογος, καὶ ὁ προσδιορισμὸς τοῦ
τετάρτου αὐτῆς ὁροῦ ἥτοι τοῦ ἀγνώστου, ὠνομάσθη μέθοδος
τῶν τριῶν, διότι κυρίως συνίσταται εἰς διάταξιν τριῶν ἀριθμῶν
γνωστῶν, καὶ εἰς προσδιορισμὸν τετάρτου διὰ τῶν τριῶν τούτων.
Ἡ δὲ διάταξις γίνεται διὰ νὰ προσδιορισθῇ τίνες τῶν τριῶν
ἀριθμῶν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι, καὶ διὰ τίνος πρέπει τὸ
γινόμενον νὰ διαιρεθῇ. Ταῦτα δὲ προσδιορίζονται πολλάκις εὐκο-
λυτερα χωρὶς νὰ ᾔναι ἀνάγκη νὰ διατιθῶσιν οἱ ἀριθμοί, ἀλλ'
ἐν ἀπλῶς ἐξετασθῶσιν αἱ σχέσεις τῶν ἀριθμῶν, ὡς ὑποτίθεται
εἰς τοῦ 159 ἀριθμοῦ τὰ προβλήματα.

Προβλήματα λυόμενα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

1. Ἀρτοποιὸς μετὰ 28 κοιλὰ σίτου κατετελεύτα 638 ὀκάδας
ἄρτου· πόσα κοιλὰ τοῦ αὐτοῦ σίτου χρειάζονται πρὸς κατα-
σκευὴν 465³ ἄρτου; Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι,
καὶ ἔχομεν $638\alpha : 465\alpha :: 28\kappa : \chi\kappa$,

$$\text{ὅθεν } \chi \text{ ἴσον με } 20\kappa \quad \frac{280}{638}$$

2. Πόσον ἀξίζουσι 15630^{ικ} ἀλατος, ἐνῶ 1000^{ικ} ἀξίζουσιν 115^{δρ};

3. Πύργος 4^ρ ὑψηλὸς τὴν μεσημβρίαν ἀποτελεῖ σκιὰν 3^ρ 4^π 2^{δα}. ἄλλος πύργος, ὅστις ἀποτελεῖ κατὰ τὴν αὐτὴν ὥραν σκιὰν 26^ρ 4^{πδ}, πόσον εἶναι ὑψηλός;

$$3^{\rho} 4^{\pi} 2^{\delta} : 26^{\rho} 4^{\pi} : 4^{\rho} : \chi^{\rho}$$

$$266^{\delta} : 1920^{\delta} : 4^{\rho} : \chi^{\rho}$$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς, διχρῆς τῷ δὲ καλῶν οἱ μὲν παριστάνουσι μῆκος σκιᾶς, οἱ δὲ μῆκος πύργων. Καὶ οἱ ἀκόλουθοι ὡσαύτως.

4. Ἐχρειάσθησαν 520 πήγεις τσόχας, $\frac{5}{8}$ τοῦ πήγους πλατείας, πρὸς ἐνδυμασίαν ἀνθρώπων τινῶν· πόσοι πήγεις ἄλλης τσόχας, $\frac{2}{5}$ τοῦ πήγ. πλατείας, χρειαζόνται πρὸς ἐνδυμασίαν τῶν αὐτῶν ἀνθρώπων;

Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, καὶ ἔχομεν

$$\frac{5}{8} \text{ πλ.} : \frac{2}{5} \text{ πλ.} : 520 \text{ πήγ.} : \chi \text{ πήγ.}$$

5. Φθάνει τις ἀπὸ πόλιν τινὰ εἰς ἄλλην ὁδεύων 12^{ωρ} τὴν ἡμέραν εἰς 6^{ημ}. ἔαν ᾗθελεν ὁδεύῃ 10^{ωρ} τὴν ἡμέραν εἰς πόσας ἡμέρας ᾗθελε φθάσει;

$$12^{\omega\rho} : 10^{\omega\rho} : 6^{\eta\mu} : \chi^{\eta\mu}$$

6. Τὸ πλήρωμα πλοίου τινὸς ἔχει τροφὰς μόνον διὰ 20 ἡμέρας, ἐνῶ τὸ καθημερινὸν σιτηρέσιον ἐκάστου ναύτου εἶναι $\frac{1}{2}$ ὅκα θῆτου 100^{δρ} κρέατος καὶ 100^{δρ} οἴνου· ἔαν τὸ πλοῖον ᾗθελε διαμείνει, 35^{ημ} εἰς τὴν θάλασσαν, πόσον ἔπρεπε νὰ ᾔηται τὸ καθημερινὸν σιτηρέσιον ἐκάστου;

Σημειωθέντος διὰ 1 τοῦ πρώτου σιτηρεσίου, ἐπεὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, ἔχομεν 35 : 20 : 1^{πρ} : χ^{σιτ}. ὅθεν χ εἶναι ἴσον $\frac{35}{2}$ ἢ $\frac{7}{2}$ τοῦ πρώτου σιτηρεσίου.

Περί πολλὰ πλὴς μεθόδου τῶν Τριῶν.

229. Ἄλλων προβλημάτων οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι ἢ πέντε, ἢ ἑπτὰ, ἢ ἐννέα κτλ, καὶ εἰς ἄγνωστος, ἀνά δύο δὲ οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς, ὁ δὲ ἄγνωστος καὶ ὁ ὁμοειδής τὸν εἶναι συγχε-

τισμένοι μὲ ἓνα ἕκαστον τῶν λοιπῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ οὕτως ἀποτελοῦνται δύο συστοιχίαι ἀριθμῶν ἀνὰ τρεῖς ἢ τέσσαρες κτλ ἑκατέρω. Τοιοῦτον πρόβλημα εἶναι τὸ ἐπόμενον,

20 κτίσται ἔκτισαν τοῖχον 500 ὀργυῶν μακρὸν εἰς 18 ἡμέρας· 72^{κτ} εἰς πόσας ἡμέρας θέλουσι κτίσει ἄλλον τοῖχον 1200^{ργ} μακρόν.

Τούτου τοῦ προβλήματος ὁ ἄγνωστος καὶ ὁ ὁμοειδής του εἶναι ἀνάλογοι καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν κτιστῶν καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀργυῶν τοῦ ἔργου. Διὰ τοῦτο ἀναλύεται τὸ πρόβλημα εἰς δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ προηγούμενα, ἵγουν

α. 20^{κτ} εἰς 18^{ἡμ} ἔκτισαν τοῖχον 500^{ργ} μακρόν· 72^{κτ} εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελον κτίσει τὸν αὐτὸν τοῖχον; Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, ἔχομεν

$$72^{\kappa\tau} : 20^{\kappa\tau} :: 18^{\eta\mu} : \chi^{\eta\mu}, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 5^{\eta\mu}.$$

Λοιπὸν οἱ 72^{κτ} ἤθελον κτίσει τοῖχον 500^{ργ} μακρόν εἰς 5^{ἡμ}.

β'. 72^{κτ} κτίζουσι τοῖχον 500^{ργ} μακρόν εἰς 5^{ἡμ}· οἱ αὐτοὶ κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελον κτίσει τοῖχον 1200^{ργ} μακρόν; Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι, ἔχομεν

$$500^{\rho\gamma} : 1200^{\rho\gamma} :: 5^{\eta\mu} : \chi^{\eta\mu}, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 12^{\eta\mu}.$$

Λοιπὸν οἱ 72^{κτ} θέλουσι κτίσει τοῖχον μακρόν 1200^{ργ} εἰς 12^{ἡμ}.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλο πρόβλημα ὅμοιον μὲ τ' ἀνωτέρω, πλὴν ὅτι εἶναι πολυπλοκώτερον.

15 σκαφεῖς 10 ὥρας καθημέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν εἰς 18 ἡμέρας αὐλακα 450^{ργ} μακρόν· πόσοι σκαφεῖς 12^{ωρ} καθημέραν ἐργαζόμενοι εἰς 8^{ἡμ} ἤθελαν ἀνοίξει ἄλλον αὐλακα 480^{ργ} τὸ μῆκος;

Οἱ ἀριθμοὶ τεταγμένοι κατὰ συστοιχίας, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς νὰ ᾔναι ὑπ' ἀλλήλους, εἶναι οὗτοι 15^{σκ}, 10^{ωρ}, 18^{ἡμ}, 450^{ργ}.

$$\chi, \quad 12, \quad 8, \quad 480.$$

Αναλύεται δὲ τὸ πρόβλημα εἰς ταῦτα,

α'. 15^{σκ} ἔσκαψαν αὐλακα 450^{ργ} μακρόν εἰς 18^{ἡμ} ἐργαζόμενοι 10^{ωρ} καθημέραν· πόσοι σκαφεῖς ἤθελαν σκάψαι ἄλλον

480^{ργ} μακρόν εἰς 18^{ημ} 10^{ωρ} ἐργαζόμενοι καθημέραν; ἔχομεν
 $450^{ργ} : 480^{ργ} :: 15^{σχ} : χ^{σχ}, ἥτοι 1^{ωρ} : 16^{ωρ} :: 1^{σχ} : χ^{σχ},
 ὅθεν χ ἴσον μὲ 16^{σχ}.$

β'. 16^{σχ} εἰς 18^{ημ} 10^{ωρ} καθημέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν
 αὐλακα 480^{ργ} μακρόν· πόσοι σκαφεῖς εἰς 8^{ημ} ἤθελαν σκάψει
 τὸν αὐτὸν αὐλακα 10^{ωρ} καθημέραν ἐργαζόμενοι; ἔχομεν

$8^{ημ} : 18^{ημ} :: 16^{σχ} : χ^{σχ}, ἥτοι 1^{ημ} : 18^{ημ} :: 2^{σχ} : χ^{σχ},
 ὅθεν χ ἴσον μὲ 36^{σχ}.$

γ'. 36^{σχ} 10^{ωρ} καθημέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν εἰς 8^{ημ}
 αὐλακα 480^{ργ} μακρόν· πόσοι σκαφεῖς 12^{ωρ} καθημέραν ἐργα-
 ζόμενοι ἤθελαν σκάψει τὸν αὐτὸν αὐλακα εἰς τὰς αὐτὰς ἡμέρας;
 ἔχομεν $12^{ωρ} : 10^{ωρ} :: 36^{σχ} : χ^{σχ}, ἥτοι 1^{ωρ} : 10^{ωρ} :: 3^{σχ} : χ^{σχ},
 ὅθεν χ ἴσον μὲ 30^{σχ}.$

Λοιπὸν 30^{σχ} ἐργαζόμενοι 12^{ωρ} καθημέραν εἰς 8^{ημ} θέλουσιν ἀνοί-
 ξει αὐλακα 480^{ργ} τὸ μῆκος.

230. α. Παρατηρητέον ὅτι εἶναι ἀδιάφορον ἢ ζητηθῇ πρῶ-
 τον πόσοι σκαφεῖς θέλουσι σκάψει τὰς 480^{ργ}, ἔπειτα πόσοι
 τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 8^{ημ} καὶ τελευταῖον πόσοι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς
 8^{ημ} ἀνὰ 12^{ωρ} τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι, ἢ ζητηθῇ πρῶτον πόσοι
 σκαφεῖς θέλουσι σκάψει εἰς 8^{ημ} τὰς 450^{ργ} 10^{ωρ} ἐργαζόμε-
 νοι, ἔπειτα πόσοι θέλουσι σκάψει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 8^{ημ}
 12^{ωρ} ἐργαζόμενοι καὶ τελευταῖον πόσοι θέλουσι σκάψει τὰς
 480^{ργ} εἰς 8^{ημ} 12^{ωρ} ἐργαζόμενοι, ἢ ζητηθῇ πρῶτον πόσοι σκα-
 φεῖς θέλουσι σκάψει τὰς 450^{ργ} εἰς 18^{ημ} ἐργαζόμενοι 12^{ωρ} κα-
 τημέραν κτλ.

β'. Συντομίας χάριν εἰμπορεῖ τις νὰ μὴ ἐκτελέσῃ τὰς πράξεις
 διὰ νὰ εὕρῃ ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας ὅτι χ εἶναι ἴσον μὲ 16^{σχ},
 ἀλλὰ νὰ ὑποθέσῃ ὅτι αὐτὸ τὸ χ παριστάνει τοὺς ζητούμενους
 σκαφεῖς, καὶ νὰ συστήσῃ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν μεταχειριζό-
 μενος ἀντὶ τοῦ 16^{σχ} τὸ χ, ἀντὶ δὲ τῶν ζητούμενων σκαφῶν
 ἄλλο γράμμα, οἷον τὸ ω. Ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἀνα-
 λογίαν εἰμπορεῖ νὰ μὴ ἐκτελέσῃ τὰς πράξεις πρὸς εὐὴ τὴν τοῦ ω,

ἀλλὰ νὰ υποθέσῃ ὅτι τὸ ω παριστάνει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν σκαφῶν, καὶ νὰ συστήσῃ τὴν τελευταίαν ἀναλογίαν μεταχειριζόμενος ἀντὶ μὲν τῶν $35^{\sigma\kappa}$ τὸ ω , ἀντὶ δὲ τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ τῶν σ^{α} ἑῶν ἄλλο γράμμα, οἷον τὸ ψ . Οὕτως αἱ ἀνωτέρω ἀναλογίαι θέλουσιν εἶναι τοιαῦται $450^{\sigma\rho\gamma} : 480^{\sigma\rho\gamma} :: 15^{\sigma\kappa} : \chi^{\sigma\kappa}$

$$8^{\eta\mu} : 18^{\eta\mu} :: \chi^{\sigma\kappa} : \omega^{\sigma\kappa}$$

$$12^{\omega\rho} : 10^{\omega\rho} :: \omega^{\sigma\kappa} : \psi^{\sigma\kappa}$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι τῶν ἀναλογιῶν, ὁ τρίτος θέλει εἶναι 15 ἐπὶ χ ἐπὶ ω , καὶ ὁ τέταρτος χ ἐπὶ ω ἐπὶ ψ , οἷτινες εἶναι διακρίσεις διὰ χ καὶ ω , καὶ καταντῶσι μετὰ τὴν διαίρεσιν εἰς $15^{\sigma\alpha} : \psi^{\sigma\kappa}$. Ἡ δὲ ἐκ τῶν τριῶν ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζεται τῶν ὁμοίων ὄρων προκύπτουσα ἀναλογία θέλει εἶναι αὕτη 450 ἐπὶ 8 ἐπὶ $12 : 480$ ἐπὶ 18 ἐπὶ $10 : 15 : \psi$. τοῦ ψ παριστάνοντος τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν σκαφῶν.

γ'. Ταύτην τὴν ἀναλογίαν ἤθελεν εὐρεῖ τις καὶ ἂν ἔγραφε τὸν ζητούμενον ἀγνώστου ψ ἢ χ καὶ τὸν ὁμοειδῆ του ἀριστερά, ἔπειτα δύο ὁμοειδεῖς ἀριστερά τούτων, ἄλλους δύο ὑποκάτω, καὶ τοὺς ἄλλους ὡσαύτως, προσέχων μόνον νὰ τοὺς διατάξῃ κατὰ τὴν τάξιν τῶν συστοίχων των, ἂν ἦναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι αὐτῶν, ἢ ἀντιστρόφως τῶν συστοίχων των, ἂν ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτῶν, καὶ τελευταίον ἤθελε πολλαπλασιάσει μὲν ὅλους τοὺς πρώτους ἐπ' ἀλλήλους καὶ ὅλους τοὺς δευτέρους ὡσαύτως, γράψει δὲ τρίτον καὶ τέταρτον τὸν 15 καὶ χ .

Ἰδοὺ ὁ τύπος.

$$450^{\sigma\rho\gamma} : 480^{\sigma\rho\gamma} :: 15^{\sigma\kappa} : \chi^{\sigma\kappa}$$

$$8^{\eta\mu} : 18^{\eta\mu}$$

$$12^{\omega\rho} : 10^{\omega\rho}$$

$$450 \text{ ἐπὶ } 8 \text{ ἐπὶ } 12 : 480 \text{ ἐπὶ } 18 \text{ ἐπὶ } 10^{\omega\rho} :: 15^{\sigma\kappa} : \chi^{\sigma\kappa}$$

231. Ἐκ τούτων ἐξάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν πρὸς λύσιν τῶν ὁμοίων μὲ τ' ἀνωτέρω προβλημάτων.

Ἀποὺ διακριθῶσιν αἱ δύο συστοίχιν καὶ οἱ ὁμοειδεῖς, γράφεται ὁ ἄγ. ωστος χ καὶ ὁ ὁμοειδῆς του ἀριστερά· ἔπειτα ἀριστερά τούτων γράφονται δύο ὁμοειδεῖς ὁποιοιδήποτε, ἂν

μὲν ἦναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἤδη γνησμένους συστοίχους τῶν, κατὰ τὴν τάξιν τῶν συστοίχων τῶν, ἀν δὲ ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, κατὰ τὴν ἀντίστροφον τῆς τῶν συστοίχων τῶν ἱσοκάτω τούτων γράφονται δύο ἄλλοι ὁμοειδεῖς ὡσπεῖτως, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ λοιπὴ ὁμοειδεῖς μετὰ ταῦτα ἐξαλείφονται οἱ κοινὰ εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους περιγράφοντας ἢ οἱ κοινὰ εἰς τοὺς ἡγουμένους, πολλαπλασιάζονται οἱ μένοντες ὅμοιοι ὅροι ἐπ' ἄλλήλους, καὶ οὕτω προκύπτει ἀναλογία, ἐκ τῆς ὁποίως εὐρίσκεται ὁ ἄγνωστος ὁροῦ διαιρεθῆ τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ πρώτου ὁρου.

Αὕτη ἡ μέθοδος, καθ' ἣν πέντε ἢ ἑπτὰ κτλ ἀριθμοὶ δεδομένοι καὶ εἰς ἄγνωστος διατάσσονται εἰς ἀναλογίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἔπειτα προκύπτει ἐκείνη, ὅπου εἶναι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος διατεταγμένοι, καὶ ὅθεν προσδιορίζεται τελευταῖον ὁ ἄγνωστος, ὑπὸ μὲν τῶν πλεονεκτήρων ὀνομάζεται διακεκριμένως μέθοδος τῶν πέντε, τῶν ἑπτὰ κτλ, ὑπὸ δὲ τῶν νεωτέρων ὀνομάζεται γενικῶς μέθοδος σύνθετος τῶν τριῶν, ἢ καλλιὼν παρ' ἡμῶν μέθοδος πολλαπλὴ τῶν τριῶν, διότι εἶναι πολλάκις, ὡς εἶδμεν, ἡ μέθοδος τῶν τριῶν. Πρὸς αὐτὴν δ' αὖτε δε συνθέτως ἢ προηγούμενη ὀνομάζεται μέθοδος ἀπλ. τῶν τριῶν. Ἰδοὺ καὶ ἄλλα προβλήματα ὁμοια μετ' ἀνωτέρω πρὸς γύμνασιν.

1. Πρὸς ἐνδομασίαν 500 στρατιωτῶν ἐχρ. ἰσθίονα 1200 τῆλ. τσόχας, $\frac{5}{4}$ τοῦ πῆχους πλατείας πῖσαι πῆχες γραμίζονται ὅλην τσόχα, $\frac{7}{2}$ τοῦ πῆχους πλατείας, πρὸς ἐνδομασίαν 960 στρατιωτῶν; 500στρ 960 :: 1200:χ

2. Τεχνιδρόμος ὁδεῖων 14 ὥρ τῆς ἡμέρας εἰς 2 ὥρμ. ὠδονόρησε 2240 στάδια· διὰ νὰ ὠδονορήσῃ 3165 σταδ. εἰς 18 ὥρ, πῶς ὥρμ. τῆς ἡμέρας πρέπει νὰ ὠδονορήσῃ;
2240στ: 3165στ :: 14 ὥρ: χ ὥρ
18 ὥρ. 20 ὥρμ.

3. 7 ἄνθρωποι εἰς 14 ἡμ. τρώγουσι 5 δ.κ. ὄρεων πῖσας; ἐκείδης ὁλοοῦσι φάγει 1.α τρώγοντες 21 ἡμ. εἰς 3 ἡμ.

4. Μεταλλοσύτη ἐργαζομένη 10 ὥρ τῆς ἡμέρας εἰς μεταλλ. ἔκ. ἐξέλαυν εἰς 9ετ 207 ἡμ. 7 ὥρ καθαρὴν ὄρεον 345 x 275 δρ. ἐκ ἐργασίῃ 12 ὥρ τὴν ἡμέραν, πόσον ἄργυρον θέλει ἐκδοῦναι εἰς 7ετ 67 ἡμ. 9 ὥρ;

5. Αἱ τροφαὶ 6000 πολιορκουμένων ἐξαρκούσιν εἰς αὐτοὺς 6 μῆνας· ἐὰν ἐκζηθῶσιν οἱ πολιορκούμετοι κατὰ 1500, πόσον τοῦ προτέρου καθημερινοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ τρώωσιν, διὰ νὰ τοὺς ἐξαρκέσωσι αἱ αὐταὶ τροφαὶ 10 μῶν 20 ημῶν;

6. 15 σκαφεῖς 10 ὥρ τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι εἰς 17 ημῶν ἔσκαψαν ἀγρὸν 35 ὥρ 4 π. πλατὺν καὶ 50 ὥρ 2 π. μακρὸν· πόσοι σκαφεῖς εἰς 12 ημῶν θέλουσιν σκάψαι ἄλλον ἀγρὸν 45 ὥρ 3 π. πλατὺν καὶ 75 ὥρ μακρὸν 12 ὥρ τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι;

Μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα.

232. Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν λύονται καὶ τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ μερισθῇ ἀριθμὸς γνωστὸς εἰς δύο ἢ πλεοντέρου ἀναλόγους ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν· ἀλλὰ τότε δύναται νὰ ὀνομαζῇται ἰδίως μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα, ἢ ἀπλούστερα, μέθοδος τῶν ἀναλόγων.

α. Ὡς μερισθῇ ὁ 60 εἰς δύο ἀριθμοὺς ἀναλόγους τῶν 4 καὶ 6, ἥτοι ὡς εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἀνάλογοι τῶν 4 καὶ 6, καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ᾖ 60.

Ἐὰν σημειωθῇ ὁ μὲν διὰ χ , ὁ δὲ διὰ ψ , ἐπειδὴ οἱ χ καὶ ψ πρέπει νὰ ᾖ ἀνάλογοι τῶν 4 καὶ 6, ἔχομεν $4:6::\chi:\psi$, ἢ $4:\chi::6:\psi$. Ἀλλὰ [216] τὸ ἄθροισμα 10 τῶν ἡγουμένων 4 καὶ 6 εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα 60 τῶν ἐπομένων χ καὶ ψ , ὡς εἰς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἐπόμενον του, ἥτοι

$$\begin{array}{l} 10:60::4:\chi \\ \text{ἢ } 10:60::6:\psi \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ὅθεν} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \chi \text{ ἴσον } 24 \\ \psi \text{ ἴσον } 36. \end{array}$$

β. Ὡς μερισθῇ ὁ 76 εἰς τρεῖς ἀναλόγους τῶν 5, 12 καὶ 18.

Τρεῖς ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι ἄλλων τριῶν, ἐὰν ἀνὰ δύο [ἐδῶ εἰς γνωστὸς καὶ εἰς ἄγνωστος] ἔχωσι λόγους ἴσους.

Ἄν σημειωθῶσιν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θέλει εἶσθαι 76, διὰ χ , ψ καὶ ω , ἔχομεν $5:\chi::12:\psi::18:\omega$. Ἀλλὰ [217] τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων ὡς εἰς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἐπόμενον του· λοιπὸν

$$\begin{array}{l} 35:76::5:\chi \\ \text{ἢ } 35:76::12:\psi \\ \text{ἢ } 35:76::18:\omega \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ὅθεν} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \chi \text{ ἴσον } 10 \frac{30}{35} \\ \psi \text{ ἴσον } 26 \frac{2}{35} \\ \omega \text{ ἴσον } 39 \frac{3}{35} \end{array}$$

Ἐκ τούτων νοεῖται καὶ πῶς πρέπει νὰ πράττῃ τις, διὰ νὰ

μερίζῃ ἀριθμόν τινα εἰς πλειότερους ἀναλόγους ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν.

Γενικῶς λοιπὸν, διὰ τὰ μερισθῇ ἀριθμός τις εἰς πλειότερους ἀναλόγους ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζεται αὐτὸς ἐπὶ εἰς ἕκαστον τῶν δεδομένων ἀναλόγων καὶ ἐν ἕκαστον γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν· οἱ οὕτω προκύπτοντες ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶσθαι οἱ ζητούμενοι.

Ἰδοὺ προβλήματα λυόμενα κατὰ ταύτην τὴν μέθοδον.

Ἐάν 356 δρ μερισθῶσιν εἰς 4 ἐργάτας ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς ἕκαστος ἐργάσθη, ὁ μὲν ἐργασθεὶς 5 ἡμέρας, ὁ δὲ 8, ὁ δὲ 9, ὁ δὲ 13, πόσον θέλει λάβει ἕκαστος αὐτῶν;

Τεσσάρων σκαφῶν ὁ μὲν ἔσκαψε τάφρον μακρὰν πηχ. 65,50, πλατεῖαν πηχ. 2,9 καὶ βαθεῖαν 1 πῆχυν, ὁ δὲ ἄλλην μακρὰν 75,80 τοῦ πηχ., πλατεῖαν 2,70 καὶ βαθεῖαν 1,50, ὁ δὲ ἄλλην 37,25 τοῦ πηχ.-μακρὰν, 1,80 πλατεῖαν καὶ 1,25 βαθεῖαν, ὁ δὲ ἄλλην 109,37 πηχ., μακρὰν, 4,36 πλατεῖαν καὶ 2,15 βαθεῖαν, ἔλαβαν δὲ ὅλοι ὁμοῦ δι' ὅλον τὸ ἔργον δραχμὰς 1270,80· πόσον ἀνέκει εἰς ἕκαστον αὐτῶν ἀναλόγως τοῦ ἔργου των;

Ἀν μερισθῶσιν 360 δρ εἰς 4 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ μὲν δεύτερος νὰ λάβῃ τριπλασίαν τῶν τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος διπλασίαν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τέταρτος τὸ ἡμισυ τῶν ὅσας λάβωσιν οἱ τρεῖς ἄλλοι ὁμοῦ, πόσας θέλει λάβει ἕκαστος;

Ἀν μερισθῶσιν 60 δρ εἰς 4 παῖδας ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των, ἔντων τοῦ μὲν 12 ἐτῶν, τοῦ δὲ 10 ἐτῶν, τοῦ δὲ 8 ἐτῶν, τοῦ δὲ 5 ἐτῶν, πόσας θέλει λάβει ἕκαστος;

Τρεῖς ἀμειψήλατοι μετέφεραν ὁ μὲν θάρος 45 μῶν εἰς ἀπόστασιν 16 σταδίων, ὁ δὲ θάρος 36 μῶν εἰς 17 στ., ὁ δὲ θάρος 85 μῶν εἰς 12 στ, λαβόντες ἀντὶ τούτου ὅλας δραχ. 80· πόσαι ἀνέκουσιν εἰς ἕκαστον ἀναλόγως τοῦ θάρους καὶ τῆς ἀποστάσεως;

1200 ἵπποι θέλουσι διανεμηθῇ εἰς τρία τάγματα ἵππέων ἀναλόγως τῆς δυνάμεώς των, οὔσης τῆς τοῦ πρώτου πρὸς μὲν τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 11 πρὸς 8, πρὸς δὲ τὴν τοῦ τρίτου ὡς 9 πρὸς 7· πόσους ἵππους θέλει λάβει ἕκαστον τάγμα;

Ἀποθηήσκων τις, ἐγκύου οὔσης τῆς γυναικὸς του, διατάττει, ἂν μὲν γεννηθῇ ἄρρεν, νὰ λάβῃ τῆς ἐκ 12000 δρ. περιουσίας του τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ ἡ μήτηρ του τὸ ἄλλο τέταρτον, ἂν δὲ γεννηθῇ θῆλυ, νὰ λάβῃ αὐτὸ μὲν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ μήτηρ του τὸ ἄλλο τρίτον. Συνέβη δὲ νὰ γεννηθῇ ἄρρεν καὶ θῆλυ· πῶς λοιπὸν θέλει μερισθῇ ἡ περιουσία τοῦ πατρὸς κατὰ ταύτην τὴν ἀπρόβλεπτον περίπτωσιν, διὰ νὰ γείνῃ ἡ διανομὴ κατὰ τὴν τελευταίαν θέλησιν τοῦ πατρὸς;

233. Ἀν καὶ ἐκ τῶν προειρημένων εὐχόλως θέλει δυναθῇ ἕκαστος νὰ λύῃ προβλήματα τόκου, ὑφαιρέσεως, καὶ ἐταιρίας, διότι λύνονται κατὰ τὰς προειρημένους μεθόδους, μολοντοῦτο διὰ τὸ πολὺ χρήσιμον αὐτῶν θέλομεν εἰπεῖ ὀλίγα ἰδιαιτέρως περὶ αὐτῶν.

ἐν τῇ ἐκείνῃ
ἐκ τῆς περιουσίας
ἐκ τῆς περιουσίας
ἐκ τῆς περιουσίας

Προβλήματα τόκου.

234. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐμπεριέχουσιν ὅλα δύο συστοιχίας ἀριθμῶν ἀνὰ τρεῖς ἐκκτέρων. Καὶ ἡ μὲν ἔχει τὸ δανειζόμενον ποσὸν ἥτοι τὸ κεφάλαιον, τὸν χρόνον κατ' ὃν διακινεῖται δανεισμένον τὸ κεφάλαιον, καὶ τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον φέρει εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου τὸ κεφάλαιον ἥτοι τὸν τόκον· ἡ δὲ ἔχει 100 ὡς κεφάλαιον, ἐν ἔτος, ἢ ἓνα μῆνα, ἢ μίαν ἡμέραν ὡς χρόνον, καὶ ὡς τόκον τῶν 100 εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, ἀριθμὸν, ὅστις προσδιορίζεται εἰς διαφόρους τύπους διαφόρως, καὶ τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ἐπιτόκιον.

α. Ἀγνωστος ὁ τόκος. Πόσον τόκον φέρουσι 4500^{δρ} εἰς 3^{ετ} πρὸς 8^{δρ} τὰς 100^δ τὸ ἔτος;

Τοῦτο εἶναι τὴν μὲ τὸ ἐν αἰ 100^{δρ} εἰς ἐν ἔτος ἤθελον φέρει 8^{δρ} τόκον, αἰ 4500^δ εἰς 3^{ετ} πόσον τόκον φέρουσιν; (αἰ 100 συνήθως σημειῶνται οὕτω 0|0).

Ἐπειδὴ οἱ τόκοι εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι καὶ τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν χρόνων, ἔχομεν κατὰ τὸν κανόνα (231)

$$\begin{array}{l} 100^{\delta\rho} : 4500^{\delta\rho} :: 8 : \chi \\ 1^{\epsilon\tau} : 3^{\epsilon\tau} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 1080^{\delta\rho}. \end{array} \right.$$

Δήλον δὲ ἐκ τούτων ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ τόκου, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸ κεφάλαιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον, καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρηθῇ διὰ τοῦ 100. (α).

(α). Ἐμποροὶ, τραπεζίται καὶ ἄλλοι εὐρίσκουσι τὸν ἡμερῶν τιμὴν τόκου κεφαλαίου τινὸς πρὸς τι ἐπιτόκιον κατὰ τιν' ἀπλούστερον τρόπον, ἢ καὶ ὅχι ἀκριβῶς. Π. χ. πρὸς εὐρεσιν τοῦ 253 ἡμερῶν τόκου 474^{δρ} πρὸς 7 τὰς 0/10 τὸ ἔτος, πρῶτον πολλαπλασιάζουσι τὰς 474 ὅρ ἐπὶ 253, διαιροῦσι τὸ γινόμενον 119922 διὰ 1000, τοῦ πηλίκου 119,922 λαμβάνουσι τὸ ἔκτον, καὶ τοῦ ἔκτου τούτου 19,987 λαμβάνουσι τὸ ἔκτον 3,331 καὶ τὸ προσθέτουσιν εἰς τὴν 19,987· τὸ δὲ ἀθροισμα^{δρ} 23,32 εἶναι ὁ 253 ἡμερῶν τόκος τῶν 474^{δρ} πρὸς 7 τὰς 0/10 τὸ ἔτος, κατὰ 37 λεπτά· μεγαλύτερος τοῦ σωστοῦ, ὅστις εὐρίσκεται ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 474 ἐπὶ 253 καὶ ἐπὶ $\frac{7}{1000}$, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 100. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου εὐρίσκουσι κυρίως τὸν 253 ἡμερῶν τόκον τῶν 474^{δρ} πρὸς 36 τὰς 0/10, κατὰ τι μεγαλύτερον τοῦ σωστοῦ, ἔπειτα ἐκ τούτου τὸν 253 ἡμ. τόκον τῶν 474^{δρ} πρὸς 7 τὰς

Σημ. Ὅταν μὲν τὸ ἐπιτόκιον ᾖναι 10, ᾗτοι τὸ δέκατον τοῦ 100, εἶναι φανερόν ὅτι καὶ ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τοῦ κεφαλαίου θέλει εἶσθαι τὸ δέκατον αὐτοῦ ὁ δὲ πολλῶν ἐτῶν πολλῶν τὸ δέκατον αὐτοῦ, Ὅταν δὲ ᾖναι 5, ᾗτοι τὸ εἰκοστὸν τοῦ 100, ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τοῦ κεφαλαίου θέλει εἶσθαι τὸ εἰκοστὸν αὐτοῦ ὁ δὲ πολλῶν ἐτῶν πολλῶν τὸ εἰκοστὸν αὐτοῦ κτλ.

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν εἰσπορεύμεν συντομίας χάριν νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον τοκίζεται ἐπὶ τῷ δέκατῳ, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὅτι τοκίζεται ἐπὶ τῷ εἰκοστῷ· τοκίζεται δέ τι κεφάλαιον ἐπὶ τῷ πέμπτῳ σημαίνει ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 20, ᾗτοι ὅτι αἱ 100δρ ἑθελον φέρει 20 εἰς ἓν ἔτος.

Β'. Ἀγνωστον τὸ ἐπιτόκιον 4500δρ εἰς 3 ἔτη ἔφεραν τόκον 1080δρ, πρὸς τί ἐπιτόκιον ᾗσαν δαγείσμεναι;

Ἐπειδὴ οἱ τόκοι εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι καὶ τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν χρόνων, ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 4500\delta\rho : 100\delta\rho :: 1080\delta\rho : \chi\delta\rho \\ 3\epsilon\tau : 1\epsilon\tau \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4500\delta\rho : 100\delta\rho :: 1080\delta\rho : \chi\delta\rho \\ 3\epsilon\tau : 1\epsilon\tau \end{array}} \right\} \text{ὅθεν } \chi \text{ ἴσον } 8\epsilon\pi\iota.$$

Λοιπὸν πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου πρέπει νὰ π. ἀλλαπλασιάσῃται ὁ τόκος ἐπὶ 100, τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον, καὶ νὰ διαιρῇται τὸ π. ὅπου γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου.

Γ'. Ἀγνωστος ὁ χρόνος. Εἰς πόσα ἔτη 4500δρ φέρουσι 1080δρ πρὸς 8 τὰς 0|0 τὸ ἔτος;

Ἐπειδὴ οἱ χρόνοι εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογοι τῶν τόκων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν κεφαλαίων, ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 8\delta\rho : 1080\delta\rho :: 1\epsilon\tau : \chi\epsilon\tau \\ 4500\delta\rho : 100 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8\delta\rho : 1080\delta\rho :: 1\epsilon\tau : \chi\epsilon\tau \\ 4500\delta\rho : 100 \end{array}} \right\} \text{ὅθεν } \chi \text{ ἴσον } 3\epsilon\tau.$$

0/0. Ἐπειδὴ ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν 474 δρ. πρὸς 36 τὰς 0/0 εἶναι 474 ἐπὶ 36 ὁ δὲ μιᾶς ἡμέρας ἀκριβῶς μὲν εἶναι τὸ 36ον αὐτοῦ, μὲ 100, μικρόν δέ τι λάθος εἶναι τὸ 36ον αὐτοῦ, τὸ ὅποιον εἶναι $\frac{474}{1000}$, καὶ ὁ τῶν 253 ἡμερῶν εἶναι $\frac{474 \text{ ἐπὶ } 253}{1000}$ ἢ 119,922, ὅστις εὐρίσκεται ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω.

Ἐπειδὴ δὲ 7 εἶναι 6 καὶ 1, ᾗτοι τὸ ἕκτον τοῦ 36 καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ἕκτου τοῦ 36, διὰ τοῦτο καὶ ὁ πρὸς 7 τὰς 0/0 τόκος θέλει εἶσθαι τὸ ἕκτον τοῦ τόκου τοῦ πρὸς 36 τὰς 0/0, καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ἕκτου τούτου, ὡς ἀνωτέρω εὐρέθη.

Ἄν δὲ τὸ ἐπιτόκιον ᾗτον 5 τὰς 0/0, ᾗτοι 4 καὶ 1, ᾗτοι τὸ 9ον τοῦ 36 καὶ τὸ 4ον τοῦ 9ου αὐτοῦ, ᾗθελεν εὐρεθῇ τὸ 9ον τοῦ 119,922, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ 9ου αὐτοῦ ἢ ᾗτον 9 τὰς 0/0, ᾗθελεν εὐρεθῇ τὸ 4ον τοῦ 119,922 κτλ.

Λοιπὸν πρὸς εὐρεῖν τοῦ χρόνου πρέπει νὰ πολλαπλασιά-
ζηται ὁ τόκος ἐπὶ 100, τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸ κεφάλαιον, καὶ νὰ
διαιρῇται τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου.

δ'. Ἀγνωστον τὸ κεφάλαιον. Πόσαι δραχμαὶ φέρουσι τό-
κον 1080δρ εἰς 3^ῆτ^η πρὸς 8 τὰς 0|0 τὸ ἔτος;

Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα τῶν τόκων
καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν χρόνων, ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 8\delta\rho : 1080\delta\rho :: 100\chi\epsilon\rho : \chi\chi\epsilon\rho \\ 3\epsilon\tau : 1\epsilon\tau \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8\delta\rho : 1080\delta\rho :: 100\chi\epsilon\rho : \chi\chi\epsilon\rho \\ 3\epsilon\tau : 1\epsilon\tau \end{array}} \right\} \text{ὅθεν } \chi \text{ ἴσον } 4500\delta\rho$$

Λοιπὸν πρὸς εὐρεῖν τοῦ κεφαλαίου πρέπει νὰ πολλαπλα-
σιάζηται ὁ 100 ἐπὶ τὸν τόκον, τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸν χρόνον,
καὶ νὰ διαιρῇται τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου.

Ταῦτα ἀρχοῦσι διὰ νὰ δύνῃται τις νὰ λύῃ ὅποιονδήποτε πρό-
βλημα τόκου.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα προβλήματα πρὸς γύμνασιν.

1. Ἐτόκισέ τις 800δρ μὲ συμφωνίαν νὰ λάβῃ 1000δρ εἰς τὸ τέλος 3^ῆτ.
πρὸς τί ἐπιτόκιον πρέπει νὰ λογίζηται ὅτι ἐτόκισε τὰς 800δρ;

2. Ἀγοράζει τις τσόχας ἀξίας 900δρ, τὰς ὁποίας θέλει πληρώσει εἰς 8μῶν
ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον τῶν πρὸς 6 τὰς 0|0 τὸ ἔτος· εἰς τὴν γινομένην ὁμολογίαν
πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ γράψῃ ὅτι θέλει ἀποδώσει;

3. 7400δρ εἰς 27μῶν ἔφεραν τόκον 832δρ, 50· 8500δρ εἰς 3^ῆτ 9μῶν
πόσον τόκον φέρουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, καὶ πόσον εἶναι αὐτὸ τὸ ἐπιτό-
κιον;

4. 400δρ εἰς ἐμπόριον ἔφεραν κέρδος 72δρ εἰς 6· 900δρ εἰς τὸ αὐτὸ ἐμπο-
ριον πόσον κέρδος θέλουσι φέρει ἀναλόγως τῶν πρώτων εἰς 9μῶν;

Ἐπειδὴ τὰ κέρδη εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν τῶν δραχμῶν
καὶ τῶν χρόνων, ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 400\delta\rho : 900\delta\rho :: 72\chi\epsilon\rho : \chi\chi\epsilon\rho \\ 6\mu\eta\nu : 9\mu\eta\nu \end{array}$$

Ὅθεν 400δρ ἐπὶ 6μῶν : 900δρ ἐπὶ 9μῶν :: 72χερ : χχερ.

Ἡ ἀναλογία αὕτη δεικνύει ὅτι τὰ κέρδη εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα τῶν
γινομένων τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς χρόνους, ταῦτο δὲ θέλει εἶσθαι χρήσιμον
μετ' ὀλίγον.

235. Ἔως ἐδῶ ὑπετίθετο ὅτι ὁ τόκος λαμβάνεται κατ' ἔτος,
ἢ ἐὰν λαμβάνηται εἰς τὴν ὠρισμένην προθεσμίαν ὅλος ὁμοῦ,
λαμβάνεται πολλάκις [ὅσα εἶναι τὰ ἔτη ἢ οἱ μῆνες] ὁ ἐτήσιος ἢ
μηνιαῖος τόκος τοῦ κεφαλαίου, καὶ τότε κυρίως τοκίζεται τὸ

κεφάλαιον μόνον. Ἀλλ' ἐνίοτε γίνεται συμφωνία ὁ τοῦ πρώτου ἔτους τόκος νὰ λογιζέται ὅτι τοκίζεται ὁμοῦ μὲ τὸ κεφάλαιον τὸ δεύτερον ἔτος, ὥστε ὁ τόκος τοῦ δευτέρου ἔτους νὰ ᾔναι ὄχι μόνον τόκος τοῦ κεφαλαίου, ἀλλὰ καὶ τόκος τοῦ τόκου τοῦ πρώτου ἔτους· καὶ πάλιν τὸ τρίτον ἔτος νὰ λογιζέται ὅτι τοκίζεται ὅ,τι καὶ τὸ δεύτερον ἔτος καὶ ἔτι ὁ τόκος αὐτοῦ, κτλ. Τότε τὸ κεφάλαιον κατ' ἔτος μεταβάλλεται αὐξανόμενον κατὰ τὸν ἐτήσιον τόκον του, ὅστις εἰς ἄλλο ἔτος εἶναι ἄλλος· ὥστε ὁ τελευταῖος τόκος εἶναι τόκος τοῦ κεφαλαίου καὶ τόκος τόκων τοῦ κεφαλαίου. Ὅταν οὕτω δανείζωνται τὰ χρήματα, λέγεται ὅτι ἀνατοκίζονται, καὶ τὸ μὲν εἰς τὴν ἀρχὴν δανειζόμενον εἴμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ἀρχαῖον ἀντὶ κεφαλαίου, ὁ δὲ λαμβανόμενος εἰς τὴν προθεσμίαν τόκος, πολλαπλοῦς τόκος ἢ καὶ ἀνάτοκος. Πρὸς ἀντιδικστολήν δὲ ὁ προηγούμενος λέγεται ἀπλοῦς τόκος.

Ἐκ δὲ τῶν προειρημένων δυνατὸν νὰ εὕρεθῇ ὁ πολλαπλοῦς τόκος. Ἰδοὺ ζήτημα τοιοῦτον·

Ἀνατοκίζόμεναι 4500^{δρ} ἐπὶ 8 τὰς 0|0 κατ' ἔτος εἰς 5^{ἔτ} πύσον τόκον φέρουσιν;

Ὁ τόκος τῶν 4500^{δρ} εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους εἶναι 360^{δρ}, καὶ λοιπὸν αἱ τοκιζόμεναι τὸ δεύτερον ἔτος εἶναι 4860^{δρ}. Καὶ ἐπειδὴ τούτων ὁ τόκος εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους εἶναι 388^δ. 80, αἱ τοκιζόμεναι τὸ τρίτον ἔτος εἶναι 4860^{δρ} καὶ 388^δ. 80 ἥτοι 5248^δ. 80. Καὶ ἐπειδὴ τούτων ὁ τόκος εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους εἶναι 419^δ. 90 σχεδόν, αἱ τοκιζόμεναι τὸ τέταρτον ἔτος εἶναι 5248^{δρ}. 80 καὶ 419^δ. 90 ἥτοι 5668^{δρ}. 60. Πάλιν ὁ τόκος τούτων εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου ἔτους εἶναι 453^{δρ}. 49 σχεδόν, καὶ αἱ τοκιζόμεναι τὸ πέμπτον ἔτος εἶναι 5668^δ. 80 καὶ 453^δ. 49 ἥτοι 6122^δ. 29, τῶν ὁποίων ὁ τόκος εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου ἔτους εἶναι 489^{δρ}. 78. Ὡστε τὸ ἀρχαῖον ὁμοῦ μὲ τοὺς τόκους εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου ἔτους εἶναι 6612^δ. 07. Ἄν δ' ἐκ τούτων ἀρχι-

ρεθῇ τὸ ἀρχαῖον 4500^δ, μένει ὁ πολλαπλοῦς τόκος 2112^δ, 07.

Ἄν δὲ λογισθῇ ὁ τόκος τῶν 4500^δ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα, θέλει εὑρεθῇ πεντάκις 360^δ ἤτοι 1800^δ. Ἄν δ' ἀφαιρεθῇ οὗτος ἀπὸ τὸν πολλαπλοῦν τόκον 2112^δ, 07, μένει 312^δ, 07. Λοιπὸν ὁ πολλαπλοῦς τόκος εἶναι μεγαλήτερος τοῦ ἀπλοῦ κατὰ 312^δ περίπου.

Σημ. Ἄλλου θέλομεν πραγματευθῇ ἐκτενέστερα τὸ περὶ ἀντιτοκισμού.

Πρόβλημα. Ἀνατοκίζει τις 800^δρ πρὸς 5 τὰς 0|0 τὸ ἔτος· πόσον θέλει λάβει εἰς τὸ τέλος ἐξ ἐτῶν;

Πρόβλήματα ὑφαιρέσεως.

236: Αἱ ὁμολόγου ὑπόσχεται Γεώργιος τις νὰ δώσῃ δραχμὰς 3500 εἰς ὅτινα τοῦ παρουσιάσῃ τὸ ὁμολόγον εἰς τὸ τέλος ἐνὸς ἔτους ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης. Ὁ λαμβάνων τὸ ὁμολόγον Ἰωάννης ὑπάγει εὐθὺς εἰς τραπεζίτην νὰ τὸ ἐξαργυρώσῃ, ἤγουν νὰ δώσῃ τὸ ὁμολόγον καὶ νὰ λάβῃ χρήματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ 3500^δρ θέλουσι πληρωθῇ εἰς τὸ τέλος ἐνὸς ἔτους ἀπὸ τῆς ἡμέρας ταύτης, ὁ τραπεζίτης δεχόμενος τῶρα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους παρὰ τοῦ Ἰωάννου τὸ ὁμολόγον δὲν θέλει δώσῃ εἰς αὐτὸν ὅλας τὰς 3500^δρ, ἀλλὰ μέρος αὐτῶν, τὰς δὲ ἄλλας θέλει λογισθῇ ὡς κέρδος ἐνὸς ἔτους διὰ τὰς ὁποίας θέλει δώσῃ τῶρα εἰς τὸν Ἰωάννην δραχμὰς. Αἱ δραχμαὶ, τὰς ὁποίας κρατεῖ ὁ τραπεζίτης ὡς κέρδος ἐξ ὅλων τῶν ἐν τῷ ὁμολόγῳ, ὀνομάζεται ὑφαιρέσεις (κοινῶς ἐκπεσμοὶς), καὶ προβλήματα ὑφαιρέσεως λέγονται ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται πόσα θέλει κρατῆσαι ὁ τραπεζίτης ἢ ἄλλος, ὅστις δέχεται ὁμολόγον ἐξοφλητέον μετὰ ἐν ἢ πολλὰ ἔτη καὶ δίδει χρήματά, γενικώτερον δὲ ἐκεῖνα, ἐν οἷς ὑπάρχει ὅπως δῆποτε ἢ ὑφαιρέσεις.

Σημ. Εἶναι καλὸν νὰ μεταχειρίζομεθα καὶ τὸ ῥῆμα ὑφαιρούμαι λέγοντες, μέσως μὲν ὁ τραπεζίτης ὑφαιρεῖται τὸ ὁμολόγον ἤτοι ἐξαργυρώνει μὲ ἐκπεσμὸν τὸ ὁμολόγον, παθητικῶς δὲ τὸ ὁμολόγον ὑφαιρεῖται.

Ὑφαίρεσις τῶν 3500^δρ συνήθως λογίζεται ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος αὐτῶν πρὸς τὸ συμφωνημένον ἢ προσδιωρισμένον κοινῶς ἐπιτόκιον. Οὗτος δὲ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 231 θέλει εἶσθαι 280^δρ, ἂν τὸ ἐπιτόκιον ἦναι 8 τὰς 0|0· καὶ λοιπὸν, ἀφοῦ ὁ τραπεζίτης κρατήσῃ 280^δρ ἐκ τῶν 3500^δ, θέλει δώσει εἰς τὸν Ἰωάννην 3220^δρ.

Ἀλλ' ὡς δικαιοτέρα ὑφαίρεσις θεωρεῖται ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν δραχμῶν, ὅτας θέλει δώσει· τώρα ὁ τραπεζίτης εἰς τὸν Ἰωάννην, λογιζόμενος αὐτὸν πρὸς τὸ ἤδη προσδιωρισμένον ἐπιτόκιον. Τότε ὅμως εἶναι ἄγνωστος καὶ ἡ ὑφαίρεσις καὶ πόσας δραχμὰς θέλει λάβει ὁ Ἰωάννης.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ δύο τῶντα μέρη τῶν 3500^δρ εἶναι ἀνάλογα τοῦ 100 καὶ τοῦ ἐπιτοκίου 8, διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν ὅσα θέλει λάβει ὁ Ἰωάννης, ὡς ὁ 8 εἶναι ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τοῦ 100, διὰ τοῦτο το πρόβλημα τότε συνίσταται εἰς τὸ νὰ μερισθῇ ὁ 3500^δρ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν 100 καὶ 8, καὶ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 232 εὐρίσκεται ἡ ὑφαίρεσις ἴση μὲ 259^δρ 26 μείον 0, 04, ἡ ὅτι θέλει δώσει εἰς τὸν Ἰωάννην ὁ τραπεζίτης 3240,74.

Σημ. Ἀρκεῖ νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐν τῶν δύο μερῶν κατὰ τὴν τοῦ ἀριθμ. 232 μέθοδον, διότι τοῦ εὐρεθέντος μέρους ἀραιρουμένου ἀπὸ τὸν 3500^δρ προκύπτει τὸ ἄλλο. Προτιμότερον δὲ εἶναι νὰ εὐρεθῇ πόσον θέλει δώσει ὁ τραπεζίτης εἰς τὸν Ἰωάννην.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ ὑφαίρεσις αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς προτέρας κατὰ 20^δρ, 74· διότι αὕτη μὲν εἶναι ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν 3240^δρ 74, ἡ δὲ προτέρα εἶναι ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν 3500^δ. ἤγουν τόκος τῶν 3240^δ, 74, καὶ τοῦ τόκου τῶν 259^δ, 26· καὶ τῷ ὄντι ὁ ἐνὸς ἔτους τόκος τῶν 259^δ, 26 πρὸς 8 τὰς 0|0 εἶναι 20^δ, 74. Ἡ ἄλλως ἡ προτέρα ὑφαίρεσις εἶναι τόκος τῶν 3220^δρ, τὰς ὁποίας διδὲι εἰς τὸν Ἰωάννην ὁ τραπεζίτης, καὶ τόκος τῆς ὑφαίρεσεως ἥτοι τῶν 280^δρ, ὅστις εἶναι πολλὰ πλοῦς τόκος τοῦ τόκου τῶν 3220^δρ.

Σημ. Πρὸς διαστολὴν δὲ τῶν δύο τούτων ὑφαίρεσεων ἀπ' ἀλλήλων θέλομεν ὀνομάζει τὴν μὲν δευτέραν ἀπλότοκον ὑφαίρεσιν, διότι εἶναι ἀπλοῦς τόκος τῶν δρ 3240,74, ὅσας δίδει εἰς τὸν Ἰωάννην ὁ τραπεζίτης, τὴν δὲ πρώτην ἀνάτοκον ὑφαίρεσιν, διότι εἶναι τόκος τῶν 3500^{δρ} τοῦ ὁμολόγου, ἥτοι τόκος τῶν 3220 δραχμῶν, ὅσας δίδει εἰς τὸν Ἰωάννην ὁ τραπεζίτης, καὶ τόκος αὐτῆς τῆς ὑφαίρεσεως ἥτοι τῶν 280^{δρ}.

237. Πρόβλημα διαφέρον τοῦ προηγουμένου μόνον κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἐξοφλήσεως.

Ὁμολογῶν 3500^{δρ} ἐξοφλητέον εἰς τὸ τέλος 3 ἐτῶν ἀπὸ τῆς σήμερον, ἂν ὑφαιρεθῇ τώρα πρὸς 8 τὰς 0|0, πόσον ἀξίζει; ἢ τὸ ἄλλο, τίς εἶναι ἡ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

α'. Ἡ μὲν ἀνάτοκος ὑφαίρεσις τῶν 3500^{δρ} εἶναι ὁ τριῶν ἐτῶν τόκος αὐτῶν πρὸς 8 τὰς 0|0, οὗτος δὲ εὐρίσκεται (234) ἴσος μὲ 840^{δρ}. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσιν αὗται ἀπὸ τὰς 3500^{δρ}, μένει ἡ τωρινὴ ἀξία τοῦ ὁμολόγου 2660^{δρ}.

β'. Ἡ δὲ ἀπλότοκος ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τριῶν ἐτῶν τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τῶν 3500^{δρ} τοῦ ὁμολόγου. Ἡ δὲ παροῦσα αὕτη ἀξία καὶ ὁ τριῶν ἐτῶν τόκος αὐτῆς εἶναι ἀνάλογα τῶν 100 καὶ τοῦ τριετοῦς αὐτῶν τόκου ἥγουν τοῦ 24. Λοιπὸν κατὰ τὸν ἐν ἀρ. 232 κανόνα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 3500^{δρ} ἐπὶ 24, καὶ τὸ γινόμενον 84000 νὰ διαρεθῇ διὰ 124· τὸ πηλίκον 677^{δρ},42 μείον 0,01 εἶναι ἡ ὑφαίρεσις, καὶ ἐπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ὁμολόγου εἶναι 2822^{δρ},58. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῆς ἀνατόκου ὑφαίρεσεως εἶναι 162^{δρ},58, ἥτις εἶναι ὁ τριετὴς τόκος τῆς ἀπλοτόκου ὑφαίρεσεως 677^{δρ},42 ἐπὶ 8 τὰς 0|0.

Λοιπὸν πρὸς εὑρεσιν τῆς ἀπλοτόκου ὑφαίρεσεως πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇται ὁ ἐν τῷ ὁμολόγῳ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ ἐπιτόκιον, καὶ νὰ διαιρῇται τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ γινόμενου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

Ἡ δὲ ἀνάτοκος εὐρίσκεται κατὰ τὸν περὶ τόκου κανόνα [234, α'.]

Σημ. Οἱ ἔμποροι καὶ οἱ τραπεζῖται μεταχειρίζονται τὴν ἀνάτοκον ὑφαίρεσιν, διότι εὐρίσκεται δι' ὑπολογισμῶν ἀπλοῦς ἔρων. (Τίς ἡ διαφορά τῶν ὑπολογισμῶν.)

238. Διὰ νὰ ᾔηται δὲ ἡ ἀνάτοκος ὑφαίρεσις ἴση μὲ τὴν ἀπλότοκον, πρέπει τὸ ἐπιτόκιον αὐτῆς νὰ ᾔηται μικρότερον τοῦ τῆς δευτέρας, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἐξῆς πρόβλημα, εἰς τὸ ὅποιον ὑποτίθεται ἡ αὐτὴ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον.

Τραπεζίτης δι' ὁμολογον 5600δρ ἐξοφλητέον εἰς 14μῶν ἔδωκε 5129δρ,45· πρὸς τί ἐπιτόκιον τὸν μῆνα ἐλογίσθη ἡ ἀνάτοκος, καὶ πρὸς τί ἡ ἀπλότοκος ὑφαίρεσις;

Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ἡ διαφορὰ 470δρ,55 τῶν 5600δρ καὶ τῶν 5129δρ,45. Καὶ θεωρουμένη μὲν ὡς ἀνάτοκος, εἶναι ὁ 14μῶν τόκος τῶν 5600δρ πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, καὶ τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τοῦτο, 5600δρ εἰς 14μῶν φέρουσι τόκον 470,55· 100δρ εἰς ἓνα μῆνα πόσον τόκον φέρουσι; κατὰ δὲ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 234, 6'. πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ τόκος 470δρ,55 ἐπὶ 100, τὸ κεφάλαιον 5600δρ ἐπὶ τοὺς 14μῶν, καὶ τὸ πρῶτον γινόμενον 47055 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου 78400· τὸ πηλίκον 60^{λεπ} σχεδὸν εἶναι τὸ ἐπιτόκιον. Λοιπὸν ἡ ἀνάτοκος ὑφαίρεσις ἐλογίσθη πρὸς 60^{λεπ} τὰς 0|0 τὸν μῆνα.

Θεωρουμένη δὲ ἡ ὑφαίρεσις 470δρ 55 ὡς ἀπλότοκος, εἶναι ὁ 14 μηνῶν τόκος τῶν 5129δρ,45 πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, καὶ τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τοῦτο, 5129δρ,45 εἰς 14μῶν φέρουσι τόκον 470δρ,55· 100δρ εἰς ἓνα μῆνα πόσον τόκον φέρουσι; καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα εἰρίσκειται ἐπιτόκιον 65^{λεπ} μείον λεπτοῦ. Λοιπὸν ἡ ἀπλότοκος ὑφαίρεσις ἐλογίσθη πρὸς 65^{λεπ} περίπου τὰς 0|0 τὸν μῆνα. Τοῦτο τὸ ἐπιτόκιον λοιπὸν εἶναι κατὰ 5^{λεπ} περίπου μεγαλύτερον.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα προβλήματα.

1. Πόσον πρέπει νὰ δώσῃ τις τῶρα ὑφαιρούμενος πρὸς δρ 8 καὶ 75 λεπ τὰς 0|0 τὸ ἔτος ὁμολογον 2850δρ,45 ἐξοφλητέον εἰς 2ῆτα μῶνας;

2. Διὰ νὰ λαβῇ τις 8500δρ εἰς 5ετ 3μ, πόσα; πρέπει νὰ δανείσῃ τῶρα πρὸς 9 τὰς 0|0 ἐν ἔτος;

3. Ὑφαιρούμενός τις πρὸς 6 τὰς 0|0 τὸ ἔτος ὁμολογον 3200δραχ ἐπλήρωσε 3080δρ· εἰς πόσον χρόνον ἦτον ἐξοφλητέον;

4. Ἐμπορὶς ἀγοράσαςπραγματείας 1204δρ πληρωτέον εἰς τὸ τέλος ἐνός

ἐτους, ἀλλὰ κατὰ τινα συνθήκην δυνάμενος νὰ πληρώσῃ πρὸ τῆς προθεσμίας μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 10 τὰς 0|0, θέλει νὰ πληρώσῃ 220 ἡμέρας πρὸ τῆς προθεσμίας· πόσας δραχμὰς θέλει δώσῃ ἀντὶ τῶν 1204;

5. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ τις ἀντὶ 4918δρ ἐμμελοῦ ἐξοφλητέου εἰς 344 ἡμέρας ὑφαيروόμενος πρὸς δρ. 7 $\frac{2}{3}$ τὰς 0|0 τὸ ἔτος;

6. Ἐπλήρωσέ τις 53δρ ὑφαίρεισιν 6 μηνῶν πρὸς 9 τὰς 0|0 τὸ ἔτος· πόσων δραχμῶν γραμμᾶτιον ἐξηργύρωσεν;

7. Ἀντὶ 9495δρ ἐξοφλητέων εἰς ἓν ἔτος, ἀλλὰ καὶ πρὸ τούτου μὲ ὑφαίρεισιν, ἔδωσέ τις εἰς 7 μῆνας 9000 δρ· πρὸς πόσον τὰς 0|0 ἔγεινεν ἡ ὑφαίρεσις;

8. Ἠγόρασέ τις πραγματείας 9544δρ ἐξοφλητέων εἰς ἓν ἔτος (ἢ εἰς 314 ἡμέρας), ἀλλὰ μὲ συμφωνίαν νὰ τὰς ἐξοφλήσῃ καὶ πρότερον, ἂν δυνηθῇ, ὑφαيروόμενος πρὸς 6 τὰς 0|0. Ἐπειδὴ δ' ἐπλήρωσε πρὸ τῆς προθεσμίας 9357δρ, πόσας ἡμέρας πρότερον ἐπλήρωσεν;

9. Ἐργαστασιάρχης πωλήσας τσόχας ἐξοφλητέας εἰς 340 ἡμέρας, ἡ καὶ πρότερον μὲ ὑφαίρεισιν πρὸς 6 $\frac{1}{2}$ τὰς 0|0 τὸ ἔτος, ἔλαθεν εὐθὺς 3756δραχ· πόσα ᾤθει λάθει εἰς τὸ τέλος τῶν 340 ἡμερῶν;

Καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα λύονται ἢ ὡς τὰ τοῦ τόκου ἢ ὡς τὰ τῆς ὑφαίρεσιως.

10. Θέλω νὰ ἐμβάσω εἰς Παρισίους 4560δρ διὰ τινος τῶν ἐν Ἀθήναις τραπεζιτῶν, ὅστις ζητεῖ νὰ κερδίσῃ 4 τὰς 0|0 εἰς τὸ συνάλλαγμα τοῦτο· πόσας δραχ· ἔχω νὰ τοῦ δώσω ἐκτός τῶν 4560;

11. Ἐδωσα 4345δρ ἐν Σύρῳ, διὰ νὰ λάβω συναλλαγματικὴν ἐξοφλητέαν εἰς Λονδίνον· ἐὰν ὁ λαβὼν τὰς 4345δρ ἔμπορος θέλῃ νὰ κερδίσῃ 5 τὰς 0|0, πόσων δραχμῶν θέλει εἶσθαι ἡ συναλλαγματικὴ;

12. Τραπεζίτης ἐζήτησε 142 δραχ· κέρδος εἰς συνάλλαγμα χρημάτων τινῶν, λογιζόμενος αὐτὸ πρὸς 3 τὰς 0|0· πόσαι ἦσαν αὗται αἱ δραχμαί;

13. Τραπεζίτης ἔδωκε συναλλαγματικὴν 4537δρ ἀντὶ 5036δρ, πρὸς πόσον τὰς 0|0 ὠφελήθη;

14. Ἐμπορος ἀντὶ χρημάτων. τὰ ὅποια θέλει δώσῃ, λαμβάνει παρ' ἄλλου συναλλαγματικὴν 3053δρ, τοῦ κέρδους τοῦ συναλλάγματος ὄντος 2 $\frac{1}{2}$ τὰς 0|0· πόσας δρ. θέλει δώσῃ;

Προβλήματα Ἐταιρίας.

239. Ὀνομάζονται οὕτω ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται τί μέρος κέρδους, ἡ καὶ ζημίας, προκύπτοντος ἐξ ἐμπορικῆς τινος ἐπιχειρήσεως, ἀνήκει εἰς ἓνα ἕκαστον τῶν συνενωσάντων τὰ χρήματά των εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Καὶ τὰ μὲν χρήματα, τὰ ὅποια ἕκαστος καταθέτει εἰς

τὴν ἐπιχειρήσιν, ὀνομάζονται συνήθως καταβολαί, τὸ δὲ ἄθροισμα ὅλων τῶν καταβολῶν λέγεται ὀλική καταβολή, ἀλλ' εἴμπορεϊ νὰ ὀνομάζηται καὶ ἀφορμὴ τῆς ἐπιχειρήσεως.

α. Τρεῖς συνεταῖροι εἰς ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν ὁ μὲν 25000δρ, ὁ δὲ 18000δρ, ὁ δὲ 42000δρ, ἐπὶ τινα δὲ χρόνον ἐκέρδισαν 57220δρ· πόσον τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕνα ἕκαστον αὐτῶν;

Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸ δίκαιον τὰ κέρδη πρέπει νὰ ᾖναι ἀνάλογα τῶν καταβολῶν, καὶ τὸ ζήτημα καταντᾷ εἰς τὸ νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος 57220δρ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν τριῶν ἀριθμῶν 25000, 18000 καὶ 42000, ἡ ἀπλούστερα, ἀνάλογα τῶν 25, 18, 42, διότι οὗτοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν προειρημένων. Κατὰ δὲ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 232 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κέρδος 57220δρ ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν τριῶν ἀριθμῶν 25, 18, 42, καὶ τὸ γινόμενον ἕκαστον νὰ διαιρεθῇ διὰ 85, τοῦ ἄθροισματος αὐτῶν. Οὕτω θέλει μερισθῇ τὸ ὅλον κέρδος εἰς δραχμὰς

16829 $\frac{5}{17}$	}	(25000
12117 $\frac{3}{17}$		(18000
28273 $\frac{2}{17}$		(42000
57220		

β. "Εμπορὸς τις ἤρχισεν ἐμπόριόν τι μὲ 3000δρ, μετὰ δὲ 6μῆν· συμπαραλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταθέτει 400δρ, καὶ 5μῆν ὑστερώτερα συνενοῦται μὲ αὐτοὺς τρίτος καταθέτων 8000δρ· 9μῆν δὲ μετὰ ταῦτα ἐξετάσαντες ἤνραν ὅτι ἐκέρδισαν 12050δρ· πόσον θέλει λάβει ἕκαστος τούτων;

Τοῦτο διαφέρει τοῦ προηγουμένου καθότι δὲν ᾔσαν ὅλοι οἱ ἔμποροι ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους εἰς τὸ ἐμπόριον, ἀλλ' ὁ πρῶτος 20μῆν, ὁ δεύτερος 14μῆν καὶ ὁ τρίτος 9μῆν μόνον.

Ἀλλ' ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι τὸ αὐτὸ κέρδος, τὸ ὅποιον φέρουσι 3000δρ εἰς 20μῆν, φέρουσι καὶ εἰκοσάκις 3000δρ ἥτοι 60000 εἰς τὸ εἰκοστὸν τῶν 20μῆν ἥτοι εἰς ἕνα μῆνα. Καὶ πάλιν 4000δρ εἰς 14μῆν φέρουσι τὸ αὐτὸ κέρδος,

τὸ ὅποιον φέρουσι 4000δρ ἐπὶ 14 ἤτοι 56000δρ εἰς τὸ $\frac{1}{24}$ τῶν 14μην, ἤτοι εἰς ἓνα μῆνα. Καὶ 8000δρ εἰς 9 μῆνας φέρουσι κέρδος ἶσον μὲ τὸ τῶν 8000δρ ἐπὶ 9 ἤτοι τῶν 72000δρ εἰς ἓνα μῆνα. Ὡστε τὸ ζήτημα καταντᾷ εἰς τοῦτο, τρεῖς ἔμποροι εἰς ἓνα μῆνα ἐκέρδισαν 12050δρ, ὁ μὲν καταθέσας 60000δρ ὁ δὲ 56000δρ. ὁ δὲ 72000δρ. τί ἀνήκει εἰς ἕκαστον αὐτῶν; τὸ ὅποιον εἶναι ὁμοιον μὲ τ' ἀνωτέρω. Καὶ μερίζοντες τὰς 12050 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν 60000, 56000, 72000, ἡ μᾶλλον τῶν 60, 56, 72, ὡς ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος θέλει λάβει 3845,74 μείον 0, 01, ὁ δεύτερος 3589,36 μείον 01, καὶ ὁ τρίτος 4614,89 μείον 0, 01.

Σημ. Ἄλλως εἶναι φανερόν ἐκ τοῦ 4 προβλήματος (σελ. 188) ὅτι τὰ μερικὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν καταβολῶν ἐπὶ τοὺς μῆνας.

Ἐκ τῶν εἰρημένων θέλει δυνηθῇ τις εὐκόλως νὰ λύσῃ καὶ τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

1. Τρεῖς χαρτοπαῖχται παίξαντες συντροφικῶς ἔχασαν 780δρ, καὶ ὁ μὲν εἶχε καταθέσει 234δρ, ὁ δὲ 702, ὁ δὲ 1404· πόσον ἔχασεν ἕκαστος ἀναλόγως τῆς καταβολῆς του;

2. Ἐμπόρος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 37840δρ, χρεωστῶν δὲ εἰς μὲν τὸν Γ 5649δρ, εἰς δὲ τὸν Δ 25580, εἰς δὲ τὸν Ε 14623, εἰς δὲ τὸν Ζ 15600· πόσας δρ θέλει λάβει ἕκαστος τούτων ἀναλόγως τῶν ὅσα τοῦ χρεωστοῦνται;

3. Πέντε συνεταῖροι μὲ 500000δρ ἀφορμὴν ἐκέρδισαν 210000δρ, τούτων δὲ ὁ μὲν ἔλαβε μερίδιον 39000, ὁ δὲ 75000, ὁ δὲ 55000, ὁ δὲ 12700, ὁ δὲ τὸ ὑπόλοιπον· πόσας δραχμὰς εἶχε καταθέσει ἕκαστος;

4. Τέσσαρες τινες τρία ἔτη ὄντες σύντροφοι ἐκέρδισαν ἕως εἰς τὸ τέλος τῶν 3 ἐτῶν 47090δρ· καὶ ὁ μὲν καταθέσας εἰς τὸ κοινὸν ταμεῖον κατ' ἀρχὰς 1000δρ, ἐπρόσθεσεν εἰς τὸ τέλος τῶν 2 ἐτῶν ἄλλας 4500, ὁ δὲ καταθέσας εἰς τὴν ἀρχὴν 7900δρ· ἐπρόσθεσεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 4580, ὁ δὲ εἰς τὴν ἀρχὴν ἔθεσε 5600δρ καὶ εἰς τὸ τέλος τῶν 18 μηνῶν ἔθεσεν ἔτι 1500, ὁ δὲ θέσας πρῶτον 7800δρ ἐπρόσθεσε μετὰ 2 $\frac{1}{2}$ ἔτη ἄλλας 1468· τί μέρος τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

5. Τρεῖς ἔμποροι, τῶν ὁποίων ὁ μὲν κατέθεσε 743δρ καὶ ἀπεσύρθη εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ὁ δὲ 7408δρ καὶ ἀπεσύρθη εἰς τὸ τέλος 2 ἐτῶν καὶ 3 μηνῶν, ὁ δὲ 9468δρ καὶ διέμεινε μόνος ἔτι 4 μῆνας, μετὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἐκκαθάρισαντες τοὺς λογαριασμοὺς των ἤρξαν ὅτι ἐζημιώθησαν 4775δρ· πόσον ἐζημιώθη ἕκαστος;

6. Ἀρχίζει τις ἐμπόριον τι μὲ 25000δρ, μετὰ 5 μῆνας συμπαραλαμβάνει ὡς σύντροφον κεφαλαιοῦχος, ὅστις τοῦ ἔδωκε 40000δρ, καὶ 6 μῆνας μετὰ τοῦτο ἄλλος κεφαλαιοῦχος τοῦ δίδει 60000δρ καὶ γίνεται συμμετοχος τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως· αὕτη εἰς τὸ τέλος 2 ἐτῶν φέρει κέρδος 8000δρ· ἐσυμφωνήθη δὲ ὁ πρῶτος, ὅστις μόνος πραγματεύεται τὸ ἐμπόριον, νὰ λάβῃ ἐτι διὰ τὸν κόπον τοῦ ἐξ ὅλου τοῦ κέρδους 5 τὰς 0|0, ἐκτὺς τοῦ ἀνήκοντος εἰς αὐτὸν μεριδίου. Πόσον θέλει λάβει ἕκαστος;

Προβλήματ' ἀναμίξεως.

240. Εἶναι δύο εἰδῶν ἀναμίξεως προβλήματα, α. ἐκεῖνα, ἐν οἷς πρόκειται ν' ἀναμιχθῶσι πράγματα, τῶν ὁποίων καὶ τὸ ποσὸν καὶ ἡ ἀξία τῆς μονάδος εἶναι γνωστὰ, καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μονάδος τοῦ μίγματος· β'. ἐκεῖνα, ἐν οἷς πρόκειται ν' ἀναμιχθῶσι μέρη διχοφύρων πραγμάτων, καὶ γνωστῆς οὐσῆς τῆς ἀξίας τῆς μονάδος ἑνὸς ἐκάστου πράγματος αὐτῶν καὶ τῆς ἀξίας τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, νὰ εὑρεθῇ πόσον μέρος ἐκάστου πρέπει νὰ λαμβάνηται πρὸς ἀνάμιξιν.

Ἡ λύσις τοιούτων προβλημάτων γίνεται ὅχι δι' ἀναλογιῶν, ἀλλὰ τὰ τοῦ πρώτου εἶδους, ὁποῖον εἶναι τὸ 120 καὶ 121 προβλημα τοῦ 159 ἀριθ, λύνονται ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀξία τῆς μονάδος ἑνὸς ἐκάστου πράγματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτοῦ, τὰ γινόμενα ὅλα προστεθῶσι, καὶ τὸ κεφάλαιον διαιρεθῇ διὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀριθμῶν ὅλων τῶν πραγμάτων. Τοῦτο εἶναι τόσον εὐκόλον νὰ ἐννοηθῇ, ὥστε εἴποιτο περιττὴ πᾶσα περικοτέρω ἀνάπτυξις.

Τὰ δὲ τοῦ δευτέρου εἶδους μόνον διὰ τῆς ἀλγέβρας λύνονται ἀκριβῶς. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι ἐκ τῶν πολὺν ὠφελίμων νὰ ἡεῦρη τις νὰ λύῃ καὶ τοιαῦτα, λέγομεν ὀλίγα τινὰ καὶ περὶ τούτων.

α. Ἐχει τις καφὲρ δύο εἰδῶν, καὶ ἐνῶ τοῦ μὲν ἡ ὁκὰ ἀξίζει δρ 1,80, τοῦ δὲ ἀξίζει δρ 1,50, θέλει ν' ἀναμίξῃ μέρος τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου τόσον, ὥστε ἡ ὁκὰ τοῦ μίγματος ν' ἀξίῃ δρ 1,70· πόσον ἐξ ἐκατέρου πρέπει ν' ἀναμίξῃ;



BIBLIOTHECA
M. GALATA

Ἀφαιρείται ὁ 1,70 ἀπὸ τὸν 1,80 καὶ ἡ
 διαφορὰ 10 γράφεται ἀντικρὺ τοῦ 1,50·
$$1,70 \left\{ \begin{array}{l} 1,80 \ 20 \\ 1,50 \ 10 \end{array} \right.$$

 ἀφαιρείται ὁ 1,50 ἀπὸ τὸν 1,70 καὶ ἡ διαφορὰ 20 γράφε-
 ται ἀντικρὺ τοῦ 1,80. Ἄν λοιπὸν λάβῃ τις 20^{κάδ.} ἐκ τοῦ ἀξιζον-
 τος 1,80, ἐκ τοῦ ἀξιζοντος 1,50 πρέπει νὰ λάβῃ τὸ ἡμισυ ἤτοι
 10 ὀκάδας, ἢ σύντομα, πρέπει νὰ λάβῃ 2 καὶ 1.

Ἄν ἀντὶ 1,70 ἐζητεῖτο ν' ἀξιζῇ ἡ ὀκά τοῦ μίγματος δρ
 1,60, τότε ἔπρεπε νὰ λαμβάνωνται 2 ἐκ τοῦ ἀξιζοντος
 1,50, καὶ 1 ἐκ τοῦ ἀξιζοντος 1,80. Ἄν δ' ἐζητεῖτο ν' ἀξιζῇ δρ
 1,65, ἔπρεπε νὰ λαμβάνωνται ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν δύο.

Ε'. Πωλεῖ τις οἶνον, τὸν μὲν πρὸς 70 λεπτά τὴν ὀκάν, τὸν
 δὲ πρὸς 45, τὸν δὲ πρὸς 60· θέλει δὲ ν' ἀναμίξῃ μέρη αὐτῶν
 οὔτως, ὥστε νὰ πωλῇ τὸ μίγμα πρὸς 56 λεπτά τὴν ὀκάν
 χωρὶς νὰ χάσῃ τίποτε· πόσον ἐξ ἐκάστου πρέπει ν' ἀναμίξῃ;

Ἀφαιρείται ὁ 45 ἀπὸ τὸν 56 καὶ ἡ διαφορὰ
$$\left\{ \begin{array}{l} 70 \ 11 \\ 56 \ 60 \ 11 \end{array} \right.$$

 11 γράφεται ἀντικρὺ καὶ τοῦ 70 καὶ τοῦ 60·
$$\left\{ \begin{array}{l} 70 \ 11 \\ 56 \ 60 \ 11 \end{array} \right.$$

 ἀφαιρείται ὁ 56 ἀπὸ τὸν 60 καὶ 70 καὶ τὸ
$$\left\{ \begin{array}{l} 70 \ 11 \\ 56 \ 60 \ 11 \\ 45 \ 18 \end{array} \right.$$

 ἄθροισμα 18 τῶν διαφορῶν 4 καὶ 14 γράφεται ἀντικρὺ τοῦ 45.
 Λοιπὸν πρέπει νὰ λάβῃ τις 11 ὀκάδας ἀπὸ τὸν ἀξιζοντα 70
 καὶ 60, καὶ 18 ἀπὸ τὸν ἀξιζοντα 45. Ἐπειδὴ οὕτω θέλει ἔχει
 μίγμα 40 ὀκάδων ἀξιζον δρ 22,40. Ἐὰν δ' ἐπωλοῦντο χωρι-
 στὰ οἱ οἶνοι, ἤθελεν ἔχει ἐκ τοῦ πρώτου 70 ἐπὶ 11 ἢ δρ 7,70,
 ἐκ τοῦ δευτέρου 60 ἐπὶ 11 ἤτοι δρ 6,60, καὶ ἐκ τοῦ τρίτου
 45 ἐπὶ 18 ἤτοι 8,10, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι δρ 22,40.

Υ'. Ἐχει τις σταφίδα τεσσάρων εἰδῶν, τὴν μὲν πρὸς 80
 πεντάδρ τὴν χιλιάδα, τὴν δὲ πρὸς 70, τὴν δὲ πρὸς 65, τὴν
 δὲ πρὸς 50· θέλει δὲ τὸ ἐκ τούτων μίγμα ν' ἀξιζῇ 68 πεν-
 τὰδρ τὴν χιλιάδα· πόσον μέρος ἐκάστου πρέπει ν' ἀναμίξῃ;

$$68 \left\{ \begin{array}{l} 80 \ 18 \ 3 \\ 70 \ 3 \ 18 \\ 65 \ 2 \ 12 \\ 50 \ 12 \ 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}$$

35

Πρέπει ν' ἀναμίξῃ ἢ 18 μέρη τῶν 80, 3 τῶν 70, 2 τῶν 65 καὶ 12 τῶν 50, ἢ 3 τῶν 80, 18 τῶν 70, 12 τῶν 65 καὶ 2 τῶν 50. Ἐπειδὴ 35 χιλιάδ ἐπὶ 68 παράγουσι 2380 πεντάφ.

Ἀλλὰ καὶ	18 χιλ. ἐπὶ 80 παράγουσι	1440 πεντ.
	3 ἐπὶ 70	210
	2 ἐπὶ 65	130
	12 ἐπὶ 50	600
		2380
ἢ	3 ἐπὶ 80	240
	18 ἐπὶ 70	1260
	12 ἐπὶ 65	780
	2 ἐπὶ 50	100
		2380

Ταῦτα ἀρκοῦσι, διὰ νὰ θύνηταί τις νὰ λύῃ τοιοῦτου εἶδους προβλήματα. Τελειότερα δὲ ἀνάπτυξις ἀφίενται εἰς τὸν διδάσκοντα, ὅστις γνωρίζει, ὅτι, ὅσον μεγαλητέρα εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἀξίης πράγματός τινος πρὸς τὴν τοῦ μίγματος ἀξίαν, τόσον ὀλιγώτερον πρέπει νὰ λαμβάνηται ἐξ αὐτοῦ τοῦ πράγματος εἰς τὴν ἀνάμειξιν, καὶ τὰν ἀπαλιν.

Δὲν λέγομεν τίποτε ἰδίως περὶ τῶν προβλημάτων, ἐν οἷς πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τόσα νομίσματα ἔθνους τινὸς μὲ πόσα ἄλλου ἔθνους ἰσοτιμῶνται, γνωστῆς οὗσης τῆς σχέσεως τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἄλλων ἔθνων νομίσματα· διότι εὐκόλως τις δύναται νὰ λύσῃ τοιαῦτα χωρὶς ἀνυπολογισμῶν. Ἄλλως, καὶ εἰς τὸν 189 ἀριθμὸν ὑπάρχουσι τοιαῦτα προβλήματα, καὶ εἰς τὸ ἐξῆς θέτομέν τινα.

Προβλήματα διάφορα.

1. Πόσον τόκον φέρουσι δραχ. 8472,65 πρὸς 9 τὰς 0/11 εἰς πέντε ἔτη, ἢ εἰς 8 μῆν, ἢ εἰς 103 ἡμ, ἢ εἰς 4 ἔτη 7 μῆνας καὶ 25 ἡμέρας;
2. Πόσαι δραχμαὶ τοκισθεῖται πρὸς δραχ. 8,70 εἰς τρία ἔτη ἑφερὸν τόκον δρ. 585,60; ἢ ἔγειναν ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον των 15645;
3. Εἰς πόσον χρόνον δρ. 4607,50 πρὸς δρ. 10 — τὸ ἔτος δανεισθεῖται θέλουσι γένειν δρ 7258,75; ἢ θέλουσι φέρεν τόκον 1250 δρ.

4. Πρὸς τί ἐπιτόκιον τοκισθεῖται 3789 δρ. εἰς 39 ἡμέρας εὐωσαν τὸν δρ. 28.73; ἢ εἰς ὃ ἔτη καὶ 87 ἡμέρας ἔγειναν 5642;

Εἶναι εὐκολὸν νὰ συστήσῃ τις καὶ ἄλλα, μεταβάλλων μόνον τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ νὰ τὰ λύσῃ πρὸς γύμνασιν. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἐφεξῆς.

5. Εἴχέ τις οἶνον εἰς πώλησιν, καὶ ὁ μὲν τις τοῦ ἐπρόσφερε 7000 δρ. πληρωτέας εὐθὺς, ἢ εἰς ἓν ἔτος μὲ τὸν τόκον των πρὸς 40 τὰς 0/0, ὁ δὲ τις τοῦ ἐπρόσφερε 2000 δρ. πληρωτέας εὐθὺς, καὶ 5540 πληρωτέας εἰς 8 μῆνας. Πωλήσας τὸν οἶνον εἰς τὸν δεύτερον καὶ ὅχ' εἰς τὸν πρῶτον, ἔχασεν ἢ ἐκέρδισε, καὶ πόσον;

6. Ἐργοστασιάρχουπραγματεῖται ἀξίζουσι 7345 δρ. εὐθὺς πληρωτέας, αἵτινες ἀμέσως τοκίζονται πρὸς 8 τὰς 0/0· ἂν δὲ τὰς πωλήσῃ μὲ προθεσμίαν 9 μηνῶν, πόσον πρέπει νὰ τὰς πωλήσῃ, διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ;

7. Ἀρτοποιὸς ἄλευρον ἀγοράσας 3790 δραχ., τῶν μὲν πληρωτέων εὐθὺς, τῶν δὲ εἰς 6 μῆνας μὲ τόκον πρὸς 8 τὰς 0/0, πληρῶνει εὐθὺς 2040 δρ· πόσας θέλει δώσει εἰς τὸ τέλος τῶν 6 μηνῶν;

8. Ἐμπορὸς ἡγόρασεν ὑφάσματα 9430 δρ. πληρωτέων εἰς ἓν ἔτος, ἢ καὶ πρότερον μὲ ὑφαίρεισιν πρὸς 6 τὰς 0/0· ἐπλήρωσε δὲ εὐθὺς μὲν 2700 δρ, εἰς δύο δὲ μῆνας 1709 δρ, 4 δὲ μῆνας πρὸ τοῦ τέλους τοῦ ἔτους 4000 δρ, τὰς δὲ ἐπιλοίπους θέλει νὰ πληρώσῃ 25 ἡμέρας πρὸ τοῦ τέλους τῆς προθεσμίας. Ἡμέρας δραχ. πρέπει νὰ δώσῃ;

9. Πόσας δεσμίδας χάρτου 6 δρ, 7,50, καὶ 8 δρ ἀγοράζει τις μὲ δρ 486,50, ἐὰν θέλῃ ἶσον ἀριθμὸν δεσμίδων τῶν τριῶν τιμῶν;

10. Δύο ταπήτων τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀλλὰ διαφόρου μήκους κατὰ τρεῖς πήχεις, ὁ μὲν ἐτιμήθη 48 δρ, ὁ δὲ 36 δρ· πόσων πήχεων ἦτον μακρὸς ἑκάτερος αὐτῶν;

11. Ἡ περιτυνὴ δαπάνη οἰκογενείας τινὸς ἦτον 24640 δραχ. τῶν ὑποίων ἐδαπάνησεν ὁ οἰκογενειάρχης δι' ἑαυτὸν μέρος, λογιζόμενον πρὸς 40 λεπτὰ τὴν δραχμὴν· πόσας δρ. ἐδαπάνησεν αὐτὸς δι' ἑαυτόν;

12. Ὀντος 5049 δρ. τοῦ τόκου 11880 δρ. εἰς 8 ἔτη καὶ 6 μῆνας, πρὸς τί ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῶσιν αἱ αὐταὶ δραχ., ὥστε νὰ τοκοφορήσωσιν 7360 δρ. κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον; — Ἡ ἂν τὸ ἐπιτόκιον ᾖναι 5, πρὸς τί ἐπιτόκιον πρέπει νὰ δανεισθῶσι 8910 δραχ., ὥστε κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον νὰ φέρωσι τὸν αὐτὸν τόκον;

13. Ῥάπτης ἀγοράσας τσόχας 960 δρ. πληρωτέων εἰς ἓν ἔτος, ἢ καὶ πρότερον μὲ ὑφαίρεισιν πρὸς 4 τὰς 0/0, ἐπλήρωσε τὸν ἔμπορον δρ. 937,60· πότε τὸν ἐπλήρωσεν

14. Τραπεζίτης ἐν Ἀθήναις, εἰς τὸν ὁποῖον παρουσιάζω συναλλαγματικὴν 6450 δρ. πληρωτέων ἐν Σύρῳ εἰς τὸ τέλος 2 μηνῶν, ζητεῖ νὰ κερδέσῃ 4 τὰς 0/0 ἕνεκα τοῦ χρόνου, καὶ ἔτι 4 $\frac{1}{2}$ τὰς 0/0 ἕνεκα τοῦ συναλλάγματος· πόσας δραχ. θέλω λάβει παρ' αὐτοῦ;

15. Ὁ ἐπιστάτης κυρίου τινὸς ἔχων ὡς μισθὸν τὸ 2^{ον} τῶν χρημάτων, ὅσα συνάγει ὑπὲρ τοῦ κυρίου του, λαμβάνει ἐτησίως 15600 δραχ· πόσον εἶναι τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα τοῦ κυρίου, καὶ πόσον τοῦ μένει, ἂν τοῦ κρατήσῃ ὁ ἐπιστάτης τὸν μισθὸν του;

16. Δεχθεὶς ἔμπορος ἐκ Λονδίνου συναλλαγματικὴν ἐκ Παρισίων φράγκων 812,50, πόσων λιτρῶν στερλινῶν χρεώστην θέλει σημειώσῃ τῶν ἐκ Παρισίων ἀνταποκριτῇ του, τῆς λίτρης στερλίνης ἰσοτιμωμένης μὲ 24 φράγκα;

17. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ τις ἀσφαλιστικὰ 8783 δραχμῶν πρὸς δρ. 11,50 τὰς 0/0;

18. Πλοῖον, τοῦ ὁποῖου τὸ φορτίον ἐξετιμήθῃ 985000 δραχ., ἔκαμε χύσιν ἐν καιρῷ κινδύνου 47000 δρ· ἔμπορος δέ τις, ἔχων εἰς τὸ πλοῖον τοῦτοπραγματείας 600000 δρ, πόσον ἐζημιώθῃ ἐκ τῆς χύσεως ταύτης;

19. Πωλήσας τις δρ. 1081,50 πραγματείας, τὰς ὁποίας εἶχεν ἀγοράσει δρ. 949,90, πόσον τὰς 0/0 ἐκέρδισεν;

20. Δύο ἔμποροι θέλουν νὰ κάμωσιν ἀνταλλαγὴν, ὁ μὲν ἔχων Ἰσπανικὴν τσόχαν, τὴν ὁποίαν πωλεῖ μὲ χρήματα δρ. 5,75 τὸν πῆχυν, εἰς δὲ τὸ ἀντάλλαγμα θέλει νὰ λάβῃ δραχμ. 6,50, ὁ δὲ ἔχων τσόχαν τῆς Ἑλβεύφης, τὴν ὁποίαν μὲ χρήματα πωλεῖ δρ. 12,25, εἰς δὲ τὸ ἀντάλλαγμα θέλει νὰ λάβῃ δρ. 15,50· πότερος θέλει κερδίσει, καὶ πόσον;

21. Ράπτῃς χρεωστῇ εἰς ἔμπορον 60 δρ. πληρωτέας εἰς 5 μῆνας, 900 δρ. πληρωτέας εἰς 8 μῆνας, καὶ 1000 δρ. πληρωτέας εἰς 14 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ πληρώσῃ ὅλας ὁμοῦ τὴν αὐτὴν ἡμέραν, πότε πρέπει νὰ τὰς πληρώσῃ, ὥστε νὰ γείνῃ ἀντιστήκωσις τῶν τόκων;

22. Τεχνίτης χρεωστῶν 24 δρ. εἰς ξενοδόχον συμβιβάζεται μ' αὐτὸν νὰ τὰς πληρώσῃ εἰς 6 μῆνας, ἂν δὲ προπληρώσῃ μέρος αὐτῶν, νὰ ἐμπληρώσῃ τὰς ἐπιλοιπούς κατὰ λόγον τῆς προπληρωμῆς. Ἐπειδὴ δ' ἐπλήρωσε 4 δραχ. εἰς δύο μῆνας ἀπὸ τοῦ συμβιβασμοῦ καὶ 8 δρ· εἰς 3 μῆνας μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 4 δραχ., εἰς πόσον χρόνον θέλει πληρώσῃ τὰς ἄλλας 12 δραχμάς;

23. Ἐπώλησέ τις τι ἀντὶ 3600 δρ. πληρωτέων εἰς 15 μῆνας· ἄλλ' ὁ ὀφειλέτης ἐπλήρωσε μέρος αὐτῶν πρὸ τῆς προθεσμίας, καὶ 1200 δρ. εἰς 3 ἔτη καὶ 9 μῆνας ἕνεκα τῆς προπληρωμῆς· πόσας δραχ. προεπλήρωσε, καὶ πόσον χρόνον πρὸ τῆς προθεσμίας;

24. Ἐμπορος χρωστικῶν 6200 δρ πληρωτέας εἰς 7 μῆνας, 6200 ἄλλας εἰς 15 μῆνας καὶ 6200 ἄλλας εἰς 29 μῆνας, ἐπλήρωσε τὸ ὅλον εἰς 17 μῆνας· ἔχασεν ἢ ἐκέρδισεν;

25. Ἐξώφλησέ τις χρῆος τι διὰ τριῶν πληρωμῶν, πρῶτον δώσας 460 δρ, δευτέρον τόσας, ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν πρὸς τὰς 460 εἶναι ὡς 4 πρὸς 6, καὶ τρίτον τόσας, ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν πρὸς τὰς τῆς δευτέρας πληρωμῆς εἶναι ὡς 6 πρὸς 9· πόσας δρ ἐχρεώσται, καὶ πόσκι δρ ἦτον ἢ δευτέρα καὶ τρίτη πληρωμὴ;

26. Εἰσπράκτωρ, ὅστις ἔχει ἀντιμισθίαν παρὰ τῆς κυβερνήσεως 3 λεπτὰ κατὰ δραχμὴν, τῶν ὅσας συνάξῃ κατ' ἔτος, εἰσπράττει κατ' ἔτος δρ 77453,90· πόσκι δρ εἶναι τὸ μηνιαῖον κέρδος του;

27. Ἐννέα ταινιοποιοὶ εἰς 15 ἡμέρας 10 ὥρας καθημέραν ἐργαζόμενοι: ἔπλεξαν 170 ταινίας 30 πήχεων μακρὰς· 15 ταινιοποιοὶ εἰς 45 ἡμέρας 12 ὥρας καθημέραν ἐργαζόμενοι πόσας ταινίας θέλουσι πλεῖξει; 40 πήχειων μακρὰς καὶ τριπλασίας τῶν πρώτων τὸ πλάτος;

28. Εἰς πίθον (βουτσὶ) εἶναι 985 ὀκάδες οἴνου πωλουμένου πρὸς 45 λεπτὰ τὴν ὀκάν· πόσον ὕδωρ πρέπει ν' ἀναμιχθῇ μὲ τὸν οἶνον τοῦτον, διὰ νὰ πωλῇται 35 λεπτὰ ἡ ὀκά;

29. Ἐὰν τριῶν τινῶν αἱ ἡλικίαι ὁμοῦ ᾔναι 144 ἔτη, καὶ ἡ μὲν τοῦ δευτέρου ᾔναι διπλασία τῆς τοῦ πρώτου, ἡ δὲ τοῦ τρίτου τριπλασία τῆς τοῦ δευτέρου, πόση εἶναι ἑνὸς ἐκάστου ἡ ἡλικία;

30. Τὸ ἥμισυ ῥάβδου καὶ τὸ ἓν τρίτον αὐτῆς εἶναι ἑντὸς τοῦ ὕδατος, καὶ μέρος αὐτῆς ἴσον μὲ δύο πόδας εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὕδατος· πόσων παλαμῶν μακρὰ εἶναι ἡ ῥάβδος;

31. Βρύσις ῥέουσα 2 $\frac{1}{2}$ ὥρας γεμίζει δεξαμενὴν, τὴν ὁποῖαν ἄλλη βρύστις γεμίζει εἰς 3 $\frac{3}{4}$ ὥρας· αἱ δύο ὁμοῦ ῥέουσαι εἰς πόσας ὥρας ἔθελαν τὴν γεμίσει;

32. Τίς εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 490;

33. Θαιὸς τις ἄρῃσε κληρονόμους τῆς περιουσίας του τοὺς 4 ἀνεψιούς του, διατάξας νὰ λάβῃ ὁ μὲν πρῶτος τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτῆς, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{9}$, ὁ δὲ τὰ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς, ὁ δὲ τὸ ἐπιλοιπον ὃν 22952 δρ· πόση ἦτον ἡ κληρονομία, καὶ πόσον ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν πρώτων;

34. Τὰ ἀργύριά μου, ἔλεγέ τις, εἶναι τόσα, ὥστε, ἂν δαπανήσω τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{12}$, θέλουσι μὲ μείνει 20· πόσα εἶχεν;

35. Στρατηγὸς ἐπιθεωρήσας μετὰ τινα μάχην τὸν στρατόν του, ἤρρεν ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν στρατιωτῶν του ἐξονεύθη, τὸ $\frac{1}{4}$ ἠχμαλωτίσθη, τὸ

$\frac{1}{3}$ ἡμέρας εἰς φυγὴν, καὶ ἔμειναν μόνον 2600· ἐκ πόσων στρατιωτῶν ἐτύγχευτο ὁ στρατός του;

36. Ἐμπορος πληρῶνει διὰ δύο γραμματίων, τοῦ μὲν ὁρ 3057,50 πληρωτέων εἰς 7 $\frac{1}{2}$ μῆνας, τοῦ δὲ ὁρ 4007 πληρωτέων εἰς 69 ἡμέρας, τὰ ὁποῖα συμφωνεῖ νὰ ὑφαίρεθῶσιν ἀπλότοκον ὑφαίρεσιν πρὸς 6 $\frac{1}{2}$ τὰς 0/0 τὸ ἔτος· πόσων δραχμῶν εἶναι αὕτη ἡ πληρωμή;

37. Ἀγγλος παρουσιάζει ἐν Παρισίοις εἰς τραπεζίτην 37 γινεῶν καὶ 17 σχελιγκίων συναλλαγματικὴν ἐξοφλητέαν ἅμα παρουσιασθεῖσαν· πόσα φράγκα θέλει λάβει ἀντ' αὐτῆς, ἐνῶ ἡ γινέα ἱσотиμάται μὲ φρ. 26,47 καὶ τὸ σχελιγκιον μὲ φράγκα 1,24; (ἡ γινέα εἶναι ἰσότητος μὲ 21 σχελιγκια).

38. Τέσσαρες συνεταῖροι ἔχουσι κέρδος 80764 ὁρ νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν καταβολῶν των· οὗτης δὲ τῆς μὲν τοῦ πρώτου καταβολῆς τοῦ τρίτου μέρους τῆς τοῦ δευτέρου, τῆς δὲ τοῦ τετάρτου πρὸς μὲν τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 8 πρὸς 9, πρὸς δὲ τὴν τοῦ τρίτου ὡς 4 πρὸς 6, πόσον θέλει εἶσθαι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

39. Ἦγούσε τις τσόχαν Ἀγγλικὴν πηχῶν 74 $\frac{3}{4}$ ἀντὶ 64 $\frac{1}{2}$ γινεῶν καὶ 4 σχελιγκίων· πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλῇ ἐν Παρισίοις τὴν πηχὴν, κερδίζων φρ 5,40 τὴν πηχὴν, ἐνῶ 100 Παρισινὰ πηχὰ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 128 $\frac{1}{2}$ τοῦ Λονδίνου πηχας;

40. Ἀρτοποιὸς ἀγορασμένον ἄλευρον πωλίσας 60 δραχ τὸ κοιλόν (100 λίτρας) ἐκέρδισε ὁρ 7,25 τὰς 0/0· πόσον τὸ ἔχεν ἀγοράσει τὸ κοιλόν;

41. Νὰ μερισθῇ ὁ 3600 εἰς τρεῖς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 7 καὶ 9.

42. Νὰ εὕρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀκέραιοι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν 4, 7, 9 καὶ 14.

43. Κερδοσκόπος τις εἰς 6 ἔτη μὲ 45080 ὁρ ἐκέρδισε 43892 ὁρ, ἄλλος δὲ τις εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον μὲ 21643 ὁρ ἐκέρδισεν 7840 ὁρ· πότερος αὐτῶν ἐκέρδισε πλεονέτερον;

44. Ἀναλαμβάνουσι δύο τινὲς νὰ κατασκευάσωσι πρόχωμά τι, διὰ τὸ ὁποῖον θέλουσι λάβει ἀντιμισθίαν 64 δραχ, συμβιβάζονται δὲ ὁ μὲν ὡς ἀξιώτερος εἰς τὴν ἐργασίαν νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῶν, ὁ δὲ τὰ $\frac{1}{3}$. Ἀλλὰ μετὰ 6 ἡμέρας ἀσθενεῖ ὁ ἄδυνατώτερος, καὶ ἀποτελεῖσθαι ὁ ἄλλος τὸ ἔργον εἰς 20 ἡμέρας. Πόσον θέλει λάβει ἑκάτερος;

45. Δίδει τις εἰς μυλιωνᾶν νὰ τοῦ ἀλέσῃ 68 ὀκάδας σίτου, ἀρίζοντος τὴν ὀκάν 25 λεπτά· ἐὰν ὁ μυλιωνᾶς, ὥστις λομβάνει ἀλεστικά 8

λεπτὰ τὴν ὀκτὴν, συμφωνήσῃ μὲ τὸν κύριον τοῦ σίτου νὰ κρατήσῃ ἄλευρον ἀντὶ λεπτῶν, πόσον ἄλευρον θέλει ἀποδώσῃ εἰς τὸν κύριον τοῦ σίτου;

46. Συνεχώνευσέ τις τρεῖς κομμάτια χρυσοῦ, τῶν ὁποίων τὸ μὲν 650δραχμὰ ὁδοῖ 5κόβη ἦτον καθαρὸν 20 καρατίων (*), τὸ δὲ 470δραχμὰ ὁδοῖ 22 $\frac{1}{2}$ καρατίων, τὸ δὲ 290δραχμὰ ὁδοῖ 3κόβη ἦτον 21 καρατίων. πόσων καρατίων εἶναι τὸ συγχώνευμα;

47. Ἀλευροπώλης ἔχει ἄλευρον 35 λεπτῶν τὴν ὀκτὴν, 38, 41, 48, 50, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐκ τούτων μίγμα 150 ὀκτ., τὰ ὁποῖον νὰ πωλῇ 45 λεπτὰ τὴν ὀκτὴν· πόσον πρέπει ν' ἀναμίξῃ ἐξ ἑνὸς ἐκάστου εἴδους;

48. Μετρήσας τις τριγωνομετρικῶς τρεῖς τὸ μεταξὺ δύο τόπων διάστημα, ἤρε το πρῶτον 6784ὀργ. 4πόδ. 6δακτ., τὸ δεύτερον 6779ὀργ. 3πόδ. 7δακτ., καὶ τὸ τρίτον 6790ὀργ. 5πόδ. 4δακτ.· τί εἶναι τὸ μεσαῖον διάστημα;

Ὁρισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς.

Ὅστις καλῶς ἐπεμελήθη νὰ μάθῃ τὰ εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, θέλει ἔχει τοιαύτην τινὰ ιδέαν περὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ὅτι εἶναι ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν καθ' αὐτούς τε καὶ πρὸς ἀλλήλους θεωρουμένων, (**) ἥτοι ἐπιστήμη τοῦ τί εἶναι ἀριθμὸς, πῶς διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων οἱ ἀριθμοὶ διὰ τῶν ὀνομάτων των ἢ τῶν γραπτῶν σημείων, τῶν διαφορῶν εἰδῶν ἀριθμῶν καὶ πόθεν ἡ διαφορὰ αὐτῶν, τῶν διαφορῶν πράξεων καθ' ἃς διὰ τινων ἀριθμῶν εὐρίσκονται ἄλλοι διαφορῶς συσχετισμένοι μὲ τοὺς πρώτους, τῶν διαφορῶν ιδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, καὶ τέλος πῶς ἀνακαλύπτονται αἱ πράξεις, αἵτινες πρέπει νὰ γείνωσι πρὸς εὐρεσιν ζητουμένων τινῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς χρεῖας τοῦ κοινωνικοῦ βίου.

Τούτων ὅλων εἶναι τινα εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, τὰ στοιχειωδέστερα καὶ χρησιμώτερα εἰς τοὺς πολλοὺς.

(*) Χρυσὸς 20 καρατίων καθαρὸς σημαίνει μίγμα ἐξ 20 μερῶν καθαροῦ χρυσοῦ καὶ 4 μερῶν ἄλλων μετάλλων, ἐννοουμένου ὅτι ὁ 24 καρατίων χρυσὸς εἶναι καθαρὸς χρυσός.

(**) Συμπεριλαμβάνει τῶν ἀρχαίων τὴν ἀριθμητικὴν καὶ λογιστικὴν. *18^ο Πλάτ. Γορ. ἀρ. 6, ἐκδ. Κορ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ ἀριθμῶν.

	Σελ.
Τί εἶναι ἀριθμός.	1
Περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν.	2
Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.	10
Περὶ πρῶτων καὶ τοῦ προσδιορισμοῦ αὐτῶν δι' ἀριθμῶν.	15
Περὶ κλασματικῶν, μικτῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.	18
Περὶ ὁμωνύμων καὶ ἑτερονύμων ἀριθμῶν καὶ περὶ ὁμοειδῶν καὶ ἑτεροειδῶν	23

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τῆς χρήσεως αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ. *Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.*

Ὅρισμοὶ πράξεων.	25
Περὶ προσθέσεως ἀκεραίων.	29
Περὶ ἀφαιρέσεως ἀκεραίων.	33
Περὶ δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.	38
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἐπὶ ἀκεραίους.	39
Περὶ διαιρέσεως ἀκεραίων δι' ἀκεραίων.	52
Περὶ λόγου καὶ ἀναλόγων ἀριθμῶν.	69
Περὶ διαιρετῶν καὶ ἰδίως περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. *Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων*

κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

Περὶ τροπῆς κλασματικῶν εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς καὶ τἀντάπαλιν.	84
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν δι' ἀκεραίων.	86
Περὶ τροπῆς ἑτερονύμων κλασματικῶν εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους.	91
Περὶ ἀγωγῆς κλασματικῶν εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους μὲ μικροτέρους ὄρους	95
Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.	96
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀριθμῶν διὰ κλασματικῶν καὶ μικτῶν.	99
Χρήσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἰς λύσιν προβλημάτων.	107

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ. *Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.*

Τί διαφέρουσι τῶν ἀκεραίων καὶ μικτῶν οἱ συμμιγῆς.	119
Περὶ τροπῆς συμμιγῶν εἰς κλασματικούς καὶ τάνάπαλιν.	120
Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως συμμιγῶν.	124
Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσεως συμμιγῶν.	126

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ. *Περὶ δεκαδικῶν κλισματικῶν.*

Τί εἶναι δεκαδικοὶ κλισματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πῶς γράφονται.	138
Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.	143
Τροπὴ κλονοῦ κλίσματος εἰς δεκαδικὸν ἰσοδύναμον.	148
Δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν.	151

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ. *Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.*

Τί εἶναι τετράγωνον καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα.	156
Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυψηφίων καὶ κλισματικῶν τετραγώνων.	157
Περὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀτελῶν τετραγώνων.	159

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ. *Περὶ ἀναλογιῶν καὶ μεθόδων.*

Α'. Περὶ ἀναλογιῶν.	161
Ἰδιότητε; τῶν ἀναλογιῶν.	163
Περὶ ἰσοδιαφορῶν.	172
Ἰδιότητε; τῶν ἰσοδιαφορῶν.	173
Β'. Περὶ μεθόδων.	176
Περὶ μεθόδου τῶν τριῶν.	αὐτόθεν
Περὶ πολλαπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.	179
Μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνολογα.	184
Πρόβληματα τόκου.	186
Πρόβληματα ὑφαιρέσεως.	190
Πρόβληματα ἐταιρίας.	194
Πρόβλημα: ἀναμίξεως.	197
Πρόβληματα διαφορά.	199
Ὁρισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς.	204

Προπαίδια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1 εἰ 1 1	3 εἰ 3 9	6 εἰ 6 36
1—2 2	3—4 12	6—7 42
1—3 3	3—5 15	6—8 48
1—4 4	3—6 18	6—9 54
1—5 5	3—7 21	6—10 60
1—6 6	3—8 24	7 εἰ 7 49
1—7 7	3—9 27	7—8 56
1—8 8	3—10 30	7—9 63
1—9 9		7—10 70
1—10 10	4 εἰ 4 16	8 εἰ 8 64
	4—5 20	8—9 72
2 εἰ 2 4	4—6 24	8—10 80
2—3 6	4—7 28	
2—4 8	4—8 32	9 εἰ 9 81
2—5 10	4—9 36	9—10 90
2—6 12	4—10 40	
2—7 14	5 εἰ 5 25	10 εἰ 10 100
2—8 16	5—6 30	
2—9 18	5—7 35	
2—10 20	5—8 40	
	5—9 45	
	5—10 50	

Προπαίδια τῆς διαιρέσεως.

Τὸ ἡμισυ τοῦ 1 $\frac{1}{2}$	Τὸ 3ον τοῦ 1 $\frac{1}{3}$	Τὸ 4ον τοῦ 1 $\frac{1}{4}$
2 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{2}{3}$	2 $\frac{2}{4}$
4 2	3 1	3 $\frac{3}{4}$
6 3	6 2	4 1
8 4	9 3	8 2
10 5	12 4	12 3
12 6	15 5	16 4
14 7	18 6	20 5
16 8	21 7	24 6
18 9	24 8	28 7
	27 9	32 8
		36 9

Τὸ 5 ^{ον} τοῦ	1	$\frac{1}{5}$
	2	$\frac{2}{5}$
	3	$\frac{3}{5}$
	4	$\frac{4}{5}$
	5	1
	10	2
	15	3
	20	4
	25	5
	30	6
	35	7
	40	8
	45	9

Τὸ 6 ^{ον} τοῦ	1	$\frac{1}{6}$
	2	$\frac{2}{6}$
	3	$\frac{3}{6}$
	4	$\frac{4}{6}$
	5	$\frac{5}{6}$
	6	1
	12	2
	18	3
	24	4
	30	5
	36	6
	42	7
	48	8
	54	9

Τὸ 7 ^{ον} τοῦ	1	$\frac{1}{7}$
	2	$\frac{2}{7}$
	3	$\frac{3}{7}$
	4	$\frac{4}{7}$
	5	$\frac{5}{7}$
	6	$\frac{6}{7}$
	7	1
	14	2
	21	3
	28	4
	35	5
	42	6
	49	7
	56	8
	63	9

Τὸ 8 ^{ον} τοῦ	1	$\frac{1}{8}$
	2	$\frac{2}{8}$
	3	$\frac{3}{8}$
	4	$\frac{4}{8}$
	5	$\frac{5}{8}$
	6	$\frac{6}{8}$
	7	$\frac{7}{8}$
	8	1
	16	2
	24	3
	32	4
	40	5
	48	6
	56	7
	64	8
	72	9

Τὸ 9 ^{ον} τοῦ	1	$\frac{1}{9}$
	2	$\frac{2}{9}$
	3	$\frac{3}{9}$
	4	$\frac{4}{9}$
	5	$\frac{5}{9}$
	6	$\frac{6}{9}$
	7	$\frac{7}{9}$
	8	$\frac{8}{9}$
	9	1
	18	2
	27	3
	36	4
	45	5
	54	6
	63	7
	72	8
	81	9



Ὅσοι καλῶς μάθωσι ταύτην τὴν προπαίδειαν, εὐκόλως ἔπειτα εὑρίσκουσι καὶ τὰ πηλίκᾳ ἄλλων μονοψηφίων ἢ διψήφίων ἀριθμῶν τῶν ὅσοι δὲν περιέχονται εἰς τὸν πίνακα τοῦτον. Π. χ. τὸ 6^{ον} τοῦ 27 εἶναι 4 διὰ τὸ 24 καὶ μένουσι 3· τὸ 6^{ον} τοῦ 3 εἶναι $\frac{3}{6}$. κ. τ. λ.

12

$$B = \frac{3}{12} n' = \frac{\Delta}{36}$$

$\frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{12} = 2 \frac{3}{4}$

Handwritten signature: *David Frick* a. p. 4

$$\frac{4}{3} \div \frac{3}{12} = \frac{4}{3} \times \frac{12}{3} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

60000
59994

5991
2999
891

22

~~59~~ ~~45~~ 0.50, 0.4, 1.4

154945
 150
 200
 16
 6
 35
 3
 10
 21

$$200 = 01:0000 = 004 \times \frac{10}{5}$$

$$\frac{325}{5} \times 44 = 16500 : 1000 = 165$$

41
 40
 35
 32
 27
 24
 20
 15
 10
 5
 0

