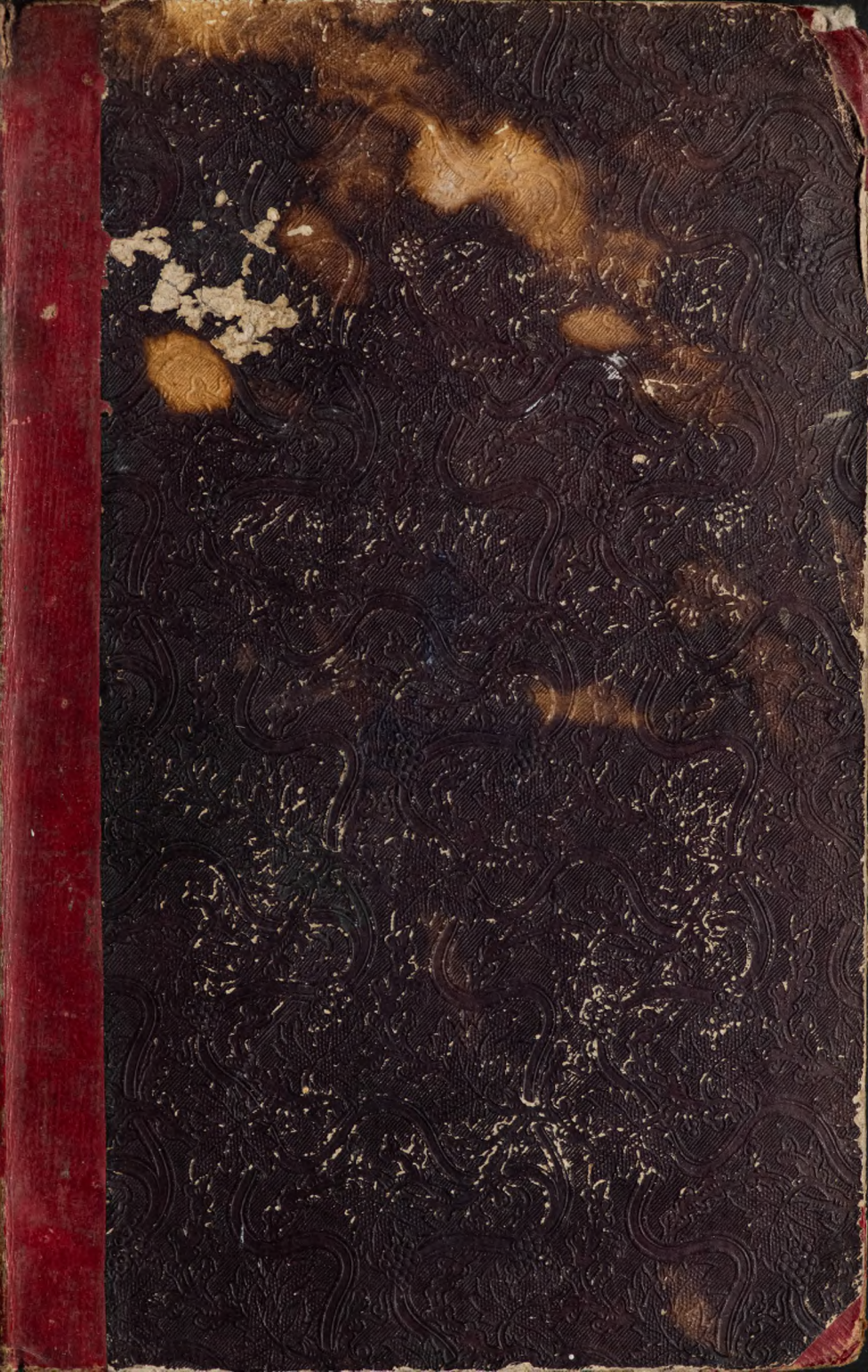






Ιωάννης Α Κωροδανδισίου

---

Πρωτεύς

Ιωάννης Α Κωροδανδισίου

---

Σ. 1. Αφ' αφορμής





Σ Ε Ι Ρ Α Σ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

Γ. Δ. Α.

αριθ. 10



*R. Laguerre*  
*Schwarzburg*



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
Μ. ΓΕΛΑΤΤΕ

613

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΥΠΟ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ.

Μέλους τοῦ Πανεπιστημίου καὶ τοῦ Τάγματος τῆς Τιμῆς, τῆς Βασι-  
λικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου κ. τ. λ.

Μετaphρασθέντα ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ ἐκ τῆς δωδεκάτης αὐ-  
τῶν ἐκδόσεως, ὑπὸ τοῦ

ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΙΩ. ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΥ ΚΕΦΑΛΗΝΟΣ.

Εφόρου τῆς Ἰονίου Ἀκαδημίας, Δεκάνου τῆς φιλοσοφικῆς Σχολῆς,  
καὶ Προφύκτου τῆς Ὑψηλοτέρας Μαθηματικῆς.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ.

ΥΠΟ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΓΚΑΡΠΟΛΑ.



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΓΚΑΡΠΟΛΑ.

1840.





## Ο ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΗΣ

Πρὸς τὸν ἀναγνώστην.

Ἴδου ἐκβαίνει εἰς φῶς καὶ ὁ δεύτερος τόμος τῆς στοιχειώδους σειρᾶς τῶν Μαθηματικῶν. Ὅστις περιέχει τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ περιφήμου Λεγένδρου.

Τὸ σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου εἶναι βέβαια τὸ καλλήτερον στοιχειῶδες σύγγραμμα τῆς Γεωμετρίας. Ἀπὸ τοὺς ὅσοι πρὸ αὐτοῦ ἔγραψαν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιστήμης ταύτης, ἄλλοι μὲν ἀνέμιξαν τὰς Γεωμετρικὰς ἀληθείας μὲ τὰς ἐφαρμογὰς των, μὴ στοχασθέντες ὅτι ἡ ἀνάμιξις αὐτῇ εἶναι μέγα ἐμπόδιον εἰς τὴν πρόοδον τοῦ σπουδάζοντος τὴν Γεωμετρίαν· διότι πρέπει νὰ δαπανᾷ, ὅχι ὀλίγον καιρὸν, ἂν καὶ χωρὶς καρπὸν, εἰς ἀληθείας αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν καμμίαν ἄμεσον σχέσιν μὲ τὸ ἀντικείμενον τῆς σπουδῆς του, καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἐντελής κατάληψις ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν καὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν ὁποίαν ἡ Γεωμετρία ἐφαρμόζεται. Ἄλλοι δὲ δὲν ἔπρασαν εἰς τὸ ἄτοπον τῶν πρώτων, πλὴν ἐκτὸς ὅτι εἰς τὰ συγγράμματά των δὲν φαίνεται ἐκείνη ἡ Γεωμετρικὴ ἀκρίβεια, οὐδὲ τακτικῶς ἐξέθεσαν τὰς διαφόρους προτάσεις, ὥστε νὰ φαίνηται ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσεις, ἀλλ' ὡς πρὸς τοῦτο δουλικῶς ἠκολούθησαν τὴν τάξιν τοῦ Εὐκλείδου, χωρὶς νὰ προσφέρουν ἰδιὸν τι εἰς τὴν ἐπιστήμην· ἄλλοι τέλος πάντων ἐχάθησαν εἰς Μεταφυσικὰς λεπτολογίας, παραβλέψαντες τὰ οὐσιώδη, καὶ οὕτως ἐσχότιζον παρ' ὅ, τι διεσάφίζον τὰς ἐναργεστάτας προτάσεις τῆς Γεωμετρίας.

Ἀφ' οὗ δὲ εἰς τὴν Γαλλίαν ἄρχισαν νὰ προοδεύουν αἱ Μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι, διάφοροι σειραὶ στοιχείων Μαθηματικῆς ἐφάνησαν, μὲ περισσύτεραν τάξιν καὶ μέθοδον

γραμμέναι, καὶ ἀρμόδια ἐπομένως εἰς τὴν σπουδάζουσιν Νεολαίαν.

Μεταξὺ τούτων διακρίνεται ἡ στοιχειώδης σειρά τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Λακρόιου (Lacroix)· ὁ ἐνδοξος οὗτος Μαθηματικὸς ἀφ' οὗ εἰς τρεῖς μεγάλους τόμους συνήθροισεν καὶ διέταξεν ὅτι ἀναφέρεται εἰς τὴν ὑψηλὴν Μαθηματικὴν, συνέγραψε καὶ πλήρη στοιχειώδη σειράν. Ἡ εἰσαγωγὴ ταύτης εἰς τὰ λύκεια τῆς Γαλλίας, ἢ εἰς τὰς ἄλλας Εὐρωπαϊκὰς γλώσσας μετάφρασίς της, ἀρκετὰ ἀποδεικνύουν τὴν ἀξίαν της. Πρέπει ὅμως νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι ἂν καὶ ὁ Λακρόιος εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐφύλαξε τὴν ἀπαιτούμενην ἀκρίβειαν εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων, καὶ διὰ πολλὰ ὑπερέχει τὸ σύγγραμμά του ἄλλα στοιχειώδη συγγράμματα, τὰ στοιχεῖα ὅμως ταῦτα δὲν ἔχουσι τὸ πλήρες, καὶ ἐλλεῖπουσι πολλῶν ἀναγκαίων προτάσεων τῆς Γεωμετρίας· ἐν ᾧ δὲ εἰς τὸ σύγγραμμά του ἐπιγραφόμενον *essais sur l'enseignement* ἔδωκε παραγγέλματα διὰ τὴν συγγραφὴν στοιχείων Γεωμετρίας, ταῦτα ὅμως δὲν ἐφύλαξε, καὶ οὔτε τὴν τάξιν ἐπέτυχεν.

Ὁ δὲ ἡμέτερος συγγραφεὺς εἰς τὸ σύγγραμμά του ἤνωσε τὸ πλήρες μὲ θαυμασίαν τάξιν, καὶ φαίνεται ὅτι ἐβαλλεν εἰς πρᾶξιν ὅσα ὁ Λακρόιος παραγγέλλει εἰς τὸ εἰρημένον σύγγραμμά του. Ἡ μόνη προσεκτικὴ ἀνάγνωσις τοῦ συγγράμματος τοῦ Λεγένδρου ἡμπορεῖ νὰ δώσῃ μίαν ἰδέαν τῆς τάξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἐκτίθενται αἱ προτάσεις, καὶ ἡ ὁποία εἰς οὐδὲν ἄλλο σύγγραμμα παρατηρεῖται ὥστε διὰ ταῦτά του τὰ προτερήματα καὶ δι' ἄλλα περισσότερα τὸ σύγγραμμά του Λεγένδρου εἶναι κατὰ τὸ παρὸν τὸ καλλίτερον στοιχειώδες σύγγραμμα.

Ὅλα ταῦτα τὰ ὁποῖα καὶ ἡ ἰδίᾳ πείρα μὲ ἐβεβαίωσε, μὲ ἔκαμαν νὰ προτιμήσω τὸ σύγγραμμά του Λεγένδρου, ἐν ᾧ ἐμελετοῦσα νὰ δώσω εἰς τὸ ἐθνὸς μου στοιχεῖα Γεωμετρίας.

Εἰς τὴν μετάφρασίν μου δὲν ἔλλειψα νὰ προσθέσω τινὰς διασαφήσεις εἰς μερικὰς προτάσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης ἡμπορεῖ νὰ ἀπαντήσῃ δυσκολίας, ἡξεύρων

ὅτι τὸ ἔθνος μας ἀκόμη στερεῖται τοιοῦτου εἶδους συγγραμμάτων, τὰ ὁποῖα, χρείας τυχούσης, νὰ συμβουλευῇται ὁ σπουδάζων.

Ἀλλ' ἐκδίδων τὸν παρόντα τόμον πρέπει νὰ ἀποκριθῶ εἰς τὴν κρίσιν τὴν ὁποίαν τινὲς ἐπέφερον διὰ τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Βουρδῶνος· διότι ἴσως καὶ διὰ τὴν Γωμετρίαν τὴν αὐτὴν θέλουν ἐπιφέρει: ὅτι, δηλαδή, ἡ Ἀριθμητικὴ αὕτη εἶναι ἐκτεταμένη, καὶ διὰ τοῦτο ὄχι ἀρμοδία εἰς τὴν νεολαίαν. Ἡ ἀπόκρισίς μου εἶναι ὅτι ἡμποροῦσα νὰ μεταφράσω ἄλλην συντομωτέραν καθὼς τὴν τοῦ Λακροῦ ἢ τινος ἄλλου· πλὴν καμμίαν δὲν ἔβλεπα ἐξισουμένην εἰς τὴν ἀξίαν μὲ τὴν τοῦ Βουρδῶνος, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὰς ἰδέας, εἰς τὴν μέθοδον, εἰς τὴν σαφήνειαν, καὶ εἰς ἄλλα προτερήματα, τὰ ὁποῖα οἱ μὴ κατ' ἐπιφάνειαν ἔχοντες ἰδέας ἐπάνω εἰς τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας ἡμποροῦν νὰ παρατηρήσουν· καὶ διὰ νὰ μὴ πολυλογῶ, καθὼς ὁ συγγραφεὺς συνέγραψε τοιαύτην Ἀριθμητικὴν διὰ νέους »qui ont à subir des épreuves difficiles, et dont les premiers pas, dans la carrière des sciences, doivent se faire d'une manière sûre et profitable « (") ἤγουν· οἱ ὁποῖοι μέλλουν νὰ ὑποβληθῶν εἰς αὐστηρὰς δοκιμασίας, καὶ τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα βήματα εἰς τὸ στάδιον τῶν ἐπιστημῶν, πρέπει νὰ γίνουν ἀσφαλῶς καὶ ἐπωφελῶς· οὕτω καὶ ἐγὼ τὴν ἐμετάφρασα διὰ τοὺς νέους Ἕλληνας οἵτινες ἀσφαλῶς θέλουν νὰ διατρέξουν τὸ εὐρύχωρον πεδίον τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, καὶ μέλλουν νὰ ἀφιερωθῶν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν ἐφαρμογῶν των· δι' ἐκείνους ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἡ νέα Ἑλλὰς ἐλπίζει Εὐκλείδης καὶ Ἀρχιμήδης, καὶ εἰσαγωγεῖς τῶν ἐπιστημῶν εἰς τὴν ἀρχαίαν πατρίδα των. Ὁ καιρὸς περιπλέον θέλει δείξει ἐάν ἐπέτυχῃ εἰς τὴν ἐκλογὴν μου, καὶ ἐάν ἡ εἴσαξις της εἰς τὰ σχόλαια θέλῃ ὠφελῇ τὴν νεολαίαν ἢ ὄχι.

εὐτύχει.

(\*) Βλέπε Γαλ. ἐκδ. avertissement pag. 8.



ή.

Ὅστις τῶν ἀναγνωστῶν, τοῦλάχιστον εἰς τὴν πρῶ-  
την ἀνάγνωσιν, θέλει νὰ περιορισθῇ εἰς τὰ ἀπλὰ στοιχεῖα,  
ἤμπορεῖ νὰ παραβλέψῃ τὰς σημειώσεις, παραρτήματα  
καὶ γενικῶς ὅ,τι εἶναι τυπωμένον εἰς μικροὺς χαρακτῆρας  
ὥς ὀλιγώτερον ὠφέλιμα ἢ ἀπαιτοῦντα βαθυτέραν τὴν  
σπουδὴν. Θέλει δὲ ἐπιστρέφει εἰς ταῦτα ὅταν τὸ κρίνῃ  
εὐλογον, ἐκλέγων ὅ,τι ἤθελε τοῦ φανῇ ἀρμόδιον, καὶ  
τοῦτο κατὰ τὴν συμβουλὴν πεφωτισμένου τινὸς προφέσορος.

Σ. Κ. Οἱ εἰς τὸ περιθώριον εὐρισκόμενοι ἀριθμοὶ σημειοῦν τὰς προ-  
τάσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται διὰ τὴν κατάληψιν τῶν  
ἀποδείξεων. Εἰς μόνος ἀριθμὸς, ὡς 4, σημειοῦν τὴν δ' πρότασιν τοῦ  
ἀνὰ χειρας βιβλίου· δύο δὲ ἀριθμοὶ ὡς 20. 3 σημειοῦν τὴν κ' πρό-  
τασιν τοῦ γ' βιβλίου. (\*). Εἰς δὲ τὴν τριγωνομετρίαν τὰ ἄρθρα καὶ  
αἱ παραπομπαὶ ἐσημειώθησαν διὰ ῥωμαϊκῶν χαρακτήρων.

---

(\*) Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἰς τὴν παρούσαν μετάφρασιν ἐτέθησαν ἐντὸς τοῦ χει-  
μένου.



# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

### ΑΙ ΑΡΧΑΙ.

#### Ὅρισμοί.

Α'. Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἔχουσα ἀντικείμενον τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως.

Ἡ δὲ ἐκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Β'. Ἡ γραμμὴ εἶναι μῆκος χωρὶς πλάτος.

Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς καλοῦνται σημεῖα: τὸ σημεῖον λοιπὸν δὲν ἔχει ἐκτασιν.

Γ'. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ βραχυτάτος δρόμος ἀπὸ ἐν σημεῖον εἰς ἄλλο.

Δ'. Κάθε γραμμὴ ἣτις δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμῶς, καλεῖται καμπύλη γραμμὴ.

Οὕτως  $AB$  εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ,  $ΑΓΔΒ$  ἢ εἶναι γραμμὴ κεκλασμένη ἢ σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμῶς, καὶ  $AEB$  εἶναι καμπύλη γραμμὴ. σχ. 1.

Ε'. Ἐπιφάνεια εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, χωρὶς ὕψος ἢ πάχος.

ς'. Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἐὰν ληφθῶσι κατ' ἀρέσκειαν δύο σημεῖα, καὶ ἐνωθῶσι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη εὐρίσκεται ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν.

Ζ'. Κάθε ἐπιφάνεια, ἣτις δὲν εἶναι ἐπίπεδος οὔτε σύνθετος ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

Η'. Στερεὸν ἢ σῶμα εἶναι ὅ,τι περιέχει ἐν ταύτῳ τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἐκτάσεως.

Θ'. Ὅταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ συναπαντῶνται ὡς  $AB, ΑΓ$ , ἡ ποσότης, ἡ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον μεγάλη, διὰ τῆς ὁποίας

ἀπομακρύνονται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ὅσον πρὸς τὴν θέσιν των, καλεῖται γωνία. Τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως ἢ τῆς κοινῆς τομῆς  $A$  εἶναι ἡ κορυφή τῆς γωνίας· αἱ δὲ γραμμαῖ  $AB$ ,  $AG$  εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτῆς. σχ. 2.

Ἡ γωνία σημειόνηται ἐνίοτε μόνον διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς  $A$ , ἄλλοτε δὲ διὰ τριῶν γραμμάτων  $BAG$  ἢ  $GAB$ , τιθεμένου ὁμως τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

Αἱ γωνίαι, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι ποσότητες, εἶναι δεκτικαὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως· οὕτως ἡ γωνία  $\Delta Γ Ε$  εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν  $\Delta Γ Β$ ,  $Β Γ Ε$ , καὶ ἡ γωνία  $\Delta Γ Β$  εἶναι ἡ διαφορά τῶν δύο γωνιῶν  $\Delta Γ Ε$ ,  $Β Γ Ε$ . σχ. 20.

Γ'. Ὅταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $AB$  συναπαντᾷ ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν  $\Gamma\Delta$ , εἰς τρόπον ὥστε αἱ προσκείμεναι γωνίαι  $BAG$ ,  $BA\Delta$  νὰ ᾖναι ἴσαι μεταξὺ των, ἐκάστη τούτων τῶν γωνιῶν καλεῖται γωνία ὀρθή· ἡ δὲ γραμμὴ  $AB$  λέγεται κάθετος ἐπὶ τῆς  $\Gamma\Delta$ . σχ. 3.

ΙΑ'. Κάθε γωνία  $BAG$  μικροτέρα τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία ὀξεία· κάθε δὲ γωνία μεγαλητέρα  $\Delta EZ$  εἶναι γωνία ἀμβλεία. σχ. 4.

ΙΒ'. Δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ὅταν, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ συναπαντηθῶσιν, ὅσον μακρὰν καὶ ἂν προεκβληθῶσι· τοιαῦται εἶναι αἱ γραμμαὶ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ .

ΙΓ'. Σχῆμα ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδόν τι περιοριζόμενον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ γραμμᾶς.

Ἐὰν δὲ αἱ γραμμαὶ ᾖναι εὐθεῖαι, τὸ περιεχόμενον ἀπὸ αὐτὰς χωρίον καλεῖται σχῆμα εὐθύγραμμον ἢ πολύγωνον· αἱ δὲ γραμμαὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι σχηματίζουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου. σχ. 6.

ΙΔ'. Τὸ πολύγωνον ἐκ τριῶν πλευρῶν εἶναι τὸ ἀπλούστερον ἀπὸ ὅλα, καὶ ὀνομάζεται τρίγωνον. Τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν καλεῖται τετράπλευρον· τὸ ἐκ πέντε, πεντάγωνον· τὸ ἀπὸ ἑξ ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

ΙΕ'. Καλεῖται τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας. σχ. 7.

Τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι. σχ. 8.

Τρίγωνον σκαληνόν, τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνιστοι. σχ. 9.

ΙΣΤ'. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν. Ἡ δὲ ἀπέναντι πλευρὰ εἰς τὴν ὀρθήν γωνίαν καλεῖται ὑποτείνουσα. Οὕτως  $AB\Gamma$  εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς  $A$ , ἡ δὲ πλευρὰ  $B\Gamma$  εἶναι ἡ ὑποτείνουσά του. σχ. 10.

12'. Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνονται.

Τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαί. (βλέπε τὴν Κ' πρότ. βιβλ. Α'.) σχ. 11.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς χωρὶς νὰ ἔχη τὰς πλευρὰς ἴσας (βλέπε τὴν αὐτὴν πρότ.) σχ. 12.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἢ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. σχ. 13.

Τὸ ῥομβοειδές, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι χωρὶς αἱ γωνίαι νὰ ᾔναι ὀρθαί. σχ. 14.

Τέλος τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ μόνον εἶναι παράλληλοι. σχ. 15.

1Η'. Καλεῖται διαγώνιος ἡ γραμμὴ δὲ, ἣτις ἐνώνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν· τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΑΓ. σχ. 42.

1Θ'. Πολύγωνον ἰσόπλευρον εἶναι ἐκεῖνο δὲ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Πολύγωνον, ἰσογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Κ'. Δύο πολύγωνα εἶναι ἰσόπλευρα μεταξὺ τῶν, ὅταν ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, καὶ θεμένας κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τούτεστιν, ὅταν διατρέχοντες τὰς περιμέτρους τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, ἔχωμεν τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἐνὸς ἴσῃν μὲ τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἄλλου, τὴν δευτέραν τοῦ ἐνὸς μὲ τὴν δευτέραν τοῦ ἄλλου, τὴν τρίτην μὲ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἔφεξῃς. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται διὰ δύο πολύγωνα ἰσογώνια μεταξὺ τῶν.

Εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίστασιν, αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλοῦνται πλευραὶ ἢ γωνίαι ὁμόλογοι.

Σ. Κ. Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία ὁ λόγος θέλει εἶναι περὶ ἐπιπέδων σχημάτων ἢ γλαυκωμένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Ἐξήγησις τῶν Ὁρῶν καὶ σημείων.

Ἀξίωμα εἶναι πρότασις καθ' ἑαυτὴν φανερά.

Θεώρημα εἶναι ἀλήθεια γινομένη φανερά δι' ἐνὸς συλλογισμοῦ καλουμένου ἀπόδειξις.

Πρόβλημα εἶναι ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν.

Λήμμα εἶναι ἀλήθεια, τὴν ὁποίαν μεταχειρίζομεθα συμβοηθητικῶς διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἐνὸς θεωρήματος, ἢ διὰ τὴν λύσιν ἐνὸς προβλήματος.

Τὸ κοινὸν ὄνομα πρότασις ἀποδίδεται ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα εἶναι συνέπεια πηγάζουσα ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρων προτάσεων.

Σχόλιον εἶναι παρατήρησις γινομένη ἐπὶ μίᾳ ἢ περισσοτέρων προτάσεων προηγούμενων, σκοπὸν ἔχουσα νὰ δείξῃ τὸν δεσμόν



των, τὴν ὠφέλειάν των, τὸν περιορισμὸν των, ἢ τὴν ἔκτασίν των. Ἰπὸθεσις εἶναι μία θέσις γινομένη εἰς τὴν ἐκφώνησιν προτάσεως τινος, ἢ εἰς τὴν ὁδὸν μιᾶς ἀποδείξεως.

Τὸ σημεῖον  $=$  εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος· οὕτως ἡ ἔκφρασις  $A=B$  σημειώνει ὅτι  $A$  ἴσον  $B$ .

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι  $A$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $B$ , γράφομεν  $A < B$ .

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ ὅτι  $A$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $B$ , γράφομεν  $A > B$ .

Τὸ σημεῖον  $+$  προφέρεται πλέον· σημειώνει δὲ τὴν πρόσθεσιν.

Τὸ σημεῖον  $-$  προφέρεται μείον· σημειώνει δὲ τὴν ἀφαίρεσιν· οὕτως  $A + B$  παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων  $A$  καὶ  $B$ .  $A - B$  παριστάνει τὴν διαφορὰν των ἢ ὅ,τι μένει ἀφαιρεθέντος  $B$  ἀπὸ  $A$ . παρομοίως  $A - B + \Gamma$  ἢ  $A + \Gamma - B$  παριστάνει ὅτι  $A$  καὶ  $\Gamma$  πρέπει νὰ προστεθοῦν, καὶ ἐκ τοῦ ὅλου νὰ ἀφαιρεθῇ  $B$ .

Τὸ σημεῖον  $\times$  σημειώνει τὸν πολλαπλασιασμὸν. Οὕτως  $A \times B$  παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ  $A$  πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ  $B$ . Ἀντὶ τοῦ σημείου  $\times$  ἐνίστε μεταχειριζόμεθα μίαν στιγμὴν· οὕτως  $A \cdot B$  εἶναι δὲ τὸ αὐτὸ μὲ  $A \times B$ · σημειώνεται προσέτι τὸ αὐτὸ γινόμενον χωρὶς παρένθεσιν τινὸς σημείου διὰ  $AB$ . Ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν ἔκφρασιν, παρ' ὅταν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν δὲν ἔχωμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν ἐκείνης τῆς γραμμῆς  $AB$  ἀποστάσεως τῶν σημείων  $A$  καὶ  $B$ .

Ἡ ἔκφρασις  $A \times (B + \Gamma - \Delta)$  παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ  $A$  ἐπὶ τὴν ποσότητα  $B + \Gamma - \Delta$ . Ἐάν ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν  $A + B$  ἐπὶ  $A - B + \Gamma$ , ἠθέλαμεν σημειώσαι  $(A + B) \cdot (A - B + \Gamma)$ · ὅ,τι περιέχεται μεταξύ παρενθέσεων θεωρεῖται ὡς μία μόνη ποσότης.

Ἐνας ἀριθμὸς ἔμπροσθεν μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς ποσότητος, χρησιμεύει· ὡς πολλαπλασιαστῆς ταύτης τῆς γραμμῆς ἢ ταύτης τῆς ποσότητος· οὕτω, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ  $AB$  λαμβάνεται τρεῖς φοαῖς, ἢ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς, γράφομεν  $3AB$ · διὰ νὰ σημειώσωμεν δὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας  $A$ , γράφομεν  $\frac{1}{2} A$ .

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς  $AB$  σημειώνεται διὰ  $AB^2$ · ὁ δὲ κύβος τῆς διὰ  $AB^3$ . Ἐν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσει, τί σημαίνει ἀκριβῶς τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος μιᾶς γραμμῆς.

Τὸ σημεῖον  $\sqrt{\phantom{x}}$  δεικνύει ἐξαγωγήν ρίζης. Οὕτω  $\sqrt{2}$  εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2.  $\sqrt{A \times B}$  εἶναι ἡ ρίζα τοῦ γινομένου  $A \times B$ , ἢ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξύ  $A$  καὶ  $B$ .

## ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

1. Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ τρίτην τινὰ, εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι.
2. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰδίου μέρους.
3. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὅποια διηρέθη.
4. Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μίαν μόνον εὐθεῖαν γραμμὴν δύναμεθα νὰ ἀξώμεν.
5. Δύο μεγέθη, γραμμὴ, ἐπιφάνεια ἢ στερεόν, εἶναι ἴσα ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζωσι καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

### Θεώρημα.

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἐστω ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ, ἐπὶ τῆς ΕΖ· λέγω δὲ ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΕΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 16.

Ἐὰς ληφθῶσι τὰ τέσσαρα διαστήματα ΓΑ, ΓΒ, ΗΕ, ΗΖ ἴσα, τὸ διάστημα ΑΒ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα ΕΖ, καὶ εἶναι δυνατόν ἡ γραμμὴ ΕΖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Β. Αἱ δύο αὐταὶ γραμμαι οὕτως θεμέναι θέλουν ἐφαρμόσει· διότι, ἀλλέως, ἤθελον ὑπάρχει δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. ἀξ. 4. λοιπὸν τὸ σημεῖον Η μέσον τῆς ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, μέσου τῆς ΑΒ. Ἀρ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ΗΕ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΓΑ, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΗΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΓΔ· διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ἐὰν ᾖναι δυνατόν, ὅτι πίπτει ἐπὶ μιᾷς εὐθείας ΓΚ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ὅρ. 10. ἡ γωνία ΕΗΘ=ΘΗΖ, πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΓΚ=ΚΓΒ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΓΚ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ΑΓΔ, ἡ γωνία ΚΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓΔ· ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓΔ=ΒΓΔ· λοιπὸν ΑΓΚ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΚΓΒ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΗΘ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾷς γραμμῆς ΓΚ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· λοιπὸν πίπτει ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΕΗΘ ἐπὶ τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

### Θεώρημα.

Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, ἥτις συναπαντᾷ μίαν ἄλλην ΑΒ, κάμνει μὲ αὐτὴν δύο γωνίας προσκειμένας ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 17.

Εἰς τὴν στιγμήν Γ, ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΕ. Η

γωνία ΑΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ· λοιπὸν ΑΓΔ + ΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΔ. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κάμνουν ὁμοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΓΕ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

**Πόρισμα Α'.** Ἐὰν μία τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ ᾖναι ὀρθή, ἡ ἄλλη θέλει εἶναι παρομοίως ὀρθή.

**Πόρισμα Β'.** Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΔΕ ᾖναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀντιστρόφως ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ. σχ. 18.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν προσκειμένην τῆς ΔΓΒ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή, ἔπεται ὅτι ἡ προσκειμένη τῆς ΑΓΕ εἶναι ἐπίσης ὀρθή· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΕ = ΑΓΔ, λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ. σχ. 34.

**Πόρισμα Γ'.** Ὅσαι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΖ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

### Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ, αἵτινες ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλην των τὴν ἕκτασιν, καὶ σχηματίζουν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν.

Ἔστωσαν τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β· κατὰ πρῶτον αἱ δύο γραμμαὶ δὲν πρέπει νὰ κάμνουν παρὰ μίαν μεταξὺ Α καὶ Β, διότι ἀλλέως ἤθελον εἶναι δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. Ἄς ὑποθέσωμεν ἀκοιούτως ὅτι προεκβαλλόμεναι αἱ γραμμαὶ αὗται, ἀρχίζουν νὰ χωρίζωνται εἰς τὴν στιγμὴν Γ, καὶ ἡ μὲν διευθύνεται κατὰ τὴν ΓΔ, ἡ δὲ κατὰ τὴν ΓΕ. Ἀς ἄξωμεν εἰς τὴν στιγμὴν Γ τὴν γραμμὴν ΓΖ, ὥστε νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΓΑ ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γραμμὴ ΑΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΔ εἶναι ὀρθή πρ. 2. πόρ. 1. ἐπειδὴ δ' ἔτι ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι παρομοίως γωνία ὀρθή. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΖΓΕ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΖΓΔ· λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ, αἵτινες ἔχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινὰ, δὲν ἡμποροῦν νὰ χωρισθῶσιν εἰς κατ' ἑνὲν σημεῖον τῆς προεκβολῆς των· λοιπὸν σχηματίζουν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν. σχ. 19.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

## Θεώρημα.

Ἐάν δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ, ἰσοδυναμοῦν μέ δύο ὀρθάς, αἱ δύο ἐξωτερικαί πλευраὶ ΑΓ, ΓΒ θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας. σχ. 20.

Ἐπειδὴ ἐάν ΓΒ δὲν εἶναι ἡ προεκβολή τῆς ΑΓ, ἔστω ΓΕ ἡ προεκβολή αὐτῇ τότε δὲ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΕ εἶναι ἴσον μέ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ εἶναι ἐπίσης ἴσον μέ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ΑΓΔ + ΔΓΒ εἶναι ἴσον μέ ΑΓΔ + ΔΓΕ· ἐάν δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία ΑΓΔ, μένει τὸ μέρος ΔΓΒ ἴσον μέ τὸ ὅλον ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν ΓΒ εἶναι ἡ προεκβολή τῆς ΑΓ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

## Θεώρημα.

Ὅσάκις δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τέμνονται, ὡς ΑΒ, ΔΕ, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. σχ. 21.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΑΓΕ εἶναι ἴσον μέ δύο ὀρθάς· καὶ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΒΓΕ, εἶναι ἐπίσης ἴσον μέ δύο ὀρθάς· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ΑΓΔ + ΑΓΕ εἶναι ἴσον μέ τὸ ἄθροισμα ΑΓΕ + ΒΓΕ· ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς γωνίας ΑΓΕ, μένει ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση μέ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΕ.

Παρομοίως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση μέ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΔ.

Σχόλιον. Αἱ τέσσαρες γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὁλόγυρα μιᾷ στιγμῆς δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἰσοδυναμοῦν μέ τέσσαρας ὀρθάς· διότι αἱ γωνίαι ΑΓΕ, ΒΓΕ ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν δύο ὀρθάς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ΑΓΔ, ΒΓΔ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν.

Ἐάν ὅσαι δὴποτε εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, κ. τ. λ. συναπαντῶνται εἰς μίαν στιγμὴν Γ, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, θέλει εἶναι ἴσον μέ τέσσαρας ὀρθάς· διότι, ἐάν εἰς τὴν στιγμὴν Γ σχηματισθῶσι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι ὑπὸ δύο εὐθειῶν καθέτων τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, τὸ αὐτὸ χωρίον θέλει πληροῦται τόσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ὀρθάς γωνίας, ὅσον καὶ ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς γωνίας ΑΓΒ, ΒΓΔ, κ. τ. λ. σχ. 22.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ΄.

## Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα είναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὴν περιεχομένην ἀπὸ αὐτὰς γωνίαν ἴσην. σχ. 23.

Ἐστω ἡ πλευρὰ  $AB$  ἴση μὲ τὴν πλευρὰν  $\Delta E$ , ἡ πλευρὰ  $AI$  ἴση μὲ τὴν πλευρὰν  $\Delta Z$ , ἡ γωνία  $A$  ἴση μὲ τὴν γωνίαν  $\Delta$ . λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  θέλουν εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι τὸ ἐν τούτων τῶν τριγώνων δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ αὐτό. Καὶ κατὰ πρῶτον ἐὰν ἡ πλευρὰ  $\Delta E$  τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς  $AB$ , τὸ σημεῖον  $\Delta$  θέλει πέσει εἰς τὸ  $A$ , καὶ τὸ  $E$  εἰς τὸ  $B$ . ἄλλ’ ἐπειδὴ ἡ γωνία  $\Delta$  εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν  $A$ , ἀρ’ οὐ ἡ πλευρὰ  $\Delta E$  τεθῇ ἐπὶ τῆς  $AB$ , ἡ πλευρὰ  $\Delta Z$  θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς  $AI$ . Περιπλέον  $\Delta Z$  εἶναι ἴση μὲ τὴν  $AI$ . λοιπὸν τὸ σημεῖον  $Z$  θέλει πέσει εἰς τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ  $EZ$  θέλει ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν  $B\Gamma$ . λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\Delta EZ$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ . ἀξ. 5.

Πόρισμα. Ὅταν τρία τινὰ ᾖναι ἴσα εἰς δύο τρίγωνα, δηλαδὴ ἡ γωνία  $A = \Delta$ , ἡ πλευρὰ  $AB = \Delta E$ , καὶ ἡ πλευρὰ  $AI = \Delta Z$ , ἡμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι καὶ τὰ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα, δηλαδὴ, ἡ γωνία  $B = E$ , ἡ γωνία  $\Gamma = Z$ , καὶ ἡ πλευρὰ  $B\Gamma = EZ$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

## Θεώρημα.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὰς πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα.

Ἐστω ἡ γωνία  $B$  ἴση τῇ γωνίᾳ  $E$ , καὶ ἡ γωνία  $\Gamma$  ἴση τῇ  $Z$ . ἡ πλευρὰ  $B\Gamma$  ἴση τῇ πλευρᾷ  $EZ$ . λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον  $\Delta EZ$  θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ . σχ. 23.

Διότι, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν (superposition), ἅς τεθῇ ἡ  $EZ$  ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς  $B\Gamma$ , τὸ σημεῖον  $E$  θέλει πέσει εἰς τὸ  $B$ , καὶ τὸ σημεῖον  $Z$  εἰς τὸ  $\Gamma$ . Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία  $E$  εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν  $B$ , ἡ πλευρὰ  $E\Delta$  θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν  $BA$ . Οὕτω τὸ σημεῖον  $\Delta$  θέλει εὐρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς  $BA$ . Παρομοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία  $Z$  εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ  $\Gamma$ , ἡ γραμμὴ  $Z\Delta$  θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν  $\Gamma A$ , καὶ τὸ σημεῖον  $\Delta$  θέλει εὐρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς πλευρᾶς  $\Gamma A$ . λοιπὸν τὸ σημεῖον  $\Delta$ , τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὐρεθῇ ἐν ταύτῳ ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν  $BA$ ,  $\Gamma A$ , θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν  $A$ . Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , ἐφαρμόζουσι, καὶ εἶναι ἐντελῶς ἴσα.

**Πόρισμα.** Ἐκ τῆς ἰσότητος τριῶν πραγμάτων εἰς δύο τρίγωνα, τουτέστι,  $ΒΓ = ΕΖ$ ,  $Β = Ε$ ,  $Γ = Ζ$ , ἡμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν τὴν ἰσότητα τῶν ἄλλων τριῶν, τουτέστι,  $ΑΒ = ΔΕ$ ,  $ΑΓ = ΔΖ$ ,  $Α = Δ$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

**Θεώρημα.**

Εἰς κάθε τρίγωνον ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σχ. 23.

Διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $ΒΓ$ , παραδείγματος χάριν, εἶναι ὁ βραχύτατος δρόμος ἀπὸ τὸ  $Β$  εἰς τὸ  $Γ$ , ὁρ. 3. λοιπὸν  $ΒΓ$  εἶναι μικροτέρα τοῦ  $ΒΑ + ΑΓ$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

**Θεώρημα.**

Ἐὰν ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου  $ΑΒΓ$  ληφθῇ σημεῖόν τι  $Ο$ , καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀγθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τινὸς πλευρᾶς  $ΒΓ$  αἱ εὐθεῖαι  $ΟΒ$ ,  $ΟΓ$ , τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$ . σχ. 24.

Ἄς προσεβληθῇ ἡ  $ΒΟ$  ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν πλευρὰν  $ΑΓ$  εἰς  $Δ$ . Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $ΟΓ$  εἶναι μικροτέρα ἀπὸ  $ΟΔ + ΔΓ$ . πρό. 8. προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη  $ΒΟ$ , ἔχομεν  $ΒΟ + ΟΓ < ΒΟ + ΟΔ + ΔΓ$  ἢ  $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$ .

Ἐχομεν παρομοίως  $ΒΔ < ΒΑ + ΑΔ$ . προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη  $ΔΓ$ , συνάγομεν  $ΒΔ + ΔΓ < ΒΑ + ΑΓ$ . Ἀλλ’ εὐ-  
ρήκαμεν  $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$ . Λοιπὸν, πολὺ περισσότερον  $ΒΟ + ΟΓ < ΒΑ + ΑΓ$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

**Θεώρημα.**

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$ , τοῦ τριγώνου  $ΑΒΓ$  ᾗναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  τοῦ τριγώνου  $ΔΕΖ$ , ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία  $ΒΑΓ$  ἢ περιεχομένης ἀπὸ τὰς πρώτας, ᾗναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας  $ΕΔΖ$ , τῆς περιεχομένης ἀπὸ τὰς δευτέρας· λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ  $ΒΓ$  τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης  $ΕΖ$  τοῦ δευτέρου. σχ. 25.

Ἄς γένη ἡ γωνία  $ΓΑΗ = Δ$ , ἃς ληθῇ  $ΑΗ = ΔΕ$ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ  $ΓΗ$ , τὸ τρίγωνον  $ΗΑΓ$  θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $ΔΕΖ$ , ἐπειδὴ ἔχουν ἐκ τῆς κατασκευῆς μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. πρό. 6. ἔχομεν λοιπὸν  $ΓΗ = ΕΖ$ . Τώρα δὲ δυνατόν νὰ ἀκολουθήσουν τρεῖς περιστάσεις, καθὼς τὸ ση



μείον Η πέση ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. ἢ ἐντὸς τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Πρώτη περίστασις. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΗΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΗΙ + ΙΓ, ἢ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΑΙ + ΙΒ. λοιπὸν ΗΓ + ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ΗΙ + ΑΙ + ΙΓ + ΙΒ ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ΗΓ + ΑΒ + ΑΗ + ΒΓ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ἐν μέρος ἀφαιρεθῇ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἢ ἴση τῆς ΑΗ, μένει ΗΓ < ΒΓ· ἀλλὰ ΗΓ = ΕΖ. λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΕΖ < ΒΓ. σχ. 25.

Δευτέρα περίστασις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέση ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, φανερόν εἶναι, ὅτι ΗΓ, ἢ ἡ ἴση τῆς ΕΖ θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓ. σχ. 26.

Τρίτη περίστασις. Τέλος ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέση ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ΑΗ + ΗΓ < ΑΒ + ΒΓ· ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τὸ ἐν μέρος τῆς ΑΗ, καὶ ἀπὸ ἄλλο τῆς ἴσης τῆς ΑΒ, μένει ΗΓ < ΒΓ, ἢ ΕΖ < ΒΓ. σχ. 27.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ἐὰν περιπλέον, ἢ τρίτη πλευρὰ ΓΒ τοῦ πρώτου τριγώνου ἦναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ τοῦ δευτέρου.

Διότι, ἐὰν δὲν ἦναι μεγαλητέρα ἡ γωνία ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ, πρέπει νὰ ἦναι ἴση ἢ μικροτέρα· ἐὰν τὸ πρῶτον, ἢ πλευρὰ ΓΒ ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ ΕΖ, πρ. 6. ἐὰν τὸ δεύτερον, ΓΒ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ἐναντιόγονται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΔΖ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

### Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθ᾽ε μίαν μὲ τὴν καθ᾽ε μίαν.

Ἐστω ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ· λέγω δὲ ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Α = Δ, Β = Ε, Γ = Ζ. σχ. 23.

Διότι ἐὰν ἡ γωνία Α ἦτο μεγαλητέρα τῆς γωνίας Δ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, ἢ καθ᾽ε μίαν μὲ τὴν καθ᾽ε μίαν ἤθελον ἀκολουθήσει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ· ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας Δ, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΖ· λοιπὸν ἡ γωνία Α δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἦναι οὔτε μεγαλητέρα οὔτε μικρο-

τέρα τῆς γωνίας Δ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ αὐτήν· Παρομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνία  $B = E$ , καὶ ἡ γωνία  $\Gamma = Z$ .

Σχόλιον. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· οὕτως αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ, ΕΖ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

#### Θεώρημα.

Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

Ἐστω ἡ πλευρὰ  $AB = AG$ , λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν  $\Gamma = B$ . σχ. 28.

Ἐς ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὴν στιγμὴν Δ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· τουτέστι ΑΔ κοινὴν,  $AB = AG$  ἐξ ὑποθέσεως, καὶ  $BD = DG$  ἐκ τῆς κατασκευῆς· λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Γ.

Πόρισμα. Ἐν ἰσοπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐν ταύτῳ καὶ ἰσογώνιον, δηλαδὴ, ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας.

Σχόλιον. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ δεικνύει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, ὅτι ἡ γωνία  $BA\Delta = \Delta A\Gamma$ , καὶ ἡ γωνία  $B\Delta A = \Delta\Gamma A$ · λοιπὸν αἱ δύο τελευταῖαι αὗται εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ ἀγομένη γραμμὴ ἐκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, εἶναι κάθετος εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Εἰς ἓν τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς ἀδιαφόρως λαμβάνεται ὡς βάσις ὅποιαδὴποτε πλευρὰ, καὶ τότε ἡ κορυφή του εἶναι ἐκείνη τῆς ἀπέναντι γωνίας· εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ὅμως τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ πλευρὰ, ἥτις δὲν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων δύο.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἀντιστρόφως ἐὰν δύο γωνίαι εἰς ἓν τρίγωνον ᾗναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐστω ἡ γωνία  $AB\Gamma = \Gamma B A$ · λέγω δὲ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ. σχ. 29.

Διότι, ἐὰν αἱ πλευραὶ αὗται δὲν ᾗναι ἴσαι, ἔστω ΑΒ ἡ μεγαλύτερα τῶν δύο. Ἐς ληφθῇ  $B\Delta = A\Gamma$ , καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ΔΓ· ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση τῇ ΑΓΒ· αἱ δύο δὲ πλευραὶ ΔΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΒΓ προ. 6. ἤθελεν εἶναι ἴσαι μὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ· ἀλλὰ τὸ μέρος δὲν εἶναι

δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅλον· λοιπὸν δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ἀνισότης μεταξὺ τῶν πλευρῶν  $AB$ ,  $AG$ . λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $ABG$  εἶναι ἰσοσκελές.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

#### Θεώρημα.

Ἐκ δύο πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου, ἐκείνη εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἥτις εἶναι ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου ἡ μεγαλητέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

1.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ γωνία  $\Gamma > B$ , λέγω δὲ ὅτι ἡ πλευρὰ  $AB$  ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας  $\Gamma$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλευρᾶς  $AG$  τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας  $B$ . σχ. 30.

Ἄς γένῃ ἡ γωνία  $B\Gamma\Delta = B$ . Εἰς τὸ τρίγωνον  $B\Delta\Gamma$  ἔχομεν πρ. 13.  $B\Delta = \Delta\Gamma$ . ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $AG$  εἶναι μικροτέρα ἀπὸ  $A\Delta + \Delta\Gamma$ , καὶ  $A\Delta + \Delta\Gamma = A\Delta + \Delta B = AB$ . λοιπὸν  $AB$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς  $AG$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ πλευρὰ  $AB > AG$ , λέγω ὅτι ἡ γωνία  $\Gamma$  ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς  $AB$  θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας  $B$  τῆς ἀπέναντι τῆς  $AG$ . Διότι ἐὰν εἴχαμεν  $\Gamma < B$ , ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων,  $AB < AG$ , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἐὰν δὲ  $\Gamma = B$ , ἤθελαμεν ἔχει πρ. 13.  $AB = AG$ , τὸ ὁποῖον ἀκούη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία  $\Gamma$  πρέπει νὰ ᾔναι μείζων τῆς  $B$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

#### Θεώρημα.

Ἐξ ἐνὸς δεδομένου σημείου  $A$  ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας  $AE$ , μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ ἐπὶ ταύτην τὴν εὐθεῖαν. σχ. 31.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσι δύο  $AB$  καὶ  $AG$ . ἂς προσεβάλωμεν μίαν τούτων τὴν  $AB$  ποσότητά τινα  $BZ = AB$ , καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν  $ZG$ .

Τὸ τρίγωνον  $GBZ$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $ABG$ . ἐπειδὴ ἡ γωνία  $GBZ$  εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ  $GBA$ , ἡ πλευρὰ  $GB$  εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ  $BZ = AB$ . λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἔπεται ὅτι ἡ γωνία  $B\Gamma Z = B\Gamma A$ . Ἡ γωνία  $B\Gamma A$  εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως· λοιπὸν ἡ γωνία  $B\Gamma Z$  εἶναι ἐπίσης ὀρθή. Ἀλλ' ἐὰν αἱ προσκείμεναι γωνίαι ὁμοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς, πρέπει ἡ γραμμὴ  $AGZ$  νὰ ᾔναι εὐθεῖα πρ. 4. Ὅθεν ἔπεται ὅτι μεταξὺ δύο σημείων  $A$  καὶ  $Z$ , ἤθελεν εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι  $ABZ$ ,  $AGZ$ . τὰ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. λοιπὸν εἶναι παρό-



μοίως αδύνατον νά ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίᾳς εὐθείας γραμμῆς.

Σχόλιον. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ διδόμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB, εἶναι ἐπίσης αδύνατον νά ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς ταύτην τὴν γραμμὴν· διότι ἐὰν ΓΔ καὶ ΓΕ ἦσαν αἱ δύο αὗται κάθετοι, ἡ γωνία ΔΓΒ ἔθελεν εἶναι ὀρθή καθὼς καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ τὸ μέρος ἔθελεν εἶναι ἴσον τῷ ὅλῳ. σχ. 17.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'. †

### Θεώρημα.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α κειμένου ἔκτος εὐθείας τινὸς ΔΕ ἄξωμεν τὴν κάθετον AB ἐπὶ ταύτην τὴν εὐθεῖαν, καὶ διαφόρους πλαγίας AE, AG, AD κ. τ. λ., εἰς διάφορα σημεία ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 31.

1.<sup>ον</sup> Ἡ κάθετος AB θέλει εἶναι μικρότερα κάθε πλαγίας.

2.<sup>ον</sup> Αἱ δύο πλάγιαι AG, AE, ἡγμέναι ἀπὸ τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς καθέτου εἰς ἴσα διαστήματα BG, BE θέλουν εἶναι ἴσαι.

3.<sup>ον</sup> Ἀπὸ δύο πλαγίας AG καὶ AD, ἡ AE καὶ AD ἡγμένας κατ' ἀρέσκειαν, ἡ ἀπομακρυνομένη περισσότερον τῆς καθέτου θέλει εἶναι ἢ μεγαλύτερα.

Ἄς προσελληθῇ ἡ κάθετος AB ποσότητα τινὰ BZ = AB, καὶ ἄς ἐπιξευχθῶσι ZΓ, ZΔ.

1.<sup>ον</sup> Τὸ τρίγωνον BGZ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον BGA, ἐπεὶδὴ ἡ ὀρθή γωνία GBZ = GBA, ἡ πλευρά GB εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ BZ = BA. Λοιπὸν πρ. 6. ἡ τρίτη GZ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην AG. Τώρα, ABZ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικρότερα τῆς AGZ γραμμῆς κεκλασμένης· λοιπὸν AB ἥμισυ τῆς ABZ εἶναι μικρότερα τῆς AG ἥμισυος τῆς AGZ· λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> ἡ κάθετος εἶναι μικρότερα κάθε πλαγίας.

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν ὑποτεθῇ BE = BG, ἐπεὶδὴ ἔκτος τοῦ ὅτι AB εἶναι κοινὴ καὶ ἡ γωνία ABE = ABG, ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ABE εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ABG πρ. 6. λοιπὸν αἱ πλευραὶ AE, AG εἶναι ἴσαι· λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> δύο πλάγιαι ἰσάκεις ἀπομακρυνόμεναι τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

3.<sup>ον</sup> Εἰς τὸ τρίγωνον ΔZA τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν AG, GZ, εἶναι μικρότερον. πρ. 9. τοῦ ἄθροίσματος τῶν πλευρῶν AD, ΔZ· λοιπὸν AG, ἥμισυ τῆς γραμμῆς AGZ εἶναι μικρότερα τῆς AD ἥμισυος τῆς ADZ· λοιπὸν 3.<sup>ον</sup> αἱ πλάγιαι αἵτινες περισσότερον ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου εἶναι μεγαλύτεραι.

Πόρισμα Α'. Ἡ κάθετος μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου ἀπὸ μίαν γραμμὴν, ὡς μικρότερα κάθε πλαγίας.

**Πόρισμα Β'.** Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι· διότι ἐὰν τοῦτο ᾗτον δυνατόν, ἤθελον ὑπάρχει ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου δύο ἴσαι πλάγια, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

### Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ, μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ, ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. 1.<sup>ον</sup> κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκεις θέλει ἀπέχει τῶν δύο ἄκρων τῆς ΑΒ. 2.<sup>ον</sup> κάθε δὲ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκεις θέλει ἀπέχει τῶν αὐτῶν ἄκρων Α καὶ Β. σχ. 32.

Διότι, 1.<sup>ον</sup> ἐπειδὴ ὑποτίθεται  $ΑΓ = ΓΒ$ , αἱ δύο πλάγια ΑΔ, ΔΒ ἰσάκεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· λοιπὸν εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ δὲ ὑπάρχει διὰ τὰς πλάγιας ΑΕ, ΕΒ, ΑΖ, ΖΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

2.<sup>ον</sup> Ἐστω Ι ἐν σημείον ἐκτὸς τῆς καθέτου. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσι ΙΑ, ΙΒ, ἡ μία τῶν γραμμῶν τούτων θέλει τέμνει τὴν κάθετον εἰς Δ, ὅθεν ἄγοντες τὴν ΔΒ, θέλομεν ἔχει  $ΔΒ = ΔΑ$ . Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΙΒ εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης  $ΙΔ + ΔΒ$ , καὶ  $ΙΔ + ΔΒ = ΙΔ + ΔΑ = ΙΑ$ · λοιπὸν  $ΙΒ < ΙΑ$ · λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> κάθε σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

### Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην.

Ἐστω ἡ ὑποτείνουσα  $ΑΓ = ΔΖ$ , καὶ ἡ πλευρὰ  $ΑΒ = ΔΕ$ · λέγω δὲ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ. σχ. 33.

Ἡ ἰσότης ἤθελεν εἶναι φανερά, ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ ᾗτον ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΕΖ. Ἄς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατόν, ὅτι αἱ πλευραὶ αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔστω ΒΓ ἡ μεγαλύτερα. Ἄς ληρθῇ ΒΗ = ΕΖ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ΑΗ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· διότι ἡ ὀρθὴ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ἡ ΒΗ = ΕΖ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἐπομένως ΑΗ = ΔΖ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως  $ΔΖ = ΑΓ$ · λοιπὸν ΑΗ = ΑΓ. Ἀλλ' ἡ πλάγια ΑΓ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾗται ἴση τῇ ΑΗ πρ. 16. ὡς περισσότερον ἀπομακρυνομένη τῆς καθέτου ΑΒ· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ

ΒΓ να διαφέρει τῆς ΕΖ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

#### Θεώρημα.

Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐστω ΑΒΓ τὸ προτιθέμενον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν (1) ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἡ δὲ ΒΓ ἡ μικροτέρα πλευρά, καὶ οὕτως ΑΓΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἡ δὲ ΒΑΓ ἡ μικροτέρα· πρ. 14. σχ. 35.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Α καὶ τῆς στιγμῆς Ι μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΙ, ἣτις ἃς προεκβληθῇ εἰς Γ' ὥστε ΑΓ' = ΑΒ· παρομοίως ἃς προεκβληθῇ ΑΒ εἰς Β', ὥστε ΑΒ' νὰ ᾖ διπλασία τῆς ΑΙ.

Ἐὰν σημειωθῶσι διὰ Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ παρομοίως διὰ Α', Β', Γ' αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ'· λέγω δὲ ἥδη ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν  $\Gamma' = B + \Gamma$ , καὶ τὴν γωνίαν  $A = A' + B'$ . Ἔθεν ἔπεται  $A + B + \Gamma = A' + B' + \Gamma'$ · τούτέστιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἃς γένη ΑΚ' = ΑΙ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ Γ'Κ', θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον Γ'ΑΚ' ἴσον μὲ τὸ ΒΑΙ. Διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἡ κοινὴ γωνία Α περιέχεται μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ἀνὰ μίαν, δηλαδή: ΑΓ' = ΑΒ, καὶ ΑΚ' = ΑΙ. Λοιπὸν ἡ τρίτη πλευρὰ Γ'Κ' εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΒΙ· λοιπὸν ὡσαύτως ἡ γωνία ΑΓ'Κ' = ΑΒΓ καὶ ἡ γωνία ΑΚ'Γ' = ΑΙΒ.

Λέγω δὲ τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓ'Κ' εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΓΙ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΚ'Γ' + Γ'Κ'Β' εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς πρ. 2. καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΙΓ + ΑΙΒ. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΚ'Γ', ΑΙΒ μένει ἡ γωνία Γ'Κ'Β' = ΑΙΓ. Αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσιν τὰς ἴσας ταύτας γωνίας εἶναι ἴσαι ἢ καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, δηλαδή ΓΚ' = ΙΒ = ΓΙ, καὶ ΚΒ' = ΑΚ' = ΑΙ, ἐπειδὴ ὑπετέθη ΑΒ' = 2ΑΙ = 2ΑΚ'. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΓ'Κ', ΑΓΙ εἶναι ἴσα πρ. 6. Ἀχολούθως

(1) Πι ὑπόθεσις αὕτη δὲν ἀποκλείει τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ἡ μέση πλευρὰ ΑΓ ᾗδεν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄκρων ΑΒ ἢ ΒΓ.



ἡ πλευρά  $\Gamma\text{B}' = \text{AG}$ , ἡ γωνία  $\text{B}'\Gamma'\text{K}' = \text{AGB}$ , καὶ ἡ γωνία  $\text{K}'\text{B}'\Gamma' = \text{GAI}$ .

Ἐκ τούτου ἔπεται 1.<sup>ον</sup> ὅτι ἡ γωνία  $\text{AGB}'$  ἡ σημειωθείσα διὰ  $\Gamma'$  σύγκειται ἀπὸ δύο ἴσας γωνίας μὲ τὰς γωνίας  $\text{B}$  καὶ  $\Gamma$  τοῦ τριγώνου  $\text{ABG}$ , καὶ οὕτως ἔχομεν  $\Gamma' = \text{B} + \Gamma$ . 2.<sup>ον</sup> ὅτι ἡ γωνία  $\text{A}$  τοῦ τριγώνου  $\text{ABG}$  σύγκειται ἐκ τῆς γωνίας  $\text{A}'$  ἢ  $\text{GAB}'$  ἣτις ἀνήκει εἰς τὸ τρίγωνον  $\text{AB}'\Gamma'$  καὶ τῆς γωνίας  $\text{GAI}$  ἴσης μὲ τὴν γωνίαν  $\text{B}'$  τοῦ ἰδίου τριγώνου, δηλαδὴ  $\text{A} = \text{A}' + \text{B}'$ . λοιπὸν  $\text{A} + \text{B} + \Gamma = \text{A}' + \text{B}' + \Gamma'$ . Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως  $\text{AG} < \text{AB}$ , καὶ ἐπομένως  $\text{G}'\text{B}' < \text{AG}'$ , βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον  $\text{AG}'\text{B}'$  ἡ γωνία εἰς  $\text{A}$ , ἡ σημειωθείσα διὰ  $\text{A}'$ , εἶναι μικροτέρα τῆς  $\text{B}'$ , καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν  $\text{A}$  τοῦ τριγώνου  $\text{ABG}$ , ἔπεται ὅτι ἡ γωνία  $\text{A}' < \frac{1}{2} \text{A}$ .

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὸ τρίγωνον  $\text{AB}'\Gamma'$ , διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕν τρίτον τρίγωνον  $\text{AG}''\text{B}''$ , τοῦ ὁποίου τὰς γωνίας σημειόνομεν διὰ  $\text{A}''$ ,  $\text{B}''$ ,  $\Gamma''$ , θέλομεν ἔχει παρομοίως τὰς δύο ἰσότητας  $\Gamma'' = \Gamma' + \text{B}'$ ,  $\text{A}'' = \text{A}' + \text{B}''$ , ὅθεν ἔπεται  $\text{A} + \text{B} + \Gamma = \text{A}'' + \text{B}'' + \Gamma''$ . Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ἴδιον εἰς ταῦτα τὰ τρία τρίγωνα· εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν  $\text{A}'' < \frac{1}{2} \text{A}$ , καὶ ἐπομένως  $\text{A}'' < \frac{1}{4} \text{A}$ .

Ἐξακολουθοῦντες ἀπροσδιορίστως τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων  $\text{AGB}$ ,  $\text{AGB}'$ , κ. τ. λ. θέλομεν φθάσει εἰς ἕν τρίγωνον  $\text{abg}$  εἰς τὸ ὅποιον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν θέλει εἶναι τὸ ἴδιον ὡς εἰς τὸ τρίγωνον  $\text{ABG}$ , καὶ τὸ ὅποιον θέλει ἔχει τὴν γωνίαν  $\alpha$  μικροτέραν ὅποιοιδήποτε ὁρου τῆς κατιούσης προσέου  $\frac{1}{2} \text{A}$ ,  $\frac{1}{4} \text{A}$ ,  $\frac{1}{8} \text{A}$ , κ. τ. λ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων προεκτενινομένην ἕως ὅτου ἡ γωνία  $\alpha$  νὰ ᾖ μικροτέρα πάσης δεδομένης.

Καὶ ἐὰν διὰ μέσου τοῦ τριγώνου  $\text{abg}$  κατασκευάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τρίγωνον  $\alpha\beta'\gamma'$ , τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν  $\alpha + \beta'$  τούτου θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν  $\alpha$ , καὶ ἐπομένως μικρότερον πάσης δεδομένης γωνίας. Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου  $\alpha\beta'\gamma'$  ἄγεται σχεδὸν εἰς τὴν μόνην γωνίαν  $\gamma'$ .

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἀκριβὲς μέτρον τούτου τοῦ ἄθροίσματος, ἃς προσεβάλωμεν τὴν πλευρὰν  $\alpha\gamma'$  πρὸς τὸ  $\delta'$ , καὶ ἃς καλέσωμεν  $\chi'$  τὴν ἐκτὸς γωνίαν  $\beta'\gamma'\delta'$  ἢ γωνία  $\chi'$ , μετὰ τῆς γωνίας,  $\gamma'$  τοῦ τριγώνου  $\alpha\beta'\gamma'$ , κάμνει ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Οὕτω σημειόνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ  $\text{O}$ , θέλομεν ἔχει  $\gamma' = 2\text{O} - \chi'$ . λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου  $\alpha\gamma'\delta'$  θέλει εἶναι.

$$20 + \alpha + \beta - \chi'$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι αἱ πλευраὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου  $\alpha\beta\gamma'$  μεταβάλλονται, εἰς τρόπον ὥστε διὰ τῆς μεταβολῆς ταύτης νὰ παριστάνη τὰ τρίγωνα, τὰ ὅποια ἐκ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γεννῶνται καὶ πλησιάζουν μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον πρὸς τὸ ὅριον, ὅπου αἱ γωνίαι  $\alpha$  καὶ  $\beta$  ἤθελον εἶναι μηδέν. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο, ταυτιζομένης τῆς εὐθείας  $\alpha\gamma'$  δ' μὲ τὴν  $\alpha\beta'$  τὰ τρία σημεῖα  $\alpha, \gamma', \beta$  θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας· τότε αἱ γωνίαι  $\beta$  καὶ  $\chi'$  μηδενίζονται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καθ' ὃν καὶ ἡ  $\alpha$  καὶ ἡ ποσότης  $20 + \alpha + \beta - \chi'$  μέτρον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου  $\alpha\gamma'\beta$ , ἄγεται εἰς 20. Λοιπὸν εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

**Πόρισμα Α'.** Γνωρίζοντες δύο γωνίας τριγώνου τινὸς ἢ μόνον τὸ ἄθροισμά των, προσδιορίζομεν τὴν τρίτην, ἀφαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν γωνιῶν ἀπὸ δύο ὀρθάς.

**Β'.** Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο γωνίας ἄλλου, ἢ καθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια μεταξὺ των.

**Γ'.** Ἐν τρίγωνον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ὀρθὴν γωνίαν· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχε δύο, ἡ τρίτη ἔπρεπε νὰ ἦναι μηδέν· πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ἀμβλείαν γωνίαν.

**Δ'.** Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

**Ε'.** Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον κάθε γωνία εἶναι τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν ἢ τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς. Λοιπὸν ἐὰν ἡ ὀρθὴ γωνία ἐκφρασθῇ διὰ I, ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θέλει ἐκφρασθῇ διὰ  $\frac{1}{2}$ .

**ΣΤ'.** Εἰς κάθε τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἐὰν προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , ἡ ἐκτὸς γωνία  $\Gamma B\Delta$  θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι  $A$  καὶ  $\Gamma$ · διότι ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο μέρος  $AB\Gamma$ , τὰ δύο ἄθροίσματα θέλουν εἶναι ἴσα μὲ δύο ὀρθάς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

### Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν πολυγώνου τινὸς ἴσοῦται μὲ τοσάχης δύο ὀρθάς ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μείον δύο.

Ἐστω  $AB\Gamma\Delta$  κ. τ. λ. τὸ προτεθὲν πολύγωνον· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς γωνίας  $A$ , ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέ-

ναντι γωνιῶν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, κ. τ. λ. εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι τὸ πολύγωνον θέλει μοιρασθῇ εἰς πέντε τρίγωνα, ἐάν ἔχη ἑπτὰ πλευράς· εἰς ἕξ, ἐάν ὀκτώ· καὶ ἐν γένει εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευράς ἔχει τὸ πολύγωνον μείον δύο· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχοντα κορυφὴν κοινὴν τὴν στιγμὴν Α, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους πλευράς τοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς τῶν δύο αἵτινες σχηματίζουν τὴν γωνίαν Α. Βλέπομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τούτων τῶν τριγώνων δὲν διαφέρει παντάπασι τοῦ ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τοῦτέστιν, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μείον δύο. σχ. 42.

**Πόρισμα Α'.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ  $4-2$ , τὸ ὅποιον κάμνει τέσσαρας ὀρθὰς. Λοιπὸν ἐάν ὦλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι, ἐκάστη τούτων θέλει εἶναι ὀρθή. Τοῦτο βεβαιώνει τὸν **Η'** ὅρισμόν, ὅπου ὑπετέθη ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, ὅταν ἦναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον.

**Β'.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ  $5-2$ , δηλαδή μὲ 6 ὀρθὰς. Ὅταν λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ἦναι ἰσογώνιον, ὅταν δηλαδή ἔχη τὰς γωνίας ἴσας μετὰξύ των, ἐκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ πέμπτον ἕξ ὀρθῶν, ἢ μὲ τὰ  $\frac{2}{3}$  μιᾶς ὀρθῆς.

**Γ'.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι  $2 \times (6-2)$  ἢ 8 ὀρθαί γωνίαι· λοιπὸν εἰς τὸ ἰσογώνιον, κάθε γωνία εἶναι τὰ  $\frac{2}{3}$  τῆς ὀρθῆς.

**Σχόλιον.** Ἐὰν ἡθέλαμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν ταύτην τὴν πρότασιν εἰς πολύγωνον, τὸ ὅποιον ἡθέλεν ἔχει μίαν ἢ περισσοτέρας γωνίας εἰσεχούσας (angles rentrants), ἔπρεπε νὰ θεωρήσωμεν κάθε γωνίαν εἰσέχουσαν μεγαλύτεραν δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ πρὸς ἀποφυγὴν κάθε περιπλοκῆς, ἐνταῦθα καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα δὲν θέλομεν θεωρεῖ παρὰ τὰ πολύγωνα μὲ γωνίας ἐξεχούσας (angles saillants), τὰ ὅποια δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν πολύγωνα κυρτά (polygons convexes). Κάθε κυρτὸν πολύγωνον εἶναι τοιοῦτον, ὥστε μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἡγμένη ὅπωςδὴποτε, συναπαντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου μόνον εἰς δύο σημεῖα. σχ. 43.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

**Θεώρημα.**

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, κάθετοι ἐπὶ τρίτης τινὸς ΖΗ, εἶναι παράλ-



ληλοι, τουτέστιν, ὅσον καὶ ἂν παρεκβληθῶσι δὲν δύνανται νὰ συναπαντηθῶν. σχ. 36.

Ἐπειδὴ ἐὰν συναπαντῶντο εἰς σημείον τι Ο, ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι ΟΖ, ΟΗ ἡγμέναι ἐκ τῆς ἰδίας στιγμῆς Ο, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΖΗ, ὅπερ ἀδύνατον. πρ. 15.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάμνουν μὲ τρίτην τινὰ ΕΖ, δύο ἐντὸς γωνίας ΒΕΖ, ΔΖΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ᾔηται ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, θέλουν εἶναι παράλληλοι. σχ. 36.

Ἐὰν αἱ γωνίαι ΒΕΖ, ΔΖΕ ᾔσαν ἴσαι, ἤθελον εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ δύο, καὶ ἠθέλαμεν πέσει εἰς τὴν περίστασιν τῆς προλαβούσης προτάσεως. Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι εἶναι ἄνισοι, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ, κορυφῆς τῆς μεγαλητέρας, ἅς καταβάσωμεν τὴν κάθετον ΖΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΖΗ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν ΖΕΗ+ΕΖΗ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. πρ. 19. πόρ. 4. Ἐὰν τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀραιρευθῇ ἀπὸ τὸ ΒΕΖ+ΔΖΕ ἴσον ἐξ ὑποθέσεως μὲ δύο ὀρθάς γωνίας, μένει ἡ γωνία ΔΖΗ ἴση μὲ μίαν ὀρθήν. Λοιπὸν αἱ δύο γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΖΗ· λοιπὸν εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάμνουν μὲ τρίτην τινὰ ΕΖ δύο ἐντὸς γωνίας ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ᾔηται μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθῶν. σχ. 37.

Ἔστω 1.<sup>ον</sup> Τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἅς ἀχθῇ ἡ ΖΗ εἰς τρόπον ὥστε ἡ γωνία ΕΖΗ=ΑΕΖ, θέλομεν ἔχει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΗ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΑΕΖ καὶ ἐπομένως ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἐπειδὴ ΒΕΖ+ΕΖΔ εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἡ εὐθεῖα ΔΖ περιέχεται εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΗ.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ ἅς ἀχθῇ ἡ πλαγία ΖΜ, ἣτις συναπαντᾷ ΑΒ εἰς Μ· ἡ γωνία ΑΜΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΗΖΜ, ἐπειδὴ ἐκὼν προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ἡ αὐτὴ ποσότης ΕΖΜ+ΖΕΜ, ἕκαστον τῶν δύο ἄθροισμάτων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Ἄς ληθῇ ἀκολουθῶς ΜΝ=ΖΜ, καὶ ἅς ἐπιξευχθῇ ΖΝ· ἡ γωνία ΑΜΖ, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΖΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΜΖΝ,

ΜΝΖ, πρ. 19. πρ. 6. αὗται δὲ εἶναι μεταξύ των ἴσαι ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ΜΝ, ΖΜ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΜΖ ἢ ἡ ἴση τῆς ΜΖΗ εἶναι διπλασία τῆς ΜΖΝ· λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΝ διαιρεῖ διχα τὴν γωνίαν ΗΖΜ καὶ συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Ν μακράν τῆς Μ, ΜΝ=ΖΜ.

Ἐκ τῆς ἰδίας ἀποδείξεως ἔπεται, ὅτι ἐὰν λάβωμεν ΝΠ=ΖΝ, θέλομεν προσδιορίσει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν στιγμὴν Π ὅπου συναπαντᾷ αὐτὴν ἡ ΖΠ ποιοῦσα τὴν γωνίαν ΗΖΠ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΗΖΝ, ἢ μὲ τὸ τέταρτον τῆς ΗΖΜ.

Ἐμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ ὄγδοον, κ. τ. λ. τῆς γωνίας ΗΖΜ, καὶ αἱ γραμμαὶ αἵτινες ἐκτελοῦν ταύτας τὰς διαιρέσεις θέλουν συναπαντᾷ τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς σημεῖα μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀπομακρυνόμενα, ἀλλ' εὐκόλως προσδιορίζόμενα, ἐπεὶδὴ ΜΝ=ΖΜ, ΝΠ=ΖΝ, ΠΚ=ΠΖ, κ. τ. λ. Ἐμποροῦμεν παρομοίως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κάθε διάστημα μιᾶς τούτων τῶν στιγμῶν τῆς κοινῆς τομῆς ἀπὸ τὴν σταθεράν Ζ, δὲν εἶναι ὅλως διόλου διπλάσιον τοῦ διαστήματος τῆς προηγουμένης στιγμῆς τῆς κοινῆς τομῆς, διότι ΖΝ παραδείγματος χάριν εἶναι μικρότερα ἀπὸ ΖΜ + ΜΝ ἢ 2ΖΜ· ὡσαύτως ἔχομεν ΖΠ < 2ΖΝ, ΖΚ < 2ΖΠ, κ. τ. λ.

Ἀλλ' ἐξακολουθοῦντες τὴν ὑποδιαίρεσιν τῆς γωνίας ΗΖΜ κατὰ λόγον διπλάσιον, θέλομεν φθάσει εἰς γωνίαν τινὰ ΗΖΩ μικροτέραν τῆς δεδομένης ΗΖΔ, καὶ ἀκόμη θέλει εἶναι ἀληθές ὅτι ΖΩ προεκβαλλομένη συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς προσδιορισμένον σημεῖον· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἢ εὐθεῖα ΖΔ περιεχομένη εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΩ, θέλει συναπαντήσῃ ΑΒ.

Ἄς ὑποθέσωμεν 2.<sup>ον</sup> ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς γωνιῶν ΑΕΖ + ΓΖΕ εἶναι μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν, ἐὰν προεκβληθῇ ΑΕ πρὸς τὸ Β καὶ ΓΖ πρὸς τὸ Δ, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΕΖ, ΒΕΖ, ΓΖΕ, ΕΖΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ΑΕΖ + ΓΖΕ μεῖζον δύο ὀρθῶν, μένει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ + ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν. Λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν αἱ γραμμαὶ ΕΒ, ΖΔ, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθοῦν.

Πόρισμα. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Ζ μία μόνη παράλληλος τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΒ εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΕ κατ' ἀρέσκειαν, μία μόνη γραμμὴ ὑπάρχει ἡ ΖΗ, ἥτις νὰ κάμῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ + ΕΖΗ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· κάθε ἄλλη εὐθεῖα ΖΔ ἤθελε κάμει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ + ΕΖΔ μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν· ἐπομένως ἤθελε συναπαντᾷ τὴν ΑΒ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

## Θεώρημα.

Ἐὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ  $AB, ΓΔ$  συναπαντηθῶσιν ἀπὸ τινα διατέμουςαν  $EZ$ , τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν  $AHO, HOΓ$ , θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 38.

Ἐπειδὴ, ἐὰν ᾗτον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον, αἱ δύο εὐθεῖαι  $AB, ΓΔ$  ἤθελον συναπαντῶνται ἀπὸ τὸ ἐν ἢ τὸ ἄλλο μέρος. πρ. 23 καὶ δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλοι.

**Πόρισμα Α'.** Ἐὰν ἡ γωνία  $HOΓ$  ᾗται ὀρθή, ἡ γωνία  $AHO$  θέλει εἶναι παρομοίως· λοιπὸν κάθε γραμμὴ κάθετος εἰς μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἄλλην.

**Πόρισμα Β'.** Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα  $AHO + HOΓ$  εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ τὸ ἄθροισμα  $HOΔ + HOΓ$  εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο μέρος  $HOΓ$ , θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν  $AHO = HOΔ$ . Ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος  $AHO = BHE$ , καὶ  $HOΔ = GOZ$ , πρ. 5. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι  $AHO, BHE, HOΔ, GOZ$ , εἶναι ἴσαι μεταξὺ των. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς τέσσαρας ἀμβλείας  $AHE, BHO, HOΓ, ΔOZ$ . Περιπλέον δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν προστεθῇ μία τῶν τεσσάρων ὀξειῶν γωνιῶν εἰς μίαν τῶν τεσσάρων ἀμβλειῶν, τὸ ἄθροισμα πάντοτε θέλει ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

**Σχόλιον.** Αἱ γωνίαι, περὶ τῶν ὁποίων ὠμιλήσαμεν, συγχρινόμεναι ἀνὰ δύο, λαμβάνουσι διάφορα ὀνόματα. Ἐκαλέσαμεν τὰς γωνίας  $AHO, HOΓ$ , ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος· αἱ γωνίαι  $BHO, HOΔ$ , καλοῦνται Ἐναλλάξ ἐντὸς, ἢ ἀπλῶς Ἐναλλάξ, οὕτως ὀνομάζονται καὶ αἱ γωνίαι  $BHO, HOΓ$ . Τέλος καλοῦνται ἐν τὸς-ἐκ τὸς αἱ γωνίαι  $EHB, HOΔ$ , ἢ  $EHA, HOΓ$ , καὶ ἐναλλάξ-ἐκ τὸς αἱ γωνίαι  $EHB, GOZ$ , ἢ  $AHE, ΔOZ$ . Τούτου τεθέντος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθοῦσας προτάσεις ὡς ἀποδεδειγμένας.

1.<sup>ον</sup> Αἱ ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς.

2.<sup>ον</sup> Αἱ ἐναλλάξ-ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἐντὸς-ἐκ τὸς, καὶ αἱ ἐναλλάξ-ἐκ τὸς.

Ἀντιστρόφως ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίστασιν, δύο γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος ᾗται ἴσαι, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται εἶναι παράλληλοι. Ἐστω π. χ. ἡ γωνία  $AHO = HOΔ$ · ἐπειδὴ  $HOΓ + HOΔ$ , εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, θέλομεν ἔχει παρομοίως  $AHO + HOΓ$  ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, λοιπὸν, πρ. 22. αἱ γραμμαὶ  $AH, ΓO$  εἶναι παράλληλοι.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Θ ε ώ ρ η μ α.

Δύο γραμμαὶ  $AB, ΓΔ$ , παράλληλοι τρίτης τινὸς  $EZ$ , εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι. σχ. 39.

Ἄς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα  $HKP$  κάθετος εἰς τὴν  $EZ$ . Ἐπειδὴ  $AB$  εἶναι παράλληλος τῆς  $EZ$ , ἡ διατέμνουσα  $HP$  θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν  $AB$  πρ. 24. πόρ. 1. παρομοίως, ἐπειδὴ  $ΓΔ$  εἶναι παράλληλος τῆς  $EZ$ , ἡ διατέμνουσα  $HP$  θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν  $ΓΔ$ . Λοιπὸν  $AB$  καὶ  $ΓΔ$  εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν  $HK$  διὰ τοῦτο εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣΓ'. †

Θ ε ώ ρ η μ α.

Δύο παράλληλοι ἰσάκεις ἀπέχουσι καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν.

Δεδομένων τῶν δύο παραλλήλων  $AB, ΓΔ$ , ἐὰν ἐκ δύο σημείων λαμβανομένων κατ' ἀρέσκειαν, ὑψωθῶσιν ἐπὶ τῆς  $AB$  αἱ δύο κάθετοι  $EH, ΖΘ$ , αἱ εὐθεῖαι  $EH, ΖΘ$  θέλουν εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κάθετοι εἰς τὴν  $ΓΔ$  πρ. 24. λέγω περιπλέον ὅτι θέλουν εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των. σχ. 40.

Ἐπειδὴ ἐπιζευχθείσης τῆς  $HZ$ , αἱ γωνίαι  $HZE, ΖΗΘ$ , θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους  $AB, ΓΔ$ , εἶναι ἴσαι, ὡς ἐναλλάξ ἐντός· σχόλ. πρ. 24. παρομοίως ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι  $EH, ΖΘ$  εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν  $AB$ , καὶ ἐπομένως παράλληλοι μεταξύ των, αἱ γωνίαι  $EHZ, ΗΖΘ$ , θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους  $HE, ΖΘ$ , εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλάξ ἐντός. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα  $EZH, ΖΗΘ$ , ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν  $ZH$  προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα. πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ  $EH$ , ἣτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων  $AB, ΓΔ$  ἀπὸ τὴν στιγμὴν  $E$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν  $ΖΘ$ , ἣτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἰδίων παραλλήλων ἀπὸ τὴν στιγμὴν  $Z$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'. †

Θ ε ώ ρ η μ α.

Ἐὰν δύο γωνίαι  $BAΓ, ΔEZ$ , ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι θέλουν εἶναι ἴσαι. σχ. 41.

Ἄς προεκβληθῇ, ἐὰν ἀνάγκη τὸ καλέσῃ, ἡ  $ΔE$  ἕως ὅτου νὰ συναπαντήσῃ τὴν  $ΑΓ$  εἰς  $H$ · ἡ γωνία  $ΔEZ$  εἶναι ἴση τῇ  $ΔΗΓ$ , ἐπειδὴ  $EZ$  εἶναι παράλληλος τῆς  $ΓH$ . πρ. 24. ἡ γωνία  $ΔΗΓ$  εἶναι ἴση τῇ

ΒΑΓ, ἐπειδὴ ΔΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ.

Σχόλιον. Εἰς ταύτην τὴν πρότασιν ἐκτὸς τοῦ παραλληλισμοῦ ὑποθέσαμεν τὴν ΕΖ πλευρὰν διευθυνομένην κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καθ' ἣν καὶ ἡ ΑΓ, καὶ τὴν ΕΔ διευθυνομένην κατὰ τὴν ἔννοιαν καθ' ἣν καὶ ἡ ΑΒ· ὁ δὲ λόγος εἶναι, ὅτι ἐὰν προεκτελεθῇ ΖΕ πρὸς τὸ Θ, ἡ γωνία ΔΕΘ ἤθελεν ἔχει τὰς πλευρὰς τῆς παραλλήλους ἐκείνων τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἀλλὰ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴση. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἡ γωνία ΔΕΘ καὶ ΒΑΓ ἤθελον κάμνει ὁμοῦ δύο ὁρθὰς γωνίας.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Θεώρημα.

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι.

Ἄς ἐπιξευχθῇ ἡ διαγωνίος ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΔ· περιπλέον ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ, πρ. 24. καὶ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἡ γωνία ΑΒΔ=ΒΔΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, εἶναι ἴσα. πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ τὴν ἀπέναντι τῆς ἴσης γωνίας ΔΒΓ· καὶ παρομοίως ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ ΒΓ· λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι. σχ. 44.

Δεύτερον, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἰσίων τριγώνων ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Γ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ, σύνθετος ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΑΔΒ, ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΔΒΓ, ΑΒΔ, λοιπὸν αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Λοιπὸν δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ περιεχόμενοι μεταξὺ δύο ἄλλων παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ᾗναι ἴσαι, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ=ΓΔ, καὶ ΑΔ=ΒΓ, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον. (σχ. 44.)

Διότι, ἐπιξευχθείσης τῆς διαγωνίου ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν· λοιπὸν εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΔΒ ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΔΒΓ τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΓΔ· λοιπὸν ἡ

πλευρά ΑΔ είναι παράλληλος τῆς ΒΓ (πρ. 24.) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ΑΒ είναι παράλληλος τῆς ΓΔ· λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ, τετραπλεύρου τινὸς ᾗναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 44.).

Ἄς ἐπιζευθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ· ἐπειδὴ ΑΒ είναι παράλληλος τῆς ΓΔ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι (πρ. 24.): ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος  $ΑΒ=ΔΓ$ , ἡ πλευρά ΔΒ είναι κοινή, λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ (πρ. 6.): ἐπομένως ἡ πλευρά ΑΔ  $= ΒΓ$ , ἡ γωνία ΑΔΒ  $= ΔΒΓ$ , διὰ τοῦτο ΑΔ είναι παράλληλος τῆς ΒΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΑ΄.

#### Θεώρημα.

Αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΔΒ, τοῦ παραλληλογράμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 45.

Διότι, συγκρίνοντας τὸ τρίγωνον ΑΔΟ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΟΒ, εὐρίσκομεν τὴν πλευράν  $ΑΔ=ΓΒ$ , τὴν γωνίαν  $ΑΔΟ=ΓΒΟ$  (πρ. 24.)· καὶ τὴν γωνίαν  $ΔΑΟ=ΟΓΒ$ · λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα (πρ. 7.)· λοιπὸν ΑΟ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΟ, είναι ἴση τῇ ΟΓ, τῇ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΟΒΓ· διὰ τοῦτο καὶ  $ΔΟ=ΟΒ$ .

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ῥομβοειδές, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΟΒΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα· ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ  $= ΒΟΓ$ , καὶ οὕτως αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥομβοειδοῦς τέμνονται ἀμοιβαίως κατ' ὀρθὰς γωνίας.



## Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ

## ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

## Ὅρισμοί.

Α'. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμῆτις καμπύλη, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσάκεις ἀπέχουσιν ἀπὸ τι ἐντὸς αὐτῆς σημείου καλούμενον κέντρον.

Ὁ κύκλος εἶναι τὸ περατούμενον χωρίον ἀπὸ ταύτην τὴν καμπύλην γραμμῆν.

Σ. Κ. Ἐνίοτε εἰς τὴν ὁμιλίαν συγχέομεν τὸν κύκλον μὲ τὴν περιφέρειάν του· ἀλλ' εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφεύγωμεν τὴν σύγχυσιν ταύτην καὶ νὰ ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκφράσεων, ἐνθυμούμενοι, ὅτι κύκλος εἶναι ἐπιφάνεια ἣτις ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, ἐν ᾧ περιφέρεια εἶναι γραμμῆ.

Β'. Κάθε εὐθεῖα γραμμῆ ΓΑ, ΓΕ, ΓΔ, κ. τ. λ. ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, καλεῖται ἀκτίς ἢ ἡμιδιάμετρος· κάθε δὲ γραμμῆ, ὡς ΑΒ, διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη περατούμενη εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται διάμετρος.

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ κύκλου, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι παρομοίως, καὶ διπλάσαι τῆς ἀκτίνος.

Γ'. Καλεῖται τόξον μέρος τῆς περιφερείας· ὡς τὸ ΖΗ.

Χορδὴ δὲ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τόξου εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἢ ἐνόουσα τὰ δύο ἄκρα του.

Δ'. Τμήμα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἢ μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

Σ. Κ. Εἰς τὴν αὐτὴν χορδὴν ΖΗ ἀντίκεινται πάντοτε δύο τόξα ΖΗ, ΖΕΗ, καὶ ἐπομένως δύο τμήματα· πλὴν πάντοτε ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ μικροτέρου, ἐν ᾧ δὲν ἐκφράζομεν τὸ ἐναντίον.

Ε'. Τομεὺς εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τόξου τινὸς ΔΕ καὶ τῶν δύο ἀκτίνων ΓΔ, ΓΕ, ἡγμένων εἰς τὰ ἄκρα τούτου τοῦ τόξου.

ΣΤ. Καλεῖται γραμμῆ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύ-

κλον, ἐκείνη τῆς ὁποίας τὰ δύο ἄκρα εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς AB. (σχ. 47.)

Γωνία ἐγγεγραμμένη, ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ δύο χορδᾶς. Τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ BAF.

Τρίγωνον ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφὰς τῶν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς τὸ BAF.

Καὶ ἐν γένει σχῆμα ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφὰς τῶν εἰς τὴν περιφέρειαν: εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν λέγεται ὁ κύκλος περιγεγραμμένος εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα.

Ζ'. Καλεῖται διατέμνουσα ἡ γραμμὴ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα: τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ AB (σχ. 48.).

Η'. Ἐφαπτομένη εἶναι γραμμὴ ἔχουσα ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν: τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΓΔ. Ἡ κοινὴ στιγμὴ M λέγεται σημεῖον τῆς ἀφ᾽ ἧς.

Θ'. Παρομοίως δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὅταν ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι.

Ι'. Πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς περιφέρειας. Εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν ὁ κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον. (σχ. 160.)

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

### Θεώρημα.

Κάθε διάμετρος AB διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν τοῖς εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 49.)

Διότι ἐὰν φυλάττοντες τὴν κοινὴν βάσιν AB στρέψωμεν τὸ σχῆμα AEB ἐπὶ τοῦ AZB, πρέπει ἡ καμπύλη γραμμὴ AEB νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης AZB· ἐπειδὴ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην σημεῖα ἀνισάκως ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὸν ὀρισμὸν τοῦ κύκλου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

### Θεώρημα.

Κάθε χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.

Διότι ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς AD ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες AG, ΓΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ AD θέλει εἶναι ἐλάσσων AG + ΓΔ ἢ AD < AB. (σχ. 49.)

Πόρισμα. Λοιπὸν ἡ μεγαλητέρα εὐθεῖα γραμμὴ, ἥτις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τινά εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν του.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Εὐθεία γραμμὴ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα.

Διότι ἐὰν τὴν ἐσυναπαντοῦσεν εἰς τρία, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἰσάκως ἤθελον ἀπέχει τοῦ κέντρου· ἤθελον ὑπάρχει λοιπὸν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἡγμέναι ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον (πρ. 16. βιβλ. 1.).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνονται ἀπὸ ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα ὑποτείνουνσιν.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΑΓ ᾖναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΕΗ. (σχ. 50.)

Διότι οὗσης τῆς διαμέτρου ΑΒ ἴσης μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ, ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΕΝΗΖ, θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ αὐτὸ, καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΔΒ μὲ τὴν καμπύλην ΕΝΗΖ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΑΜΔ ὑποτίθεται ἴσον μὲ τὸ μέρος ΕΝΗ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Η· λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΗ.

Ἀντιστρόφως, ὑποτιθεμένης πάντοτε τῆς ἀκτῖνος ΑΓ=ΕΟ, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΔ=ΕΗ, λέγω ὅτι τὸ τόξον ΑΜΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

Διότι ἐπιζευχθεισὼν τῶν ἀκτῖνων ΓΔ, ΟΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΗ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδή, ΑΓ=ΕΟ, ΓΔ=ΟΗ, καὶ ΑΔ=ΕΗ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (11, 1)· ἀκολουθῶς ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ΕΗΖ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ, φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ἀκτὶς ΓΔ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΗ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τοῦ σημείου Η· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μεγαλύτερον τόξον ὑποτείνεται ἀπὸ τὴν μεγαλύτεραν χορδὴν, καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν



ὅμως τὰ τόξα, περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, ἦναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Διότι ἔστω τὸ τόξον ΑΘ (σχ. 50.) μείζον τοῦ ΑΔ, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΑΘ, καὶ αἱ ἀκτῖνες ΓΔ, ΓΘ· αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΘ τοῦ τριγώνου ΑΓΘ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ· ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν (10, 1.) ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΑΔ· λοιπὸν ἡ χορδὴ ἢ ὑποτείνουσα τὸ μεγαλητερον τόξον εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΘ ὑποτεθῇ μεγαλητέρα τῆς ΑΔ, θέλομεν συναξέει ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, καὶ οὕτω τὸ τόξον ΑΘ εἶναι μεγαλητερον τοῦ ΑΔ.

Σχόλιον. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ τόξα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν τὰ τόξα ἦσαν μεγαλήτερα, ἤθελεν ὑπάρχει ἡ ἐναντία ιδιότης τοῦ τόξου αὐξανόμενου, ἡ χορδὴ ἤθελε σμικρύνει, καὶ ἀντιστρόφως· οὕτως ἐν ᾧ τὸ τόξον ΑΚΒΔ εἶναι μεγαλητερον τοῦ ΑΚΒΘ, ἡ χορδὴ ΑΔ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς χορδῆς ΑΘ τοῦ δευτέρου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'. †

### Θεώρημα.

Ἡ ἀκτὶς ΓΗ (σχ. 51.), ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ, διαιρεῖ ταύτην τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΗΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἄς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΒ· αἱ ἀκτῖνες αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓΔ, εἶναι δύο ἴσαι πλάγια· λοιπὸν ἰσάκεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου (16, 1), ὅθεν ΑΔ=ΔΒ.

Δεύτερον, ἐπειδὴ ΑΔ=ΔΒ, ΓΗ εἶναι κάθετος ὑψωμένη εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· λοιπὸν (17, 1) κάθε σημεῖον ταύτης τῆς καθέτου ἰσάκεις πρέπει νὰ ἀπέχη ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β. Μεταξὺ τούτων εἶναι καὶ τὸ Η· λοιπὸν τὸ διάστημα ΑΗ=BΗ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι τὸ τόξον ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΒΗ (πρ. 4.)· λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΓΗ, ἡ κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, διαιρεῖ τὸ ἀπὸ αὐτὴν ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Τὸ κέντρον Γ, τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΒ, καὶ τὸ μέσον Η τοῦ ἀπὸ αὐτὴν ὑποτεινόμενου τόξου, εἶναι τρία σημεῖα εὐρισκόμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὴν χορδὴν. Ὡρα ἐπειδὴ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεώς τινος εὐθείας ἀρκοῦσι δύο σημεῖα· ἔπεται ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ δύο τῶν εἰρημένων σημείων, διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν.

Ἐπεται ὡσαύτως, ὅτι ἡ ὑψωμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον χορ-

δῆς τινος διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ μέσου τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν χορδὴν τόξου.

Διότι ἡ κάθετος ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἐκείνη ἣτις ἤθελε καταίτασθῃ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἰδίαν χορδὴν, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο διέρχονται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

### Θεώρημα.

Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας δεδομένων στιγμῶν  $A, B, \Gamma$ , πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, καὶ δὲν εἶναι δυνατόν παρὰ μία μόνη νὰ διέλθῃ.

Ἄς ἐπιξευχθῶσιν αἱ  $AB, B\Gamma$ , καὶ ἄς τμηθῶσι διῆχα ὑπὸ τῶν καθέτων  $\Delta E, ZH$ · λέγω δὲ κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται συναπαντῶνται εἰς ἓν σημεῖον  $O$ .

Ἐὰν αἱ γραμμαὶ  $\Delta E, ZH$  δὲν ᾖναι παράλληλοι, ἀναγκαίως τέμνονται. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι παράλληλοι· ἡ γραμμὴ  $AB$ , κάθετος εἰς τὴν  $\Delta E$ , ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν  $ZH$  (24, 1), καὶ ἡ γωνία  $K$  ἤθελεν εἶναι ὀρθή· ἀλλὰ  $BK$  προεκβολὴ τῆς  $B\Delta$  εἶναι διαφορετικὴ τῆς  $BZ$ , διότι τὰ τρία σημεῖα  $A, B, \Gamma$  δὲν εἶναι ἐπ' εὐθείας· λοιπὸν ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι  $BZ, BK$  ἡγμένοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς, ὅπερ ἀδύνατον (15, 1)· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ  $\Delta E, ZH$  τέμνονται πάντοτε εἰς ἓν σημεῖον  $O$ .

Τώρα τὸ σημεῖον  $O$ , ἐπειδὴ ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον  $\Delta E$ , ἰσάκεις ἀπέχει τῶν δύο σημείων  $A$  καὶ  $B$  (17, 1)· τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον, ἐπειδὴ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν κάθετον  $ZH$ , ἰσάκεις ἀπέχει τῶν δύο σημείων  $B$  καὶ  $\Gamma$ . Τὰ τρία λοιπὸν διαστήματα  $OA, OB, OG$ , εἶναι ἴσα. Ἡ γραφομένη λοιπὸν περιφέρεια ἐκ τοῦ  $O$  ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα  $OB$  θέλει διέλθῃ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα  $A, B, \Gamma$ .

Ἐκ τούτου ἀπεδείχθη ὅτι πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου ἐκ τριῶν δεδομένων στιγμῶν, μὴ ἐπ' εὐθείας· λέγω δὲ περιπλέον ὅτι μία μόνη δύναται νὰ διέλθῃ.

Διότι ἐὰν ὑπῆρχε δευτέρα τις περιφέρεια ἣτις νὰ διήρχετο ἀπὸ τὰ τρία δεδομένα σημεῖα  $A, B, \Gamma$ , τὸ κέντρον τῆς δὲν ἤμποροῦσε νὰ εὑρίσκηται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς  $\Delta E$  (17, 1), ἐπειδὴ τότε ἀνισάκεις ἤθελεν ἀπέχει τοῦ  $A$  καὶ  $B$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δὲν ἤμποροῦσε νὰ εὑρίσκηται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς  $ZH$ · λοιπὸν ἤθελεν εὑρίσκηται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν  $\Delta E, ZH$ . Ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι εἰς ἓν μόνον σημεῖον τέμνονται· λοιπὸν μία μόνη περιφέρεια ὑπάρχει, ἣτις δύναται νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας στιγμάς.

Πόρισμα. Δύο περιφέρειαι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ τέμνονται εἰς

περισσότερα τῶν δύο σημείων· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχον τρία κοινὰ, ἤθελον ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἤθελον σχηματίζει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η. †

Θεώρημα.

Δύο ἴσαι χορδαὶ ἰσάκεις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου· καὶ ἐκ δύο ἀνίσων, ἡ μικρότερα ἀπέχει περισσότερο.

1.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ χορδὴ  $AB = DE$ . Ἄς τμηθῶσι δὴγα αἱ χορδαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων  $GZ, GH$ , καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτίνες  $GA, GD$ , (σχ. 53). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα  $GAZ, DGH$ , ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας  $GA, GD$  ἴσας· περιπλέον ἡ πλευρὰ  $AZ$  ἥμισυ τῆς  $AB$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν  $DH$ , ἥμισυ τῆς  $DE$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18. 1), καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ  $GZ$  εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην  $GH$ · ὅθεν 1.<sup>ον</sup> αἱ δύο ἴσαι χορδαὶ  $AB, DE$ , ἰσάκεις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου.

2.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ χορδὴ  $AΘ$  μεγαλητέρα τῆς  $DE$ , τὸ τόξον  $AKΘ$  θέλει εἶναι μείζον τοῦ  $ΔME$  (πρ. 5): ἄς ληρθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου  $AKΘ$  τὸ μέρος  $ANB = ΔME$ , ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ  $AB$ , καὶ ἄς κατεβασθῇ ἡ  $GZ$  κάθετος ἐπὶ ταύτην τὴν χορδὴν, καὶ  $ΓI$ , κάθετος ἐπὶ τὴν  $AΘ$ · φανερόν εἶναι ὅτι  $GZ$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς  $ΓO$ , καὶ  $ΓO$  μεγαλητέρα τῆς  $ΓI$  (16, 1)· λοιπὸν πολὺ περισσότερο  $GZ > ΓI$ . Ἀλλὰ  $GZ = GH$ , ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ  $AB, DE$  εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν  $GH > ΓI$ · ἔπεται λοιπὸν, ὅτι ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικρότερα ἀπέχει περισσότερο τοῦ κέντρου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Θεώρημα.

Ἡ κάθετος  $BD$ , ἡγμένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος  $GA$  εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν. σχ. 54.

Διότι κάθε πλαγία  $ΓE$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου  $GA$  (16, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον  $E$  εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου· διὰ τοῦτο ἡ  $BD$  ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν δὲν ἔχει εἰμὴ τὸ  $A$ · λοιπὸν  $BD$  εἶναι ἐφαπτομένη (πρ. 8.)

Σχόλιον. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον  $A$  μία μόνη ἐφαπτομένη  $AD$  εἰς τὴν περιφέρειαν δύναται νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν ἦτον δυνατόν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη, αὕτη δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα  $GA$ · λοιπὸν ὡς πρὸς τὴν νέαν ταύτην ἐφαπτομένην, ἡ ἀκτὶς  $GA$  ἤθελεν εἶναι πλαγία, καὶ ἡ κάθετος, ἡγμένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ταύτην τὴν ἐφαπτομένην, ἤθελεν εἶναι μικρότερα τῆς  $GA$ · λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἤθελεν εἰσέρχεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἤθελεν εἶναι διατέμνουσα.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

## Θεώρημα. †

Δύο παράλληλοι  $AB, \Delta E$ , χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα  $MN, \Pi K$ . σχ. 55.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατόν νά ἀκολουθήσουν.

1.<sup>ον</sup> Ἐάν αἱ δύο παράλληλοι ᾗναι διατέμνουσαι, ὥς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς  $\Gamma\Theta$  κάθετος εἰς τὴν χορδὴν  $MP$ , εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν παράλληλόν τῆς  $NK$  (24, 1). λοιπὸν τὸ σημεῖον  $\Theta$  θέλει εἶναι ἐνταυτῷ τὸ μέσον τοῦ τόξου  $MP$  καὶ τοῦ τόξου  $NK$  (πρ. 6.) λοιπὸν θέλομεν ἔχει τὸ τόξον  $MP = \Theta P$ , καὶ τὸ τόξον  $N\Theta = \Theta K$ . ἐκ τούτου ἔπεται  $MP = N\Theta = \Theta P = \Theta K$ , τουτέστι  $MN = \Pi K$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐάν ἐκ τῶν δύο παράλληλων  $AB, \Delta E$ , ἡ μία ᾗναι διατέμνουσα, καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη· εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀφῆς  $\Theta$  ὥς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς  $\Gamma\Theta$  αὕτη θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐφαπτομένην  $\Delta E$  (πρ. 9.) καὶ εἰς τὴν παράλληλόν τῆς  $MP$ . Ἀλλ' ἐπειδὴ  $\Gamma\Theta$  εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν  $MP$ , τὸ σημεῖον  $\Theta$  εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου  $MP$ . λοιπὸν τὰ τόξα  $MP, \Theta P$  περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παράλληλων  $AB, \Delta E$  εἶναι ἴσα.

3.<sup>ον</sup> Τέλος ἐάν αἱ δύο παράλληλοι  $\Delta E, \Pi A$  ᾗναι ἐφαπτόμεναι, ἡ μὲν εἰς  $\Theta$ , ἡ δὲ εἰς  $K$ , ὥς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα παράλληλος  $AB$ , θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων  $MP = \Theta P$  καὶ  $MP = K'P$ . λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον  $\Theta MP = \Theta PK'$ , καὶ περιπλέον βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τούτων τῶν τόξων εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

## Θεώρημα.

Ἐάν δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς δύο σημεία, ἡ διερχομένη γραμμὴ ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ἣτις ἐνόνει τὰ σημεία τῆς κοινῆς τομῆς, καὶ θέλει τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι ἡ γραμμὴ  $AB$ , ἡ ἐνόνουσα τὰ σημεία τῆς κοινῆς τομῆς, εἶναι κοινὴ χορδὴ εἰς τοὺς δύο κύκλους. Τώρα ἐάν εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς ὑψωθῇ μία κάθετος, αὕτη πρέπει νά διέλθῃ ἀπὸ καθέν τῶν δύο κέντρων  $\Gamma$  καὶ  $\Delta$ . (πρ. 6.) Ἀλλ' ἐκ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα δύναται νά ἀχθῇ. λοιπὸν ἡ διερχομένη εὐθεῖα ἀπὸ τὰ κέντρα, θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

## Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ μεγαλητέρα ἀκτίς ᾖναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων, αἱ δύο περιφέρειαι θέλει τέμνονται. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι διὰ τὰ ἔχη χώραν ἡ κοινὴ τομὴ, πρέπει τὸ τρίγωνον ΓΑΔ νὰ ὑπάρχη· πρέπει λοιπὸν ὅχι μόνον ΓΔ νὰ ᾖναι  $< ΑΓ + ΑΔ$  σχ. 57· ἀλλὰ ἀκόμη καὶ ἡ μεγαλητέρα ἀκτίς ΑΔ νὰ ᾖναι  $< ΑΓ + ΓΔ$ . σχ. 58. Τώρα ὁσάκις τὸ τρίγωνον ΓΑΔ ἡμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ, φανερόν εἶναι ὅτι αἱ γραμμῆναι περιφέρειαι ἐκ τῶν κέντρων Γ καὶ Δ, θέλει τέμνονται εἰς Α καὶ Β.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

## Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἄπτονται ἐξωτερικῶς.

Φανερόν εἶναι ὅτι θέλουν ἔχει τὸ σημεῖον Α κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ τὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἔπρεπε τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων νὰ ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (πρ. 12.)

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

## Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ᾖναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἄπτονται ἐσωτερικῶς. σχ. 60.

Φανερόν εἶναι, ὅτι ἔχουν τὸ σημεῖον Α κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ τὰ ἔχουν ἐν ἄλλο, ἔπρεπε ἡ μεγαλητέρα ἀκτίς ΑΔ νὰ ᾖναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀκτίνος ΑΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΓΔ (πρὸς 12.) τὸ ὅποιον δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα. Λοιπὸν ἐὰν δύο κύκλοι ἄπτονται, εἴτε ἐσωτερικῶς, εἴτε ἐξωτερικῶς, τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον. Ὅλοι οἱ κύκλοι οἵτινες ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, καὶ διέρχονται ἐκ τῆς στιγμῆς Α, ἄπτονται μετὰ ξύ των, καὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον παρὰ τὸ Α. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ ΑΕ κάθετος εἰς τὴν ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλει εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς ὅλους τούτους τοὺς κύκλους. σχ. 59 καὶ 60.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ. †

## Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι  $\text{ΑΓΒ}$ ,  $\text{ΔΓΕ}$ , τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς τὸ κέντρον, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΔΕ}$ .

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΔΕ}$ , ᾗναι ἴσα, αἱ γωνίαι  $\text{ΑΓΒ}$ ,  $\text{ΔΓΕ}$ , θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι. σχ. 61.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἐὰν ἡ γωνία  $\text{ΑΓΒ}$  ᾗναι ἴση τῇ  $\text{ΔΓΕ}$ , ἡ μία δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι φανερόν εἶναι ὅτι τὸ σημεῖον  $\text{Α}$  θέλει πέσει εἰς  $\text{Δ}$ , καὶ τὸ σημεῖον  $\text{Β}$  εἰς  $\text{Ε}$ . Ἀλλὰ τότε τὸ τόξον  $\text{ΑΒ}$  πρέπει ὁμοίως νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου  $\text{ΔΕ}$ · διότι ἐὰν τὰ δύο τόξα δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὸ ἐν ἡ εἰς τὸ ἄλλο σημεῖα ἀνιστάκις ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὸ τόξον  $\text{ΑΒ}=\text{ΔΕ}$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν ὑποτεθῇ  $\text{ΑΒ}=\text{ΔΕ}$ , λέγω ὅτι ἡ γωνία  $\text{ΑΓΒ}$  θέλει εἶναι ἴση τῇ  $\text{ΔΓΕ}$ · διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται δὲν ᾗναι ἴσαι, ἔστω  $\text{ΑΓΒ}$  ἡ μεγαλητέρα, καὶ ἄς ληρθῇ  $\text{ΑΓΙ}=\text{ΔΓΕ}$ · θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων,  $\text{ΑΙ}=\text{ΔΕ}$ · ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τόξον  $\text{ΑΒ}=\text{ΔΕ}$ · λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει  $\text{ΑΙ}=\text{ΑΒ}$ , ἡ τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν ἡ γωνία  $\text{ΑΓΒ}=\text{ΔΓΕ}$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ.

## Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐὰν δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον  $\text{ΑΓΒ}$ ,  $\text{ΔΓΕ}$  ᾗναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὰ περιεχόμενα τόξα μεταξύ τῶν πλευρῶν των  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΔΕ}$ , θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ θέλομεν ἔχει ταύτην τὴν ἀναλογίαν, γωνία  $\text{ΑΓΒ}$ : γωνίαν  $\text{ΔΓΕ}$  :: τόξον  $\text{ΑΒ}$ : τόξον  $\text{ΔΕ}$ . σχ. 62.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι αἱ γωνίαι  $\text{ΑΓΒ}$ ,  $\text{ΔΓΕ}$ , εἶναι μεταξύ των ὡς 7 πρὸς 4, ἡ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ὅτι ἡ γωνία  $\text{Μ}$  κοινὸν μέτρον τῶν δύο γωνιῶν, περιέχεται εἰς μὲν τὴν γωνίαν  $\text{ΑΓΒ}$  ἐπτάκις, εἰς δὲ τὴν  $\text{ΔΓΕ}$  τετράκις. Ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ γωνίαι  $\text{ΑΓμ}$ ,  $\text{μΓν}$ ,  $\text{νΓΠ}$ , κ. τ. λ.,  $\text{ΔΓχ}$ ,  $\text{χΓψ}$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των, τὰ μερικὰ τόξα  $\text{Αμ}$ ,  $\text{μν}$ ,  $\text{νπ}$ , κ. τ. λ.,  $\text{Δχ}$ ,  $\text{χψ}$ , κ. τ. λ. εἶναι παρομοίως ἴσα μεταξύ των. (Πρό. 15.) Λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον  $\text{ΑΒ}$  θέλει εἶναι πρὸς τὸ ὅλον τόξον  $\text{ΔΕ}$  ὡς 7 πρὸς 4. Τώρα φανερόν εἶναι, ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἔχει χώραν, ὅταν ἀντὶ 7 καὶ 4 λάβωμεν ὅποιουσδήποτε ἄλλους ἀριθμούς· λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν γωνιῶν



ΑΓΒ, ΔΓΕ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀκέραιων ἀριθμῶν, τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ᾖσαν μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΒ, ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ πάντοτε ἠθέλαμεν ἔχει ΑΓΒ: ΔΓΕ:: ΑΒ: ΔΕ· διότι ἐπειδὴ τὰ μερικά τόξα Αμ, μν, κ. τ. λ., Δχ, χψ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα, αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, κ. τ. λ. εἶναι παρομοίως ἴσαι.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Ὅποιοιδήποτε λόγον ἔχωσιν αἱ δύο γωνίαι ΑΓΒ, ΑΓΔ, πάντοτε θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰ περιεχόμενα μεταξύ τῶν πλευρῶν των καὶ γεγραμμένα ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ κέντρων μὲ ἴσας ἀκτῖνας.

Ἄς ὑποθέσωμεν τὴν μικροτέραν γωνίαν ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας: ἐὰν ἡ ἐκφωνηθεῖσα ἀναλογία δὲν ὑπάρχῃ, ἡ γωνία ΑΓΒ, θέλει εἶναι εἰς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ εἰς ἓν τόξον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ ΑΔ. Ἄς ὑποθέσωμεν τοῦτο τὸ τόξον μεγαλήτερον, καὶ ἄς τὸ παραστήσωμεν διὰ ΑΟ, οὕτω θέλομεν ἔχει:

γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΟ.

Ἄς ἐννοήσωμεν τώρα τὸ τόξον ΑΒ διηρημένον εἰς μέρη ἴσα ἕκασον τῶν ὁποίων νὰ ᾖναι μικρότερον τοῦ ΔΟ· θέλει ὑπάρχει τοῦλάχιστον ἓν σημεῖον διαιρέσεως μεταξύ Δ καὶ Ο: ἔστω Ι τοῦτο τὸ σημεῖον, ἄς ἐπιζευχθῇ ΓΙ. Τὰ τόξα ΑΒ, ΑΙ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ κατὰ τὸ προλαβόν θεώρημα θέλομεν ἔχει:

γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΙ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΙ.

Συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, βλέπομεν ὅτι οἱ ἡγούμενοι εἶναι οἱ αὐτοί: λοιπὸν οἱ ἐπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν καὶ ἔχομεν

γωνία ΑΓΔ: γωνίαν ΑΓΙ:: τόξον ΑΟ: τόξον ΑΙ.

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΟ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΑΙ: ἔπρεπε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία, ἡ γωνία ΑΓΔ νὰ ᾖναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΑΓΙ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικροτέρα: λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ γωνία ΑΓΒ νὰ ᾖναι πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς ἓν τόξον μεγαλήτερον τοῦ ΑΔ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς Ἀναλογίας δὲν δύναται νὰ ᾖναι μικρότερος τοῦ ΑΔ· λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΔ· ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν:

γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΔ.

**Πόρισμα.** Ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τὸ περιεχόμενον τόξον μεταξύ τῶν πλευρῶν ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, ὥστε ὅταν ἡ γωνία αὐξάνῃ ἢ σμικρύνῃ, νὰ αὐξάνῃ ἢ νὰ σμικρύνῃ τὸ τόξον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δικαίως ἤμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μίαν τούτων τῶν ποσοτήτων ὡς μέτρον τῆς ἄλλης: διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἐξῆς λαμβάνομεν τὸ τόξον  $AB$  ὡς μέτρον τῆς γωνίας  $AGB$ . Πρέπει μόνον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὴν πρὸς ἀλλήλας σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦσιν αὐτάς, πρέπει νὰ ᾖναι γεγραμμένα μὲ ἴσας ἀκτῖνας· διότι τοῦτο ὑποθέτουσιν αἱ προηγούμεναι προτάσεις.

**Σχόλιον Α.** Φαίνεται φυσικώτερον νὰ μετρῆται πᾶσα ποσότης διὰ ἄλλης τινὸς τοῦ ἰδίου εἶδους· καὶ κατ' αὐτὴν ἀρχὴν ἔπρεπε νὰ ἀναφερθῶσιν ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὴν ὀρθήν: διὰ τοῦτο λαμβανομένης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος τοῦ μέτρου, ἡ ὀξεῖα γωνία ἤθελεν ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξύ  $0$  καὶ  $1$ , καὶ ἡ ἀμβλεία δι' ἀριθμοῦ μεταξύ  $1$  καὶ  $2$ . Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐκφράζειν τὰς γωνίας δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ ἐπιτηδεύτερος εἰς τὴν χρῆσιν. Εὐρέθη λοιπὸν ἀπλούστερον νὰ μετρῶνται αἱ γωνίαι διὰ τόξων κύκλων, διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ κατασκευάζειν τόξα ἴσα μὲ δεδομένα, καὶ δι' ἄλλους πολλοὺς λόγους. Τέλος, ἂν καὶ τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν διὰ τῶν τόξων κύκλου εἶναι τρόπον τινὰ ἔμμεσον, μὲ εὐκολίαν ὅμως διὰ μέσου αὐτῶν συνάγομεν τὸ ἄμεσον καὶ ἀπόλυτον· διότι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ γωνίαν τινὰ μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, θέλομεν ἔχει τὸν λόγον τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀπόλυτον μέτρον.

**Σχόλιον Β.** Ὅτι ἀπεδείχθη εἰς τὰς τρεῖς προηγούμενας προτάσεις διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν μὲ τὰ τόξα, ὑπάρχει ἐπίσης διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τομέων μὲ τὰ τόξα, διότι οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι, ὅταν αἱ γωνίαι ᾖναι ἴσαι, καὶ ἐν γένει εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς γωνίας· λοιπὸν δύο τομεῖς  $AGB$ ,  $AGD$ , εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα  $AB$ ,  $AD$ , τὰς βάσεις τῶν ἰδίων τομέων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ τόξα τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς γωνίας, ἤμποροῦν ὁμοίως νὰ χρησιμεύσουν ὡς μέτρον τῶν διαττόρων τομέων τοῦ ἰδίου κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ. —

#### Θεώρημα.

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία  $BAD$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἡμισυ τοῦ τόξου  $BA$  περιεχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν τῆς. σχ. 64. καὶ 65.

Ἀς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐ-  
 ρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας  $BA\Delta$ . ἄγομεν τὴν διάμετρον  $AE$  καὶ  
 τὰς ἀκτῖνας  $GB$ ,  $GD$ . Ἡ ἐκτὸς γωνία  $BGE$ , εἶναι ἴση μὲ τὸ  
 ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς  $GAB$ ,  $ABG$ . (πρ. 19, 1): ἀλλ' ἐπειδὴ  
 τὸ τρίγωνον  $BAG$  εἶναι ἰσοσκελές, ἡ γωνία  $GAB = ABG$ . λοι-  
 πὸν ἡ γωνία  $BGE$  εἶναι διπλασία τῆς  $BAG$ . Ἡ γωνία  $BGE$ ,  
 ὡς γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον  $BE$ : λοιπὸν  
 ἡ γωνία  $BAG$  θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $BE$ . Διὰ  
 τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία  $GAD$  θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ  
 τοῦ  $ED$ . λοιπὸν  $BAG + GAD$  ἢ  $BA\Delta$  θέλει μετρεῖται ἀπὸ τὸ  
 ἥμισυ τοῦ  $BE + ED$  ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ  $BD$ . σχ. 64.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ κέντρον  $\Gamma$  εὐρίσκεται ἐκτὸς  
 τῆς γωνίας  $BA\Delta$ , τότε ἐάν ἄξωμεν τὴν διάμετρον  $AE$ , ἡ γω-  
 νία  $BAE$  θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $BE$ , ἡ γωνία  $DAE$   
 πὸ ἥμισυ τοῦ  $DE$ . λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν  $BA\Delta$  θέλει ἔχει διὰ  
 μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $BE$  μείον τὸ ἥμισυ τοῦ  $ED$ , ἢ τὸ ἥμισυ  
 τοῦ  $BD$ . σχ. 65.

Λοιπὸν κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ  
 τοῦ περιεχομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς.

Πόρισμα Α'. Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ αὐτὸ  
 τμήμα καθὼς  $BAG$ ,  $BAG$  κ. τ. λ. Εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι διὰ  
 μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἰδίου τόξου  $BOG$ . σχ. 66.

Β'. Κάθε γωνία  $BA\Delta$  ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον εἶναι  
 γωνία ὀρθή, ὡς ἔχουσα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφε-  
 ρείας  $BO\Delta$ , ἢ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας. σχ. 67.

Διὰ τὰ δεῖξωμεν τὸ αὐτὸ μὲ ἄλλον τρόπον, ἅς ἐπιζευχθῇ ἡ  
 ἀκτὶς  $AG$ . τὸ τρίγωνον  $BAG$  εἶναι ἰσοσκελές, ὅθεν ἡ γωνία  $BAG =$   
 $ABG$ . τὸ τρίγωνον  $GAD$  εἶναι παρομοίως ἰσοσκελές. λοιπὸν ἡ  
 γωνία  $GAD = ADG$ . ἐπομένως  $BAG + GAD$  ἢ  $BA\Delta = ABD + ADB$ .  
 Ἀλλ' ὅταν αἱ δύο γωνίαι  $B$  καὶ  $\Delta$  τοῦ τριγώνου  $AB\Delta$  κάμνουν  
 ὁμοῦ τὴν τρίτην  $BA\Delta$ , φανερόν εἶναι ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τρι-  
 γώνου ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο φοραῖς τὴν γωνίαν  $BA\Delta$ . αὐταὶ δὲ ἰσοδυ-  
 ναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς. λοιπὸν ἡ γωνία  $BA\Delta$  εἶναι ὀρθή.

Γ'. Κάθε γωνία  $BAG$  ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα μείζον τοῦ  
 ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ὀξεῖα διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ  
 τοῦ τόξου  $BOG$  ἐλάσσονος ἡμιπεριφερείας. σχ. 66.

Καὶ κάθε γωνία  $BOG$  ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα ἐλασσον τοῦ  
 ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ἀμβλεία διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμι-  
 συ τοῦ τόξου  $BAG$  μείζονος ἡμιπεριφερείας.

Δ'. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι  $A$  καὶ  $\Gamma$  ἐγγεγραμμένου τινὸς τε-



τραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , ἰσοδυναμοῦν με δύο ὀρθάς· διότι ἡ γωνία  $BA\Delta$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $B\Gamma\Delta$ · ἡ γωνία  $B\Gamma\Delta$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $BA\Delta$ · λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι  $BA\Delta$ ,  $B\Gamma\Delta$ , ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἔχουν διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας· λοιπὸν τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ με δύο ὀρθάς. σχ. 68.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

#### Θεώρημα.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία  $BA\Gamma$  ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ μίαν χορδὴν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $AM\Delta\Gamma$  τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς. σχ. 69.

Εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀρχῆς  $A$  ἅς ἀχθῇ ἡ διάμετρος  $AA'$ · ἡ γωνία  $BA\Delta$  εἶναι ὀρθή, (πρ. 9) καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας  $AM\Delta$ , ἡ γωνία  $\Delta A\Gamma$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $\Delta\Gamma$ · λοιπὸν  $BA\Delta + \Delta A\Gamma$  ἢ  $BA\Gamma$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $AM\Delta$ , πλεον τὸ ἥμισυ τοῦ  $\Delta\Gamma$ , ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου  $AM\Delta\Gamma$ .

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία  $\Gamma A\epsilon$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $A\Gamma$  περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

Εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθείαν  $AB$  εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 70.

Ἐκ τῶν σημείων  $A$  καὶ  $B$ , ὡς ἐκ κέντρων, με τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλύτεραν τῆς ἡμισείας τῆς  $AB$ , ἅς γραφθῶσι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς  $\Delta$ . Τὸ σημεῖον  $\Delta$  ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν σημείων  $A$  καὶ  $B$ · ἅς σημειωθῇ παρομοίως ἄνω ἢ κάτω τῆς γραμμῆς  $AB$  ἐν δεύτερον σημεῖον  $\epsilon$  ἰσάκις ἀπέχον τῶν σημείων  $A$  καὶ  $B$ , ἅς ἐπεζευχθῇ ἡ γραμμὴ  $\Delta\epsilon$ · λέγω ὅτι ἡ  $\Delta\epsilon$  τέμνει τὴν  $AB$  εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν  $\Gamma$ .

Διότι ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν σημείων  $\Delta$  καὶ  $\epsilon$  ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων  $A$  καὶ  $B$ , πρέπει νὰ εὐρίσκηται εἰς τὴν ὑψωνομένην καθετον εἰς τὸ μέσον τῆς  $AB$ . Ἀλλὰ διὰ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ  $\Delta\epsilon$

είναι αὐτὴ ἡ ἰδίᾳ κάθετος τέμνουσα τὴν  $AB$  εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν  $\Gamma$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.

Ἐξ ἑνὸς σημείου  $A$ , δεδομένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς  $B\Gamma$ , νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς ταύτην τὴν γραμμὴν. σχ. 71.

Ἀς ληθῶσι τὰ σημεία  $B$  καὶ  $\Gamma$  ὥστε ἰσάκεις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ  $A$ , ἀκολουθῶς ἐκ τῶν σημείων  $B$  καὶ  $\Gamma$ , ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν ἀλλὰ μείζονα τῆς  $BA$ , ὥς γραφθῶσι δύο τόξα τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς  $\Delta$ . ὥς ἐπέξευχθῇ  $A\Delta$  ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Διότι ἐπειδὴ τὸ σημεῖον  $\Delta$  ἰσάκεις ἀπέχει τοῦ  $B$  καὶ  $\Gamma$ , ἀνήκει εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς  $B\Gamma$ . λοιπὸν  $A\Delta$  εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κάμνομεν ὀρθὴν γωνίαν  $BA\Delta$ , εἰς δεδομένον σημεῖον  $A$ , ἐπὶ δεδομένης γραμμῆς  $B\Gamma$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου  $A$ , ἐκτὸς τῆς εὐθείας  $BA$  δεδομένου, νὰ κατεβάσωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 72.

Ἐκ τοῦ σημείου  $A$  ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, ὥς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν  $BA$  εἰς δύο σημεία  $B$  καὶ  $\Delta$ . ὥς σημειωθῇ ἀκολουθῶς σημεῖόν τι  $E$  ἰσάκεις ἀπέχον ἀπὸ  $B$  καὶ  $\Delta$ , καὶ ὥς ἐπιξευχθῇ  $AE$  ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων  $A$  καὶ  $E$  ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ  $B$  καὶ  $\Delta$ . λοιπὸν ἡ  $AE$  εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς  $BA$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Εἰς τὴν στιγμὴν  $A$  τῆς γραμμῆς  $AB$ , νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ  $K$ . σχ. 73.

Ἐκ τῆς κορυφῆς  $K$ , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν, ὥς γραφθῇ τὸ τόξον  $IK$  περατούμενον εἰς τὰς δύο πλευράς τῆς γωνίας. Ἐκ τῆς στιγμῆς  $A$  ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα  $AB$  ἴσην τῇ  $KI$ , ὥς γραφθῇ τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον  $BO$ . ὥς ληθῇ ἀκολουθῶς μία ἀκτὶς ἴση τῇ χορδῇ  $AI$ . Ἐκ τῆς στιγμῆς  $B$  ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ὥς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἀπροσδιόριστον  $BO$  εἰς  $\Delta$ . ὥς ἐπιξευχθῇ  $A\Delta$ , καὶ ἡ γωνία  $\Delta AB$  θέλει εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ  $K$ .

Διότι τὰ δύο τόξα  $BA$ ,  $AI$ , ἔχουν ἀκτῖνας καὶ χορδὰς ἴσας. λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ. 4, 2.) ἐπομένως ἡ γωνία  $BA\Delta = IK\Lambda$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε.

Νὰ διαιρέσωμεν γωνίαν ἢ τόξον δεδομένον εἰς δύο ἴσα μέρη.  
σχ. 74.

1.<sup>ον</sup> Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον AB εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐκ τῶν σημείων A καὶ B ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Διὰ τῆς στιγμῆς Δ καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἣτις θέλει τέμνει τὸ τόξον AB εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμήν Ε.

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἰσάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων A καὶ B τῆς χορδῆς AB, λοιπὸν ἡ ΓΔ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς· ἐπομένως διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ τόξον AB εἰς τὴν στιγμήν Ε. (προ. 6, 2).

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν AGB, γράφομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, τὸ τόξον AB, ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ΓΔ θέλει διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν AGB.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κάθε ἡμῖς AE, EB, εἰς δύο ἴσα μέρη· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διὰ διαδοχικῶν υποδιαιρέσεων, γωνία ἢ τόξον δεδομένον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα, ὀκτώ, δεκαεξ, κ. τ. λ. ἴσα μέρη.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ.

Ἀπὸ δεδομένου σημείου A, νὰ ἄξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον ἄλλης δεδομένης BG. σχ. 75.

Ἐκ τοῦ σημείου A, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, γράφομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον EO· ἐκ τοῦ σημείου E ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν τὸ τόξον AZ, λαμβάνομεν EΔ = AZ, καὶ ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΔ θέλομεν ἔχει τὴν ζητουμένην παράλληλον.

Διότι ἐνόησαντες τὴν AE, βλέπομεν ὅτι αἱ ἀναλλάξ γωνίαι AEZ, EAD, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, EZ εἶναι παράλληλοι. (24, 1).

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ.

Δεδομένων δύο γωνιῶν A καὶ B ἐνὸς τριγώνου, νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην. σχ. 76.

Ἀς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος γραμμὴ ΔEZ, ἃς κατασκευασθῇ εἰς τὴν στιγμήν Ε, ἡ γωνία ΔΕΓ = A, καὶ ἡ ΓΕΘ = B: Ἡ



γωνία  $\Theta EZ$  θέλει είναι ἡ ζητούμενη τρίτη· διότι αἱ τρεῖς αὐταὶ γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι δίδουν δι' ἄθροισμα δύο ὁρθάς.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν  $B$  καὶ  $\Gamma$  ἐνὸς τριγώνου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας  $A$ , νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον. σχ. 77.

Ἀχθείσης τῆς ἀπροσδιορίστου  $\Delta E$ , ἃς κατασκευασθῇ εἰς τὴν στιγμὴν  $\Delta$  ἡ γωνία  $E\Delta Z$  ἴση τῇ δεδομένῃ  $A$ · ἃς ληθῇ ἀκολούθως  $\Delta H = B$ , καὶ  $\Delta \Theta = \Gamma$ , ἃς ἐπιζευχθῇ  $H\Theta$  καὶ  $\Delta H\Theta$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δεδομένων μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν τριγώνου τινός, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ἡ καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι πρέπει νὰ ᾖναι προσκειμέναι εἰς τὴν δεδομένην πλευράν, ἢ ἡ μία προσκειμένη, καὶ ἡ ἄλλη ἀπέναντι· εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν, ζητοῦμεν τὴν τρίτην (πρόβ. 7.), καὶ οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προσκειμένας. Τούτου τεθέντος, ἄγωμεν τὴν εὐθεῖαν  $\Delta E$  ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, κάμνομεν εἰς τὴν στιγμὴν  $\Delta$  τὴν γωνίαν  $E\Delta Z$  ἴσην μετὰ τὴν μίαν τῶν προσκειμένων γωνιῶν, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν  $E$  τὴν  $\Delta E H$  ἴσην μετὰ τὴν ἄλλην· αἱ δύο γραμμαὶ  $\Delta Z, E H$ , θέλουν τέμνεσθαι εἰς  $\Theta$ , καὶ  $\Delta E \Theta$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 78.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν  $A, B, \Gamma$  ἐνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ἀς ἀχθῇ ἡ  $\Delta E$  ἴση τῇ πλευρᾷ  $A$ · ἐκ τῆς στιγμῆς  $E$  ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὰ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δευτέρᾳ πλευρᾷ  $B$ , ἃς γραφθῇ τόξον· ἐκ τῆς στιγμῆς  $\Delta$  ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὰ ἀκτῖνα ἴσην τῇ τρίτῃ πλευρᾷ  $\Gamma$  ἃς γραφθῇ ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον θέλει τέμνει τὸ πρῶτον εἰς  $Z$ · ἃς ἐπιζευχθῶσι  $\Delta Z, E Z$ , καὶ  $\Delta E Z$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 79.

Σχόλιον. Ἐάν μία τῶν πλευρῶν ᾖ το μεγαλητέρα τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο ἄλλων, τὰ τόξα δὲν ἤθελον τέμνεσθαι· ἀλλ' ὅσάκις τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν λαμβανόμενον ὅπως ὁῦναι εἶναι μεγαλήτερον τῆς τρίτης, ἡ λύσις εἶναι πάντοτε δυνατή.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν  $A$  καὶ  $B$  τριγώνου τινός, καὶ τῆς γωνίας  $\Gamma$  τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς  $B$ , νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον. σχ. 80.

Δύο περιστάσεις ὑπάρχουν. 1.<sup>ο</sup> Ἐάν ἡ γωνία  $\Gamma$  ᾖ ὁρθή

ἡ ἀμβλεῖα· ἃς κατασκευασθῇ ἡ γωνία  $\text{E}\Delta\text{Z}$  ἴση τῇ  $\Gamma$ · ἃς ληφθῇ  $\Delta\text{B} = \text{A}$ · ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς  $\text{E}$ , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένη πλευρᾷ  $\text{B}$ , ἃς γραφθῇ τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς  $\text{Z}$  τὴν  $\Delta\text{Z}$ · ἃς ἐπιζευχθῇ  $\text{EZ}$ , καὶ οὕτω  $\Delta\text{EZ}$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην περίστασιν πρέπει ἡ πλευρὰ  $\text{B}$  νὰ ᾔῃ μεγαλητέρα τῆς  $\text{A}$ · διότι ἡ γωνία  $\Gamma$  οὕσα ὀρθή ἢ ἀμβλεῖα εἶναι ἡ μεγαλητέρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· λοιπὸν ἡ ἀπέναντι πλευρὰ πρέπει ὁμοίως νὰ ᾔῃ ἡ μεγαλητέρα.

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν δὲ ἡ γωνία  $\Gamma$  ᾔῃ ὀξεῖα, καὶ ἡ  $\text{B}$  μεγαλητέρα τῆς  $\text{A}$ , ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἔχει χώραν, καὶ  $\Delta\text{EZ}$  εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 81.

Ἀλλ' ἐὰν, ἐν ᾧ  $\Gamma$  εἶναι ὀξεῖα, ἡ πλευρὰ  $\text{B}$  ᾔῃ μικροτέρα τῆς  $\text{A}$ , τότε τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ κέντρου  $\text{E}$  μὲ τὴν ἀκτῖνα  $\text{EZ} = \text{B}$ , θέλει τέμνει τὴν πλευρὰν  $\Delta\text{Z}$  εἰς δύο σημεῖα  $\text{Z}$  καὶ  $\text{H}$  κείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ  $\Delta$ · θέλουν ὑπάρχει λοιπὸν δύο τρίγωνα  $\Delta\text{EZ}$ ,  $\Delta\text{EH}$ , ἐπίσης πληροῦντα εἰς τὸ πρόβλημα, ὡς ἔχοντα τὰ αὐτὰ δοθέντα. σχ. 82.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶναι ἀδύνατον εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις, ἐὰν ἡ πλευρὰ  $\text{B}$  ᾔτο μικροτέρα τῆς φερομένης καθεύτου ἐκ τῆς στιγμῆς  $\text{E}$  ἐπὶ  $\Delta\text{Z}$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ.

Δεδομένων τῶν προσκειμένων πλευρῶν  $\text{A}$  καὶ  $\text{B}$  παραλληλογράμμου τινὸς καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας  $\Gamma$ , νὰ γράψωμεν τὸ παραλληλόγραμμον. σχ. 83.

Αγομεν τὴν  $\Delta\text{E} = \text{A}$ , κάμνομεν εἰς τὴν στιγμὴν  $\Delta$  τὴν γωνίαν  $\text{Z}\Delta\text{E} = \Gamma$ , λαμβάνομεν  $\Delta\text{Z} = \text{B}$ · γράφομεν δύο τόξα, τὸ μὲν ἐκ τῆς στιγμῆς  $\text{Z}$  ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα  $\text{ZH} = \Delta\text{E}$ , τὸ δὲ ἐκ τῆς στιγμῆς  $\text{E}$  ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα  $\text{EH} = \Delta\text{Z}$ : ἐνόνομεν τὴν στιγμὴν  $\text{H}$ , ὅπου τὰ δύο ταῦτα τόξα τέμνονται, μὲ τὰς  $\text{Z}$  καὶ  $\text{E}$ , διὰ τῶν  $\text{ZH}$ ,  $\text{EH}$ · καὶ  $\Delta\text{EHZ}$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὸ γεγραμμένον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον (30, 1)· καὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο περιέχει τὰς δεδομένας πλευράς καὶ τὴν δεδομένην γωνίαν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ᾔῃ ὀρθή, τὸ σχῆμα θέλει εἶναι ὀρθογώνιον· ἐὰν δὲ περιπλέον καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, θέλει εἶναι τετράγωνον.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

Νὰ εὗρωμεν τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου. σχ. 84.  
 Ἀς ληφθῶσι κατ' ἀρέσκειαν εἰς τὴν περιφέρειαν ἢ εἰς τὸ τόξον τρία σημεῖα Α, Β, Γ· ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, ἃς τμηθῶσι δίχα αἱ γραμμαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Ἡ' στιγμὴ Ο, ὅπου αὗται αἱ κάθετοι συναπαντῶνται, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν περιφέρειαν διὰ τριῶν δεδομένων στιγμῶν Α, Β, Γ, καθὼς καὶ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν εἰς δεδομένον τρίγωνον.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'. †

Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον νὰ ἄξωμεν ἐφαπτομένην εἰς δεδομένον κύκλον.

Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Α ᾖ ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΑ, καὶ ἃς ἀχθῇ ΑΔ κάθετος εἰς τὴν ΓΑ· οὕτως ἡ ΑΔ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη. (9, 2) σχ. 85.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Α ᾖ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἃς ἐνωθῇ μὲ τὸ κέντρον διὰ τῆς εὐθείας ΓΑ· ἃς τμηθῇ δίχα ἡ ΓΑ εἰς τὴν στιγμὴν Ο· ἐκ δὲ τοῦ Ο, ὡς ἐκ κέντρον, καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ, ἃς γραφθῇ περιφέρεια ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς τὴν στιγμὴν Β· ἃς ἐπιζευχθῇ ΑΒ, αὕτη δὲ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη. σχ. 86.

Διότι ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ, ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ (18, 2)· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος ΓΒ, ἀκολουθῶς εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχόλιον. Ὅταν τὸ σημεῖον Α ᾖ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἐφαπτόμεναι ἵσαι ΑΒ, ΑΔ, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Α· ἵσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΒΑ, ΓΔΑ, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ κοινὴν, καὶ τὴν πλευρὰν ΓΒ=ΓΔ· λοιπὸν εἶναι ἵσα (18, 1) ἐπομένως ΑΔ=ΑΒ, καὶ ἐνταυτῷ ἡ γωνία ΓΑΔ=ΓΑΒ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'. †

Νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 87.

Ἀς τμηθῶσι δίχα αἱ γωνίαι Α καὶ Β ὑπὸ τῶν γραμμῶν ΑΟ καὶ ΒΟ, αἵτινες συναπαντῶνται εἰς Ο. Ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς Ο ἃς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου· λέγω δὲ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι μετὰξὺ των· διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γωνία ΔΑΟ=ΟΑΖ, ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΔΟ=ΑΖΟ· λοιπὸν ἡ τρίτη ΑΟΔ εἶναι δὲ ἴση τῇ τρίτῃ ΑΟΖ. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ πλευρὰ ΑΟ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ, ΑΟΖ, καὶ



αἱ εἰς τὴν ἴσην πλευρὰν προσκείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα· ἐπομένως  $\Delta O = OZ$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύμεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα  $BO\Delta$ ,  $BOE$ , εἶναι ἴσα· λοιπὸν  $O\Delta = OE$ , λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι  $O\Delta$ ,  $OE$ ,  $OZ$ , εἶναι ἴσαι μεταξὺ των.

Ἦδη δὲ, ἐὰν ἐκ τῆς στιγμῆς  $O$ , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν  $O\Delta$ , γραφθῇ περιφέρεια, φανερόν, ὅτι θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ · διότι ἡ πλευρὰ  $AB$  ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος  $O\Delta$ , εἶναι ἐφαπτομένη· τὸ αὐτὸ δὲ ὑπάρχει διὰ τὰς πλευρὰς  $B\Gamma$ ,  $AI$ .

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουσιν διῆχα τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου τινὸς, συντρέχουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΣΤ'. †

Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας  $AB$  νὰ γράψωμεν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν δεδομένην γωνίαν  $\Gamma$ , τοῦτέστι, τμῆμα τοιοῦτον, ὥστε ὅλαι αἱ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι νὰ ᾔναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην  $\Gamma$ . σχ. 88 καὶ 89.

Ἀς προεκβληθῇ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , ἃς γένῃ εἰς τὴν στιγμὴν  $B$  ἡ γωνία  $\Delta BE = \Gamma$ , ἃς ὑψωθῇ ἡ  $BO$  κάθετος εἰς τὴν  $BE$  καὶ  $HO$  κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς  $AB$ · ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς τῆς συναπαντήσεως  $O$ , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν  $OB$ , ἃς γραφθῇ κύκλος· οὕτω τὸ ζητούμενον τμῆμα θέλει εἶναι  $AMB$ .

Διότι, ἐπειδὴ  $BZ$  ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος  $OB$  εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ γωνία  $ABZ$  ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $AKB$  (19, 2). Ἀφ' ἐτέρου δὲ μέρους ἡ γωνία  $AMB$ , ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $AKB$ · λοιπὸν ἡ γωνία  $AMB = ABZ = EB\Delta = \Gamma$ · ἐπομένως ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ τμῆμα  $AMB$  εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην  $\Gamma$ .

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ᾔητον ὀρθή, τὸ ζητούμενον τμῆμα ᾔθελεν εἶναι τὸ γεγραμμένον ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου  $AB$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθειῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , ἐὰν ὁμοῦς ἔχωσι κοινὸν μέτρον μεταξὺ των. σχ. 90.

Φέρομεν τὴν μικροτέραν  $\Gamma\Delta$  ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας  $AB$  τοσάκις, ὅσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται παραδείγματος χάριν, δὶς, μὲ τὸ ὑπόλοιπον  $BE$ .

Φέρομεν τὸ ὑπόλοιπον  $BE$  ἐπὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  τοσάκις, ὅσάκις εἶναι

δυνατὸν νὰ περιέχεται, μίαν φορὰν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ.

Φέρομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΔΖ ἐπὶ τοῦ πρώτου ΒΕ τοσάκις, ὡσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται, μίαν φορὰν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΒΗ.

Φέρομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ΒΗ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΔΖ τοσάκις, ὡσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχεται εἰς τὸ προηγούμενον.

Τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν, καὶ θεωροῦντές το ὡς μονάδα, εὐρίσκομεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν προηγούμενων ὑπολοίπων καὶ τέλος τὰς τῶν δεδομένων γραμμῶν διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον τῶν ἢ τὸν λόγον τῶν ἐκφραζόμενον δι' ἀριθμῶν.

Ἐὰν, π. χ. εὕρωμεν, ὅτι ΗΒ περιέχεται ἀκριβῶς δις εἰς ΖΔ, ΒΗ θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν. Ἐστω  $BH=1$ , θέλομεν ἔχει  $ZD=2$ · ἀλλὰ ΕΒ περιέχει μίαν φορὰν ΖΔ πλεόν ΗΒ· λοιπὸν  $EB=3$ . ΓΔ περιέχει μίαν φορὰν ΕΒ πλεόν ΖΔ· λοιπὸν  $GD=5$ · τέλος ΑΒ περιέχει δις τὴν ΓΔ πλεόν ΕΒ· λοιπὸν  $AB=13$ · διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὁ τοῦ 13 πρὸς 5. Ἐὰν ἡ ΓΔ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι  $\frac{13}{5}$ , ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΓΔ ἤθελεν εἶναι  $\frac{5}{13}$ .

**Σχόλιον.** Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν διδάσκει ἡ Ἀριθμητικὴ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο δὲν ἔχει χρεῖαν ἄλλης ἀποδείξεως.

Ἐνδέχεται ἐνίοτε ὅτι ὅσον καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἐργασίαν, νὰ μὴ εὕρωμεν ποτὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχεται εἰς τὸ προηγούμενον. Τότε αἱ δύο γραμμαὶ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, καὶ λέγονται ἀσύμμετροι (incommensurables): ἐντὸς ὁλίγου θέλομεν ἰδεῖ ἓν παράδειγμα, εἰς τὸ περὶ τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Τότε λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκριβῆ λόγον δι' ἀριθμῶν· ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, εὐρίσκομεν λόγον μᾶλλον ἢ ἥττον πλησιάζοντα εἰς τὸν ἀληθινόν, καθόσον μᾶλλον ἢ ἥττον ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Β καὶ Α, νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον τῶν, ἐὰν ἔχωσι, καὶ ἐκ τούτου τὸν λόγον τῶν εἰς ἀριθμούς. σχ. 91.

Ἀς γραφθῶσι μὲ ἴσας ἀκτῖνας τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ, τὰ ὁποῖα μετροῦσι ταύτας τὰς γωνίας· ἀκολούθως πράττομεν διὰ τὴν σύγκρι-

τιν τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα διότι τόξον τι δύναται νὰ φεσθῇ ἐπὶ ἄλλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος, καθὼς εὐθεῖα ἐπὶ εὐθείας. Οὕτω θέλομεν φθάσει εἰς τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ἐὰν ἔχωσι, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν τῶν λόγων. Ὁ λόγος οὗτος θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν δεδομένων γωνιῶν (17, 2) καὶ ἐὰν ΔΟ ᾦναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων, ΔΑΟ θέλει εἶναι τὸ τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα παρομοίως νὰ εὗρωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν γωνίας τινός, συγκρίνοντες τὸ μετροῦν αὐτὴν τόξον πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν: ἐὰν π. χ. τὸ τόξον ΓΔ ᾦναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ὡς 3 πρὸς 25, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι τὰ  $\frac{1}{25}$  τεσσάρων ὀρθῶν, ἢ τὰ  $\frac{1}{25}$  τῆς ὀρθῆς.

Ἐνδέχεται νὰ συμβῇ ὥστε τὰ συγκρινόμενα τόξα νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν μέτρον: τότε δὲ διὰ τὰς γωνίας θέλομεν ἔχει λόγους περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντας εἰς τὸν ἀληθινόν, καθόσον ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον.

## B I B Λ I O N Γ'.

### ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

#### Ὅρισμοί.

Α'. ΚΑΛΩ σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ ἐπισφάνειαι εἶναι ἴσαι.

Δύο σχήματα ἡμποροῦν νὰ ᾦναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ πολλὰ ἀνόμοια: κύκλος, π. χ. ἡμπορεῖ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τετράγωνον, τρίγωνον μὲ ὀρθογώνιον κ. τ. λ.

Τὴν ὀνομασίαν ἴσα σχήματα θέλω ἀποδίδει εἰς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα: τοιαῦτα δὲ εἶναι δύο κύκλοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, κ. τ. λ.

Β. Δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Δι' ὁμολόγους πλευρὰς ἐννοοῦμεν ἐκεῖνας αἵτινες ἔχουν



τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ πρόσκεινται εἰς ἴσας γωνίας. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι καλοῦνται ὁμοίως γωνίαι ὁμόλογοι.

Δύο σχήματα ἴσα εἶναι πάντοτε ὅμοια· ἀλλὰ δύο σχήματα ὅμοια ἢμποροῦν νὰ ᾖναι πολλὰ ἄνισα.

Γ'. Εἰς δύο διαφορετικοὺς κύκλους, καλοῦνται τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι, τμήματα ὅμοια, τὰ ἀνταποκρινόμενα εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας.

Οὕτως, οὗτης τῆς γωνίας Α ἴσης μετὴν Ο, τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ὅμοιον μετὸ τόξον ΔΕ, ὁ τομεὺς ΑΒΓ μετὸν τομέα ΟΔΕ, κ. τ. λ. σχ. 92.

Δ. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμου εἶναι ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ, λαμβανομένων ὡς βάσεων. σχ. 93.

Ε. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας Α ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ λαμβανομένην ὡς βάσιν. σχ. 94.

ΣΤ'. Τὸ ὕψος τοῦ τραπέζιου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΕΖ μετὰξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν τοῦ ΑΒ, ΓΔ. σχ. 95.

Ζ'. Ἐμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια σχήματός τινος εἶναι σχεδὸν λέξεις συνώνυμοι. Ἡ λέξις ἐμβαδὸν σημειώνει μερικώτερον τὴν ποσότητα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος καθ' ὅσον μετρεῖται ἢ συγκρίνεται μετὰ ἄλλας ἐπιφανείας.

Σ. Κ. Πρὸς κατάληψιν τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τῶν ἀκολουθῶν, πρέπει ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐνθυμῇται καλῶς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, διὰ τὴν ὁποίαν παραπέμπεται εἰς τὰς κοινὰςπραγματείας τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας. Ἡμεῖς δὲ μόνον μίαν παρατήρησιν θέλομεν κάμει, ἥτις θέλει χρησιμεύσει διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς ἀληθινῆς ἐννοίας τῶν προτάσεων, καὶ τὴν διάλυσιν κάθε δυσκολίας ἢ ἀσαφείας, ἥτις ἢμποροῦσε νὰ ἀπαντηθῇ εἴτε εἰς τὴν ἐκφώνησιν, εἴτε εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν  $A : B :: \Gamma : \Delta$ , γνωστὸν εἶναι ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων  $A \times \Delta$  ἰσοῦται μετὸ γινόμενον τῶν μέσων  $B \times \Gamma$ .

Ἡ ἀλήθεια αὕτη εἶναι ἀναντίρρητος διὰ τοὺς ἀριθμούς· ἀλλ' ὅχι ὀλιγώτερον ὑπάρχει δι' ὁποιασδήποτε ποσότητας, φθάνει μόνον νὰ ἐκφράζωνται ἢ νὰ τὰς ἐννοῶμεν ἐκφραζόμενας δι' ἀριθμῶν καὶ τοῦτο πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν· ἐὰν, παραδείγματος χάριν, Α, Β, Γ, Δ ᾖναι γραμμαὶ, ἢμποροῦμεν νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μία τούτων τῶν τεσσάρων γραμμῶν, ἢ, ἂν θέλωμεν, πέμπτη ἄλλη εἶναι κοινὸν μέτρον τούτων, καὶ λαμβάνεται ὡς μονάς. Τότε ἕκαστον τῶν στοι-

γείων  $A, B, \Gamma, \Delta$  παριστάνει ἀριθμὸν τινα μονάδων, ἀχέραιον ἢ κλασματικόν, συμμετρικόν ἢ ἀσύμμετρον, καὶ ἡ μεταξὺ τῶν γραμμῶν  $A, B, \Gamma, \Delta$  ἀναλογία τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν γραμμῶν  $A$  καὶ  $\Delta$ , τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ ὀρθογώνιον τῶν ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶν μονάδων (*unités linéaires*) τῶν περιεχομένων εἰς  $A$ , πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς  $B$  καὶ εὐκόλως ἐννοεῖται, ὅτι τοῦτο τὸ γινόμενον δύναται καὶ πρέπει νὰ ᾔηται ἴσον μὲ τὸ προκύπτον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ τὰς γραμμὰς  $B$  καὶ  $\Gamma$ .

Αἱ ποσότητες  $A$  καὶ  $B$  ἤμποροῦν νὰ ᾔηται ἐνός τινος εἶδους, παραδείγματος χάριν, γραμμαί, αἱ δὲ ποσότητες  $\Gamma$  καὶ  $\Delta$  ἄλλου διαφορετικοῦ, παραδείγματος χάριν, ἐπιφάνειαι. Τότε πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶμεν ταύτας τὰς ποσότητας ὡς ἀριθμούς· αἱ μὲν  $A$  καὶ  $B$  θέλουν ἐκφράζεσθαι διὰ γραμμικῶν μονάδων, αἱ δὲ  $\Gamma$  καὶ  $\Delta$  διὰ μονάδων ἐπιφανείας, καὶ τὸ γινόμενον  $A \times \Delta$  καθὼς καὶ τὸ  $B \times \Gamma$  θέλουν εἶναι ἀριθμοί.

Ἐν γένει, εἰς ὅλας τὰς ἐργασίας, τὰς ὁποίας θέλομεν ἐκτελεῖ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν, πάντοτε πρέπει νὰ θεωρῶνται οἱ ὅροι αὐτῶν ὡς τόσοι ἀριθμοί, κατὰ τὸ εἶδος εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀνήκει, καὶ κάμμία δυσκολία δὲν θέλει ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ τῶν ἀπὸ αὐτὰς συναγομένων συνεπειῶν.

Νομίζομεν χρέος μας νὰ εἰδοποιήσωμεν προσέτι, ὅτι πολλαὶ τῶν ἀποδείξεών μας θεμελιοῦνται ἐπὶ μερικῶν κανόνων τῆς Ἀλγέβρας τῶν ἀπλουστέρων, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀξιωμάτων· οὕτως ἐὰν ἔχωμεν  $A = B + \Gamma$  καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέλος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα  $M$ , συνάγομεν  $A \times M = B \times M + \Gamma \times M$ · παρομοίως ἐὰν  $A = B + \Gamma$  καὶ  $\Delta = E - \Gamma$ , καὶ προστεθῶσιν αἱ ἴσαι ποσότητες, ἐξαλειφθὲν τῶν  $+\Gamma$  καὶ  $-\Gamma$ , συνάγομεν  $A + \Delta = B + E$ , καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων ταῦτα εἶναι οἰκοθεν σαφές. Ἀλλὰ, τυχούσης δυσκολίας, καλὸν θέλει εἶναι νὰ συμβουλευῇται τις τὰ βιβλία τῆς Ἀλγέβρας, καὶ οὕτω νὰ μιγνύῃ τὴν σπουδὴν τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

### Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοῦψῃ ὄντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐστω  $AB$ . σχ. 96· ἡ κοινὴ βάση τῶν δύο παραλληλογράμμων  $AB\Gamma\Delta$ ,  $ABEZ$ · ἐπειδὴ ὑποτίθενται ἰσοῦψῃ, αἱ ἄνω βάσεις  $\Delta\Gamma$ ,  $ZE$ ,

πρέπει νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου τῆς  $AB$ . Ὡρα ἐκ τῆς φύσεως τῶν παραλληλογράμμων  $AD=BG$ , καὶ  $AZ=BE$ . διὰ τὸν αὐτὸν λόγον  $DI=AB$ , καὶ  $ZE=AB$ . λοιπὸν  $AI=ZE$ . ὅθεν, ἐὰν ἀφαιρεθῶσι  $DI$  καὶ  $ZE$  ἀπὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν  $DE$ , τὰ ὑπόλοιπα  $IE$  καὶ  $DZ$  θέλουν εἶναι ἴσα.

Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι τὰ τρίγωνα  $DAZ$ ,  $GBE$ , εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, καὶ ἐπομένως ἴσα.

Ἄλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ τετραπλεύρου  $ABED$  ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον  $ADZ$ , μένει τὸ παραλληλόγραμμον  $ABEZ$ . καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου  $ABED$  ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον  $GBE$ , μένει τὸ παραλληλόγραμμον  $ABGD$ . λοιπὸν τὰ δύο παραλληλόγραμμα  $ABGD$ ,  $ABEZ$ , τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

**Πόρισμα.** Κάθε παραλληλόγραμμον  $ABGD$  εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον  $ABEZ$  τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 97.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

### Θεώρημα.

Κάθε τρίγωνον  $ABG$  εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου  $ABGD$  τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 98.

Διότι τὰ τρίγωνα  $ABG$ ,  $AGD$  εἶναι ἴσα (πρ. 28, 1).

**Πόρισμα Α'.** Λοιπὸν ἐν τρίγωνον  $ABG$  εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου  $BGEZ$  τῆς αὐτῆς βάσεως  $BG$  καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους  $AO$ . διότι τὸ ὀρθογώνιον  $BGEZ$  ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον  $ABGD$ .

**Πόρισμα Β'.** Ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοῦψῃ ὄντα εἶναι ἰσοδύναμα.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. †

### Θεώρημα.

Δύο ἰσοῦψῃ ὀρθογώνια εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

Ἔστωσαν  $ABGD$ ,  $AEZD$  δύο ὀρθογώνια τοῦ ἰδίου ὕψους  $AD$ . λέγω ὅτι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των  $AB$ ,  $AE$ . σχ. 99.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς βάσεις  $AB$ ,  $AE$  συμμετρικὰς, καὶ ὅτι εἶναι μεταξύ των παραδείγματος χάριν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 4: ἐὰν  $AB$  διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη,  $AE$  θέλει περιέχει 4 ἐκ τούτων ἀπὸ κάθε στιγμῇ διαιρέσεως ἅς ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὴν βάσιν, θέλουν σχηματισθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα τὴν



αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Τὸ ὀρθογώνιον  $AB\Gamma\Delta$  θέλει περιέχει ἐπὶ μερικὰ ὀρθογώνια, ἐν ᾧ τὸ  $AEZ\Delta$  τέσσαρα· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον  $AB\Gamma\Delta$  εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον  $AEZ\Delta$  ὡς 7 πρὸς 4, ἢ ὡς  $AB$  πρὸς  $AE$ . Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ παντὸς ἄλλου λόγου διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸν τοῦ 7 πρὸς 4· λοιπὸν ὅποιοσδήποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος οὗτος, φθάνει νὰ ᾖ συμμετρικὸς, θέλομεν ἔχει

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AE.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν, δεύτερον, ὅτι αἱ βάσεις  $AB$ ,  $AE$  εἶναι ἀσύμμετροι μεταξύ των· λέγω ὅτι ἀκόμη θέλομεν ἔχει σχ. 100·

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AE.$$

Διότι ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ᾖ ἀληθής, τῶν τριῶν πρώτων ὄρων μενόντων τῶν αὐτῶν, ὁ τέταρτος θέλει εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ  $AE$ . Ἄς τὸν ὑποθέσωμεν, μεγαλύτερον, καὶ ὅτι ἔχομεν,

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AO.$$

Ἄς διαιρεθῇ ἡ  $AB$  εἰς μέρη ἴσα μικρότερα ἀπὸ  $EO$ , τοῦλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἐν σημείον διαιρέσεως  $I$  μεταξύ  $E$  καὶ  $O$ · ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς  $AI$  ἡ κάθετος  $IK$  αἱ βάσεις  $AB$ ,  $AI$ , θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τὰ ἀπόδειχθέντα θέλομεν ἔχει,

$$AB\Gamma\Delta : AIK'\Delta :: AB : AI.$$

$$\text{Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως } AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AO.$$

Εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν οἱ ἐπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν, καὶ συνάγομεν·

$$AIK'\Delta : AEZ\Delta :: AI : AO.$$

Ἀλλὰ  $AO$  εἶναι μείζων  $AI$ · ἔπρεπε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ τοιαύτη ἀναλογία τὸ ὀρθογώνιον  $AEZ\Delta$  νὰ ᾖ μείζον τοῦ  $AIK'\Delta$ · ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· λοιπὸν ἡ ἀναλογία εἶναι ἀδύνατος. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα  $AB\Gamma\Delta$  δὲν δύναται νὰ ᾖ πρὸς τὸ  $AEZ\Delta$  ὡς  $AB$  πρὸς γραμμὴν μείζονα τῆς  $AE$ .

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾖ ἐλάττων τῆς  $AE$ · λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ  $AE$ .

Ὅποιοσδήποτε ἄρα καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος τῶν βάσεων, δύο ὀρθογώνια ἰσοῦψῃ  $AB\Gamma\Delta$ ,  $AEZ\Delta$ , εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των  $AB$ ,  $AE$ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. †

Θεώρημα.

Δύο ὅποιαδήποτε ὀρθογώνια  $AB\Gamma\Delta$ ,  $AEH\Delta$  εἶναι μεταξύ των

ὥς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων πολυπλασιαζομένων ἐπὶ τὰ ὕψη, εἰς τρόπον ὥστε  $AB\Gamma\Delta : AE\eta Z :: AB \times A\Delta : AE \times AZ$ . σχ. 101.

Ἄς οὖν τὰ δύο ὀρθογώνια διαταχθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι εἰς  $A$  νὰ ᾖναι κατακορυφήν, ἅς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ  $HE$ ,  $\Gamma\Delta$ , ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς  $\Theta$ . Τὰ δύο ὀρθογώνια  $AB\Gamma\Delta$ ,  $AE\Theta\Delta$ , ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος  $A\Delta$ · εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὥς αἱ βάσεις των  $AB$ ,  $AE$ : ὡσαύτως, τὰ δύο ὀρθογώνια  $AE\Theta\Delta$ ,  $AE\eta Z$ , ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος  $AE$ , εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὥς αἱ βάσεις των  $A\Delta$ ,  $AZ$ : οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας.

$$AB\Gamma\Delta : AE\Theta\Delta :: AB : AE$$

$$AE\Theta\Delta : AE\eta Z :: A\Delta : AZ$$

Πολυπλασιάζοντες δὲ τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μέσος ὅρος  $AE\Theta\Delta$  ὥς κοινὸς παράγων τοῦ ἡγουμένου καὶ ἐπομένου ἡμπορεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ καὶ θέλομεν ἔχει,

$$AB\Gamma\Delta : AE\eta Z :: AB \times A\Delta : AE \times AZ.$$

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ὀρθογωνίου τινὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του φθάσαι μόνον διὰ τοῦτου τοῦ γινομένου νὰ ἐννοῶμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὴν βάσιν, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὸ ὕψος.

Τὸ μέτρον ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἀπόλυτον, ἀλλὰ σχετικόν· προϋποθέτει τὴν ἐκτίμησιν ἄλλου ὀρθογωνίου διὰ τῆς κατὰμετρήσεως τῶν πλευρῶν του μὲ τὴν αὐτὴν γραμμὴν μονάδα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορίζεται ἕτερον γινόμενον, ὁ δὲ λόγος τῶν δύο γινομένων θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν ὀρθογωνίων, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν.

Ἐὰν παραδείγματός χάριν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου  $A$  ᾖναι τριῶν μονάδων καὶ τὸ ὕψος του δέκα, τὸ ὀρθογώνιον θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ  $3 \times 10$  ἢ 30. Ἄλλ' αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς οὕτω μεμονωμένος δὲν σημαίνει τίποτε· ἐὰν ὅμως ἔχομεν καὶ ἕτερον ὀρθογώνιον  $B$ , ἡ βάσις τοῦ ὁποίου νὰ ᾖναι δώδεκα μονάδων, καὶ τὸ ὕψος ἐπτὰ, τοῦτο θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ  $7 \times 12$ , ἢ 84: ἐντεῦθεν θέλομεν συμπεράνει ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια  $A$  καὶ  $B$  εἶναι πρὸς ἄλληλα ὥς 30 πρὸς 84. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ συνθήκης ἐλαμβάναμεν τὸ ὀρθογώνιον  $A$  διὰ τὴν μονάδα τοῦ μέτρου εἰς τὰς ἐπιφανείας, τὸ ὀρθογώνιον  $B$  ἤθελεν ἔχει τότε διὰ μέτρον ἀπόλυτον  $\frac{3}{4}$ · τοῦτέστιν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ  $\frac{3}{4}$  μονάδος ἐπιφανείας.

Κοινότερον δὲ καὶ ἀπλούστερον εἶναι νὰ λαμβάνηται ὡς μονὰς ἐπιφανείας τὸ τετράγωνον, καὶ ἐκλέγεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους· τότε τὸ μέτρον τὸ ὁποῖον ἀπλῶς ἐθεωρήσαμεν ὡς σχετικόν, γίνεται ἀπόλυτον· ὁ ἀριθμὸς, παραδείγματος χάριν, 30 διὰ τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ ὀρθογώνιον Α, παριστάνει 30 μονάδας ἐπιφανείας, ἢ 30 τετράγωνα, ἢ πλευρὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ μονὰς· τοῦτο γίνεται ἐπαισθητὸν διὰ τοῦ σχ. 102.

Συχνάκις εἰς τὴν γεωμετρίαν συγχέεται τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν μὲ τὸ ὀρθογώνιόν των, καὶ ἡ ἔκφρασις αὕτη μετέβη καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν σημαίνουσα τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, καθὼς ἡ τοῦ τετραγώνου πρὸς παράστασιν τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ τινος ἐξ' ἑαυτόν.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3. κ. τ. λ. εἶναι 1, 4, 9, κ. τ. λ. Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ γραμμῆς διπλασίας εἶναι τετραπλάσιον, ἐπὶ τριπλασίας, ἑννεαπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς. σχ. 103.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

#### Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὁποιουδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΒΕ (πρό. 1)· ἀλλὰ τοῦτο ἔχει διὰ μέτρον  $ΑΒ \times ΒΕ$  (πρό. 4)· λοιπὸν  $ΑΒ \times ΒΕ$  ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. σχ. 97.

Πόρισμα. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι μετὰξὺ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὸ ἴδιον ὕψος εἶναι μετὰξὺ των ὡς αἱ βάσεις των· διότι, ἐὰν Α, Β, Γ παριστάνωσιν ὁποιασδήποτε ποσότητας, ἔχομεν ἐν γένει  $Α \times Γ : Β \times Γ :: Α : Β$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ΄.

#### Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΑΔ (πρό. 2)· ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου  $= ΒΓ \times ΑΔ$  (πρό. 5)· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγώνου  $= \frac{1}{2} ΒΓ \times ΑΔ$  ἢ  $ΒΓ \times \frac{1}{2} ΑΔ$ . σχ. 104.



Πόρισμα. Δύο τρίγωνα ἰσοϋψῆ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο τρίγωνα τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'. †

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ ΕΖ, πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεων, ΒΒ, ΓΔ. σχ. 105.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΓΒ, ἄς ἀχθῇ ἡ Κ'Α παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΔ, καὶ ἄς προεκβληθῇ ΔΓ εἰς οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν Κ'Α.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΑ, ΙΓΚ', ἔχομεν τὴν πλευρὰν ΙΒ=ΙΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΑΙΒ=ΓΙΚ', καὶ τὴν ΙΒΑ=ΙΓΚ', ἐπειδὴ ΓΚ' καὶ ΒΑ εἶναι παράλληλοι (πρό. 24, 1). λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρ. 7, 1). τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΓΔ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚ'Α, καὶ ἔχει διὰ μέτρον ΕΖ × ΑΔ.

Ἀλλ' ἔχομεν ΑΔ=ΔΚ', καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τοῦ τριγώνου ΙΒΑ μὲ τὸ ΚΓΙ, ἢ πλευρὰ ΒΑ=ΓΚ'. λοιπὸν ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ+ΔΚ'=2ΑΔ, καὶ οὕτως ΑΔ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ. λοιπὸν τέλος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος ΕΖ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ, ἢ ΑΒΓΔ=ΕΖ ×  $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$ .

Σχόλιον. Ἐὰν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ΙΘ, παράλληλος τῆς βάσεως ΑΒ, ἡ στιγμὴ Θ θέλει εἶναι παρομοίως τὸ μέσον τῆς ΑΔ· διότι τὸ σχῆμα ΑΘΙΑ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ τὸ ΔΘΙΚ', ὡς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους: ἔχομεν λοιπὸν ΑΘ=ΙΑ καὶ ΔΘ=ΙΚ'. ἀλλὰ ΙΑ=ΙΚ', διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δύο τριγώνων ΒΙΑ, ΓΙΚ', λοιπὸν ΑΘ=ΔΘ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΘΙ=ΑΔ=  $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$  λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὁμοίως διὰ ΕΖ × ΘΙ: ἐπομένως ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν γραμμὴν ἣτις ἐνώνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Ἐὰν γραμμὴ τις ΑΓ διατρεθῇ εἰς δύο μέρη ΑΒ, ΒΓ, τὸ κα-

τασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὅλης ΑΓ θέλει περιέχει τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ μέρους ΑΒ, πλέον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους ΒΓ, πλέον δις τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο μερῶν ΑΒ, ΒΓ: τοῦτο

δὲ ἐκφράζεται οὕτως, ΑΓ ἢ  $(AB+BG)=AB+BG+2AB \times BG$ . σχ. 106.

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, ἃς ληθῇ ΑΖ=ΑΒ, καὶ ἃς ἀχθῇ ΖΗ παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ΒΘ τῆς ΑΕ.

Δι' αὐτῆς τῆς κατασκευῆς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη: τὸ μὲν πρῶτον ΑΒΙΖ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΖ=ΑΒ: τὸ δὲ δεύτερον ΙΗΔΘ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΒΓ· διότι ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΕ, καὶ ΑΒ=ΑΖ, ἡ διαφορὰ ΑΓ—ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΕ—ΑΖ, ὅθεν ἔπεται, ὅτι ΒΓ=ΕΖ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων, ΙΗ=ΒΓ, καὶ ΔΗ=ΕΖ· λοιπὸν ΟΙΗΔ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ. Τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀφαιρεθέντα ἀπὸ τὸ ὅλον τετράγωνον ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΓΗΙ, ΕΖΙΘ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ×ΒΓ. Λοιπὸν τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ, κ. τ. λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν εἰς τὴν Α' λγεβραν ἀποδεικνυομένην διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ δυωνύμου, καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζεται οὕτως:  $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

#### Θεώρημα.

Ἐάν ἡ γραμμὴ ΑΓ ᾖ ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων ΑΒ, ΒΓ, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ θέλει περιέχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ, μείον δις τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ· τουτέστιν

ΑΓ ἢ  $(AB-BG)=AB+BG-2AB \times BG$ . σχ. 107.

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, ἃς ληθῇ ΑΕ=ΑΓ, ἃς ἀχθῇ ΓΗ παράλληλος τῆς ΒΙ, καὶ ΘΚ' τῆς ΑΒ, καὶ ἃς συμπληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΕΖΑΚ'.

Ἐκαστον τῶν δύο ὀρθογώνιων ΓΒΙΗ, ΗΑΚ'Δ ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ×ΒΓ: ἐάν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ ὅλον σχῆμα ΑΒΙΑΚ'ΕΑ, τοῦ

—2 —2

ὁποίου ἡ τιμὴ εἶναι  $AB + BG$ , φανερόν, ὅτι μένει τὸ τετράγωνον  $AGDE$ , λοιπὸν κ. τ. λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας  $(\alpha - \beta) = \alpha + \beta - 2\alpha\beta$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

#### Θεώρημα.

Τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ἄθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο γραμμῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων: δηλαδή  $(AB + BG) \times (AB - BG) = AB^2 - BG^2$ .  
σχ. 108.

Ἀς κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν  $AB$ ,  $AG$  τὰ τετράγωνα  $ABIZ$ ,  $AGDE$ . ἃς προεκβληθῇ ἡ  $AB$  ποσότητα τινὰ  $BK = BG$ , καὶ ἃς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον  $AK'AE$ .

Ἡ μὲν βᾶσις  $AK'$  τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γραμμῶν  $AB$ ,  $BG$ , τὸ δὲ ὕψος τοῦ  $AE$  εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἰδίων· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον  $AK'AE = (AB + BG)(AB - BG)$ . Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον σύγκειται ἀπὸ τὰ δύο μέρη  $AB\Theta E + B\Theta AK'$ . τὸ δὲ μέρος  $B\Theta AK'$  ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον  $EDHZ$ , διότι  $B\Theta = DE$  καὶ  $BK' = EZ$ . λοιπὸν  $AK'AE = AB\Theta E + EDHZ$ .

Ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα μέρη σχηματίζουν τὸ τετράγωνον  $ABIZ$ , μῖον τὸ τετράγωνον  $\Delta OIH$ , τὸ ὅποιον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς  $BG$ .

Ἄρα  $(AB + BG) \times (AB - BG) = AB^2 - BG^2$ .

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄. †

#### Θεώρημα.

Τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$  ὀρθογώνιον εἰς  $A$ . Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τετραγώνων ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν, ἃς κατεβασθῇ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ κάθετος  $AD$ , ἥτις ἃς προεκβληθῇ ἕως εἰς τὸ  $E$ . ἃς ἐπιζευχθῶσιν δ' ἔπειτα αἱ διαγώνιοι  $AZ$ ,  $\Gamma\Theta$ .  
σχ. 109.



Ἡ γωνία  $ABZ$  σύγκειται ἀπὸ τὴν  $AB\Gamma$  καὶ τὴν ὀρθὴν  $\Gamma BZ$ : ἡ δὲ γωνία  $\Gamma B\Theta$  σύγκειται ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν  $AB\Gamma$  καὶ τὴν ὀρθὴν  $AB\Theta$ . λοιπὸν ἡ γωνία  $ABZ = \Theta B\Gamma$ . Ἀλλὰ  $AB = B\Theta$  ὡς πλευραὶ τοῦ ἰδίου τετραγώνου, καὶ  $BZ = B\Gamma$  διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν τὰ τρίγωνα  $ABZ$ ,  $\Theta B\Gamma$ , ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ 6, 1).

Τὸ τρίγωνον  $ABZ$  εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου  $B\Delta EZ$ , (ἡ διὰ συντομίαν  $BE$ ) τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν  $BZ$  καὶ τὸ ἴδιον ὕψος  $B\Delta$  (πρ. 2). Τὸ τρίγωνον  $\Theta B\Gamma$  εἶναι παρομοίως τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου  $A\Theta$ · διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι  $BA\Gamma$ ,  $BA\Delta$  εἶναι ὀρθαί, αἱ εὐθεῖαι  $A\Gamma$  καὶ  $A\Delta$  μίαν μόνην σχηματίζουν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς  $\Theta B$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\Theta B\Gamma$  καὶ τὸ τετράγωνον  $A\Theta$ , ἐκτὸς τῆς κοινῆς βάσεως  $B\Theta$ , ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος  $AB$ · τὸ τρίγωνον ἄρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου.

Ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον  $ABZ$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ  $\Theta B\Gamma$ . λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον  $B\Delta EZ$  διπλάσιον τοῦ τριγώνου  $ABZ$ , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τετράγωνον  $A\Theta$  διπλάσιον τοῦ τριγώνου  $\Theta B\Gamma$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον  $\Gamma\Delta E\Theta$  εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον  $A\Gamma$ · ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια  $B\Delta EZ$ ,  $\Gamma\Delta E\Theta$ , ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἀποτελοῦν τὸ τετράγωνον  $B\Gamma HZ$ : λοιπὸν τὸ τετράγωνον  $B\Gamma HZ$ , τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας κατασκευαζόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων  $AB\Theta A$ ,  $A\Gamma I\Theta$  τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἡ μὲ ἄλλους

$$\begin{array}{ccc} -2 & -2 & -2 \\ AB & = & BG + AG. \end{array}$$

Πόρισμα Α'. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας μείον τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται οὕτως:

$$\begin{array}{ccc} -2 & -2 & -2 \\ AB & = & BG - AG. \end{array}$$

Πόρισμα Β'. Ἐστω  $AB\Gamma\Delta$  τετράγωνόν τι,  $B\Gamma$  ἡ διαγώνιος του· τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ὡς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές διδοί

$$\begin{array}{ccc} -2 & -2 & -2 \\ AB & = & AB + BG = 2AB. \end{array}$$

λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου  $A\Gamma$  εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς  $AB$ · σχ. 118.

Ἡ ιδιότης αὕτη κατασταίνεται ἐπαισθητῇ, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων  $A$  καὶ  $\Gamma$  ἀχθῶσι παράλληλοι τῆς  $B\Delta$ , καὶ ἐκ τῶν σημείων  $B$  καὶ  $\Delta$  παρὰλληλοι τῆς  $A\Gamma$ : κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται νέον τετράγωνον τὸ  $EZH\Theta$  ἴσον μὲ τὸ τῆς  $A\Gamma$ . Τώρα βλέπομεν ὅτι  $EZH\Theta$  περιέχει ὁκτώ τρίγωνα ἴσα μὲ  $ABE$ , καὶ  $AB\Gamma\Delta$  περιέχει ἀπὸ

αὐτὰ τέσσαρα· ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ  $ΑΓ: ΑΒ:: 2: 1$ , ἔχομεν, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν,  $ΑΓ: ΑΒ:: \sqrt{2: 1}$ · λοιπὸν ἡ διαγώνιος ἐνὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν πλευρὰν του.

Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει περισσότερον εἰς ἄλλην εὐκαιρίαν.

Πόρισμα Γ'. Ἀπεδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΘ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ· τῶρα δὲ, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΒΖ, τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ ὡς ἡ βάσις

$ΒΓ$  πρὸς τὴν βάσιν  $ΒΔ$ · λοιπὸν,  $ΒΓ: ΑΒ:: ΒΓ: ΒΔ$ .

Ὅθεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον μὲς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσκείμενον εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμήμα.

Ἐδῶ ὀνομάζομεν τμήμα τὸ μέρος τῆς ὑποτείνουσας, τὸ ὁποῖον προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον ἣτις καταβάλλεται ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Οὕτω  $ΒΔ$  εἶναι τὸ προσκείμενον τμήμα εἰς τὴν πλευρὰν  $ΑΒ$ , καὶ  $ΔΓ$  τὸ προσκείμενον τμήμα εἰς τὴν πλευρὰν  $ΑΓ$ . Πα-

μοίως  $ΒΓ: ΑΓ:: ΒΓ: ΓΔ$ .

Πόρισμα Δ'. Τὰ ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΔΓΗΕ τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν  $ΒΔ$ ,  $ΓΔ$ .

Ἄρα  $ΑΒ: ΑΓ:: ΒΔ: ΔΓ$ .

Λοιπὸν τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προσκείμενα εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς τμήματα τῆς ὑποτείνουσας.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Ἐάν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ᾖ ὀξεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ· καὶ ἐάν καταβασθῇ ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου  $ΒΓ \times ΓΔ$ · εἰς τρόπον ὥστε, σχ. 110.

$$ΑΒ = ΑΓ + ΒΓ - 2ΒΓ \times ΓΔ.$$

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι. 1.<sup>η</sup> Ἐάν ἡ κάθετος πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει  $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ$ , καὶ ἐπομένως (πρό. 9)

$\overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{\Gamma\Delta} - \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$  προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο  
 $\overset{-2}{\mu\acute{\epsilon}\rho\eta} \overset{-2}{A\Delta}$ , καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$ ,  
 $\overset{-2}{\delta\acute{\iota}\delta\omicron\upsilon\omicron\upsilon\omicron\omicron} \overset{-2}{A\Delta} + \overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{AB}$  καὶ  $\overset{-2}{A\Delta} + \overset{-2}{\Delta\Gamma} = \overset{-2}{A\Gamma}$ , συνάγομεν  $\overset{-2}{AB} =$   
 $\overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{A\Gamma} - \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$

2.α Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος  $A\Delta$  πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , θέ-  
 $\overset{-2}{\lambda\omicron\mu\epsilon\omicron\upsilon\omicron} \overset{-2}{\epsilon}\chi\epsilon\iota \overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{\Gamma\Delta} - \overset{-2}{B\Gamma}$ , ἐπομένως (πρό. 9)  $\overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{\Gamma\Delta} + \overset{-2}{B\Gamma} -$   
 $\overset{-2}{2\Gamma\Delta \times B\Gamma}$ . προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη  $A\Delta$ , συνάγομεν  
 $\overset{-2}{\pi\alpha\rho\omicron\mu\omicron\iota\omicron\varsigma} \overset{-2}{AB} = \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{A\Gamma} - \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἡ γωνία  $\Gamma$  ᾖ ἀμβλεῖα, τὸ τετρά-  
 $\overset{-2}{\gamma\omega\nu\omicron\upsilon\omicron\varsigma}$  τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς  $AB$  θέλει εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροί-  
 $\overset{-2}{\sigma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma}$  τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὴν γω-  
 $\overset{-2}{\nu\acute{\iota}\alpha\omicron\iota\omicron\varsigma}$   $\Gamma$ , καὶ ἐὰν καταβασθῇ ἡ  $A\Delta$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $B\Gamma$ , ἡ διαφορὰ θέλει  
 $\overset{-2}{\epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota}$  ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου  $B\Gamma \times \Gamma\Delta$ , εἰς τρόπον ὥστε,

$$\overset{-2}{AB} = \overset{-2}{A\Gamma} + \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}.$$

Ἡ κάθετος δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου·  
 $\overset{-2}{\delta\iota\omicron\tau\iota}$  ἐὰν ἔπιπτε, π. χ. εἰς  $E$ , τὸ τρίγωνον  $AGE$  ἤθελεν ἔχει ἐν-  
 $\overset{-2}{\tau\alpha\upsilon\tau\omega}$  τὴν ὀρθὴν γωνίαν  $E$  καὶ τὴν ἀμβλεῖαν  $\Gamma$ , ὅπερ ἀδύνατον (19,  
 $\overset{-2}{1}$ )· πίπτει λοιπὸν ἐκτὸς, καὶ ἔχομεν  $\overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{\Gamma\Delta}$ . Ἐκ τούτου

$\overset{-2}{\delta\epsilon}$  ἔπεται (πρό. 8)  $\overset{-2}{B\Delta} = \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{\Gamma\Delta} + \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$ . Προσθέτοντες

$\overset{-2}{\delta\epsilon}$  καὶ εἰς τὰ δύο μέρη  $A\Delta$  καὶ κάμνοντες τὰς ἀναγωγὰς ὡς εἰς τὸ  
 $\overset{-2}{\pi\rho\omicron\lambda\alpha\beta\omicron\omicron\varsigma}$  θεώρημα, εὐρίσκομεν  $\overset{-2}{AB} = \overset{-2}{B\Gamma} + \overset{-2}{A\Gamma} + \overset{-2}{2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$ .

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ μόνον εἰς τὸ ὁποῖον  
 $\overset{-2}{\tau\omicron}$  ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετρά-  
 $\overset{-2}{\gamma\omega\nu\omicron\upsilon\omicron\varsigma}$  τῆς τρίτης· διότι ἐὰν ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων περιεχο-  
 $\overset{-2}{\mu\acute{\epsilon}\nu\eta}$  ᾖ ὀξεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θέλει εἶναι  
 $\overset{-2}{\mu\epsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\eta}\tau\epsilon\rho\omicron\iota\omicron\varsigma}$  τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἀμ-  
 $\overset{-2}{\beta\lambda\epsilon\acute{\iota}\alpha}$  μικρότερον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

#### Θεώρημα.

Εἰς ὁποιοδήποτε τρίγωνον  $AB\Gamma$ , ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὸ



μέσον τῆς βάσεως ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΕ, λέγω ὅτι θελομεν ἔχει  

$$\overset{-2}{AB} + \overset{-2}{AG} = \overset{-2}{2AE} + \overset{-2}{2BE}. \text{ σχ. 112.}$$

Ἄς καταβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ· τὸ τρίγωνον  

$$ΑΕΓ \text{ κατὰ τὸ } IB' \text{ θεωρήμα δίδει, } \overset{-2}{AG} = \overset{-2}{AE} + \overset{-2}{EG} - \overset{-2}{2EG} \times \overset{-2}{ΕΔ}.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατὰ τὸ ΙΓ' Θεώρημα δίδει,

$$\overset{-2}{AB} = \overset{-2}{AE} + \overset{-2}{EB} + \overset{-2}{2EB} \times \overset{-2}{ΕΔ}.$$

Προσθέτοντες λοιπὸν καὶ παρατηροῦντες ὅτι  $EB = EG$ , συ-  
 νάγομεν

$$\overset{-2}{AB} + \overset{-2}{AG} = \overset{-2}{2AE} + \overset{-2}{2EB}.$$

Πόρισμα. Εἰς κάθε ἄρα παραλληλόγραμμον, τὸ  
 ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται  
 μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

Διότι αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα  
 μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε (πρό. 31, 1). Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ  
 δίδει, σχ. 113.

$$\overset{-2}{AB} + \overset{-2}{BG} = \overset{-2}{2AE} + \overset{-2}{2BE}.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΔΓ δίδει παρομοίως,

$$\overset{-2}{AD} + \overset{-2}{DG} = \overset{-2}{2AE} + \overset{-2}{2DE}.$$

Προσθέτοντες δὲ μέλος εἰς μέλος, καὶ παρατηροῦντες ὅτι  $BE =$   
 $DE$ , συνάγομεν

$$\overset{-2}{AB} + \overset{-2}{AD} + \overset{-2}{DG} + \overset{-2}{BG} = \overset{-2}{4AE} + \overset{-2}{4DE}.$$

Ἀλλὰ  $4AE$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· διότι ΑΓ  
 $= 2AE$ · παρομοίως  $4DE$  εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ· λοιπὸν  
 τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροι-  
 σμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'. †

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ ΔΕ, παραλλήλως τῆς βάσεως τριγώνου τινὸς  
 ΑΒΓ ἀγομένη, διαιρεῖ τὰς πλευράς ΑΒ, ΑΓ, ἀναλόγως· εἰς τρό-  
 πον ὥστε  $AD : BD :: AE : EG$ . σχ. 114.

Ἄς ἐπιτευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΔΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΔΕΓ  
 ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ, καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαί  
 των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῆς βάσεως· λοι-  
 πὸν εἶναι ἰσοδύναμα (πρό. 2).

Τὰ δὲ τρίγωνα  $\Lambda\Delta\epsilon$ ,  $\beta\Delta\epsilon$ , τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι τὸ  $\epsilon$ , ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις των  $\Lambda\Delta$ ,  $\beta\Delta$  (πρό. 6)· διὰ τοῦτο,

$$\Lambda\Delta\epsilon : \beta\Delta\epsilon :: \Lambda\Delta : \beta\beta.$$

Τὰ τρίγωνα  $\Lambda\Delta\epsilon$ ,  $\Delta\epsilon\Gamma$ , τῶν ὁποίων κοινὴ κορυφὴ εἶναι τὸ  $\Delta$ , ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις των  $\Lambda\epsilon$ ,  $\epsilon\Gamma$ · ἄρα,

$$\Gamma\Delta \Lambda\Delta\epsilon : \epsilon\Gamma :: \Lambda\epsilon : \epsilon.$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον  $\beta\Delta\epsilon = \Delta\epsilon\Gamma$ · λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, συνάγομεν  $\Lambda\Delta : \beta\beta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\Gamma$ .

**Πόρισμα Α'.** Ἐντεῦθεν συνάγομεν συνθέτοντες  $\Lambda\Delta + \beta\beta$  :  $\Lambda\Delta :: \Lambda\epsilon + \epsilon\Gamma$  :  $\Lambda\epsilon$ , ἢ  $\Lambda\beta : \Lambda\Delta :: \Lambda\Gamma : \Lambda\epsilon$ , καὶ παρομοίως  $\Lambda\beta : \beta\Delta :: \Lambda\Gamma : \Gamma\epsilon$ .

**Πόρισμα Β'.** Ἐὰν μεταξὺ δύο εὐθειῶν  $\Lambda\beta$ ,  $\Gamma\Delta$  ἀχθῶσιν ὁσαυδήποτε παράλληλοι  $\Lambda\Gamma$ ,  $\epsilon\Z$ ,  $\eta\Theta$ ,  $\beta\Delta$ , κ. τ. λ. αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ θέλουσι τμηθῇ ἀναλόγως, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\Lambda\epsilon : \Gamma\Z :: \epsilon\eta : \Z\Theta :: \eta\beta : \Theta\Delta. \text{ σχ. 115.}$$

Διότι ἔστω  $\Theta$  τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν  $\Lambda\beta$ ,  $\Gamma\Delta$ · εἰς τὸ τρίγωνον  $\Theta\epsilon\Z$ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ  $\Lambda\Gamma$  εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως  $\epsilon\Z$ , θέλομεν ἔχει  $\Theta\epsilon : \Lambda\epsilon :: \Theta\Z : \Gamma\Z$  ἢ  $\Theta\epsilon : \Theta\Z :: \Lambda\epsilon : \Gamma\Z$ . Εἰς τὸ τρίγωνον  $\Theta\eta\Theta$ , θέλομεν ἔχει παρομοίως  $\Theta\epsilon : \epsilon\eta :: \Theta\Z : \Z\Theta$ , ἢ  $\Theta\epsilon : \Theta\Z :: \epsilon\eta : \Z\Theta$ · λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου,  $\Theta\epsilon : \Theta\Z$ , αἱ δύο αὐταὶ ἀναλογίαι δίδουν  $\Lambda\epsilon : \Gamma\Z :: \epsilon\eta : \Z\Theta$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι  $\epsilon\eta : \Z\Theta :: \eta\beta : \Theta\Delta$ , καὶ οὕτως ἐφεξῆς· αἱ γραμμαὶ ἄρα  $\Lambda\beta$ ,  $\Gamma\Delta$  τέμνονται ἀναλόγως ὑπὸ τῶν παραλλήλων  $\epsilon\Z$ ,  $\eta\Theta$  κ. τ. λ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

### Θεώρημα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ πλευραὶ  $\Lambda\beta$ ,  $\Lambda\Gamma$  τμηθῶσιν ἀναλόγως ὑπὸ τῆς γραμμῆς  $\Delta\epsilon$ , εἰς τρόπον ὥστε  $\Lambda\Delta : \beta\beta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\Gamma$ , λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ  $\Delta\epsilon$  θέλει εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως  $\beta\Gamma$ .

Διότι ἐὰν  $\Delta\epsilon$  δὲν ᾖναι παράλληλος τῆς  $\beta\Gamma$ , ἅς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ  $\Delta\Theta$ · τότε, κατὰ τὸ προλαβόν θεώρημα, θέλομεν ἔχει  $\Lambda\Delta : \beta\Delta :: \Lambda\Theta : \Theta\Gamma$ . Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως,  $\Lambda\Delta : \beta\beta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\Gamma$ · λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει  $\Lambda\Theta : \Theta\Gamma :: \Lambda\epsilon : \epsilon\Gamma$ · ἥτις ἀναλογία εἶναι ἀνύπαρκτος· διότι ἀπὸ τὸ ἐν μέρος ὁ ἡγούμενος  $\Lambda\epsilon$  εἶναι μείζων τοῦ  $\Lambda\Theta$ , ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο ὁ ἐπόμενος  $\epsilon\Gamma$  εἶναι ἐλάττω τοῦ  $\Theta\Gamma$ · ἐὰν λοιπὸν διὰ τῆς στιγμῆς  $\Delta$  ἀχθῇ παράλληλος τῆς  $\beta\Gamma$ , αὕτη

δέν εἶναι δυνατόν νὰ διαφέρῃ τῆς ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἡ τοιαύτη παράλληλος.

Σχόλιον. Ἡ ἰδία συνέπεια ἤθελεν ἔχει χώρῳ, ἐὰν ὑπετίθετο ἡ ἀναλογία  $AB:AD::AG:AE$ · διότι ἐκ ταύτης ἤθελε συναχθῇ ἡ  $AB—AD:AD::AG—AE:AE$  ἢ  $BD:AD::GE:AE$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'. +

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ ΑΔ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ τριγώνου τινός, διαιρεῖ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ, ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· εἰς τρόπον ὥστε  $BD:DG::AB:AG$ . σχ. 117.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΑΔ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΒΑ προεκβαλλομένην.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΓΕ· οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν (πρό. 15),  $BD:DG::AB:AE$ .

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελές· διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΕ, ἡ γωνία ΑΓΕ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΑΔ (πρό. 24, 1): Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΔΑΓ=ΒΑΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΕ=ΑΕΓ· καὶ ἀκολουθῶς ΑΕ=ΑΓ (πρό. 13, 1)· ἀντεισάγοντες δὲ ΑΓ ἀντὶ ΑΕ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, συνάγομεν  $BD:DG::AB:AG$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἰσογώνια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ εἶναι ὅμοια.

Ἐστῶσαν ΑΒΓ, ΓΔΕ, δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ ΒΑΓ=ΓΔΕ, ΑΒΓ=ΔΓΕ, καὶ ΑΓΒ=ΔΕΓ· λέγω δὲ ὅτι αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ αἱ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἀνάλογοι, εἰς τρόπον ὥστε  $BΓ:ΓΕ::ΑΒ:ΓΔ::ΑΓ:ΔΕ$ . σχ. 119.

Ἄς τεθῶσιν αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ ΒΓ, ΓΕ εἰς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ ἄς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΕΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ζ.

Ἐπειδὴ ΒΓΕ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=ΓΕΔ, ἔπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΕ (24, 1). Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΓΕ, ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΓΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Εἰς τὸ τρίγωνον BZE ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ZE, ὅθεν  $BΓ : ΓΕ :: BA : AZ$  (πρό. 15). Ἀντὶ δὲ AZ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς ΓΔ, ἔχομεν,  $BΓ : ΓΕ :: BA : ΓΔ$ .

Εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον BZE, ἐὰν ἡ BZ θεωρηθῇ ὡς βάσις, ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος αὐτῆς, καὶ ἐκ τούτου  $BΓ : ΓΕ :: ZΔ : ΔΕ$ . Ἀντὶ δὲ ZΔ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς ΑΓ, ἔχομεν  $BΓ : ΓΕ :: ΑΓ : ΔΕ$ .

Τέλος ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν, εἰς τὰς ὁποίας ὁ λόγος  $BΓ : ΓΕ$  εἶναι κοινὸς, συνάγομεν ὡσαύτως,  $ΑΓ : ΔΕ :: BA : ΓΔ$ .

Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα BΑΓ, ΓΑΕ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους: ἀλλὰ κατὰ τὸν Β'. ὁρισμὸν, δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν ἐνταύτῳ τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα τὰ ἰσογώνια τρίγωνα BΑΓ, ΓΑΕ, εἶναι δύο σχήματα ὅμοια.

**Πόρισμα.** Διὰ τὰ ἦναι δύο τρίγωνα ὅμοια, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, διότι τότε ἡ ἰσότης τῆς τρίτης ἐπεται, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια.

**Σχόλιον.** Ἄς σημειώσωμεν ὅτι, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· οὕτως οὗσης τῆς γωνίας ΑΓΒ ἴσης μὲ τὴν ΔΕΓ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὁμολόγος τῆς ΔΓ· ὡσαύτως ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι ὁμολόγοι, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ: ἀφ' οὗ λοιπὸν γνωρίζομεν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εὐθὺς σχηματίζομεν τὰς ἀναλογίας:

$$AB : ΔΓ :: ΑΓ : ΔΕ :: BΓ : ΓΕ.$$

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

### Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι  $BΓ : EZ :: AB : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ$ . λέγω δὲ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, δηλαδή,  $A=Δ, B=E, Γ=Ζ$ . σχ. 120.

Εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἂς γένη ἡ γωνία  $ZEH=B$ , καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἡ γωνία  $EZH=Γ$ , ἡ δὲ τρίτη Η θέλει εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ Α, καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ, θέλουν εἶναι ἰσογώνια· λοιπὸν κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα  $BΓ : EZ :: AB : EH$ . Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως,  $BΓ : EZ :: AB : ΔΕ$ . ἄρα  $EH=ΔΕ$ . Κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα,  $BΓ : EZ :: ΑΓ : ΗΖ$ . ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως,  $BΓ : EZ :: ΑΓ : ΔΖ$ , ἄρα  $ZH=ΔΖ$ . Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΕΗΖ, ΔΕΖ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν,

ἄρα εἶναι ἴσα (πρό. 11, 1). Ἄλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΑ· λοιπὸν ὡσαύτως τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον Α'. Ἀπὸ τὰς δύο ταύτας τελευταίας προτάσεις βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τρόπον ὥστε μία τούτων τῶν συνθηκῶν ἀρκεῖ πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Δὲν ὑπάρχει ὁμῶς τὸ αὐτὸ εἰς τὰ σχήματα τὰ ἔχοντα ὑπὲρ τὰς τρεῖς πλευράς· διότι, ἐὰν ὁ λόγος ᾗναι μόνον περὶ τετραπλευρῶν, ἤμποροῦμεν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, ἢ χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰς πλευράς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας. Οὕτως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾗναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, καὶ τ' ἀνάπαλιν. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλως τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μὲν ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἀλλ' ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν διαφέρει· ὡσαύτως χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ ἤμποροῦμεν νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας, πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες τὸ σημεῖον Β ἀπὸ τὸ Δ. σχ. 121.

Σχόλιον Β'. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις αἱ ὁποῖαι κυρίως ἀποτελοῦν μίαν, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεينوῦσης εἶναι αἱ ἀξιολογώτεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας· ἀρκοῦσι σχεδὸν μόναι δι' ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὴν λύσιν ὧν τῶν προβλημάτων· ὁ δὲ λόγος εἶναι, ὅτι ὅλα τὰ σχήματα ἤμπορουν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τρίγωνα, καὶ ὅποιονδήποτε τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα ὀρθογώνια. Οὕτως αἱ γενικαὶ ιδιότητες τῶν τριγώνων περιέχουσι συνεπτυγμένως (implicitment) τὰς ιδιότητας ὧν τῶν σχημάτων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

### Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.

Ἐστω ἡ γωνία  $A = \Delta$ , καὶ ἅς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν  $AB : DE :: AG : \Delta Z$ . λέγω δὲ ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΔΕΖ (σχ. 122).

Ἄς ληφθῇ  $AH = \Delta E$ , καὶ ἅς ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος τῆς ΒΓ, ἴσως ἡ γωνία ΑΗΘ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ (πρό. 24, 1)· καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΓ· θέλομεν ἔχει λοιπὸν ΑΒ :

ΑΗ:: ΑΓ: ΑΘ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ: ΔΕ:: ΑΓ: ΔΖ, καὶ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΗ=ΔΕ· λοιπὸν ΑΘ=ΔΖ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἄρα εἶναι ἴσα. Τώρα τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· λοιπὸν ΔΕΖ εἶναι ὡσαύτως ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'. †

#### Θ ε ώ ρ η μ α.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους, ἢ καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ὅμοια.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ (σχ. 123) ᾖναι παράλληλος τῆς ΔΕ, καὶ ΒΓ τῆς ΕΖ, ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ (27, 1)· ἐὰν δὲ περιπλέον ΑΓ ᾖναι παράλληλος τῆς ΔΖ, ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΖΕ, καὶ ὡσαύτως ἡ ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ: τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια· ἄρα καὶ ὅμοια.

2.<sup>ον</sup> Ἐστω (σχ. 124) ἡ πλευρὰ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΔΖ εἰς τὴν ΑΓ· εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΙΔΘ αἱ δύο γωνίαι Ι καὶ Θ θέλουν εἶναι ὀρθαί· αἱ τέσσαρες γωνίαι ἰσοδυναμοῦν ὁμοῦ μὲ τέσσαρας ὀρθάς (20, 1)· λοιπὸν αἱ δύο ὑπόλοιποι ΙΑΘ, ΙΔΘ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλ' αἱ δύο γωνίαι ΕΔΖ, ΙΔΘ ἰσοδυναμοῦν ὡσαύτως μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ ΙΑΘ ἢ τῇ ΒΑΓ: παρομοίως ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ ᾖναι κάθετος εἰς τὴν τρίτην ΒΓ, θέλομεν δεῖξει, ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ=Γ, καὶ ΔΕΖ=Β· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον. Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι· εἰς τὴν δευτέραν, εἶναι αἱ κάθετοι. Οὕτως εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν, ΔΕ εἶναι ὁμολόγος τῇ ΑΒ, ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι, τὰ δύο τρίγωνα δυνατόν νὰ ἔχωσι θέσιν τινὰ διαφορετικὴν τῆς ὑποτεθείσης εἰς τὸ σχῆμα 124· ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῇ εἴτε διὰ τετραπλεύρων τοιούτων ὡς ΑΙΔΘ, τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, εἴτε διὰ τῆς συγκρίσεως δύο τριγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκτὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ἤθελεν ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν: ἔπειτα, πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ ὑποθέσωμεν ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατεσκευασμένον τρίγωνόν τι ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ᾖναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν



τοῦ πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  συγκρινομένου τριγώνου, καὶ τότε ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὥς εἰς τὴν περίστασιν τοῦ 124 σχήματος.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

#### Θεώρημα

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τριγώνου τινὸς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν βάσιν ὅπωςδήποτε εὐθεῖαι, ὡς  $AZ$ ,  $AH$ , κ. τ. λ. αὗται θέλουν διαιρεῖ τὴν βάσιν  $B\Gamma$  καὶ τὴν παράλληλόν τῆς  $\Delta E$  ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε  $\Delta I : BZ :: IK' : ZH :: K'\Lambda : H\Theta$ , κ. τ. λ. (σχ. 125).

Διότι, ἐπειδὴ  $\Delta I$  εἶναι παράλληλος τῆς  $BZ$ , τὸ τρίγωνον  $\Delta DI$  εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ  $ABZ$ , καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν  $\Delta I : BZ :: AI : AZ$ · ὡσαύτως  $IK'$  οὗσης παραλλήλου τῆς  $ZH$ , ἔχομεν  $AI : AZ :: IK' : ZH$ · λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου  $AI : AZ$ ,  $\Delta I : BZ :: IK' : ZH$ · εὐρίσκομεν παρομοίως  $IK' : ZH :: K'\Lambda : H\Theta$ , κ. τ. λ. λοιπὸν ἡ γραμμὴ  $\Delta E$  διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα  $I$ ,  $K'$ ,  $\Lambda$  ὡς ἡ βάσις  $B\Gamma$  εἰς τὰ σημεῖα  $Z$ ,  $H$ ,  $\Theta$ .

Πόρισμα. Ἄρα, ἐὰν  $B\Gamma$  διαιρεθῇ εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς στιγμάς  $Z$ ,  $H$ ,  $\Theta$ , ἡ παράλληλος  $\Delta E$  θέλει διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς στιγμάς  $I$ ,  $K'$ ,  $\Lambda$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας  $A$  ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου καταβασθῇ ἡ κάθετος  $AD$  ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (σχ. 126.)

1.<sup>ον</sup> Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα  $ABD$ ,  $AD\Gamma$  θέλουν εἶναι ὅμοια ἀλλήλοις καὶ ὅμοια τῷ ὅλῳ  $AB\Gamma$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐκάστη πλευρὰ  $AB$  ἢ  $AG$  θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας  $B\Gamma$  καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος  $BD$  ἢ  $D\Gamma$ .

3.<sup>ον</sup> Ἡ κάθετος  $AD$  θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων  $BD$ ,  $D\Gamma$ .

Διότι, 1.<sup>ον</sup> τὸ τρίγωνον  $BAD$  καὶ τὸ τρίγωνον  $BAG$  ἔχουν κοινὴν γωνίαν τὴν  $B$ · περιπλέον ἡ ὀρθὴ  $BDA$  εἶναι ἴση τῇ ὀρθῇ  $BAG$ · λοιπὸν ἡ τρίτη γωνία  $BAD$  τοῦ ἐνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην  $\Gamma$  τοῦ ἄλλου· ἄρα τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια· ὡσαύτως θέλομεν δεῖξει, ὅτι τὸ τρίγωνον  $DAG$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $BAG$ · λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια ἀλλήλοις.

2.<sup>ον</sup> Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ, αἱ ὁμολογοὶ τῶν πλευρῶν εἶναι ἀνάλογοι. Τώρα, ἡ πλευρὰ ΒΔ εἰς τὸ μικρὸν τρίγωνον εἶναι ὁμολογος τῇ ΒΑ εἰς τὸ μέγαλον, διότι εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, ΒΑΔ, ΒΓΑ· ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΑ τοῦ μικροῦ εἶναι ὁμολογος τῇ ὑποτείνουσῃ ΒΓ τοῦ μεγάλου· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν  $ΒΔ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΓ$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἔχει  $ΔΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΒΓ$ · λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἐκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας καὶ τοῦ προσκειμένου εἰς ταύτην τῆν πλευρὰν τμήματος.

3.<sup>ον</sup> Τέλος, ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ δίδει, παρὰ βαλλομένων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν,  $ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ$ · λοιπὸν, 3.<sup>ον</sup> ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτείνουσας.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναλογίαν  $ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ$  ἐξισοῦντες τὸ  $\sqrt[2]{ΒΔ \times ΒΓ}$  γινόμενον τῶν ἄκρων μὲ τὸ τῶν μέσων συνάγομεν  $\sqrt[2]{ΒΔ} = \sqrt[2]{ΒΔ} \times \sqrt[2]{ΒΓ}$ . Ἐχομεν παρομοίως  $\sqrt[2]{ΑΓ} = \sqrt[2]{ΔΓ} \times \sqrt[2]{ΒΓ}$ , λοιπὸν  $\sqrt[2]{ΑΒ} + \sqrt[2]{ΑΓ} = \sqrt[2]{ΒΔ} \times \sqrt[2]{ΒΓ} + \sqrt[2]{ΔΓ} \times \sqrt[2]{ΒΓ}$ . τὸ δὲ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ  $(\sqrt[2]{ΒΔ} + \sqrt[2]{ΔΓ}) \times \sqrt[2]{ΒΓ}$  καὶ ἄγεται εἰς  $ΒΓ \times \sqrt[2]{ΒΓ}$  ἢ  $ΒΓ \cdot \sqrt[2]{ΒΓ}$  ἄρα  $\sqrt[2]{ΑΒ} + \sqrt[2]{ΑΓ} = \sqrt[2]{ΒΓ} \cdot \sqrt[2]{ΒΓ}$ · λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ ἴσούται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Οὕτως ἐπα-  
νερχόμεθα εἰς τὴν πρότασιν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας διὰ ὁδοῦ πολλὰ διαφορετικῆς ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν· ὅθεν βλέπομεν ὅτι κυρίως ἡ πρότασις τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν εἰς τὰ ἰσογώνια τρίγωνα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς γεωμετρίας ἄγονται, διὰ νὰ εἶπω οὕτω, εἰς ταύτην μόνην, ὅτι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Συχνάκις ἀκολουθεῖ, καθὼς τούτου παράδειγμα εἶδομεν ἀνωτέρω ἐξάγοντες συνεπείας ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας προτάσεις, νὰ καταπτῶμεν εἰς προτάσεις ἀποδεδειγμένας. Ἐν γένει δὲ ὅ,τι μάλιστα χαρακτηρίζει τὰ θεωρήματα τῆς γεωμετρίας, καὶ εἶναι δεῖξις ἰσχυροτάτη τῆς βεβαιότητός των, εἶναι ὅτι συμπλέκοντές τα καθ' ὅποιονδήποτε τρόπον, ἐὰν συλογίζωμεθα ὀρθῶς, πάντοτε καταπτῶμεν εἰς ἀκριβῆ ἐξαγόμενα. Τοῦτο δὲ δὲν ἤθελεν ὑπάρχει, ἐὰν πρότασις τις ἦτο ψευδής, ἢ ἦτον ἀληθής ὡς ἔγγιστα, ἀλλὰ διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν προτάσεων πρὸς ἀλλήλας τὸ σφάλμα ἤθελεν αὐξάνει καὶ κακασταθῆ ἐκπαισθητόν. Τούτου δὲ βλέπομεν

παραδείγματα εἰς ὅλας τὰς ἀποδείξεις, εἰς τὰς ὁποίας μεταχειρίζομεθα τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγὴν (reduction a l'absurde). Διὰ τῶν τοιούτων ἀποδείξεων βεβαιώνεται ἡ ἀλήθεια προτάσεώς τινος ἐκ τοῦ ἀτόπου, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐὰν ὑπῆρχε τὸ ἐναντίον· συνίστανται λοιπὸν αἱ ἀποδείξεις αὗται εἰς τὸ νὰ καταστήσουν φανερὸν τὸ τοιοῦτον ἄτοπον. Οὕτω π. χ. βεβαιόνομεν ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύοντες ὅτι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἡ παραμικρὰ ἀνισότης μεταξὺ αὐτῶν, ἠθέλαμεν φθάσει διὰ τινος σειρᾶς συλλογισμῶν εἰς ἄτοπον φανερὸν, καί, διὰ τὸ νὰ εἶπω οὕτω, ὑληλαφητόν· ὅθεν ἀναγκαζόμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι αἱ δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι.

**Πόρισμα.** Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου  $A$  τῆς περιφερείας ἀχθῶσιν αἱ δύο χορδαὶ  $AB$ ,  $AG$  εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου  $BG$ , τὸ τρίγωνον  $BAΓ$  θέλει εἶναι ὀρθογώνιον εἰς  $A$  (18, 2)· λοιπὸν 1<sup>ον</sup> ἡ κάθετος  $AD$  εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων  $BD$ ,  $ΔΓ$ , τῆς διαμέτρου, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ,

—2

τὸ τετράγωνον  $AD$  ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον  $BD \times ΔΓ$ .

2<sup>ον</sup> Ἡ χορδὴ  $AB$  εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου  $BG$  καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος

—2

—2

$BD$ , ἢ,  $AB = BD \times BG$ · ἔχομεν παρομοίως  $AG = ΓΔ \times BG$ · λοι-

—2

—2

—2

—2

πὸν  $AB : AG :: BD : ΔΓ$ · ἐπειδὴ δὲ  $AB = BD \times BG$ , καὶ  $AB \times BG$

—2

—2

—2

—2

—2

$= BD \times BG$ · διὰ τοῦτο  $AB : BG :: BD : BG$ · ὡσαύτως  $AG : BG :: ΔΓ : BG$ . Οἱ λόγοι οὗτοι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἴτε πρὸς ἄλληλα εἴτε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας, ἐλέχθησαν εἰς τὰ πορίσματα  $Γ'$  καὶ  $Δ'$  τῆς  $ΙΑ'$  προτάσεως.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

**Θεώρημα.**

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν τὴν ἴσην γωνίαν. Οὕτω τὸ τρίγωνον  $ABΓ$  εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον  $ΑΔΕ$ , καθὼς τὸ ὀρθογώνιον  $AB \times AG$  πρὸς τὸ ὀρθογώνιον  $ΑΔ \times ΑΕ$ . (σχ. 128).

Ἀς ἐπιξευχθῇ  $BE$ . Τὰ δύο τρίγωνα  $ABE$ ,  $ΑΔΕ$ , τῶν ὁμοίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι  $E$ , ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των  $AB$ ,  $ΑΔ$  (πρό. 6)· λοιπὸν,  $ABE : ΑΔΕ :: AB : ΑΔ$ .

ἔχομεν ὡσαύτως,  $ABΓ : ABE :: AG : ΑΕ$ .



Παλινπλασιάζοντες δὲ κατὰ τὴν τὰς δύο ταύτης ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν ὄρον ABE, ἔχομεν

$$ABΓ: AΔΕ:: AB \times AΓ: AΔ \times AΕ.$$

Πόρισμα. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα θέλουσι εἶναι ἰσοδύναμα ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον  $AB \times AΓ$  ᾗται ἴσον μὲ τὸ  $AΔ \times AΕ$ , ἢ ἐὰν ᾗται  $AB: AΔ:: AΕ: AΓ$ , τὸ ὁποῖον ἔχει γῶραν, ὅσας ἢ  $ΔΓ$  εἶναι παράλληλος τῇς BE. (βλέπε τὸ β'. τῶν δύο σχημάτων, 128).

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω (σχ. 122) ἡ γωνία  $A = Δ$  καὶ ἡ  $B = Ε$ · κατὰ πρῶτον ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων γωνιῶν A καὶ Δ, ἔχομεν, κατὰ τὴν προλαβούσαν πρότασιν,

$$ABΓ: ΔΕΖ:: AB \times AΓ: ΔΕ \times ΔΖ.$$

Ἐπεὶτα δὲ ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων,

$$AB: ΔΕ:: AΓ: ΔΖ.$$

Καὶ ἐὰν πολυπλασιάσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν ἐπὶ τὴν ταυτοσύμαντον

$$AΓ: ΔΖ:: AΓ: ΔΖ$$

ὅρον ἐπὶ ὅρον, συνάγομεν,

$$AB \times AΓ: ΔΕ \times ΔΖ:: AΓ: ΔΖ$$

Ἄρα,

$$ABΓ: ΔΕΖ:: AΓ: ΔΖ.$$

Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια τρίγωνα ABΓ, ΔΕΖ, εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁποῖωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣΤ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Εἰς τὸ πολύγωνον ABΓΔΕ (σχ. 129), ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν A εἰς τὰς ἄλλας γωνίας αἱ διαγώνιοι AΓ, AΔ. Εἰς τὸ ἄλλο πολύγωνον ZHΘΙΚ' ἃς ἀχθῶσι παρομοίως ἀπὸ τὴν γωνίαν Z τὴν ὁμολογὸν τῇ A, αἱ διαγώνιοι ZΘ, ZI εἰς τὰς ἄλλας γωνίας.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ABΓ εἶναι ἴση τῇ ὁμολόγῳ αὐτῆς ZHΘ (ὅρ, 2), αἱ δὲ πλευραὶ AB, BΓ, εἶναι

ἀνάλογοι μετὰ τὰς  $ZH, H\Theta$  εἰς τρόπον ὥστε  $AB:ZH::BF:H\Theta$ . Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma, ZH\Theta$ , ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεμένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (πρό. 20)· ἡ γωνία ἄρα  $B\Gamma A$  εἶναι ἴση τῇ  $H\Theta Z$ . Ἐάν δὲ αἰῖται αὗται γωνίαι ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς ἴσας  $B\Gamma A, H\Theta I$ , τὰ ὑπολοίπα  $A\Gamma A, Z\Theta I$  θέλουν εἶναι ἴσα· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma, ZH\Theta$  εἶναι ὅμοια, ἔχομεν  $AF:Z\Theta::BF:H\Theta$  ἀπὸ ἄλλο μέρος διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων (ὁρ. 2),  $BF:H\Theta::\Gamma A:\Theta I$ · λοιπὸν  $AF:Z\Theta::\Gamma A:\Theta I$ · ἀλλ' εἰδομεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία  $A\Gamma A = Z\Theta I$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα  $A\Gamma A, Z\Theta I$  ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἄρα εἶναι ὅμοια. Μετὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει τὴν ὁμοιότητα τῶν ἀκολουθῶν τριγώνων, ὅσος δὴποτε καὶ ἂν ᾦτον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν προτεθέντων πολυγώνων· ἄρα δύο ὅμοια πολυγώνων σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Σχόλιον. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθής· ἐὰν δύο πολυγώνων συντίθενται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, θέλουν εἶναι ὅμοια.

Διότι ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ἤθελε δώσει τὴν γωνίαν  $AB\Gamma = ZH\Theta, B\Gamma A = H\Theta Z, A\Gamma A = Z\Theta I$ · ἄρα  $B\Gamma A = H\Theta I$ , ὡσαύτως  $\Gamma A E = \Theta I K$  κ. τ. λ. Περιπλέον,  $AB:ZH::BF:H\Theta::AF:Z\Theta::\Gamma A:\Theta I$ , κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο πολυγώνων ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

### Θεώρημα.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί· αἱ δὲ ἐπιράναι των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων πλευρῶν. (σχ. 129).

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἐπειδὴ, ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὁμοίων σχημάτων, ἔχομεν  $AB:ZH::BF:H\Theta::\Gamma A:\Theta I$ , κ. τ. λ., συνάγομεν ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων· τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων  $AB+BF+\Gamma A$  κ. τ. λ., δηλ. ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου σχήματος, ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων, τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου σχήματος, ὃν ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἰδίον ἐπόμενον, ἢ ὃν ἡ πλευρὰ  $AB$  πρὸς τὴν ὁμόλογόν της  $ZH$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma, ZH\Theta$  εἶναι ὅμοια, ἔχομεν (πρό.

—2 —2

25)  $AB\Gamma:ZH\Theta::AF:Z\Theta$ · ὡσαύτως τὰ ὅμοια τρίγωνα  $A\Gamma A,$

—1 —2

ΖΟΙ, διδουν ΑΓΔ:ΖΟΙ::ΑΓ':ΖΘ'. ἄρα ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λό-  
 γου  $\frac{-2}{-2}$  ΑΓ':ΖΘ, ἔχομεν

$$ΑΒΓ:ΖΗΘ::ΑΓΔ:ΖΟΙ,$$

Δ' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν εὑρεῖ,

$$ΑΓΔ:ΖΟΙ::ΑΔΕ:ΖΙΚ'.$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν εἴχομεν μεγαλύτερον ἀριθμὸν τριγώνων.  
 Ἐκ δὲ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων συνάγομεν: Τὸ ἄ-  
 θροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒΓ'+ΑΓΔ'+ΑΔΕ, ἢ τὸ πολύγωνον  
 ΑΒΓΔΕ, ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων ΖΗΘ'+  
 ΖΟΙ'+ΖΙΚ', ἢ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ', ὃν ἡγούμενός τις

ΑΒΓ πρὸς τὸν ἴδιον ἐπόμενον, ἢ ὃν ΑΒ πρὸς ΖΗ'. ἄρα αἱ ἐπι-  
 φάνεια τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τε-  
 τράγωνα τῶν ὁμοίων πλευρῶν.

Πόρισμα. Ἐὰν κατασκευασθῶσι τρία ὅμοια σχήματα, τῶν  
 ὁποίων αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ νὰ ᾔναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς  
 ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τὸ ἐπὶ τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς κατα-  
 σκευαζόμενον σχῆμα θέλει ἴσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.  
 διότι τὰ τρία ταῦτα σχήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμο-  
 λόγων πλευρῶν των· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ἴσοῦται μὲ  
 τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἄρα κ. τ. λ. (1).

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Θεώρημα.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων εἰς κύκλον εἶναι  
 ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τουτέστιν ΑΟ:ΔΟ::ΓΟ:ΟΒ. (σχ. 130). (2)

(1) Ἐστῶσαν ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τῶν ὁποίων ΑΓ  
 εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ Χ ἄς παριστάνῃ τὸ κατασκευαζόμενον σχῆμα ἐπὶ τῆς  
 ὑποτείνουσας ΑΓ, τὸ ὁμοῖον μὲ τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν  
 ΑΒ, ΒΓ τῶν ὁμολόγων τῆς ΑΓ, καὶ παριστανόμενα διὰ τῶν χαρακτῆρων Ψ, Ω. Κατὰ  
 τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἔχομεν,

—2 —2

$$\Psi:\Omega::ΑΒ:ΒΓ$$

—2 —2 —2

Οὔθεν

$$\Psi+Ω:ΑΒ+ΒΓ::Ω:ΒΓ.$$

—2 —2

Ἀλλὰ

$$Χ:ΑΓ:Ω:ΒΓ'.$$

—2 —2 —2

Ἄρα

$$\Psi+Ω:ΑΒ+ΒΓ::Χ:ΑΓ'.$$

—2 —2 —2

ἐπειδὴ δὲ

$$ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ' \text{ ἄρα } Χ=\Psi+Ω' \text{ λοιπὸν}$$

κ. τ. λ.—

Ο. Μ.

(2) Πρὸς κατὰλήψιν τῆς ἐπιφανείας τῆς παρούσης προτάσεως καὶ τῆς ἀκολουθοῦσης  
 μειωτέον ὅτι:



Ἄς ἐπίκεινται αἱ ΑΓ, ΒΔ· εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΟ, ΒΟΔ αἱ γωνίαι εἰς Ο εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφήν ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα (18, 2)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία Γ = Β· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΟ : ΔΟ :: ΓΟ : ΟΒ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγομεν  $ΑΟ \times ΟΒ = ΔΟ \times ΓΟ$ · ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς μιᾶς χορδῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς ἄλλης.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

### Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῶσιν αἱ διατέμνουσαι ΟΒ, ΟΓ, περατούμεναι εἰς τὸ κοῖλον τόξον ΒΓ, αἱ ἔλαι διατέμνουσαι θέλουν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐκτὸς μερῶν των, τουτέστι θέλομεν ἔχει ΟΒ : ΟΓ :: ΟΔ : ΟΑ. (σχ. 131).

Διότι, ἐπίκεινται τῶν ΑΓ, ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινὴν· περιπλέον τὴν  $B = \Gamma$  (18, 2)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια· καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΟΒ : ΟΓ :: ΟΔ : ΟΑ.

Πόρισμα. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΟΑ  $\times$  ΟΒ, ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΟΓ  $\times$  ΟΔ.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἔχει μεγάλην ἀναλογίαν μὲ τὴν προλαβοῦσαν, καὶ διαφέρει ταύτης μόνον καθ' ὅτι αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ ἀντὶ νὰ τέμνωνται ἐντὸς, τέμνονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· τῆς δὲ παρούσης προτάσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίστασις ἡ ἀκόλουθος.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

### Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο (σχ. 132) ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῇ ἐραπτομένη τις ΟΑ καὶ διατέμνουσα ΟΓ, ἡ ἐραπτομένη θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διατεμνούσης

Δύο γραμμαὶ λέγονται ὅτι τέμνονται κατ' ἀντίστροφον λόγον, ὅταν εἰς τὴν σχηματιζομένην ἀναλογίαν ἀπὸ τὰ μέρη των τὰ δύο τῆς μιᾶς εἶναι τὰ ἄκρα, καὶ τὰ ἄλλα δύο τῆς ἄλλης τὰ μέσα.

Καὶ δύο γραμμαὶ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μερῶν των, ὅταν ἡ μία τούτων τῶν γραμμῶν καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος τῆς σχηματίζου τὰ ἄκρα, ἐν ᾧ ἡ ἄλλη καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος τῆς σχηματίζου τὰ μέσα— Ο. Μ.

καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους τῆς· εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ὍΓ :

—2

ΟΑ :: ΟΑ : ΟΔ· ἢ, ὥπερ ταυτόν, ΟΑ = ΟΓ ΟΔ.

Διότι ἐπίκρυψθεισῶν τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ τρίγωνα ΔΑΟ, ΟΑΓ, ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινήν· περιπλέον ἡ γωνία ΟΑΔ, ὡς σχηματιζομένη ἀπὸ ἐφαπτομένην καὶ χορδὴν (19, 2), ἔχει μέτρον τὸ ἡμισυ τοῦ τόξου ΔΑ, καὶ ἡ Γ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον· λοιπὸν ἡ γωνία ΟΑΔ = Γ· ἄρα τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΟΓ} : \text{ΟΑ} :: \text{ΟΑ} : \text{ΟΔ}.$$

—2

ἐκ τῆς ὁμοίας ΟΑ = ΟΓ × ΟΔ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΑ'.

Θεώρημα.

Εἰς ὁποιοδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 133), εἴν ἡ γωνία Α τμηθῇ διὰ ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΔ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· θάλει ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς διατεμνύσης ΑΔ.

Διὰ τῶν τριῶν σημειῶν Α, Β, Γ ἅς διέλθῃ περιφέρεια, ἅς προσελθῇ ἡ ΑΔ μέχρι τῆς περιφέρειας, καὶ ἅς ἐπίκρυψθῇ ἡ ΓΕ.

Τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΕΑΓ· διότι ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΒΑΔ = ΕΑΓ· περιπλέον ἡ γωνία Β = Ε, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο ἔχουν μέτρον τὸ ἡμισυ τοῦ τόξου ΑΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν,

$$\text{ΒΑ} : \text{ΑΕ} :: \text{ΑΔ} : \text{ΑΓ}.$$

ἐντεῦθεν προκύπτει  $\text{ΒΑ} \times \text{ΑΓ} = \text{ΑΕ} \times \text{ΑΔ}$ · ἀλλὰ  $\text{ΑΕ} = \text{ΑΔ} \times$

ΔΕ, καὶ πολυπλατιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη ἐπὶ ΑΔ, ἔχο-

—2

μεν  $\text{ΑΕ} \times \text{ΑΔ} = \text{ΑΔ} + \text{ΑΔ} \times \text{ΔΕ}$ · ἐκ δὲ ἄλλου μέρους  $\text{ΑΔ} \times \text{ΔΕ}$

= ΒΔ × ΔΓ (πρό. 28)· λοιπὸν τέλος  $\text{ΒΑ} \times \text{ΑΓ} = \text{ΑΔ} + \text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ}$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ'.

Θεώρημα.

Εἰς καθὲ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 134), τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἰσοῦται μὲ τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΓΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ ἀγομένης καθέτου ΑΔ.

Διότι, ἐπίκρυψθεισῆς τῆς ΑΕ, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ, εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς Δ, τὸ δὲ εἰς Α· περιπλέον ἡ γωνία Β

==E· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν  $AB:GE::AD:AG$ · ἐκ τῆς ὁποίας  $AB \times AG = GE \times AD$ .

**Πόρισμα.** Ἐὰν αἱ ἴσαι αὗται ποσότητες πολυπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὴν ἰδίαν ποσότητα  $BF$ , θέλομεν ἔχει  $AB \times AG \times BF = GE \times AD \times BF$ . Τώρα.  $AD \times BF$  εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου (πρό. 6)· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφανείαν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν διπλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν καλεῖται ἐνίοτε στερεόν, δι' αἰτίαν τὴν ὁποίαν ἀκολουθῶς θέλομεν ἰδεῖ. Εὐκόλως δὲ λαμβάνομεν ἰδέαν τῆς τιμῆς του, ἐννοοῦντες ὅτι αἱ γραμμαὶ ἀνάγονται εἰς ἀριθμούς, καὶ πολυπλασιάζοντες τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος ἀριθμούς.

**Σχόλιον.** Ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὡσαύτως ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῆνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Διότι τὰ τρίγωνα  $AOB$ ,  $BOG$ ,  $AOG$  ἔχοντα τὴν κορυφὴν των κοινὴν εἰς  $O$ , ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἄρα τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων  $AB$ ,  $BG$ ,  $AG$ , πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῆνος  $OA$ · λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου  $ABG$  εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῆνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. σχ. 87.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ'.

### Θεώρημα.

Εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον  $BAΓΔ$ , τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο διαγωνίων  $AG$ ,  $BD$ , εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἰς τρόπον ὥστε, σχ. 135.

$$AG \times BD = AB \times GD + AD \times BG.$$

Ἀς ληφθῇ τὸ τόξον  $GO = AD$  καὶ ἅς ἐπιζευχθῇ ἡ  $BO$  ἡ συνάπαντῶσα τὴν διάμετρον  $AG$  εἰς  $I$ .

Ἡ γωνία  $ABD = GBI$ , ἐπειδὴ ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ  $AD$ , ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ  $GO$  ἴσου μὲ τὸ  $AD$ . Αἱ γωνίαι  $ADB$ ,  $BGI$  εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα  $AOB$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $ABD$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $IBG$ , καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν  $AD:GI::BD:BG$ · ὅθεν  $AD \times BG$



$\equiv \Gamma\Gamma \times \beta\Delta$ . Λέγω δὲ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον  $\text{ABI}$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\beta\Delta\Gamma$ . διότι ὄντος τοῦ τόξου  $\text{AD}$  ἴσου μὲ τὸ  $\Gamma\text{O}$ , ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέρη  $\text{OD}$ , προκύπτει τὸ τόξον  $\text{AO} \equiv \Delta\Gamma$ . λοιπὸν ἡ γωνία  $\text{ABI} \equiv \Delta\beta\Gamma$ . περιπλέον ἡ γωνία  $\beta\text{AI} \equiv \beta\Delta\Gamma$ , ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ αὐτὸ τεῖχος· λοιπὸν τὰ τρίγωνα  $\text{ABI}$ ,  $\Delta\beta\Gamma$  εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν  $\text{AB}:\beta\Delta::\text{AI}:\Gamma\Delta$ . ὅθεν  $\text{AB} \times \Gamma\Delta \equiv \beta\Delta \times \text{AI}$ .

Προσθέτοντες δὲ τὰ δύο εὐρεθέντα ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι  $\text{AI} \times \beta\Delta + \Gamma\Gamma \times \beta\Delta = (\text{AI} + \Gamma\Gamma) \beta\Delta \equiv \text{AG} \times \beta\Delta$ , θέλομεν ἔχει  $\text{AD} \times \beta\Gamma + \text{AB} \times \Gamma\Delta \equiv \text{AG} \times \beta\Delta$ .

Σχόλιον. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἄλλο θεώρημα ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Τὸ τρίγωνον  $\text{ABD}$  ὅμοιον μὲ τὸ  $\beta\Gamma\Gamma$ , δίδει τὴν ἀναλογίαν .....  $\beta\Delta:\beta\Gamma:\text{AB}:\beta\Gamma$ , ὅθεν ἐπεταὶ  $\beta\Gamma \times \beta\Delta \equiv \beta\Gamma \times \text{AB}$ . Ἐὰν δὲ ἐνωθῇ  $\Gamma\text{O}$ , τὸ τρίγωνον  $\Gamma\text{GO}$ , ὅμοιον μὲ τὸ  $\text{ABI}$ , θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\beta\Delta\Gamma$ , καὶ διὰ τοῦτο  $\beta\Delta:\Gamma\text{O}::\Delta\Gamma:\text{OI}$ . ὅθεν προκύπτει  $\text{OI} \times \beta\Delta \equiv \Gamma\text{O} \times \Delta\Gamma$ , ἢ, ἐπειδὴ  $\Gamma\text{O} \equiv \text{AD}$ ,  $\text{OI} \times \beta\Delta \equiv \text{AD} \times \Delta\Gamma$ . Προσθέτοντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι  $\beta\Gamma \times \beta\Delta + \text{OI} \times \beta\Delta$  ἄγεται εἰς  $\beta\text{O} \times \beta\Delta$ , θέλομεν ἔχει,  
 $\beta\text{O} \times \beta\Delta \equiv \text{AB} \times \beta\Gamma + \text{AD} \times \Delta\Gamma$ .

Ἐὰν ληρῇ  $\beta\text{II} \equiv \text{AD}$ , καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ  $\Gamma\text{K}'\Pi$ , θέλομεν εὐρεῖ δι' ὁμοίων συλλογισμῶν,

$$\Gamma\Gamma \times \Gamma\Delta \equiv \text{AB} \times \text{AD} + \beta\Gamma \times \Gamma\Delta. (1)$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ τὸ τόξον  $\beta\text{II}$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ  $\Gamma\text{O}$ , ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη  $\beta\Gamma$ , θέλομεν ἔχει τὸ τόξον  $\Gamma\beta\text{II} \equiv \beta\Gamma\text{O}$ . ἄρα ἡ χορδὴ  $\Gamma\text{II}$  εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν  $\beta\text{O}$ , καὶ ἐπομένως τὰ ὀρθογώνια  $\beta\text{O} \times \beta\Delta$  καὶ  $\Gamma\text{II} \times \Gamma\Delta$  εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς  $\beta\Delta$  πρὸς  $\Gamma\Delta$ . ἄρα

$$\beta\Delta:\Gamma\Delta::\text{AB} \times \beta\Gamma + \text{AD} \times \Delta\Gamma:\text{AD} \times \text{AB} + \beta\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Λοιπὸν αἱ δύο διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσ-

(1) Τὰ τρίγωνα  $\text{PK}'\beta$ ,  $\text{AB}\Gamma$  εἶναι ὅμοια διότι ἡ γωνία  $\text{A} \equiv \Pi$  ἡ γωνία  $\text{AGB} \equiv \beta\beta\Delta$ · διότι ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $\text{APB}$ · ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου  $\text{PAD}$  ἴσον μὲ τὸ  $\text{APB}$ · λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη  $\text{PK}'\beta \equiv \text{AB}\Gamma$ . ἄρα  $\beta\beta:\text{PK}'::\text{AG}:\text{AB}$ · ὅθεν  $\beta\beta \times \text{AB} \equiv \text{AD} \times \text{AB} \equiv \text{AG} \times \text{PK}'$ . πάλιν τὸ τρίγωνον  $\Delta\Gamma\text{K}'$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\text{AB}\Gamma$ · διότι ἡ γωνία  $\Delta\text{K}'\Gamma \equiv \text{PK}'\beta \equiv \text{AB}\Gamma$ · ἡ  $\Delta \equiv \text{A}$ . ἄρα καὶ  $\Delta\Gamma\text{K}' \equiv \text{AG}\beta$ · διὰ τοῦτο  $\Gamma\Delta:\Gamma\text{K}'::\text{AG}:\beta\Gamma$ · λοιπὸν  $\Gamma\Delta \times \beta\Gamma \equiv \Gamma\text{K}' \times \Delta\Gamma$ · προσθέτοντες τὰ εὐρεθέντα ἐξαγόμενα εὐρίσκουμεν τὴν εἰς τὸ καίμενον ἐξίσωσιν. O, M.

ματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν, αἵτινες τελειό-  
νουν εἰς τὰ ἄκρα των.

Τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα ἔμπορουν νὰ χρησιμεύσουν διὰ τὴν  
εὐρεσιν τῶν διαγωνίων, ὅταν αἱ πλευραὶ εἶναι γνωσταί.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΔ'.

### Θεώρημα.

Εἴτω Π σημεῖον δεδομένον ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐπὶ τῆς ἀκτίνος ΑΓ καὶ  
ἄς ληρῇ σημεῖον τι Κ ἐκτὸς ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ἰδίας ἀκτίνος εἰς  
τρόπον ὥστε ΓΗ:ΓΑ::ΓΑ:ΓΚ· ἔαν ἀπὸ ὁποιοῦνδήποτε στιγμῆν τῆς πε-  
ριφερείας Μ ἀχθῶσιν εἰς τὰς δύο στιγμὰς Π καὶ Κ αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΚ,  
λέγω ὅτι διὰ καθε στιγμῆν τῆς περιφέρειας ὁ λόγος των εὐθειῶν τούτων  
θέλει εἶναι ὁ αὐτός, καὶ θέλομεν ἔχει ΜΠ:ΜΚ::ΑΠ:ΑΚ. σλ. 135.

Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἔχομεν, ΓΗ: ΓΑ:: ΓΑ: ΓΚ· ἀντὶ ΓΑ  
θέτοντες ΓΜ, θέλομεν ἔχει ΓΗ: ΓΜ:: ΓΜ: ΓΚ· λοιπὸν τὰ τρί-  
γωνα ΓΗΜ, ΓΚΜ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην Γ περιεχομένην με-  
ταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὁμοία (20, 3)· ἄρα ἡ τρί-  
τη πλευρὰ ΜΠ εἶναι πρὸς τὴν τρίτην ΜΚ ὡς ΓΗ πρὸς ΓΜ ἢ  
ΓΑ. Ἀλλ' ἡ ἀναλογία ΓΗ: ΓΑ:: ΓΑ: ΓΚ· οἶδει, ἐν διαιρέσει,  
ΓΗ: ΓΑ:: ΓΑ—ΓΗ: ΓΚ—ΓΑ, ἢ ΓΗ: ΓΑ:: ΑΠ: ΑΚ· λοιπὸν  
ΜΠ: ΜΚ:: ΑΠ: ΑΚ· εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὸν ἴδιον τρόπον  
ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ὑπάρχουν αἱ εὐθεῖαι Μ'Π, Μ'Κ, Μ"Π  
Μ"Κ κ. τ. λ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

Εἰς τὸ Γ'. βιβλίον.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν δεδομένην εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλο-  
μεν, ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων γραμμῶν.

1.<sup>ον</sup> Ἄς προτεθῇ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς πέντε  
ἴσα μέρη· ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἄς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, καὶ  
ἀφ' οὗ ληρῇ ΑΓ ἴση μὲ ὁποιοῦνδήποτε μέγεθος, ἄς φερῇ πεν-  
τάκις ἐπὶ τῆς ΑΗ. Ἄς ἐνωθῇ ἡ τελευταία στιγμὴ διαιρέσεως Η  
καὶ τὸ ἄκρον Β διὰ τῆς ΗΒ, ἔπειτα ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΙ παράλληλος  
τῆς ΗΒ· λέγω ὅτι ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ, καὶ

οὕτω φερεῖται τῆς ΑΙ παντάκτις ἐπὶ ΑΒ, ἢ ΑΒ θεῖται διαιρεθῇ εἰς πάντα ἴσα μέρη. σχ. 137.

Διότι, ἐπειδὴ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΗΒ, αἱ πλευραὶ ΑΗ, ΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς Γ καὶ Ι (πρό. 15). Ἀλλὰ ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΗ· λοιπὸν ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ.

2.ον Ἄς προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἄς ἀχθῇ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, ἃς ληρθῇ ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, ΔΕ=Ρ, ἃς ἐνωθῶσι τὰ ἄκρα Ε καὶ Β, καὶ διὰ τῶν σημείων Γ, Δ, ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΓΙ, ΔΚ' παράλληλοι τῆς ΕΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς μέρη ΑΙ, ΙΚ', ΚΒ ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. σχ. 138.

Διότι ἔξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΓΙ, ΔΚ', ΕΒ τὰ μέρη ΑΙ, ΙΚ', ΚΒ εἶναι ἀνάλογα τῶν μερῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (πρό. 15)· ἐκ δὲ τῆς κατασκευῆς ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμάς Π, Κ, Ρ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον τριῶν δεδομένων γραμμῶν Α, Β, Γ.

Ας ἀχθῶσιν αἱ δύο ἀπροσδιόριστοι ΔΕ, ΔΖ ὑπὸ ὁποιοδήποτε γωνίαν. Ἐπὶ τῆς ΔΕ ἃς ληρθῇ ΔΑ=Α καὶ ΔΒ=Β, ἐπὶ τῆς ΔΖ ἃς ληρθῇ ΔΓ=Γ, ἃς ἐνωθῇ ΑΓ, καὶ διὰ τῆς στιγμῆς Β ἃς ἀχθῇ ἡ ΒΧ παράλληλος τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ΔΧ εἶναι ἡ ζητούμενη τετάρτη ἀνάλογος· διότι, οὗσης τῆς ΒΧ παραλλήλου τῆς ΑΓ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΑ:ΔΒ::ΔΓ:ΔΧ. Τώρα οἱ τρεῖς πρώτοι ὅροι ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μὲ τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμάς· λοιπὸν ΔΧ εἶναι ἡ ζητούμενη τετάρτη ἀνάλογος. σχ. 139.

Πόρισμα. Παρομοίως ἠθέλαμεν εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων γραμμῶν Α, Β· διότι αὕτη ἄλλο τι δὲν ἠθέλεν εἶναι παρὰ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν Α, Β, Β.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Νὰ εὕρωμεν μέσην ἀνάλογον μεταξύ δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΔΖ ἃς ληρθῇ ΔΕ=Α, καὶ ΕΖ=Β· ἐπὶ τῆς ἑτέρας ΔΖ ὡς διαμέτρου, ἃς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΔΗΖ· εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Η· λέγω ὅτι ΕΗ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος. σχ. 140.



Διότι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ ἐν σημείον τῆς περιφερείας ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου (πρό. 23). λοιπὸν  $HE$  εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων  $DE, EZ$ , ἀλλὰ τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς  $A$  καὶ  $B$ .

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεΐαν  $AB$  εἰς δύο μέρη ὥστε τὸ μεγαλύτερον νὰ ᾖναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους. σχ. 141.

Εἰς τὸ ἄκρον  $B$  τῆς γραμμῆς  $AB$  ἄς ὑψωθῇ ἡ κάθετος  $BF$  ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς  $AB$ , ἐκ τῆς στιγμῆς  $F$  ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα  $FB$  ἄς γραφθῇ περιφέρεια· ἄς ἐπιζευχθῇ  $AF$  ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς  $\Delta$ , καὶ ἄς ληφθῇ  $AZ = A\Delta$ . λέγω ὅτι ἡ  $AB$  διαιρεῖται εἰς τὴν στιγμὴν  $Z$  κατὰ τὸν ζητούμενον τρόπον, τουτέστι ὡς  $AB : AZ :: AZ : ZB$ .

Διότι οὕσα ἡ  $AB$  κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος  $FB$  εἶναι ἐφαπτομένη· καὶ ἐὰν προεκβληθῇ  $AF$  ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ ἐκ νέου τὴν περιφέρειαν εἰς  $E$ , θέλομεν ἔχει  $AE : AB :: AB : A\Delta$  (πρό. 30). λοιπὸν, ἐν διαιρέσει,  $AE - AB : AB :: AB - A\Delta : A\Delta$ . Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς  $AF$  εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς  $AB$ , ἡ διάμετρος  $DE$  εἶναι ἴση μὲ τὴν  $AB$ , καὶ ἐπομένως  $AE - AB = A\Delta = AZ$ . ἔχομεν ὡσαύτως, ἐπειδὴ  $AZ = A\Delta$ ,  $AB - A\Delta = ZB$ . λοιπὸν  $AZ : AB :: AB : A\Delta$  ἢ  $AZ$ . λοιπὸν ἀντιστρέφοντες θέλομεν ἔχει  $AB : AZ :: AZ : ZB$ . ἐπειδὴ δὲ  $AB > AZ$ , διὰ τοῦτο καὶ  $AZ > ZB$ . λοιπὸν  $AZ$  εἶναι τὸ μεῖζον τμήμα καὶ ὡς βλέπουμεν εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης  $AB$  καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος  $ZB$ .

Σχόλιον. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς  $AB$  καλεῖται διαιρέσεις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· θέλομεν ἰδεῖ τὰς χρήσεις τῆς. Ἦμποροῦμεν δὲ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ διατέμνουσα  $AE$  διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν στιγμὴν  $\Delta$ . διότι, ἐπειδὴ  $AB = DE$ , ἔχομεν  $AE : DE :: DE : A\Delta$ .

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Ἀπὸ δεδομένον σημείον  $A$  ἐντὸς δεδομένης γωνίας  $B\Gamma\Delta$ , νὰ ἀχθῇ ἡ  $B\Delta$  εἰς τρόπον ὥστε τὰ μέρη  $AB, A\Delta$  τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τοῦ σημείου  $A$  καὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας νὰ ᾖναι ἴσα. σχ. 142.

Διὰ τῆς στιγμῆς  $A$  ἄς ἀχθῇ ἡ  $AE$  παράλληλος τῆς  $\Gamma\Delta$ , ἄς ληφθῇ  $BE = GE$ , καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ  $BA\Delta$ , ἥτις εἶναι ἡ ζητούμενη γραμμή.

Διότι, ούσης τῆς ΑΕ παραλλήλου τῆς ΓΔ, ἔχομεν  $BE:EF::BA:AD$ . τώρα  $BE=EF$ . λοιπὸν  $BA=AD$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ παραλληλό-  
γραμμον ἢ δεδομένον τρίγωνον.

1.<sup>ον</sup> Ἐστω ΑΒΓΔ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, ΑΒ ἡ  
βάσις του, ΔΕ τὸ ὕψος του: ἂς ζητηθῇ μέση ἀνάλογος ΧΨ  
μεταξὺ ΑΒ καὶ ΔΕ (πρόβλ. 3). λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον  
τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον  
ΑΒΓΔ. Διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν  $AB:X\Psi::X\Psi:DE$ .

—2  
λοιπὸν  $X\Psi=AB \times DE$ . ἀλλὰ  $AB \times DE$  εἶναι τὸ μέτρον τοῦ  
—2  
παραλληλογράμμου, καὶ  $X\Psi$  τὸ τοῦ τετραγώνου. λοιπὸν εἶναι  
ἰσοδύναμα. σχ. 143.

2.<sup>ον</sup> Ἐστω ΑΒΓ τὸ δεδομένον τρίγωνον, ΒΓ ἡ βάσις τοῦ,  
ΑΔ τὸ ὕψος του: ἂς ληθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΒΓ καὶ  
τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΔ, καὶ ἔστω ΧΨ ἡ μέση αὕτη ἀνάλογος·  
λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυ-  
ναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 144.

—2  
Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν  $B\Gamma:X\Psi::X\Psi:\frac{1}{2}AD$ , ἔπεται ὅτι  $X\Psi$   
 $=AB \times \frac{1}{2}AD$ . λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ  
τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΔ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθο-  
γώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.  
σχ. 145.

Ἄς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν ΑΔ, ΑΒ,  
ΑΓ, καὶ ἔστω ΑΧ ἡ τετάρτη αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κα-  
τασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ ΑΔ καὶ ΑΧ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ  
ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν  $AD:AB::AG:AX$ , ἀκολουθεῖ ὅτι  
 $AD \times AX = AB \times AG$ . λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδυ-  
ναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ ὀρθογωνίου δύο δε-  
δομένων γραμμῶν Α καὶ Β πρὸς τὸ ὀρθογώνιον δύο δεδομένων  
γραμμῶν Γ καὶ Δ. σχ. 148.

Ἐστω  $X$  τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν  $B, \Gamma, \Delta$ · λέγω ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν  $A$  καὶ  $X$  εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν δύο ὀρθογωνίων  $A \times B, \Gamma \times \Delta$ .

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν  $B : \Gamma :: \Delta : X$ , ἔπεται ὅτι  $\Gamma \times \Delta = B \times X$ · λοιπὸν  $A \times B : \Gamma \times \Delta :: A \times B : B \times X :: A \times X$ .

Πόρισμα. Εἰς εὗρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων τῶν δεδομένων γραμμῶν  $A$  καὶ  $\Gamma$ , ἃς ζητήσωμεν τρίτην ἀνάλογον  $X$  τῶν γραμμῶν  $A$  καὶ  $\Gamma$ , εἰς τρόπον ὥστε  $A : \Gamma :: \Gamma :$

—2—2

$X$ , καὶ θέλομεν ἔχει  $A : \Gamma :: A : X$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ γινόμενου τριῶν δεδομένων γραμμῶν  $A, B, \Gamma$ , πρὸς τὸ γινόμενον τριῶν ἄλλων ἐπίσης δεδομένων  $\Pi, K, P$ . (1).

Ἄς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος  $X$  τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν  $\Pi, A, B$ · ἃς ζητηθῇ ἐπίσης τετάρτη ἀνάλογος  $\Psi$  τῶν τῶν δεδομένων γραμμῶν  $\Gamma, K, P$ . Αἱ δύο γραμμαὶ  $X, \Psi$  θέλουσι εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα  $A \times B \times \Gamma, \Pi \times K \times P$ .

Διότι, ἐπειδὴ  $\Pi : A :: B : X$ , ἔχομεν  $A \times B = \Pi \times X$ , καί, πολυπλασιασθέντων τῶν δύο μερῶν ἐπὶ  $\Gamma$ ,  $A \times B \times \Gamma = \Pi \times \Gamma \times X$ · ὡσαύτως, ἐπειδὴ  $\Gamma : K :: P : \Psi$ , ἔπεται ὅτι  $K \times P = \Gamma \times \Psi$ · καί, μετὰ τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν δύο μερῶν ἐπὶ  $\Pi$ , ἔχομεν  $\Pi \times K \times P = \Pi \times \Gamma \times \Psi$ · λοιπὸν τὸ γινόμενον  $A \times B \times \Gamma$  εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον  $\Pi \times K \times P$  ὡς  $\Gamma \times \Pi \times X$  πρὸς  $\Pi \times \Gamma \times \Psi$ , ἢ ὡς  $X$  πρὸς  $\Psi$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Νὰ εὕρωμεν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον πολύγωνον.

Πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον τοῦ δεδομένου, καὶ τοῦτο πάλιν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τελευταῖον νὰ καταντήσωμεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον τὸ ὅποion θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐστω λοιπὸν  $AB\Gamma\Delta E$  τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος  $\Gamma E$ , ἣτις ἀρξαίρει τὸ τρίγωνον  $\Gamma\Delta E$ · ἐκ τῆς στιγμῆς  $\Delta$  ἃς ἀχθῇ ἡ  $\Delta Z$  παράλληλος τῆς  $\Gamma E$  ἕως οὗ νὰ συνα-

(1) Ἐπειδὴ ὡς ἄλλοι θελομεν ἶδει τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν παριστάνει ἐν στερεῶν· διὰ τοῦτο ἡ ἐκφώνησις τοῦ παρόντος προβλήματος δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον, Δεδομένων τῶν τριῶν δικτυάσεων δύο στερεῶν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τούτων εἰς γραμμὰς  $O, M$ .



παντήσῃ τὴν ΑΕ προεκβαλλομένην ὡς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΖ, καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ τὸ ὅποιον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΖΕ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΓΕ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν Δ, Ζ, κεῖνται ἐπὶ μιᾷ γραμμῇ ΔΖ, παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ σχῆμα ΑΒΓΕ, ἔχομεν ἐξ ἑνὸς μέρους τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ, τὰ ὅποια εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρομοίως δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Β ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἰσοδύναμον ΑΗΓ, καὶ οὕτως τὸ πεντάγωνον ΑΒΔΕ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΗΓΖ. σχ. 146.

Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς κάθε ἄλλο σχῆμα· διότι ὀλιγοστέυνοντες κάθε φοράν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, θέλομεν καταντήσῃ τέλος εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Σχόλιον. Εἶδομεν (πρόβ. 6) ὅτι κάθε τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Οὕτω πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μετὰ δεδομένον εὐθύγραμμον σχῆμα· τοῦτο δὲ καλεῖται τετραγωνίζεῖν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, ἢ εὐρίσκειν τὸν τετραγωνισμὸν αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὑρεσιν τετραγώνου ἰσοδύναμου μετὰ κύκλον δεδομένης διαμέτρου.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ. †

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.

1.<sup>ον</sup> Ἐάν πρέπη νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τετραγώνων, ὡς φερθῶσι πρὸς ὀρθὰς αἱ ἀπρὸςδιόριστοι ΕΔ, ΕΖ· ὡς ληφθῇ ΕΔ=Α καὶ ΕΗ=Β, ὡς ἐπιζευχθῇ ΔΗ, καὶ ΔΗ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. σχ. 147.

Διότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΔΕΗ ὀρθογωνίου, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΗ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ ΕΔ καὶ ΕΗ κατασκευαζομένων.

2.<sup>ον</sup> Ἐάν δὲ πρέπη νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μετὰ τὴν διαφορὰν δεδομένων τετραγώνων, ὡς σχηματισθῇ ὡσαύτως ἡ ὀρθὴ γωνία ΖΕΘ, ὡς ληφθῇ ΗΕ ἴση μετὰ τὴν μικροτέραν τῶν πλευρῶν Α καὶ Β· ἐκ τῆς στιγμῆς Η ὡς ἐκ κέντρου, μετὰ ἀκτῖνα ΗΘ ἴσην μετὰ τὴν ἄλλην πλευρὰν, ὡς γραφθῇ τόξον, τὸ ὅποιον

τέμνει ΕΘ εἰς Θ· λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ ἴσουςται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν Α καὶ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΗΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ ὑποτείνουσα ΗΘ = Α, καὶ ἡ πλευρὰ ΗΕ = Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ κ. τ. λ.

Σχόλιον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἡμικοῦμεν νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅσων θέλομεν τετραγώνων· διότι μὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν μὲ τὴν ὁποίαν ἀνάγομεν δύο εἰς ἓν, ἀνάγομεν τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο ταῦτα εἰς ἓν, καὶ οὕτω διὰ τὰ ἄλλα. Τὸ αὐτὸ ἤθελεν ὑπάρχει εἰάν μερικά τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ΄.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ δεδομένον ΑΒΓΔ, ὃν ἡ γραμμὴ Μ πρὸς τὴν γραμμὴν Ν. σχ. 150.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΕΗ, ἃς ληθῇ ΕΖ = Μ καὶ ΖΗ = Ν· ἐπὶ τῆς ΕΗ ὡς διαμέτρου, ἃς γραθῇ ἡμικυκλίω, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΖΘ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Θ ἃς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΗΘ, ΘΕ αἵτινες ἃς προεκβληθῶσιν ἀπροσδιορίστως· ἐπὶ τῆς πρώτης ἃς ληθῇ ΘΚ' ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Κ' ἃς ἀχθῇ ἡ Κ'Ι παράλληλος τῆς ΕΗ· λέγω ὅτι ΘΙ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Κ'Ι, ΗΕ, ἔχομεν ΘΙ:  $\frac{-2}{-2}$  ΘΚ':  $\frac{-2}{-2}$  ΘΕ:  $\frac{-2}{-2}$  ΘΗ· λοιπὸν ΘΙ: ΘΚ':  $\frac{-2}{-2}$  ΘΕ:  $\frac{-2}{-2}$  ΘΗ· ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ (πρό. 23), τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ὡς τὸ τμήμα ΕΖ πρὸς τὸ τμήμα ΖΗ, ἢ ὡς Μ πρὸς Ν, λοιπὸν ΘΙ: ΘΚ':  $\frac{-2}{-2}$  Μ: Ν. Ἀλλὰ ΘΚ' = ΑΒ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΘΙ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ὡς Μ πρὸς Ν.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄. †

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΖΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, νὰ γράψωμεν πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεδομένῳ ΑΒΓΔΕ. σχ. 129.

Εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἃς γένῃ ἡ γωνία ΗΖΘ = ΒΑΓ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Η ἡ γωνία ΖΗΘ = ΑΒΓ· αἱ γραμμαὶ ΖΘ, ΗΘ, τέμνονται εἰς Θ, καὶ ΖΗΘ εἶναι τρίγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· ὡσαύτως ἐπὶ τῆς ΖΘ, ὁμολόγου τῇ ΑΓ, ἃς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΖΙΘ ὅμοιον τῷ ΑΔΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΖΙ ὁμολόγου τῇ ΑΔ,

ἄς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον  $ZIK$  ὅμοιον τῷ  $ΑΔΕ$ . Τὸ πολύγωνον  $ZHΘIK$  εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον τῷ  $ΑΒΓΔΕ$ .

Διότι τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρό. 26).

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων, νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν.

Ἔστωσαν  $A$  καὶ  $B$  δύο ὁμολόγοι πλευραὶ τῶν δεδομένων σχημάτων, ἃς ζητηθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν  $A$  καὶ  $B$ . ἔστω  $X$  ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου,  $X$  θέλει εἶναι εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα ἡ ὁμολογος πλευρὰ τῇ  $A$  καὶ  $B$  εἰς τὰ δεδομένα σχήματα. Ἀκολουθῶς τὸ σχῆμα κατασκευάζεται διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος.

Διότι τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τώρα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς  $X$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν  $A$  καὶ  $B$ . λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς  $X$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων ὁμοίων σχημάτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν  $A$  καὶ  $B$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον, καὶ τὸ ὅποιον νὰ ἔχη πρὸς τοῦτο τὸ σχῆμα λόγον δεδομένον, καὶ τὸ ὅποιον  $M$  πρὸς  $N$ .

Ἔστω  $A$  μία τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου σχήματος,  $X$  ἡ ὁμολογος πλευρὰ εἰς τὸ ζητούμενον· ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα σχήματα πρέπει νὰ ᾗναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς  $X$  ἀνάγκη νὰ ᾗναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς  $A$  ὡς  $M$  πρὸς  $N$ · εὐρίσκομεν λοιπὸν  $X$  διὰ τοῦ προβλήματος  $ΙΒ'$  γνωστῆς τῆς  $X$ , τὸ ὑπόλοιπον ἐκτελεῖται διὰ τοῦ  $ΙΓ'$  προβλήματος.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΣΤ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα  $\Pi$  καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα  $K$ . σχ. 151.

Ζητοῦμεν τὴν πλευρὰν  $M$  τοῦ ἰσοδύναμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα  $\Pi$ , καὶ τὴν πλευρὰν  $N$  τοῦ ἰσοδύναμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα  $K$ · εὐρίσκομεν ἀκολούθως μίαν τετάρτην ἀνάλογον  $X$



τῶν γραμμῶν M, N, AB αἵτινες εἶναι δεδομένοι ἐπὶ τῆς πλευρᾶς X, ὁμολόγου τῇ AB, ἃς γραφθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π· λέγω ὅτι θέλει εἶναι προσέτι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα K.

Διότι καλοῦντες Ψ τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς X ἀναγραφόμενον σχῆμα, θέλομεν ἔχει  $\Pi : \Psi :: AB : X$ · ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς  $AB : X :: M : N$ , ἢ  $AB : X :: M^2 : N^2$ · λοιπὸν  $\Pi : \Psi :: M^2 : N^2$ . Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν  $M^2 = \Pi$  καὶ  $N^2 = K$ · λοιπὸν  $\Pi : \Psi :: \Pi : K$ · λοιπὸν  $\Psi = K$ · ἄρα τὸ σχῆμα Ψ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα K.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ κάμνουν δεδομένον ἄθροισμα AB. σχ. 152.

Ἐπὶ τῆς AB, ὡς διαμέτρου, ἃς γραφθῇ ἡμικυκλίω· ἐκ τῆς στιγμῆς A ἃς ὕψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ τὴν AB, καὶ ἀφ' οὗ ληφθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου ἡ AD ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ, ἃς ἀχθῇ ἡ DE παράλληλος τῇ AB. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν E, ὅπου ἡ παράλληλος τέμνει τὴν περιφέρειαν ἃς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος EZ· λέγω ὅτι AZ καὶ ZB εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογώνιου· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ AB· καὶ τὸ ὀρθογώνιόν των  $AZ \times ZB$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς EZ (πρό. 23), ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς AD· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ᾔῃναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει τὸ διάστημα AD νὰ μὴ ὑπερβαίῃ τὴν ἀκτῖνα, τοῦτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου Γ νὰ μὴ ὑπερβαίῃ τὸ ἥμισυ τῆς γραμμῆς AB. (1).

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχουν μεταξύ των τὴν δεδομένην διαφορὰν AB. σχ. 153.

(1) Τὸ ὅριον λοιπὸν τοῦ προβλήματος εἶναι ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου ἄθροίσματος, καὶ τότε τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον εἶναι εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν εἰς τὸ ὅριον τοῦτο ἡ φερομένη παράλληλος τῇ AB ἄπτεται τῆς περιφέρειας. Πέραν τούτου τοῦ ὁρίου τὸ πρόβλημα κατασταίνεται ἀνύπαρκτον· διότι δὲν ὑπάρχει πλέον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν φερομένην παράλληλον καὶ τὴν περιφέρειαν. Ο. Μ.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης  $AB$ , ὡς διαμέτρου, ἄς γραφθῇ περιφέρεια εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ἄς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη  $AD$  ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου  $\Gamma$ : ἄς ἐνωθῇ ἡ  $DO$  καὶ ἄς προεκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς  $E$ : λέγω ὅτι  $DE$  καὶ  $DZ$  εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογώνιου.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον  $EZ$  ἢ  $AB$ . 2.<sup>ον</sup> τὸ ὀρθογώνιον  $DE \times DZ$  εἶναι ἴσον μὲ  $AD$  (πρό. 30): λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον  $\Gamma$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον, ἐὰν ὑπάρχῃ, μεταξύ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Ἐστω  $AB\Gamma H$  ὁποιοῦνδήποτε τετράγωνον,  $AG$  ἡ διαγωνίος του. σχ. 154.

Ἐπειδὴ  $AG$  ὡς πλάγια εἶναι μεγαλητέρα τῆς  $GB$  ὡς καθετου, πρέπει νὰ φέρωμεν  $GB$  ἐπὶ  $GA$  τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται (προβλ. 17. βιβλ. 2), καὶ πρὸς τοῦτο ἄς γραφθῇ ἐκ τοῦ κέντρου  $\Gamma$  μὲ τὴν ἀκτῖνα  $GB$  τὸ ἡμικύκλιον  $ABE$ , βλέπωμεν ὅτι  $GB$  περιέχεται μίαν φοράν εἰς  $AG$  μὲ τὸ ὑπόλοιπον  $AD$ : τὸ ἐξαχόμενον λοιπὸν τῆς πρώτης ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 1 μὲ τὸ ὑπόλοιπον  $AD$ , τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ  $BF$  ἢ μὲ τὴν ἴσην τῆς  $AB$ .

Ἡμποροῦμεν νὰ λάβωμεν  $AZ = AD$ , καὶ νὰ φέρωμεν  $AZ$  ἐπὶ  $AB$ : ἤθελαμεν εὐρεῖ ὅτι περιέχεται δις μὲ ὑπόλοιπον: πλὴν ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ τὰ ἀκόλουθα προβαίνουν σμικρύνοντα, καὶ διὰ τὴν σμικρότητά των ἁμέσως ἤθελεν εἶναι παρὰ ἀτελὲς μηχανικὸν μέσον, ὅθεν τίποτε δὲν ἤθελαμεν ἡμπορέσει νὰ συμπεράνωμεν, ὥστε νὰ ἀποφασίσωμεν, ἐὰν αἱ γραμαὶ  $AG$ ,  $GB$  ἔχουν ἢ δὲν ἔχουν μεταξύ των κοινὸν μέτρον: ἀλλ' ὑπάρχει μέσον ἀπλούστατον νὰ ἀποφύγωμεν τὰς μειουμένους γραμμάς, καὶ νὰ μὴ ἐργαζώμεθα μόνον ἐπὶ γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι μένουν πάντοτε τοῦ ἰδίου μεγέθους.

Τῷ ὄντι, οὗσης τῆς γωνίας  $AB\Gamma$  ὀρθῆς,  $AB$  εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ  $AE$  διατείνουσα ἡγμένη ἐκ τοῦ ἰοῦ σημείου, εἰς τρόπον ὥστε ἔχομεν (πρό. 30)  $AD : AB :: AB : AE$ . Οὕτως εἰς τὴν δευτέραν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν  $AD$  μὲ  $AB$ , ἡμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ λόγου τῆς  $AD$  πρὸς  $AB$ , νὰ λάβωμεν τὸν τῆς  $AB$  πρὸς  $AE$ : Τώρα  $AB$  ἢ ἴση τῆς  $GA$  περιέ-





## B I B Λ I O N Δ'.

## ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΤΩΝΑ

## ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

## Ὅρισμός.

Τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἐν ταύτῳ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον, καλεῖται κανονικὸν πολύγωνον.

Υπάρχουν κανονικὰ πολύγωνα κάθε ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον τριῶν πλευρῶν καὶ τὸ τετράγωνον, τὸ τῶν τεσσάρων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

## Θεώρημα.

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι δύο ὅμοια σχήματα. σχ. 155.

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒ-ΓΔΕΖ, αβγδεζ· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, ἰσοῦται δὲ μὲ ὀκτῶ γωνίας ὀρθάς (28, 1). Ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τούτου τοῦ ἀθροίσματος ὡς καὶ ἡ γωνία α· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· ἐπομένως τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β, Γ καὶ γ, κ. τ. λ.

Περιπλέον, ἐπειδὴ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πολυγώνων τούτων αἱ πλευраὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ. τ. λ., εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ αβ, βγ, γδ κ. τ. λ. φανερόν εἶναι ὅτι ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ :: ΓΔ : γδ, κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο σχήματα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι λοιπὸν ὅμοια (ὁρ. 2. βιβ. 3).

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμολογοὶ πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν (27, 3).

Σχόλιον. Ἡ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ὡς ἡ τοῦ ἰσογώνιου πολυγώνου (20, 1).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

## Θεώρημα.

Κάθε κανονικόν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ, καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον.

Ἐστω  $ΑΒΓΔΕ$  κ. τ. λ., τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον· ἂς φαντασθῶμεν ὅτι διέρχεται περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$ . ἔστω  $Ο$  τὸ κέντρον τῆς, καὶ  $ΟΗ$  ἡ φερομένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς  $ΒΓ$ · ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $ΑΟ$ ,  $ΟΔ$ .

Τὰ τετράπλευρα  $ΟΗΓΔ$ ,  $ΟΗΒΑ$  ἡμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι: τῷ ὄντι ἡ πλευρὰ  $ΟΗ$  εἶναι κοινὴ, ἡ γωνία  $ΟΗΓ=ΟΗΒ$ , διότι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ πλευρὰ  $ΗΓ$  θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην τῆς  $ΗΒ$ , καὶ τὸ σημεῖον  $Γ$  θέλει πέσει εἰς τὸ  $Β$ · περιπλέαν ἐκ τῆς φύσεως τοῦ πολυγώνου, ἡ γωνία  $ΗΓΔ=ΗΒΑ$ , λοιπὸν  $ΓΔ$  θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν  $ΒΑ$ , καὶ ἐπειδὴ  $ΓΔ=ΒΑ$ , ἡ στιγμὴ  $Δ$  θέλει πέσει εἰς  $Α$ , καὶ τὰ δύο τετράπλευρα ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Τὸ ἀπόστημα λοιπὸν  $ΟΔ$  εἶναι ἴσον μὲ  $ΑΟ$ , καὶ ἐπομένως ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$  θέλει διέλθει ὡσαύτως διὰ τοῦ  $Δ$ : ἀλλὰ, δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, δείξομεν ὅτι ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν  $Β$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ , θέλει διέλθει διὰ τῆς ἀκολουθοῦσης κορυφῆς  $Ε$ , καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἡ αὕτη λοιπὸν περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$ , διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ πολύγωνον ἐγγράφεται εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευраὶ  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ , κ. τ. λ. ὡς πρὸς τὴν εἰρημένην περιφέρειαν εἶναι χορδαὶ ἴσαι· ἰσάκεις λοιπὸν ἀπέχουσι τοῦ κέντρου (8, 2)· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς στιγμῆς  $Ο$ , ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν  $ΟΗ$ , γραφθῇ περιφέρεια, αὕτη θέλει ἅπτεται τῆς πλευρᾶς  $ΒΓ$  καὶ ἐκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἡμισείας, καὶ θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τοῦτο περιγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Σχόλιον Α'. Ἡ στιγμὴ  $Ο$ , κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου, ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὁμοίως ὡς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἡ γωνία  $ΑΟΒ$  σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο ἀκτῖνας ἡγμένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἰδίας πλευρᾶς  $ΑΒ$ .

Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ χορδαὶ  $ΑΒ$ ,  $ΒΕ$  κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, φανερόν εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι, καὶ οὕτως ἡ τιμὴ ἐκά-

στης εὐρίσκεται διαιρουμένων τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον Β'. Διὰ τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ τινος πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται παρὰ ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας πλευράς πρέπει νὰ ἔχη τὸ πολύγωνον· διότι, ὅταν τὰ τόξα ᾗναι ἴσα, αἱ χορδαὶ AB, BΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ABO, BOΓ, ΓΟΔ κ. τ. λ. ὡσαύτως θέλουν εἶναι ἴσα, ὡς ἰσόπλευρα μεταξὺ τῶν λοιπῶν ὅσαι αἱ γωνίαι ABΓ, BΓΔ, ΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ σχῆμα ἄρα ABΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλει εἶναι κανονικὸν πολύγωνον. σχ. 158.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. +

#### Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἄς ἄξωμεν πρὸς ὀρθῆς δύο διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ· ὅς ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ, καὶ τὸ σχῆμα ABΓΔ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον· διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι AOB, BOΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ AB, BΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι. σχ. 157.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον BOΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἔχομεν (11, 3) BΓ : BO ::  $\sqrt{2}$  : 1· λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. +

#### Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἄς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λυμένον, καὶ ἔστω AB μία πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες AO, OB, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον AOB εἶναι ἰσόπλευρον. σχ. 158.

Διότι ἡ γωνία AOB εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν· οὕτω λαμβάνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα, ἔχομεν  $AOB = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot$  αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι ABO, BAO, τοῦ ἰδίου τριγώνου κάμνουν ὁμοῦ  $2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ , καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι  $= \frac{2}{3}$ · τὸ τρίγωνον λοιπὸν ABO εἶναι ἰσόπλευρον· ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα.



Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἐξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ἐξάκις ἐπὶ τῆς περιφέρειας, καὶ οὕτω θέλομεν ἐπιστρέψει εἰς τὴν στιγμὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχωρήσαμεν.

Ἀφ' οὗ ἐγγραφθῇ τὸ ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἐὰν ἐνώσωμεν ἐναλλάξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

**Σχόλιον.** Τὸ σχῆμα ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐνταυτῷ ῥομβοειδές, διότι  $AB = BG = GO = AO$ · τὸ ἄθροισμα λοιπὸν (14, 3) τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων  $ΑΓ + ΒΟ$ , εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι  $4AB$  ἢ  $4BO$ · ἀφαιρεθέντος καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη  $ΒΟ$ , μένει  $ΑΓ = 3BO$ · λοιπὸν  $ΑΓ : ΒΟ :: 3 : 1$ , ἢ  $ΑΓ : ΒΟ :: \sqrt{3} : 1$ · λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν μονάδα.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε. † †

### Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον δεδομένον κανονικὸν δεκάγωνον, ἀκολουθῶν πεντάγωνον καὶ δεκαπεντάγωνον.

Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (πρόβ. 4. βιβ. 3) εἰς τὴν στιγμὴν Μ, λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ μείζον τμήμα ΟΜ· λέγω ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ φέρωμεν δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφέρειας. σχ. 159.

Διότι ἐπιζευγνύοντες τὴν ΜΒ, ἔχομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΟ : ΟΜ :: ΟΜ : ΑΜ· ἢ, ἐπειδὴ  $AB = OM$ ,  $AO : AB :: AB : AM$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΜΒ ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν Α περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3). Τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι παρομοίως, καὶ ἔχομεν  $AB = BM$ · ἄλλως  $AB = OM$ · λοιπὸν ὡσαύτως  $MB = OM$ · ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΟ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΜΒ εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς Ο (19, 1)· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ = ΜΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἐκάστη τῶν γωνιῶν πρὸς τὴν βάσιν, ΟΑΒ ἢ ΟΒΑ εἶναι διπλασία τῆς εἰς τὴν κορυφὴν Ο· ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι κάμνουν ὁμοῦ πεντάκις τὴν γωνίαν Ο, καὶ οὕτως ἡ Ο εἶναι

τὸ πέμπτον μέρος δύο ὀρθῶν, ἢ τὸ δέκατον τεσσάρων· ἄρα τὸ τόξον AB εἶναι τὸ δέκατον μέρος τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ AB εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

**Πόρισμα Α'.** Ἐὰν ἀνὰ δύο δύο ἐνώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου θέλομεν σχηματίσει τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΙ.

**Πόρισμα Β'.** Οὕσης πάντοτε AB τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἔστω ΑΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐξαγώνου· τότε τὸ τόξον ΒΛ θέλει εἶναι, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν,  $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$  ἢ  $\frac{1}{15}$ . λοιπὸν ἡ χορδὴ ΒΛ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαπενταγώνου ἢ κανονικοῦ πολυγώνου 15 πλευρῶν. Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ τόξον ΓΑ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΒ.

**Σχόλιον.** Ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἐὰν τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τόξα τμηθῶσι δίχα, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων, θέλει σχηματισθῇ νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν: Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἡμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 8, 16, 32, κ. τ. λ., πλευρῶν. Ὡσαύτως τὸ ἐξάγωνον διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 12, 24, 48, κ. τ. λ. πλευρῶν· τὸ δεκαπεντάγωνον διὰ τὴν τῶν πολυγώνων 30, 60, 120 κ. τ. λ. πλευρῶν (1).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

### Πρόβλημα.

Δεδομένου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔ κ. τ. λ., νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν ὁμοιον πολύγωνον. σχ. 160.

Εἰς τὴν στιγμήν Τ, μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, ἃς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΗΘ ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (πρό. 10, 2)· ἃς γένη τὸ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον ἐκάστου τῶν ἄλλων τόξων ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. αἱ ἐφαπτόμεναι θέλουν σχηματίσει διὰ τῶν κοινῶν τομῶν των τὸ κανονικὸν περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ' κ. τ. λ., ὁμοιον, μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον

(1) Ἐπὶ πολὺ ἐνομίσθη ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα ἦσαν τὰ μόνα τὰ ὅποια ἡμποροῦν νὰ ἐγγραφθῶν διὰ τῶν διδασκαλιῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, ἢ, ὅπερ ταῦτόν, διὰ τῆς λύσεως τῶν προτοβαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων: ἀλλ' ὁ K. Gauss· εἰδείξεν, εἰς σύγγραμμά τι ἐπιγραφόμενον Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801 ὅτι δυνατόν νὰ ἐγγραφθῇ δι' ὁμοίων μέσων τὸ κανονικὸν πολύγωνον δεκαεπτὰ πλευρῶν, καὶ ἐν γένει τὸ

τῶν  $2^{n-1} + 1$  πλευρῶν, φθάνει μόνον  $2^{n-1}$  νὰ ᾖ ἀριθμὸς πρῶτος. Ο. Σ.

Εὐκόλως βλέπομεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ τρία σημεῖα  $O, B, \Theta$  εἶναι ἐπ' εὐθείας· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα  $OT\Theta, \Theta\Theta N$ , ἔχουν κοινὴν τὴν ὑποτείνουσιν  $O\Theta$ , καὶ τὴν πλευρὰν  $OT = ON$ · λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1)· ἐπομένως ἡ γωνία  $\angle TO\Theta = \angle \Theta ON$ , καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ  $O\Theta$  διέρχεται διὰ τῆς στιγμῆς  $B$  μέσου τοῦ τόξου  $TN$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ στιγμὴ  $I$  εἶναι ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς  $OF$ , κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐπειδὴ  $H\Theta$  εἶναι παράλληλος τῇ  $AB$  καὶ  $\Theta I$  τῇ  $BF$ , ἡ γωνία  $\angle H\Theta I = \angle ABF$  (26, 1)· ὥσαύτως  $\angle I\Theta K = \angle B\Gamma\Delta$ , κ. τ. λ. λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἔχομεν  $H\Theta : AB :: O\Theta : OB$ , καὶ  $\Theta I : BF :: O\Theta : OB$ · λοιπὸν  $H\Theta : AB :: \Theta I : BF$ . ἀλλὰ  $AB = BF$ , ἄρα  $H\Theta = \Theta I$ . Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον  $\Theta I = IK'$ , κ. τ. λ. ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι· δεδεικται δὲ ὅτι καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· κανονικὸν ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο καὶ ὁμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

**Πόρισμα Α'.** Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἐδίδοτο τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον  $H\Theta IK'$ , κ. τ. λ., καὶ ἔτρεπε διὰ μέσου τούτου νὰ διηγράψωμεν τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον  $AB\Gamma$ , κ. τ. λ., βλέπομεν ὅτι ἀποκοῦσε νὰ ἀξῶμεν εἰς τὰς κορυφὰς  $H, \Theta, I$  κ. τ. λ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου τὰς γραμμὰς  $OH, O\Theta$  κ. τ. λ., αἱ ὁποῖαι ἤθελον συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰς στιγμὰς  $A, B, \Gamma$ , κ. τ. λ. νὰ ἐνώσωμεν ἀκολουθῶς ταύτας τὰς στιγμὰς διὰ τῶν χορδῶν  $AB, B\Gamma$ , κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἤθελον σχηματίσῃ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ἐμπορούσαμεν ὥσαύτως, εἰς τὴν ἰδίαν περίστασιν, νὰ ἐνώσωμεν ἀπλῶς τὰς στιγμὰς τῆς ἀφῆς,  $T, N, \Pi$ , κ. τ. λ. διὰ τῶν χορδῶν  $TN, N\Pi$ , κ. τ. λ. καὶ ἐπίσης ἠθέλαμεν ἔχει ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὁμοιον τῷ περιγεγραμμένῳ.

**Πόρισμα Β'.** Ἐμποροῦμεν ἄρα νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον ὅσα κανονικὰ πολύγωνα ἡξεύρομεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τοῦτον τὸν κύκλον, καὶ ἀντιστρόφως.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ':

### Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περιμέτρὸν τοῦ πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐστὼ, παραδείγματος χάριν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον  $H\Theta IK'$ , κ. τ. λ. Τὸ τρίγωνον  $H\Theta\Theta$  ἔχει διὰ μέτρον  $H\Theta \times \frac{1}{2}OT$ , τὸ τρί-



γωνον  $\Theta\Theta\Gamma$  ἔχει μέτρον  $\Theta\Gamma \times \frac{1}{2} \cdot \text{ON}$ · ἀλλὰ  $\text{ON} = \text{OT}$ · λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα  $\delta\mu\omicron\upsilon$  ἔχουν μέτρον  $(\text{H}\Theta + \Theta\Gamma) \times \frac{1}{2} \cdot \text{OT}$ · ἐξακολουθοῦντες οὕτω διὰ τὰ ἄλλα τρίγωνα, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἢ τὸ ὅλον πολυγώνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων  $\text{H}\Theta, \Theta\Gamma, \Gamma\text{K}'$ , κ. τ. λ. ἢ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ  $\frac{1}{2} \cdot \text{OT}$ . σχ. 160.

**Σχόλιον.** Ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου  $\text{OT}$  ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν: ἐνόησε καλεῖται ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

### Θεώρημα.

Αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων· αἱ ἐπιφανείων ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἀκτίνων.

Ἐστω  $\text{AB}$  μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐνὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος πολυγώνων,  $\text{O}$  τὸ κέντρον του, καὶ ἐπομένως  $\text{OA}$  ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ  $\text{OA}$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $\text{AB}$ , ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου· ἔστω παρομοίως  $\alpha\beta$  ἡ πλευρὰ ἐνὸς ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου,  $\text{O}$  τὸ κέντρον του,  $\text{o}$  α καὶ  $\text{o}$  αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων περιγεγραμμένου τε καὶ ἐγγεγραμμένου. Αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ  $\text{AB}$  καὶ  $\alpha\beta$ : ἀλλ' αἱ γωνίαι  $\text{A}$  καὶ  $\alpha$  εἶναι ἴσαι διότι ἐκάστη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας  $\text{B}$  καὶ  $\beta$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα  $\text{ABO}$ ,  $\alpha\beta\text{o}$  εἶναι ὅμοια, καθὼς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα  $\text{ADO}$ ,  $\alpha\delta\text{o}$ : ἄρα  $\text{AB}:\alpha\beta::\text{AO}:\alpha\text{o}::\Delta\text{O}:\delta\text{o}$ : ἄρα αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες  $\text{AO}$ ,  $\alpha\text{o}$ , τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες  $\Delta\text{O}$ ,  $\delta\text{o}$  τῶν ἐγγεγραμμένων.

Αἱ ἐπιφανεῖαι τῶν ἰδίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν  $\text{AB}$ ,  $\alpha\beta$ : ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων  $\text{AO}$ ,  $\alpha\text{o}$ , ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων  $\text{OA}$ ,  $\text{o}$  α, ὁδ' ἔπεται ὅτι αἱ ἐπιφανεῖαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων  $\text{AO}$ ,  $\alpha\text{o}$ , ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων  $\text{OA}$ ,  $\text{o}$  α.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

## Α ἡ μ μ α.

Κάθε καμπύλη ἢ πολύγωνος γραμμὴ ἥτις περικυκλοῖ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου τὴν κυρτὴν γραμμὴν  $AMB$  εἶναι μακρύτερα τῆς περικυκλουμένης γραμμῆς  $AMB$ .

Εἶπομεν ἤδη, ὅτι κυρτὴν γραμμὴν ἐννοοῦμεν καμπύλην ἢ πολύγωνον γραμμὴν, ἢ μέρος καμπύλην καὶ μέρος πολύγωνον, τοιαύτην ὥστε εὐθεῖα γραμμὴ νὰ μὴ ἡμπορῇ νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Ἐὰν ἡ γραμμὴ  $AMB$  εἶχε μέρη εἰσέχοντα ἢ ἐσοχάς, δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κυρτὴ, διότι εὐκολον εἶναι νὰ ἰδωμεν ὅτι εὐθεῖα γραμμὴ ἡμπόρει νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Τὰ τόξα τοῦ κύκλου εἶναι οὐσιωδῶς κυρτά· διότι εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἡμπόρει νὰ τέμνῃ τόξον κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα· ἀλλ' ἡ προκειμένη πρότασις ἐκτείνεται εἰς ὅποιανδήποτε γραμμὴν ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην συνθήκην.

Τοῦτου θεέντος, ἐὰν ἡ γραμμὴ  $AMB$  δὲν εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς περικυκλούσας αὐτὴν, πρέπει μεταξὺ τούτων νὰ ὑπάρχῃ γραμμὴ βραχυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων, ἢ ὁποία νὰ ᾖναι μικροτέρα τῆς  $AMB$ , ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν  $AMB$ . Ἐστω  $ΑΓΔΕΒ$  ἡ περικυκλοῦσα αὕτη γραμμὴ· μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν ὅπου θέλομεν ἄς ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν  $ΠΚ$ , ἥτις νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν  $AMB$ , ἢ τοῦλάχιστον νὰ ἄπτεται αὐτῆς· ἡ εὐθεῖα  $ΠΚ$  εἶναι βραχυτέρα τῆς  $ΠΓΔΕΚ$ · ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ τῆς  $ΠΓΔΕΚ$  ἀντικαταστήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν  $ΠΚ$ , θέλομεν ἔχει τὴν περικυκλοῦσαν  $ΑΠΚΒ$  βραχυτέραν τῆς  $ΑΠΔΚΒ$ . Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη πρέπει νὰ ᾖναι βραχυτέρα ἀπὸ ὅλας· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις δὲν ἡμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν ὅλαι αἱ περικυκλοῦσαι γραμμαὶ εἶναι μακρύτεραι τῆς  $AMB$ . σχ. 162.

Σχόλιον. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δεῖξει ὅτι μία κυρτὴ καὶ πανταχόθεν κεκλεισμένη γραμμὴ  $AMB$ , εἶναι βραχυτέρα κάθε γραμμῆς ἥτις ἤθελε τὴν περικυκλοῖ ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, εἴτε ἡ περικυκλοῦσα  $ΖΗΘ$  ἄπτεται τῆς  $AMB$  εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, εἴτε δὲν ἔχει κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν. (1) σχ. 163.

(1) Δὲν πρέπει νὰ θαναμάξῃ τις ἐὰν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀπαντᾷ ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν ἀληθειῶν τὰς ὁποίας οἱ μόνοι τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος ἐστερημένοι ἡμποροῦν νὰ ἀρνηθοῦν. Ὁ Εὐκλείδης ἠναγκάζετο νὰ εὕρισκῃ ἀποδείξεις τῶν τοιούτων ἀληθειῶν διὰ νὰ καταπειθῇ τοὺς πεισματῶδεις ἐκείνους σοφιστάς οἱ ὅποιοι ἐνόμιζον δύξαν τοὺς νὰ ἐναντιώνωνται καὶ εἰς αὐτάς

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

## Α ἡ μ μ α.

Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν, δυνατόν εἶναι πάντοτε νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μικροτέραν, καὶ ὡσαύτως νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μεγαλητέραν· εἰς τρόπον ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις αἱ πλευραὶ τοῦ γεγραμμένου πολυγώνου νὰ περικλείωνται μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἐστῶσαν ΓΑ, ΓΒ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν· εἰς τὴν στιγμήν Α ἄς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ περατουμένη εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε· ἄς ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν περιφέρειαν ἓν ἐκ τῶν κανονικῶν πολυγώνων ὅσα εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγραφθῶσι διὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων· ἀκολουθῶς ἄς τμηθῶσι δὲ ἄρα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν ΔΕ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων· οὕτω θέλει σχηματισθῇ κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἀς συνεχισθῇ ἡ διχοτομὴ τῶν τόξων ἕως οὔ νὰ προκύψῃ πολύγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ὑποτείνῃ τόξον μικρότερον τοῦ ΔΒΕ. Ἐστω ΜΒΝ τὸ τόξον τοῦτο (τοῦ ὁποίου ἡ στιγμή τῆς ἡμισείας ὑποτίθεται εἰς Β)· φανερόν εἶναι ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ θέλει ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου παρὰ ἡ ΔΕ, καὶ οὕτω τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ΜΝ εἶναι ἡ πλευρὰ, δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς. σχ. 164.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΜ, ΓΝ αἵτινες συναπαντοῦν τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ εἰς Π καὶ Κ· ΠΚ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ εἰς τὴν μεγάλην καὶ εἰς τὴν μικρὰν περιφέρειαν ὁμοίου μὲ τὸ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΜΝ. Τώρα φανερόν εἶναι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΠΚ, δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν μεγάλην περιφέρειαν, διότι ΓΠ εἶναι μικρότερα τῆς ΓΜ.

Διὰ τῆς αὐτῆς λοιπὸν κατασκευῆς ἔμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

---

τὰς αὐτοφανεῖς ἀληθείας. Τίς, παραδείγματος χάριν, δὲν εἶναι ἐσωτερικῶς πεπεισμένος ὅτι τὸ περιέχον δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾖ μικρότερον τοῦ περιεχομένου; καὶ μ' ὅλον τοῦτο εἶναι χρεῖα ἀποδείξεως διὰ τοὺς ἀρνούμενους τοιαύτην ἀλήθειαν ἡγοῦν τοὺς στερημένους τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος· ἀγκαλὰ αἱ τοιοῦτου εἶδους ἀλήθειαι μᾶλλον σκοτίζονται ἀπὸ τὰς ἀποδείξεις παρ' ὅ,τε διαταφίζονται. — Ο. Μ.



κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν, καὶ ὅμοιον περιγεγραμμένον εἰς τὴν μικράν πολυγώνου, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν πλευρὰς περιεχομένας μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν.

**Σχόλιον.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο συγκεντρικοὺς τομεῖς  $ZGH, IGΘ$ , ἡμποροῦμεν παρομοίως νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν μεγαλύτερον μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, ἢ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὸν μικρότερον μερίδα ὁμοίου πολυγώνου, εἰς τρόπον ὥστε αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων νὰ περιέχωνται μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν: ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον  $ZBH$  διαδοχικῶς εἰς 2, 4, 8, 16 κ. τ. λ. ἴσα μέρη ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς μέρος μικρότερον τοῦ  $\Delta BE$ .

Ἐνταῦθα καλοῦμεν μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου τὸ περατούμενον σχῆμα ἀπὸ σειρὰν ἴσων χορδῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον  $ZH$  ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου. Ἡ μερίς αὕτη ἔχει τὰς ἀρχικὰς ιδιότητας τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἔχει τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος εἰς τὸν κύκλον. Μ' ὅλον τοῦτο δὲν ἀποτελεῖ μέρος ἑνὸς κυρίως κανονικοῦ πολυγώνου, παρὰ ὅσάκις τὸ ὑποτεινόμενον ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς τόξου εἶναι πηλίκον μέρος τῆς περιφέρειας.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

### Θεώρημα.

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, καὶ αἱ ἐπιφάνειά των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτῖνων.

Ἄς σημειώσωμεν, χάριν συντομίας, διὰ περιφ.  $\Gamma A$  τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα  $\Gamma A$ . λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει περιφ.  $\Gamma A$ : περιφ.  $OB$ ::  $\Gamma A$ :  $OB$ . σχ. 165.

Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἔχει χώραν,  $\Gamma A$  θέλει εἶναι πρὸς  $OB$  ὡς περιφ.  $\Gamma A$  πρὸς τέταρτον τινὰ ὅρον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ περιφ.  $OB$ : ἂς τὸν ὑποθέσωμεν δὲ μικρότερον, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν,  $\Gamma A$ :  $OB$ :: περιφ.  $\Gamma A$ : περιφ.  $OD$ .

Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας  $OB$  εἶναι ἡ ἀκτὶς κανονικὸν πολύγωνον  $EZHK'AE$ , τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας  $OD$  εἶναι ἡ ἀκτὶς (πρό. 10): ἂς ἐγγράψωμεν ὅμοιον  $MNT\Xi M$  εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος  $\Gamma A$ .

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, αἱ περίμετροί των  $MN\Xi M$ ,  $EZHK'E$  εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες  $\Gamma A$ ,  $OB$ , τῶν περιγεγραμμένων κύκλων (πρό. 8), καὶ

οὕτως ΜΝΗΣΜ:ΕΖΗΚ'Ε::ΓΑ:ΟΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΓΑ:ΟΒ:: περιφ. ΓΑ: περιφ. ΟΔ· λοιπὸν ΜΝΗΣΜ:ΕΖΗΚ'Ε:: περιφ. ΓΑ: περιφ. ΟΔ. Τώρα ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι ἡ περίμετρος ΜΝΗΣΜ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΑ (πρὸς, 9), καὶ ἐξ ἐναντίας ΕΖΗΚ'Ε εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περιφ. ΟΔ· ἀδύνατον λοιπὸν ΓΑ νὰ ᾔῃ πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΟΒ, ἢ, μὲ λέξεις γενικωτέρας, ἀδύνατον εἶναι ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα, ὡς ἡ μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα γεγραμμένη περιφέρεια πρὸς τινα περιφέρειαν μικροτέραν παρὰ τὴν μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα γεγραμμένην.

Ἐντεῦθεν συνάγω, ὅτι οὐδὲ εἶναι δυνατόν νὰ ἔχωμεν, ΓΑ πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μεγαλητέραν τῆς περιφ. ΟΒ· διότι τούτου θελόντος, ἠθέλαμεν ἔχει, ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους: ΟΒ πρὸς ΓΑ ὡς περιφέρεια μεγαλητέρα τῆς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφ. ΓΑ, ἢ, ὅπερ ταῦτόν, ὡς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΓΑ· λοιπὸν ἀκτὶς ἠθελεν εἶναι πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα γεγραμμένη περιφέρεια πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα γεγραμμένης περιφερείας, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ΓΑ:ΟΒ:: περιφ. ΓΑ:Χ οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλητέρος ἀπὸ περιφ. ΟΒ ἢ μπορεῖ νὰ ᾔῃ, πρέπει νὰ ἴσῃται μὲ περιφ. ΟΒ· λοιπὸν αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ καὶ κατασκευῆς ἠθέλαμεν δεῖξει ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Δὲν λέγομεν τίποτε περισσότερον ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης, ἥτις ἄλλως εἶναι πόρισμα τῆς ἀκολουθοῦσης.

Πόρισμα. Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνές τῶν ΑΓ, ΔΟ, καὶ οἱ ὅμοιοι τομῆς ΑΓΒ, ΔΟΕ, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ἀκτίνων. σγ. 166.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο (ὁρ. 3. βιβλ. 3)· ἀλλ' ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ (17, 2), καὶ ἡ γωνία Ο εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτίνος ΟΔ· λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν ὁμοίων ἀποτελοῦν μέρος: αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΔΟ, λοιπὸν τόξον ΑΒ: τόξον ΔΕ:: ΑΓ:ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ τομῆς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ὡς οἱ ὅλοι

κύκλοι, οὗτοι δὲ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων λοιπὸν τομ.

ΑΓΒ: τομ. ΔΟΕ:: ΑΓ: ΔΟ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

#### Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του.

Ἄς σημειώσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἐπιφ.  $\Gamma\text{Α} = \frac{1}{2} \Gamma\text{Α} \times$  περιφ. ΓΑ.

Διότι ἐάν  $\frac{1}{2} \Gamma\text{Α} \times$  περιφ. ΓΑ δὲν ᾔηται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς, ἡ ποσότης αὕτη θέλει εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου κύκλου. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ κατὰ πρῶτον ὅτι εἶναι τὸ μέτρον κύκλου μεγαλητέρου, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν,  $\frac{1}{2} \Gamma\text{Α} \times$  περιφ. ΓΑ = ἐπιφ. ΓΒ. σχ. 167.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ ἄς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ κ. τ. λ., αἱ πλευραὶ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΒ (πρό. 10)· ἡ ἐπιφάνειά τούτου τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ. τ. λ., ἐπὶ  $\frac{1}{2}$  ΑΓ (πρό. 7): ἀλλ' ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφέρειας, διότι τὴν περικυκλοῖ πανταχόθεν· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ  $\frac{1}{2} \text{ΑΓ} \times$  περ. ΑΓ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κύκλου τῆς ἀκτίνος ΓΒ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρον τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον ὡς περιεχόμενον· ἀδύνατον λοιπὸν  $\frac{1}{2} \Gamma\text{Α} \times$  περιφ. ΓΑ νὰ ᾔηται μεγαλητέρον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ, ἢ, μὲ ἄλλας λέξεις, ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τινὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του νὰ μετρῇ κύκλον μεγαλητέρον.

Λέγω δευτέρον, ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔηται τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου· καὶ, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξω σχῆμα, ὑποθέτω ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΒ. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι  $\frac{1}{2} \Gamma\text{Β} \times$  περιφ. ΓΒ δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρῇ κύκλον μικρότερον, π. χ. τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ. Τῷ ὄντι, ἔστω εἰ δυνατόν,  $\frac{1}{2} \Gamma\text{Β} \times$  περιφ. ΓΒ = ἐπιφ. ΓΑ.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. θέλει ἔχει μέτρον (ΔΕ + ΕΖ + κ.τ.λ.)  $\times \frac{1}{2} \Gamma\text{Α}$ · ἀλλ' ἡ περίμετρος ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ.τ.λ.



εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΒ ἥτις τὴν περικυκλῶναι πανταχόθεν· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ  $\frac{1}{2}$  ΓΑΧ περιφ. ΓΒ, καὶ πολλὸν περιστότερον ἀπὸ  $\frac{1}{2}$  ΓΒΧ περιφ. ΓΒ. Ἡ τελευταῖα αὕτη ποσότης, ἐξ ὑποθέσεως, μετρεῖ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα ΓΑ, λοιπὸν τὸ πολυγώνον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του, νὰ ᾔηται τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἰδίου τούτου κύκλου.

**Πόρισμα Α'.** Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς τομέως εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τοῦ τομέως τούτου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. σχ. 168.

Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ εἶναι πρὸς τὸν ὅλον κύκλον ὡς τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ΑΒΔ (17, 2) ἢ ὡς ΑΜΒΧ  $\frac{1}{2}$  ΑΓ πρὸς ΑΒΔΧ  $\frac{1}{2}$  ΑΓ. Ἀλλ' ὁ ὅλος κύκλος = ΑΒΔΧ  $\frac{1}{2}$  ΑΓ· λοιπὸν ὁ τομεὺς ΑΓΒ ἔχει μέτρον ΑΜΒ  $\frac{1}{2}$  Χ ΑΓ.

**Πόρισμα Β'.** Ἄς καλέσωμεν π τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς· ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ ὡς αἱ διάμετροι, ἡμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν· ἡ διάμετρος 1 εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειάν της π ὡς ἡ διάμετρος 2ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· εἰς τρόπον ὥστε  $1 : \pi :: 2ΓΑ : \text{περιφ. } ΓΑ$ · λοιπὸν περιφ. ΓΑ =  $2\pi \times ΓΑ$ · πολυπλασιάζοντες δὲ ἀμφοτέρω τὰ μέρη ἐπὶ  $\frac{1}{2}$  ΓΑ,  $\frac{-2}{-2}$

ἔχομεν  $\frac{1}{2} ΓΑ \times \text{περιφ. } ΓΑ = \pi \times ΓΑ$ , ἢ ἐπιφ. ΓΑ = π. ΓΑ. λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνός του ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν π, ὅστις παριστάνει τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 1, ἢ τὸν λόγον τῆς περιφέρειας πρὸς τὴν διάμετρον. σχ. 165.

Παρομοίως ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ  $\frac{-2}{-2}$  θέλει εἶναι ἴση μὲ  $\pi \times ΟΒ$ . Τώρα  $\pi \times ΓΑ : \pi \times ΟΒ :: ΓΑ : ΟΒ$ · λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτῖνων των, τὸ ὅποιον συμφωνεῖ μὲ τὸ προλαβὸν θεώρημα.

**Σχόλιον.** Εἵπομεν ἤδη, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ κύκλον· γνωστῆς ἀκτῖνος. Τώρα ἐδείξαμεν, ὅτι

ὁ κύκλος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτίνος, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τοῦτο μετατρέπεται εἰς τετράγωνον, εἰάν ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο του στάσεων (προβ. 6. βιβλ. 3). Οὕτω τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμού τοῦ κύκλου ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς περιφερείας, ὅταν ἡ ἀκτίς ᾖναι γνωστὴ, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἡ γνώσις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἔως τοῦ νῦν δὲν ἐστάθη δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ ἄλλως ὁ λόγος οὗτος, παρὰ ὡς ἔγγιστα· πλὴν ἡ προσέγγισις τόσον μακρὰν προεκτάθη, ὥστε ἡ γνώσις τοῦ ἀκριβοῦς λόγου δὲν ἤθελεν ἔχει τι πλεόν ἀπὸ τὴν τοῦ ἔγγιστα. Οὕτω τὸ ζήτημα τοῦτο, τὸ ὅποιον τοσοῦτον ἐψηγόλησε τοὺς Γεωμέτρους, ὅταν ὀλίγον ᾔσαν γνωσταὶ αἱ μέθοδοι τῆς προσεγγίσεως, ἐξωρίσθη τώρα καὶ κατετάχθη μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιττῶν ζητημάτων περὶ τὰ ὅποια εἰς ἄλλους δὲν εἶναι συγχωρημένον νὰ ἐνασχολῶνται, παρὰ εἰς τοὺς μάλιστα τὰς πρώτας ἰδέας τῆς Γεωμετρίας ἔχοντας.

Ὁ Ἀρχιμήδης εἰδείξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιέχεται μεταξὺ  $3\frac{1}{7}$  καὶ  $3\frac{1}{71}$ · οὕτω  $3\frac{1}{7}$  ἢ  $\frac{22}{7}$  εἶναι πολλὰ προσεγγίζουσα τιμὴ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὅποιον ἐπαραστήσαμεν διὰ π, καὶ ἡ πρώτη αὕτη προσέγγισις εἶναι κατὰ πολλὰ ἐν χρήσει διὰ τὴν ἀπλότητά της. Ὁ Μέτιος εὔρεε διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, πολὺ πλεόν προσεγγίζουσαν τιμὴν  $\frac{355}{113}$ . Τέλος ἡ τιμὴ τοῦ π, ἀναπτυχθεῖσα μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, εὑρέθη ὑπὸ ἄλλων ὑπολογιστῶν (calculateurs) 3,1415926535897932 κ. τ. λ. καὶ ἔλαβον τὴν ὑπομονὴν νὰ προεκτείνουν τὰ δεκαδικὰ ταῦτα μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ εἰκοστοῦ ἐβδόμου ἢ μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ τεσσαρακοστοῦ. Φανερόν ὅτι τοιαύτη προσέγγισις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἀλήθειαν, καὶ ἄλλως δὲν γνωρίζομεν τὰς ρίζας τῶν ἀτελῶν δυνάμεων.

Εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα θέλομεν ἐξηγήσει δύο ἀπὸ τὰς ἀπλουστεράς στοιχειώδεις μεθόδους διὰ τὴν εὕρεσιν τούτων τῶν προσεγγίσεων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

### Πρόβλημα.

Δεδομένων τῶν ἐπιφανειῶν κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ εὕρεθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένου τε καὶ περιγεγραμμένου τῶν ἐχόντων διπλασίας τὸν ἀριθμὸν πλευράς.

Ἐστω AB μὲν ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου ἐγγεγραμμένου πο-

λυγώνου, ΕΖ δέ, παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, καὶ Γ' τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· εἰν ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΑΜ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἐραπτόμεναι ΑΗ, ΒΚ, ἡ χορδὴ ΑΜ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος διπλασίας τὸν ἀριθμὸν πλευρᾶς, καὶ ΗΚ διπλασίᾳ τῆς ΗΜ θέλει εἶναι ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου πολυγώνου (πρό. 6). Τοῦτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ θέλει ἔχει χώραν εἰς τὰς διαφόρους ἰσας μὲ τὴν ΑΓΜ γωνίας, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὴν γωνίαν ΑΓΜ, καὶ τὰ εἰς αὐτὴν περιεχόμενα τρίγωνα θέλουν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα πολύγωνα. Ἐστω Α ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ, Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, Α' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΜ εἶναι ἡ πλευρὰ, Β' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· Α καὶ Β εἶναι γνωστὰ, καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῶσι Α' καὶ Β'. σγ. 169.

1.<sup>ον</sup> Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΜ τῶν ὁποίων Α εἶναι κοινὴ κορυφή, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΓΔ, ΓΜ· ἄλλως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α καὶ Α', διότι εἶναι ὅμοια μέρη τούτων, καὶ τὰ ὅμοια μέρη δύο ποσοτήτων εἶναι ὡς αὐταὶ αἱ ποσότητες· λοιπὸν Α : Α' :: ΓΔ : ΓΜ. Τὰ τρίγωνα ΓΑΜ, ΓΜΕ, τῶν ὁποίων Μ εἶναι κοινὴ κορυφή, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΓΑ, ΓΕ· τὰ ἴδια τρίγωνα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α καὶ Β διὰ τὸν εἰρημένον λόγον· λοιπὸν Α' : Β :: ΓΑ : ΓΕ. Ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΕ, ἔχομεν ΓΔ : ΓΜ :: ΓΑ : ΓΕ· λοιπὸν Α : Α' :: Α' : Β'· λοιπὸν τὸ πολύγωνα Α' ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ζητούμενων, εἶναι μέσον ἀνάλογον μετὰ τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων Α καὶ Β, καὶ ἐπομένως ἔχομεν  $A' = \sqrt{A \times B}$ .

2.<sup>ον</sup> Ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΓΜ, τὸ τρίγωνον ΓΠΜ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΠΕ ὡς ΗΜ πρὸς ΠΕ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΠ τέμνει διὰ τὴν γωνίαν ΜΓΕ, ἔχομεν (17, 3) ΗΜ : ΠΕ :: ΓΜ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ :: Α : Α'· λοιπὸν ΓΠΜ : ΓΠΕ :: Α : Α', καὶ ἀκολούθως ΓΠΜ : ΓΠΜ + ΓΠΕ, ἢ ΓΜΕ :: Α : Α + Α'. Ἀλλὰ ΓΜΠΑ ἢ 2ΓΠΜ καὶ ΓΜΕ ὡς ὅμοια μέρη τῶν πολυγώνων Β καὶ Β εἶναι ἀναμεταξύ των ὡς τὰ ἴδια πολύγωνα· λοιπὸν Β' : Β :: 2Α : Α + Α'. Ἡδὴ ἐπροσδιορίσθη Α' διὰ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας προσδιορίζεται Β', καὶ ἔχομεν  $B' = \frac{2A \times B}{A + A}$   
λοιπὸν δια μέσου τῶν πολυγώνων Α καὶ Β εὐκολον εἶναι νὰ εὐρεθῶσι τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β' τὰ ὁποῖα ἔχουν διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

## Πρόβλημα.

Νά εὑρεθῇ ὁ ὡς ἔγγισττα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐστω ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου  $= 1$ , ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θέλει εἶναι  $\sqrt{2}$  (πρό. 3), ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἴση μὲ τὴν διάμετρον  $= 2$ . λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου  $= 2$ , καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου  $= 4$ . Τώρα ἐάν κάμωμεν  $A = 2$  καὶ  $B = 4$ , θέλομεν εὑρεῖ δια τοῦ προλαβόντος τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον  $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$ , καὶ τὸ περιγεγραμμένον  $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$ .

Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον, εὐρίσκουμεν διὰ μέσου τούτων τὰ πολύγωνα διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν· πρέπει ἐκ νέου νὰ ὑποθέσωμεν  $A = 2,8284271$ ,  $B = 3,3137085$ , καὶ θέλομεν ἔχει  $A' = \sqrt{A \times B} = 3,0614674$ , καὶ  $B' = \frac{2A \times B}{A + B} = 3,1825979$ . Ἀκολουθῶς διὰ τῶν πολυγώνων τούτων προσδιορίζομεν τὰ 32 πλευρῶν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ μὴ ὑπάρχῃ πλέον διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦλάχιστον εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκαδικῶν εἰς τὴν ὁποίαν μένομεν, καὶ ἥτις εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι ἡ ἐβδόμη. Φθάσαντες εἰς ταύτην τὴν στιγμήν λέγομεν οὕτως: ὁ κύκλος πάντοτε περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου· ἐάν λοιπὸν ταῦτα δὲν διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων μέχρι τάξεως τινος δεκαδικῶν, ὁ κύκλος βέβαια δὲν θέλει διαφέρει ἀπὸ ταῦτα μέχρι τῆς ἰδίας τάξεως. Οὕτως ἤμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ἴδου ὁ ὑπολογισμὸς τούτων τῶν πολυγώνων προεκτανθεὶς ἕως οὗ νὰ μὴ διαφέρουν πλέον κατὰ τὰ ἐπτά πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

| Ἀριθμὸς τῶν<br>πλευρῶν. | Ἐγγεγραμμένον<br>πολύγωνον. | Περιγεγραμμένον<br>πολύγωνον. |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 4 . . .                 | 2,0000000 . . .             | 4,0000000                     |
| 8 . . .                 | 2,8284271 . . .             | 3,3137085                     |
| 16 . . .                | 3,0614674 . . .             | 3,1825979                     |
| 32 . . .                | 3,3214451 . . .             | 3,1517249                     |
| 64 . . .                | 3,1365485 . . .             | 3,1441184                     |
| 128 . . .               | 3,1403311 . . .             | 3,1422236                     |
| 256 . . .               | 3,1412772 . . .             | 3,1417504                     |
| 512 . . .               | 3,1415138 . . .             | 3,1416321                     |

|             |                 |           |
|-------------|-----------------|-----------|
| 1024 . . .  | 8,1415729 . . . | 8,1416025 |
| 2048 . . .  | 3,1415877 . . . | 3,1415951 |
| 4096 . . .  | 3,1415914 . . . | 3,1415933 |
| 8192 . . .  | 3,1415923 . . . | 3,1415928 |
| 16384 . . . | 3,1415925 . . . | 3,1415927 |
| 32768 . . . | 3,1415926 . . . | 3,1415926 |

Ἐντεῦθεν συνάγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι  $\equiv 3, 141-5926$ . Δυνατὸν νὰ ἀμφιβάλλῃ τις διὰ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ἐξ αἰτίας τῶν σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὰ παρα-βλεσθέντα μέρη· πλὴν ὁ ὑπολογισμὸς ἐγένε με ἐν δεκαδικὸν πε-ρισσότερον, διὰ νὰ ἤμεθα βέβαιοι διὰ τὸ ἐξαχρόμενον τὸ ὁποῖον εὐ-ρήκαμεν μέχρι τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μετὴν ἡμιπεριφέρειαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, οὗσης τῆς ἀκτῖνος 1, ἡ ἡμι-περιφέρεια εἶναι 3,1415926 ἢ τῆς διαμέτρου οὗσης 1, ἡ περι-φέρεια εἶναι 3,1415926· λοιπὸν ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἀνωτέρω σημειωθείς διὰ π εἶναι  $\equiv 3,1413926$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Α ἡ μ. μ. α.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (σχ. 170) ἰσοδυναμεῖ μετὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Γ, καὶ τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρὰ ΓΕ ἴση τῇ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ. Περιπλέον, ἐὰν ἡ γωνία ΓΑΒ ᾖ ὀρθή, ἡ φερομένη κάθετος ΓΖ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἐξ αἰτίας τῆς κοινῆς γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι  $\frac{-2}{-2}$  πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ ὡς  $ΑΓ \times ΓΒ$  πρὸς  $ΔΓ \times ΓΕ$  ἢ  $ΔΓ$  (24, 3)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν  $\frac{-2}{-2}$

$ΔΓ = ΑΓ \times ΓΒ$ , ἢ ἐὰν ΔΓ ᾖ μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΓ, ΓΒ.

2.<sup>ον</sup> Ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΓΗΖ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γω-νίαν ΑΓΒ, ἔχομεν (17, 3) ΑΗ : ΗΒ :: ΑΓ : ΓΒ, ὅθεν ἐπεταί, ἐν συνθέσει, ΑΗ : ΑΗ + ΗΒ ἢ ΑΒ :: ΑΓ : ΑΓ + ΓΒ· ἀλλὰ ΑΗ εἶναι πρὸς ΑΒ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἢ 2 ΓΔΖ· ἄλλως, ἐὰν ἡ γωνία Α ᾖ ὀρθή, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΔΖ, θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δῶτε: ΑΓΗ : ΓΔΖ ::  $\frac{-2}{-2}$

ΑΓ ΓΖ· λοιπὸν,

$$\overset{-2}{\text{ΑΓ}} : \overset{-2}{2\Gamma\text{Ζ}} :: \overset{-2}{\text{ΑΓ}} : \overset{-2}{\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ}}.$$

Εάν δὲ πολυπλασιασθῇ ὁ δεύτερος λόγος ἐπὶ ΑΓ, οἱ ἡγούμενοι ἀποβαίνουν ἴσοι, καὶ ἐπομένως  $2\Gamma\text{Ζ} = \text{ΑΓ} \times (\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ})$ , ἢ  $\Gamma\text{Ζ} = \text{ΑΓ} \times \frac{(\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ})}{2}$ . λοιπὸν 2<sup>ον</sup> εἴαν ἡ γωνία Α ᾖναι ὀρθή, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΓ, καὶ ΓΒ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

#### Π ρ ό β λ η μ α.

Νά εὕρωμεν κύκλον διαφέροντα ὅσον θέλωμεν κανονικοῦ δεδομένου πολυγώνου.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον ΒΜΝΗ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ᾧς κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΓΑ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΜΒ, καὶ ᾧς ἐνώσωμεν ΓΒ. σχ. 171.

Ὁ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ περιγεγραμμένος εἰς τὸ ἴδιον· ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλύτερος· ἀλλὰ πρόκειται νὰ πλησιάζωμεν ταῦτα τὰ ὅρια.

Ἀς λάβωμεν ἐκάστην τῶν ΓΔ, ΓΕ ἴσην μὲ τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ᾧς ἐνώσωμεν ΕΔ· τὸ ἴσοσκελὲς τρίγωνον ΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (πρό. 15)· ᾧς κάμωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἐκάστην τῶν ὀκτὼ γωνιῶν τοῦ τετραγώνου, θέλωμεν σχηματίσει οὕτω κανονικὸν ὀκτάγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΒΜΝΗ. Ὁ γραφόμενος κύκλος μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ, μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ  $\frac{\Gamma\text{Α} + \Gamma\text{Β}}{2}$ , εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὀκτάγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΔ περιγεγραμμένος· οὕτως ὁ πρῶτος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλύτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα μεταξὺ τῶν παρ' ὅτι ἦσαν τὰ δύο πρῶτα· διότι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν ἧτις εἶναι δι' ὅλα τῶν τὰ σημεῖα ἡ αὐτή, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν πρῶτων.

Εἴαν τρέψωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΖ εἰς ἰσοδύναμον ἴσοσκελές, θέλωμεν σχηματίσει κανονικὸν πολύγωνον δεκαεξ πλευρῶν, ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τοῦτο τὸ πολύγωνον εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δὲ περιγεγραμμένος μεγαλύτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα παρὰ τὰ πρῶτα. Ἡμ-



προσῶμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἕως οὗ ὁ λόγος μεταξὺ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ διαφέρει ὅσον θέλομεν ἀπὸ τὸν τῆς ἰσότητος. Τότε οἱ δύο κύκλοι ἡμικορῶν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἰσοδύναμοι μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον.

Σχόλιον. Ἰδοὺ εἰς τί ἄγεται ἡ ζήτησις τῶν διαδοχικῶν ἀκτίνων· ἔστω α ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ἓν τῶν εὐρεθέντων πολυγώνων, β ἡ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἴδιον πολύγωνον· ἔστωσαν α καὶ β αἱ ὁμοίαι ἀκτῖνες διὰ τὸ ἀκόλουθον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, β εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, καὶ α μεταξὺ α καὶ  $\frac{\alpha+\beta}{2}$ · εἰς τρόπον ὥστε  $\beta = \sqrt{(\alpha \times \beta)}$ , καὶ  $\alpha = \sqrt{(\alpha \times \frac{\alpha+\beta}{2})}$ · εἰς λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες α καὶ β ἐνὸς πολυ γώνου ἦναι

γνώσται, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἀκολουθοῦ· καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀκτίνων νὰ γένη ἀναιπισίσητος. Τότε ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη τούτων τῶν ἀκτίνων θέλει εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ ἰσοδύναμου κύκλου μὲ τὸ τετράγωνον ἢ μὲ τὸ προτεθὲν πολύγωνον.

Ἡ μέθοδος αὕτη εὐκόλον εἶναι νὰ βαλθῇ εἰς πρᾶξιν διὰ γραμμῶν, διότι ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν μέσων διαδοχικῶν ἀναλόγων μεταξὺ γνωστῶν γραμμῶν· ἀλλ' ἡ ἐφαρμογὴ τῆς εἰς ἀριθμοὺς ἀποδίνει ἐπιτυχτέρα, καὶ χορηγεῖ μίαν τῶν ἐπιτηδαιοτέρων ἀπὸ ὅσας ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία δύναται νὰ δώσῃ μεθόδων πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὡς ἔγγιστα λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον: Ἐστω ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου = 2, ἡ πρώτη ἐγγεγραμμένη ἀκτίς ΓΑ θέλει εἶναι 1, καὶ ἡ πρώτη περιγεγραμμένη ΓΒ,  $\sqrt{2}$  ἢ 1, 4142136. Κάμνοντες λοιπὸν  $\alpha = 1, \beta = 1, 4142136$ , εὐρίσκομεν  $\beta' = 1, 1892071$ , καὶ  $\alpha = 1, 0986841$ . Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκολουθῶν κατὰ τὸν τῆς συνεχείας νόμον.

Ἰδοὺ τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου μέχρι ἐπτα ἢ ὀκτὼ ψηφίων διὰ τῶν κρινῶν λογαρίθμων.

Ακτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.

Ακτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.

|           |   |   |   |   |   |            |
|-----------|---|---|---|---|---|------------|
| 1,4142136 | . | . | . | . | . | 1,0000000. |
| 1,8992071 | . | . | . | . | . | 1,0986841. |
| 1,1430500 | . | . | . | . | . | 1,1210863. |
| 1,1320149 | . | . | . | . | . | 1,1265639. |

|                     |            |
|---------------------|------------|
| 1,1292862 . . . . . | 1,1279257. |
| 1,1286063 . . . . . | 1,1282657. |

Ἦδη δ' ὅτι τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἡμποροῦμεν ἀντὶ τῶν μέσων γεωμετρικῶν νὰ λάβωμεν τοὺς μέσους ἀριθμητικούς, οἵτινες δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς γεωμετρικούς παρὰ εἰς τὰ ὕστερα δεκαδικά. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἐργασία ἐπιτέμενεται πολὺ, καὶ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι

|                     |            |
|---------------------|------------|
| 1,1284360 . . . . . | 1,1283508. |
| 1,1283934 . . . . . | 1,1283721. |
| 1,1283827 . . . . . | 1,1283774. |
| 1,1283801 . . . . . | 1,1283787. |
| 1,1283794 . . . . . | 1,1283791. |
| 1,1283792 . . . . . | 1,1283792. |

Λοιπὸν 1,1283792 εἶναι περίπου ἡ ἀκτὶς τοῦ ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον κύκλου τοῦ ὁποίου τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2. Ἐντεῦθεν εὐχολον εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτὸς τοῦ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π· ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 4 διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283792, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ π, τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν διὰ τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ ἴσην μὲ 3,1415926 κ.τ.λ., ὡς τὴν εὕρομεν δι' ἄλλης μεθόδου.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Δ'.

### B I B Λ I O N.

#### Ὅρισμοί.

Α'. Καλεῖται μέγιστον (maximum) ἡ μεγαλύτερα ποσότης ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τοῦ ἰδίου εἶδους· ἐλάχιστον (minimum) ἡ μικροτέρα.

Οὕτως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέγιστόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν αἵτινες ἐνόνουν δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ κάθετος εἶναι ἐλάχιστόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀπὸ δεδομένου σημεῖον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν φερομένων εὐθειῶν.

Β'. Καλούνται σχήματα ἴσο περιμέτρα τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

#### Θεώρημα.

Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, τὸ μέγιστον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο ἀ-προσδιόρισται πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐστω  $ΑΓ=ΓΒ$ , καὶ  $ΑΜ+ΜΒ=ΑΓ+ΓΒ$ · λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $ΑΓΒ$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου  $ΑΜΒ$  τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον. σχ. 172.

Ἐκ τῆς στιγμῆς  $Γ$ , ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα  $ΓΑ=ΓΒ$ , ἃς γραφθῇ περιφέρεια συναπαντῶσα τὴν  $ΓΑ$  προεκβαλλομένην εἰς  $Δ$ · ἃς ἐπιζευχθῇ  $ΑΒ$ · ἡ γωνία  $ΔΒΑ$ , ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ θέλει εἶναι ὀρθή (15, 2). Ἄς προεκβληθῇ ἡ κά-θετος  $ΔΒ$  πρὸς τὸ  $N$ , ἃς γένη  $ΜΝ=ΜΒ$ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ  $ΑΝ$ . Τέλος ἐκ τῶν στιγμῶν  $Μ$  καὶ  $Γ$  ἃς καταβασθῶσιν αἱ κά-θετοι  $ΜΠ$  καὶ  $ΓΗ$  ἐπὶ τῆς  $ΔΝ$ . Ἐπειδὴ  $ΓΒ=ΓΔ$  καὶ  $ΜΝ=ΜΒ$ , ἔχομεν  $ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ$ , καὶ  $ΑΜ+ΜΒ=ΑΜ+ΜΝ$ . Ἀλλὰ  $ΑΓ+ΓΒ=ΑΜ+ΜΒ$ · λοιπὸν  $ΑΔ=ΑΜ+ΜΝ$ · λοιπὸν  $ΑΔ>ΑΝ$ . Τώρα ἐπειδὴ ἡ πλαγία  $ΑΔ$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλαγίας  $ΑΝ$ , πρέπει νὰ ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου περισσότερον· λοιπὸν  $ΔΒ>ΒΝ$ · ἄρα  $ΒΗ$ , ἡμίσεια τῆς  $ΒΔ$  (12,1) εἶναι μεγα-λητέρα τῆς  $ΒΠ$  ἡμισείας τῆς  $ΒΝ$ . Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΒΜ$ , τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν  $ΑΒ$ , εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των  $ΒΗ$ ,  $ΒΠ$ · λοιπὸν, ἐπειδὴ  $ΒΗ>ΒΠ$ , τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $ΑΒΓ$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς  $ΑΜΒ$  τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

#### Θεώρημα.

Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μέγιστον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας.

Διότι· ἔστω  $ΑΒΓΔΕΖ$  τὸ μέγιστον πολύγωνον· ἐὰν ἡ πλευρὰ  $ΒΓ$  δὲν ᾖ ἴση τῇ  $ΓΔ$ , ἃς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως  $ΒΔ$  τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ  $ΒΟΔ$  ἰσοπερίμετρον μὲ τὸ  $ΒΓΔ$ · τὸ τρίγω-νον  $ΒΟΔ$  θέλει εἶναι μείζον τοῦ  $ΒΓΔ$  (πρό. 1), καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον  $ΑΒΟΔΕΖ$  μείζον τοῦ  $ΑΒΓΔΕΖ$ · λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ μέγιστον ἀπὸ ὅσα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναν-τίον τῆς ὑποθέσεως. Πρέπει λοιπὸν  $ΒΓ=ΓΔ$ · διὰ τὸν αὐτὸν λό-



γον  $\Gamma\Delta = \Delta\Xi$ ,  $\Delta\Xi = \Xi\Z$  κ.τ.λ. λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. σχ. 173.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

#### Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ποιούσας μεταξύ των γωνίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον εἶναι εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ ἀποτελοῦν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἐστώσαν τὰ δύο τρίγωνα  $\text{ΒΑΓ}$ ,  $\text{ΒΑΔ}$ , τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν  $\text{ΑΒ}$  κοινὴν, καὶ τὴν  $\text{ΑΓ} = \text{ΑΔ}$ · ἐάν ἡ γωνία  $\text{ΒΑΓ}$  ᾖ ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον  $\text{ΒΑΓ}$  θέλει εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $\text{ΒΑΔ}$  εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἐν  $\text{Α}$  γωνεὶα εἶναι ὀξεὶα ἢ ἀμβλεία. σχ. 174.

Διότι ἐπειδὴ ἡ βάσις  $\text{ΑΒ}$  εἶναι ἡ αὐτὴ, τὰ δύο τρίγωνα  $\text{ΒΑΓ}$ ,  $\text{ΒΑΔ}$ , εἶναι ὡς τὰ ὑψη  $\text{ΑΓ}$ ,  $\Delta\Xi$ : ἀλλ' ἡ κάθετος  $\Delta\Xi$  εἶναι βραχυτέρα τῆς πλαγίας  $\text{ΑΔ}$  ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $\text{ΑΓ}$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\text{ΒΑΔ}$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $\text{ΒΑΓ}$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

#### Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον πρέπει νὰ ᾖ τοιοῦτον ὥστε ὅλαι τοὺς αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφονται εἰς ἡμιπερίφερειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀγνωστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος.

Ἐστω  $\text{ΑΒΓΔΕΖ}$  τὸ μεγαλύτερον τῶν σχηματιζομένων πολυγώνων μὲ τὰς δεδομένας πλευρὰς  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΒΓ}$ ,  $\text{ΓΔ}$ ,  $\text{ΕΖ}$ , καὶ μίαν τελευταίαν  $\text{ΑΖ}$  κατ' ἀρέσκειαν ὅς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι  $\text{ΑΔ}$ ,  $\Delta\Xi$ . Ἐάν ἡ γωνία  $\text{ΑΔΖ}$  δὲν ᾖ ὀρθή, ἡμπορούσαμεν, φυλάττοντες τὰ μέρη  $\text{ΑΒΓΔ}$ ,  $\Delta\Xi\text{Ζ}$  ὡς ὑπάρχουν, νὰ αὐξήσωμεν τὸ τρίγωνον  $\text{ΑΔΖ}$ , καὶ ἐπομένως τὸ ὅλον πολύγωνον, ἀποκαθιστῶντες τὴν γωνίαν  $\text{ΑΔΖ}$  ὀρθήν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν· ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δὲν ἡμπορεῖ πλέον νὰ αὐξηθῇ, διότι ὑποτίθεται ὅτι ἔρθηκεν εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν· λοιπὸν ἡ γωνία  $\text{ΑΔΖ}$  εἶναι ἤδη ὀρθή. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας  $\text{ΑΒΖ}$ ,  $\text{ΑΓΖ}$ ,  $\text{ΑΕΖ}$ · λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι  $\text{Α}$ ,  $\text{Β}$ ,  $\text{Γ}$ ,  $\Delta$ ,  $\text{Ε}$ ,  $\text{Ζ}$  τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπερίφερειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ  $\text{ΑΖ}$  εἶναι ἡ διάμετρος. σχ. 175.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δίδει χώραν εἰς τι ζήτημα· τοιούστιν ἐάν ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι τοῦ σχηματίζειν πολύγωνον μὲ δεδομένας πλευρὰς, καὶ μίαν τελευταίαν ἀγνωστον, ἥτις νὰ ᾖ ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι: δηλαδὴ ἐάν ᾖ δυνατὸν ἀφ' οὗ

εὐρεθῇ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχει τὴν ιδιότητα, ὥστε ὅλαι τοῦ αἰ γωνίαι νὰ ἐγγράφονται εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος, ἐάν, λέγω, τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἄλλην περιφέρειαν διαφορετικὴν· διότι ἐάν τοῦτο ᾖναι δυνατόν, τότε ἤθελον ὑπάρχει ἄπειρα πολύγωνα ἔχοντα τὴν ἀπαιτουμένην ιδιότητα τοῦ μεγίστου, καὶ ἐπομένως πολλὰ μέγιστα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀδύνατον. Πρὶν νὰ εἰπωμέν τι ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, πρέπει νὰ πᾶρατηρήσωμεν ὅτι, ἐάν μία καὶ ἡ αὐτὴ χορδὴ ὑποταίη τῷ τόξῳ γεγραμμένα μετὰ διαφοροὺς ἀκτῖνας ΑΓ, ΑΔ, ἢ εἰς τὸ κέντρον γωνία ἐπιστηρίζομένη ἐπὶ ταύτης τῆς χορδῆς θέλει εἶναι μικρότερα εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ἡ μεγαλύτερα· οὕτως  $ΑΓΒ < ΑΔΒ$ . Τῷ ὄντι ἡ γωνία  $ΑΔΟ = ΑΓΔ + ΓΑΔ$  (27, 2)· λοιπὸν  $ΑΓΔ < ΑΔΟ$ , καὶ διπλασιάζοντες ἀμρότερα τὰ μέρη θέλομεν ἔχει  $ΑΓΒ < ΒΔΒ$ . σγ. 176.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

### Θεώρημα.

Εἰς μόνος τρόπος ὑπάρχει τοῦ σχηματίζειν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ-ΕΖ μετὰ δεδομένης πλευρᾶς καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωστον, ἥτις νὰ ᾖναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφέρειας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμένα.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εὐρήκαμεν κύκλον πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· ἐάν λάβωμεν μεγαλύτερον, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον μικρότερας. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν εἰς τὸ κέντρον τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς. Οὕτω τὰ ἄκρα τῶν δεδομένων πλευρῶν, δὲν φθάνουν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου· ἐάν δὲ λάβωμεν κύκλον μικρότερον, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὸ κέντρον γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν, καὶ οὕτως πλέον αἱ δεδομένα πλευραὶ ἤθελεν τελειώνει ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου· ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον εἰς ἓνα μόνον κύκλον ἡμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ. σγ. 175.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἀλλάζωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν τάξιν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. καὶ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ, καθὼς καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου· διότι ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ τάξις τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ., ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀποτελῇ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ τὸ πολύγωνον θέλει ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, διότι θέλει ἴσοῦται μετὰ τὸ ἡμικύκλιον μεῖον τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

## Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευράς, τὸ μέγιστον εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Ἐστω  $ΑΒΓΔΕΖΗ$  τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἀβγδεζη τὸ μὴ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ σχηματισμένον μὲ ἴσας πλευράς, εἰς τρόπον ὥστε  $ΑΒ = αβ$ ,  $ΒΓ = βγ$ , κ.τ.λ. λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου· ἃς φερθῇ ἡ διάμετρος  $ΕΜ$ , ἃς ἐπιζευχθῶσι  $ΑΜ$ ,  $ΜΒ$ · ἐπὶ τῆς  $αβ = ΑΒ$ , ἃς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον  $αβγ$  ἴσον μὲ τὸ  $ΑΒΜ$ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἐμ. σχ. 177.

Δυνάμει τῆς Δ' προτάσεως, τὸ πολύγωνον  $ΕΖΗΑΜ$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $εζηαμ$ , ἐκτὸς ἐὰν τὸ πολύγωνον τοῦτο ἤμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμιπεριφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ἐμ. ἤθελεν εἶναι ἡ διάμετρος· πλὴν ἐπειδὴ, τούτου δοθέντος, ἡ ἡμιπεριφέρεια αὕτη δὲν ἤμπορεῖ οὔτε ἐλάσσων οὔτε μείζων νὰ ᾖ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας  $ΕΜ$  εἶναι ἡ διάμετρος κατὰ τὴν Ε' πρότασιν, μένει νὰ ᾖ αἰ ἴση· ἀλλὰ τότε τὰ δύο πολύγωνα ἤθελον εἶναι ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ πολύγωνον  $ΕΔΓΒΜ$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $εδγβμ$ . Ἐξαιρουμένης τῆς περιστάσεως καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ ὅλον πολύγωνον  $ΕΖΗΑΜΒΓΔΕ$  εἶναι μείζον τοῦ  $εζηαμβγδ$ , ἐκτὸς ἐὰν ᾖ αἰ ἴσα· ἀλλὰ δὲν εἶναι· διότι τὸ ἐν ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ τὸ ἄλλο ὑποτίθεται μὴ ἐγγράψιμον· λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον εἶναι τὸ μεγαλύτερον. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα τρίγωνα  $ΑΒΜ$ ,  $αβμ$ , μένει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον  $ΑΒΓΔΕΖΗ$  μεγαλύτερον τοῦ μὴ ἐγγραψίμου  $αβγδεζη$ .

Σχόλιον. Καθὼς εἰς τὴν Ε' πρότασιν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι δὲν ἤμπορεῖ νὰ ὑπάρχη παρὰ εἰς μόνος κύκλος, καὶ ἐπομένως ἐν μόνον μέγιστον πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα, καὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, καθ' ὅποιον τρόπον καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν πλευρῶν

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

## Θεώρημα.

Τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι μέγιστον μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Διότι, κατὰ τὸ δευτερον θεώρημα, τὸ μέγιστον πολύγωνον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς ἴσας· καὶ, κατὰ τὸ προλαβόν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

## Λήμμα.

Δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον μετρούμεναι εἰς διαφορετικοὺς κύκλους εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ περιεχόμενα τόξα διαιρούμενα διὰ τῶν ἀκτίνων.

Οὕτως ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τὴν γωνίαν Ο ὡς ὁ λόγος  $\frac{AB}{AG}$  πρὸς τὸν λόγον  $\frac{\Delta E}{\Delta O}$ . σχ. 178.

Μὲ ἀκτῖνα ΟΖ ἴσην τῇ ΑΓ ἃς γραφθῇ τὸ τόξον ΖΗ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΟΔ, ΟΕ προεκβαλλομένων ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων ἀκτίνων ΑΓ, ΟΖ, θέλομεν ἔχει κατὰ πρῶτον Γ:Ο:: ΑΒ:ΖΗ (πρ. 17, 2) ἢ::  $\frac{AB}{AG} : \frac{ZH}{ZO}$  ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τόξων ΖΗ, ΔΕ, ΖΗ:ΔΕ:: ΖΟ:ΔΟ (πρό. 11)· λοιπὸν ὁ λόγος  $\frac{ZH}{ZO}$  εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον  $\frac{\Delta E}{\Delta O}$ , καὶ ἐπομένως Γ:Ο:: ΑΒ:  $\frac{\Delta E}{\Delta O}$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

## Θεώρημα.

Ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

Ἐστω ΔΕ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἐνὸς τῶν πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, ΟΕ τὸ ἀπόστημά του· ἔστω ΑΒ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἄλλου πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του, ΓΒ τὸ ἀπόστημά του. Ὑποθέτομεν τὰ κέντρα Ο καὶ Γ ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ὅποιονδῆποτε διάστημα ΟΓ, καὶ τὰ ἀποστήματα ΟΕ, ΓΒ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΓ: οὕτως ΔΟΕ καὶ ΑΓΒ θέλουν εἶναι αἱ εἰς τὸ κέντρον ἡμιγωνίαι τῶν πολυγώνων, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, αἱ γραμμαὶ ΓΑ, ΟΔ προεκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς στιγμὴν τινὰ Ζ· ἐκ ταύτης ἃς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΟΓ ἡ κάθετος ΖΗ· ἐκ τῶν στιγμῶν Ο καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, ἃς γραφθῶσι τὰ τόξα ΗΙ, ΗΘ περατούμενα εἰς τὰς πλευράς ΟΖ, ΓΖ· σχ. 179.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν κατὰ τὸ προλαβόν λήμμα Ο:Γ::  $\frac{HI}{OH} : \frac{HO}{GH}$ · ἀλλὰ ΔΕ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου πολυγώνου ὡς ἡ γωνία Ο εἰς τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου ὡς ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, ΔΕ: ΑΒ:: Ο:Γ, ἢ ΔΕ: ΑΒ::  $\frac{HI}{OH} : \frac{HO}{GH}$ · πολυπλασιάζοντες τοὺς ἡγουμένους ἐπὶ ΟΗ καὶ τοὺς ἐπομένους ἐπὶ ΓΗ, θέλομεν ἔχει ΔΕ×ΟΗ: ΑΒ×ΓΗ:: ΗΙ: ΗΘ. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΕ, ΟΖΗ, δίδουν ΟΕ:ΟΗ:: ΔΕ:ΖΗ, ὅθεν ἔπεται ΔΕ×

$OH = OE \times ZH$ . θέλομεν ἔχει παρομοίως  $AB \times \Gamma H = \Gamma B \times ZH$ . λοιπὸν  $OE \times ZH : \Gamma B \times ZH :: HI : H\Theta$ , ἢ  $OE : \Gamma B :: HI : H\Theta$ . Ἐὰν λοιπὸν δείξωμεν ὅτι τὸ τόξον  $HI$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου  $H\Theta$ , θέλει ἀκολουθήσει ὅτι τὸ ἀπόστημα  $OE$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ  $\Gamma B$ .

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς  $\Gamma Z$  ἂς γένη τὸ σχῆμα  $\Gamma K \chi$  ἴσον μὲ τὸ σχῆμα  $\Gamma H \chi$ , εἰς τρόπον ὥστε  $\Gamma K = \Gamma H$ , ἡ γωνία  $\Theta \Gamma K' = \Theta \Gamma H$ , καὶ τὸ τόξον  $K' \chi = \chi H$ . ἡ καμπύλη  $K' \chi H$  περικυκλοῖ τὸ τόξον  $K' \Theta H$ , καὶ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ αὐτὸ (πρό. 9). ἄρα  $H \chi$  ἡμίσεια τῆς καμπύλης, εἶναι μεγαλύτερα τοῦ  $H\Theta$  ἡμίσεως τοῦ τόξου. λοιπὸν, πολὺ περισσότερον,  $HI$  εἶναι μείζον τοῦ  $H\Theta$ .

Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι τὸ ἀπόστημα  $OE$  εἶναι μείζον τοῦ  $\Gamma B$ . ἀλλὰ τὰ δύο πολύγωνα ὡς ἰσοπερίμετρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀποστήματά των (πρό. 7). λοιπὸν τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἡμιπλευράν  $\Delta E$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἔχοντος ἡμιπλευράν  $AB$ . τὸ πρῶτον ἔχει περισσοτέρας πλευράς, διότι ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία του εἶναι μικρότερα. ἄρα ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον περισσοτέρας πλευράς εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

#### Θεώρημα.

Ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἰσοπερίμετρον πολύγωνον.

Ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλύτερον οὕτως ἄλλο δὲν πρόκειται παρὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸν κύκλον μὲ ὁποιοδήποτε κανονικὸν ἰσοπερίμετρον πολύγωνον. Ἐστω  $AI$  ἡ ἡμιπλευρὰ τούτου τοῦ πολυγώνου,  $\Gamma$  τὸ κέντρον του. Ἐστω εἰς τὸν ἰσοπερίμετρον κύκλον ἡ γωνία  $\Delta OE = A\Gamma I$ , καὶ ἐπομένως τὸ τόξον  $\Delta E$  ἴσον μὲ τὴν ἡμιπλευράν  $AI$ . Τὸ πολύγωνον  $\Pi$  εἶναι πρὸς τὸν κύκλον  $K$  ὡς τὸ τρίγωνον  $A\Gamma I$  πρὸς τὸν τομέα  $O\Delta E$ . οὕτως ἔχομεν  $\Pi : K :: \frac{1}{2} AI \times \Gamma I : \frac{1}{2} \Delta E \times OE :: \Gamma I : OE$ . Ἀς ἀχθῇ εἰς τὴν στιγμήν  $E$  ἡ ἐφαπτομένη  $EH$  ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς  $O\Delta$  εἰς  $H$ . Τὰ ὅμοια τρίγωνα  $A\Gamma I$ ,  $HOE$ , εἰδουν τὴν ἀναλογίαν,  $\Gamma I : OE :: AI : HE$ . λοιπὸν  $\Pi : K :: \Delta E : HE$ . ἢ ὡς  $\Delta E \times \frac{1}{2} OE$  μέτρον τοῦ τομέως  $\Delta OE$  πρὸς  $HE \times \frac{1}{2} OE$  μέτρον τοῦ τριγώνου  $HOE$ . ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου. λοιπὸν  $\Pi$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $K$ , ἄρα ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε πολύγωνον ἰσοπερίμετρον. σχ. 180.

## ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ

## Γ Ω Ν Ι Α Ι.

## Ὅρισμοί.

Α'. Εὐθεΐα γραμμὴ εἶναι κάθετος ἐν ἐπιπέδῳ ὅταν ᾗναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της εἰς τὸ ἐπίπεδον (πρό. 4). Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν.

Ὁ ποῦς τῆς καθέτου εἶναι ἡ στιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς της μὲ τὸ ἐπίπεδον.

Β. Εὐθεΐα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδου ὅταν δὲν ἔμπορῇ νὰ τὸ συναπαντήσῃ ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς.

Γ'. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξύ των, ὅταν δὲν ἔμπορουν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

Δ. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 3) ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὅποια συναπαντῶνται εἶναι εὐθεΐα γραμμὴ: τούτου τεθέντος, ἡ γωνία ἢ ἡ ἀμμοβαία κλίσις δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ ποσότης μᾶλλον ἢ ἥττον μεγάλη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπέχουσι ἀπ' ἀλλήλων ἢ ποσότης αὕτη μετρεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο κάθετοι ἡγμένα εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς (βλέ. πρό. 7).

Ἡ γωνία αὕτη ἔμπορεῖ νὰ ᾗναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα.

Ε'. Εἰναι ᾗναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἐν εἰς τὸ ἄλλο.

ΣΤ'. Γωνία στερεά εἶναι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα πολλῶν γωνιῶν αἱ ὅποια ἐνοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν.

Οὕτως ἡ στερεὰ γωνία Σ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἔνωσιν τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΒ, ΔΣΑ. σχ. 199.

Τούλαχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

## Θεώρημα.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ μέρος ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι, κατὰ τὸν ὅρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου, ἅμα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ ἐπίπεδόν τι, εὐρίσκεται ὅλη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Σχόλιον. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν ἐπιφανεία τις ᾖναι ἐπίπεδος, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς διάφορα μέρη αὐτῆς καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἄπτεται τῆς ἐπιφανείας καθ' ὅλην τῆς τὴν ἔκτασιν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

## Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζουν τὴν θέσιν του.

Ἐστωσαν  $AB, AG$ , δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εἰς  $A$ : ἡμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εὐρίσκηται ἡ εὐθεῖα  $AB$ : ἐὰν ἀκολουθῶς στρέψωμεν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ὁλόγυρα τῆς  $AB$ , ἕως οὗ νὰ διέλθῃ διὰ τῆς στιγμῆς  $G$ , τότε ἡ γραμμὴ  $AG$ , ἔχουσα δύο τῶν σημείων τῆς  $A$  καὶ  $G$  εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, θέλει εὐρίσκηται ὅλη εἰς αὐτό· λοιπὸν ἡ θέσις τούτου τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζεται ἀπὸ μόνῃν τὴν συνθήκην τὸ νὰ περιέχῃ τὰς δύο εὐθεῖας  $AB, AG$ . σχ. 181.

Πόρισμα Α΄. Τρίγωνον τὸ  $ABG$ , ἡ τρία σημεῖα  $A, B, G$ , μὴ ἐπ' εὐθείας προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου.

Πόρισμα Β΄. Λοιπὸν ὡσαύτως δύο παράλληλοι  $AB, GD$  προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου· διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα  $EZ$ , τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν  $AE, EZ$  θέλει εἶναι τὸ τῶν παραλλήλων  $AB, GD$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

## Θεώρημα.

Ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα τέμνονται, εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Διότι ἐὰν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ᾖτον δυνατόν νὰ εὐρεθῶσι τρία μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων δὲν ἦθελον σχηματίζει παρά ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (πρό. 2), τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

## Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ᾗναι κάθετος εἰς δύο ἄλλας ΠΒ, ΠΓ, αἵτινες διασταυροῦνται εἰς τὸν πόδα τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς ὅποιανδήποτε εὐθεῖαν ΠΚ ἡγμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ οὕτω θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 183.

Ἄς ληρῇ ἐπὶ τῆς ΠΚ σημείον τι κατ' ἀρέσκειαν Κ, ἃς ἀχθῇ ἡ ΒΓ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΠΓ, εἰς τρόπον ὥστε ΒΚ=ΚΓ (προβ. 5. βιβλ. 3). ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ βάσις ΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Κ, τὸ τρίγωνον ΒΠΓ δίδει (14, 3),

$$\begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -2 \\ \text{ΠΓ} + \text{ΠΒ} = 2\text{ΠΚ} + 2\text{ΚΓ}. \end{array}$$

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ δίδει παρομοίως,

$$\begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -2 \\ \text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} = 2\text{ΑΚ} + 2\text{ΚΓ}. \end{array}$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην. καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΒ, καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς Π, δίδουν

$\begin{array}{ccccccc} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ \text{ΑΓ} - \text{ΠΓ} = \text{ΑΠ}, & \text{καὶ} & \text{ΑΒ} - \text{ΠΒ} = \text{ΑΠ}. \end{array}$

ὁλομεν ἔχει,

$$\begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -2 \\ \text{ΑΠ} + \text{ΑΠ} = 2\text{ΑΚ} - 2\text{ΠΚ}. \end{array}$$

Λοιπὸν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 2, συνάγομεν  $\begin{array}{c} -2 \\ \text{ΑΠ} = \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ \text{ΑΚ} - \text{ΠΚ}, & \text{ἢ} & \text{ΑΚ} = \text{ΑΠ} + \text{ΠΚ}. \end{array}$  Τώρα ἐπειδὴ εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΑΠΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Π· λοιπὸν ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΚ.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ὅχι μόνον εἶναι δυνατόν εὐθεῖα γραμμὴ νὰ ᾗναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ὅτι τοῦτο συμβαίνει ὡσάκις αὕτη ἡ γραμμὴ εἶναι κάθετος εἰς δύο εὐθείας ἡγμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦτο βεβαιώνει τὸν Α' ὅρισμόν.

Πόρισμα Α'. Ἡ κάθετος ΑΠ εἶναι βραχυτέρα ὅποιανδήποτε πλαγίης ΑΚ· λοιπὸν μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

Πόρισμα Β'. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Π ἐπὶ ἐπιπέδου, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατόν νὰ ὑψωθῇ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

διότι εἰ δυνατόν, ὥς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡμπορεῖ νὰ ὑψωθοῦν δύο-  
 ὥς φαντασθῶμεν ὅτι διὰ τῶν δύο τούτων καθέτων διέρχεται ἐ-  
 πίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ  $MN$  κατὰ τὴν  $ΠΚ$ . τότε αἱ δύο κάθε-  
 τοι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς  
 $ΠΚ$  εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἀδύνατον εἶναι παρομοίως ἀπὸ δεδομένον σημεῖον ἐκτὸς ἐπι-  
 πέδου νὰ κατεβασθῶσι δύο κάθετοι εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι  
 ἔστωσαν  $ΑΠ$ ,  $ΑΚ$ , αἱ δύο αὗται κάθετοι· τότε τὸ τρίγωνον  $ΑΠΚ$   
 ἤθελον ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας  $ΑΠΚ$ ,  $ΑΚΠ$ , ὅπερ ἀδύνατον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

#### Θεώρημα.

Αἱ πλάγιαί, αἱ ἰσάκεις ἀπέχουσαι τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι καὶ  
 ἐκ δύο πλαγίων αἵτινες ἀνισάκεις ἀπέχουσι τῆς καθέτου, ἢ περισ-  
 σότερον ἀπέχουσα εἶναι ἢ μεγαλητέρα.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι  $ΑΠΒ$ ,  $ΑΠΓ$ ,  $ΑΠΔ$  εἶναι ὀρθαί, ἐὰν  
 τὰ διαστήματα  $ΠΒ$ ,  $ΠΓ$ ,  $ΠΔ$  ὑποτεθῶσιν ἴσα πρὸς ἀλλήλα, τὰ  
 τρίγωνα  $ΑΠΒ$ ,  $ΑΠΓ$ ,  $ΑΠΔ$ , θέλουν ἔχει μίαν γωνίαν ἴσην πε-  
 ριεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσα· ἄρα  
 αἱ ὑποτείνουσαι ἢ αἱ πλάγιαί  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ , θέλουν εἶναι ἴσαι  
 μεταξύ των. Παραμοίως, ἐὰν τὸ διάστημα  $ΠΕ$ , ᾗναι μεγαλητέ-  
 ρον τοῦ  $ΠΔ$  ἢ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ  $ΠΒ$ , φανερόν ὅτι ἡ πλαγία  $ΑΕ$   
 θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς  $ΑΒ$ , ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $ΑΔ$ . σχ. 184.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ἴσαι πλάγιαί  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ , κ. τ. λ. τελειό-  
 νουν εἰς τὴν περιφέρειαν  $ΒΓΔ$ , γεγραμμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς  
 καθέτου  $Π$  ὥς ἐκ κέντρου· λοιπὸν δεδομένου σημείου  $Α$  ἐκτὸς ἐ-  
 πίπέδου, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον  $Π$  ὅπου ἤθελε πέ-  
 σει ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὸ  $Α$ , πρέπει νὰ σημειώσωμεν  
 ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα  $Β$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ , τὰ ὁποῖα ἰσάκεις  
 νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν στιγμήν  $Α$ , καὶ νὰ ζητήσωμεν ἀκολουθῶς  
 τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τούτων τῶν σημείων·  
 τὸ κέντρον τοῦτο θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη στιγμή  $Π$ .

Σχόλιον. Ἡ γωνία  $ΑΒΠ$  καλεῖται κλίσις τῆς πλαγίας  
 $ΑΒ$  ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου  $MN$ . βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι  
 ἴση δι' ὅλας τὰς πλαγίας  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ , κ.τ.λ. αἱ ὁποῖαι ἰσά-  
 κεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα  $ΑΒΠ$ ,  
 $ΑΓΠ$ ,  $ΑΔΠ$ , κ.τ.λ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ΄.

#### Θεώρημα.

Ἐστω  $ΑΠ$  κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$  καὶ  $ΒΓ$  εὐθεῖα κει-



μένη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ἐὰν ἀπὸ τῶν πόδα  $\Pi$  τῆς καθέτου κατεβασθῇ ἡ κάθετος  $\Pi\Delta$  ἐπὶ τῆς  $B\Gamma$ , καὶ ἐπιζευχθῇ  $A\Delta$ , λέγῳ ὅτι  $A\Delta$ , θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν  $B\Gamma$ . σχ. 185.

Ἄς ληρθῇ  $\Delta B = \Delta \Gamma$ , καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $\Pi B$ ,  $\Pi \Gamma$ ,  $AB$ ,  $A\Gamma$ : ἐπειδὴ  $\Delta B = \Delta \Gamma$ , ἡ πλαγία  $\Pi B = \Pi \Gamma$  καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον  $A\Pi$ , ἐπειδὴ  $\Pi B = \Pi \Gamma$ , ἡ πλαγία  $AB = A\Gamma$  (πρ. 5). λοιπὸν δύο σημεῖα τῆς γραμμῆς  $A\Delta$  ἰσάκεις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων  $B$  καὶ  $\Gamma$ : λοιπὸν  $A\Delta$  εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἥμισυ τῆς  $B\Gamma$ .

**Πόρισμα.** Βλέπομεν ἐν ταύτῳ ὅτι  $B\Gamma$  εἶναι κάθετος ὡς τὸ ἐπίπεδον  $A\Delta\Pi$ , ὡς κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας  $A\Delta$ ,  $\Pi\Delta$ .

**Σχόλιον.** Αἱ δύο γραμμαὶ  $AE$ ,  $B\Gamma$  παρρησιάζουν τὸ παράδειγμα δύο γραμμῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συναπκντῶνται, ὡς μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ βραχύτερον διάστημα τούτων τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα  $\Pi\Delta$ , κάθετος ἐν ταύτῳ εἰς τὴν  $A\Pi$  καὶ τὴν  $B\Gamma$ . Τὸ διάστημα  $\Pi\Delta$  εἶναι τὸ βραχύτερον μεταξὺ τῶν δύο τούτων γραμμῶν διότι ἐὰν ἐνώσωμεν δύο ἄλλα σημεῖα, ὡς  $A$  καὶ  $B$ , θέλομεν ἔχει  $AB > A\Delta$ ,  $A\Delta > \Pi\Delta$ : λοιπὸν πολὺ περισσότερον,  $AB > \Pi\Delta$ .

Αἱ δύο γραμμαὶ  $AE$ ,  $GB$ , ἂν καὶ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, θεωροῦνται ὅμως ὅτι κάμνουν μεταξὺ των γωνίαν ὀρθήν· διότι  $AE$  καὶ ἡ ἡγμένη παράλληλος ἐξ ἑνὸς τῶν σημείων τῆς  $B\Gamma$ , ἤθελον κάμνει μεταξὺ των γωνίαν ὀρθήν. Ὡσαύτως αἱ γραμμαὶ  $AB$  καὶ  $\Pi\Delta$ , αἵτινες παριστάνουν δύο ὁποιασδήποτε εὐθείας μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ κειμένας, θεωροῦνται ὡς ποιοῦσαι μεταξὺ των τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν ἤθελε κάμει μὲ τὴν  $AB$  ἡ παράλληλος τῇ  $\Pi\Delta$  ἡγμένη ἀπὸ ἑνὸς σημείου τῆς  $AB$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

**Θεώρημα.**

Ἐὰν ἡ γραμμὴ  $A\Pi$  ᾖ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$ , κάθετος γραμμὴ  $\Delta E$  παράλληλος τῇ  $A\Pi$  θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. σχ. 186.

Διὰ τῶν παραλλήλων  $A\Pi$ ,  $\Delta E$ , ἃς διέλθῃ ἐπίπεδον τοῦ ὁποίου ἡ κοινὴ τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον  $MN$  θέλει εἶναι  $\Pi\Delta$ : εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$  ἄς ἀχθῇ  $B\Gamma$  κάθετος εἰς τὴν  $\Pi\Delta$ , καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ  $A\Delta$ .

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος,  $B\Gamma$  εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $A\Pi\Delta E$ : λοιπὸν ἡ γωνία  $B\Delta E$  εἶναι ὀρθή: ἀλλ' ἡ γωνία  $E\Delta\Pi$  εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, διότι  $A\Pi$  εἶναι κάθετος εἰς τὴν  $\Pi\Delta$ , καὶ  $\Delta E$  εἶναι παράλληλος τῇ  $A\Pi$ : λοιπὸν ἡ  $\Delta E$  εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας  $\Delta\Pi$ ,  $\Delta B$ : ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδόν των  $MN$ .

**Πόρισμα Α.** Ἐάν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΔΕ ᾗται κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι ἄλλως, ἡμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν διὰ τοῦ σημείου Δ παράλληλον τῇ ΑΠ, ᾗτις ᾗθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ᾗθελεν εἶναι ἄρα δυνατόν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

**Πόρισμα Β'.** Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, παράλληλοι μιᾷς τρίτης Γ εἶναι καὶ μεταξὺ των παράλληλοι· διότι ἂς φαντασθῶμεν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν Γ· αἱ γραμμαὶ Α καὶ Β, παράλληλοι ταύτης τῆς καθετοῦ, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν πόρισμα, θέλουν εἶναι καὶ μεταξὺ των παράλληλοι.

Ἐννοεῖται ὅτι αἱ τρεῖς γραμμαὶ δὲν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἄλλως ἡ πρότασις ᾗθελεν εἶναι γνωστὴ (25, 1).

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Ἐάν ἡ γραμμὴ ΑΒ ᾗται παράλληλος εὐθείας τινὸς ΓΔ ἡγμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι παράλληλος τοῦτου τοῦ ἐπιπέδου. σχ. 187.

Διότι ἐάν ἡ γραμμὴ ΑΒ, ᾗτις εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ᾗτον δυνατόν νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συναπάντησις αὕτη θὰ ἐγίνετο εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς ΓΔ, κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων· Τώρα, ΑΒ δὲν ἡμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ ΓΔ, ὥς παράλληλος αὐτῆς· λοιπὸν οὐδὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει συναπαντήσῃ· ἄρα εἶναι παράλληλος αὐτοῦ (ὁρ. 2).

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, κάθετα εἰς εὐθεῖαν τινα ΑΒ, εἶναι παράλληλα μεταξὺ των. σχ. 188.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται· ἔστω Ο ἐν τῶν κοινῶν σημείων των· ἂς ἐπιξευχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ ἡγμένην ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΟ· λοιπὸν ΟΑ, ΟΒ ᾗθελον εἶναι δύο κάθετοι κατεβασμένοι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ δὲν ἡμποροῦν νὰ συναπαντηθοῦν· λοιπὸν εἶναι παράλληλα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ, ὑπ' ἐνὸς τρίτου ΖΗ, εἶναι παράλληλοι. σχ. 189.

Διότι ἐὰν αἱ γραμμαὶ  $EZ, H\Theta$ , εὗρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν εἶναι παράλληλοι, προεκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῇ· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα  $MN, ΠΚ$ , εἰς τὰ ὁποῖα εὗρίσκονται, ὁμοίως ἤθελον συναπαντηθῇ· λοιπὸν δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ  $AB$ , κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$ , εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ΠΚ$  παράλληλον τοῦ  $MN$ . σχ. 188.

Ἀχθείσης κατ' ἀρέσκειαν τῆς  $BΓ$  εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ΠΚ$ , διὰ τῶν  $AB, BΓ$  ἃς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ  $ABΓ$ , τὸ ὁποῖον τέμνῃ τὸ  $MN$  κατὰ τὴν  $ΑΔ$ , ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ  $BΓ$  (πρ. 10)· ἀλλ' ἡ  $AB$  κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$  εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν  $ΑΔ$ · λοιπὸν θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλον αὐτῆς  $BΓ$ · καὶ ἐπειδὴ ἡ  $AB$  εἶναι κάθετος εἰς κάθε γραμμὴν  $ΕΓ$  ἡγμένην ἀπὸ τὸν πόδα τῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ΠΚ$ , ἔπεται ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ΠΚ$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Αἱ παράλληλοι  $ΕΗ, ΖΘ$ , περιεχόμεναι μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων  $MN, ΠΚ$  εἶναι ἴσαι. σχ. 189.

Διὰ τῶν παραλλήλων  $ΕΗ, ΖΘ$ , ἃς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον  $ΕΗΘΖ$ , τὸ ὁποῖον θὰ συναπαντήσῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατὰ τὰς  $EZ, H\Theta$ . Αἱ κοιναὶ τομαὶ  $EZ, H\Theta$ , εἶναι παράλληλοι μεταξὺ των (πρὸ. 10), καθὼς καὶ οἱ  $ΕΗ, ΖΘ$ · ἄρα τὸ σχῆμα  $ΕΗΘΖ$  εἶναι παραλληλόγραμμον· ἔρα  $ΕΗ=ΕΘ$ .

Πόρισμα. Ἐτεῦθεν ἔπεται ὅτι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἰσάκεις ἀπέχουσι καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν· διότι ἐὰν  $ΕΗ$  καὶ  $ΖΘ$  ᾖναι κάθετοι εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα  $MN, ΠΚ$ , θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξὺ των (πρ. 7)· λοιπὸν εἶναι ἴσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο γωνίαι  $ΓΑΕ, ΔΒΖ$  μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Ἄς ληρθῇ  $ΑΓ=ΒΔ, ΑΕ=ΒΖ$ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $ΓΕ, ΔΖ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ$ . Ἐπειδὴ  $ΑΓ$  εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ  $ΒΔ$ , τὸ σχῆμα  $ΑΒΓΔ$  εἶναι παραλληλόγραμμον (11, 3)· λοιπὸν



ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· λοιπὸν ὡσαύτως ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ· τὸ σχῆμα ἄρα ΓΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ οὕτως ἡ πλευρὰ ΓΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, ΔΒΖ, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των· ἄρα ἡ γωνία  $\Gamma\text{ΑΕ} = \Delta\text{ΒΖ}$ .

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ· διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῦ ΒΔΖ, ἡγμένον ἐκ τῆς στεγμῆς Α συναπαντᾷ τὰς γραμμὰς ΓΔ, ΕΖ, εἰς διαφορετικὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ Γ καὶ Ε, φέρ' εἰπεῖν, εἰς Η καὶ Θ. Τότε, κατὰ τὴν ΙΒ'. πρότασιν, αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΗΔ, ΖΘ ἤθελον εἶναι ἴσαι ἀλλ' αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει  $\Gamma\Delta = \text{ΗΔ}$ , καὶ  $\text{ΖΘ} = \text{ΕΖ}$ , ὅπερ ἄτοπον· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ΒΔΖ.

**Πόρισμα.** Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, συναπαντῶται ἀπὸ δύο ἄλλα ΓΑΒΔ, ΕΑΒΖ, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ ἀπὸ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἴσαι· διότι ἡ κοινὴ τομὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ (πρό. 10), ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ· λοιπὸν ἡ γωνία  $\Gamma\text{ΑΕ} = \Delta\text{ΒΖ}$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ ἀπὸ τὴν ἔνωσιν τῶν ἄκρων τούτων τῶν εὐθειῶν, θέλουν εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Διότι, οὐσης τῆς ΑΒ ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ ΓΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΖ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΓΕ, ΔΖ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ, εἶναι ἴσα· ἄλλως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὡς καὶ εἰς τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, ὅτι τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

#### Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι περιεχόμεναι μεταξύ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ΡΣ, εἰς Α, Ε, Β, καὶ ὅτι ἡ ΓΔ συναπαντᾷ

τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα εἰς Γ, Ζ, Δ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ὡς ΑΕ: ΕΒ:: ΓΖ: ΖΔ. σχ. 191.

Ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ συναπαντῶσα τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς Η· καὶ ἃς ἐνωθῶσιν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ· αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΗ, ΒΔ, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, εἶναι παράλληλοι (πρό. 10)· λοιπὸν ΑΕ: ΕΒ:: ΑΗ: ΗΔ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΓ, ΗΖ, εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΑΗ: ΗΔ:: ΓΖ: ΖΔ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΑΗ: ΗΔ, θέλομεν ἔχει ΑΕ: ΕΒ:: ΓΖ: ΖΔ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Θεώρημα.

Ἐστω ΑΒΓΔ ὁποιοῦνδήποτε τετράπλευρον κείμενον ἢ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (1)· ἐὰν τμηθῶσιν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἀναλόγως ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, εἰς τρόπον ὥστε ΑΕ: ΕΒ:: ΔΖ: ΖΓ, καὶ ΒΗ: ΗΓ:: ΑΘ: ΘΔ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ, θέλουν τέμνεσθαι εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν Μ, εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ΘΜ: ΜΗ:: ΑΕ: ΕΒ, καὶ ΕΜ: ΜΖ:: ΑΘ: ΘΔ. σχ. 192.

Διὰ τῆς ΑΔ ἃς διέλθῃ ἐπίπεδον ὁποιοῦνδήποτε ΑΒΘΓΔ τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ μὴ διέρχεται διὰ τῆς ΗΘ· ἐκ τῶν στιγμῶν Ε, Β, Γ, Ζ ἃς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΗΘ αἱ Εε, Ββ, Γγ, Ζζ, αἵτινες συναπαντῶν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς ε, β, γ, ζ. Ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Ββ, ΗΘ, Γγ (15. 3), θέλομεν ἔχει βΘ: Θγ:: ΒΗ: ΗΓ:: ΑΘ: ΘΔ· λοιπὸν (20, 3) τὰ τρίγωνα ΑΘβ, ΔΘγ, εἶναι ὅμοια. Ἀκολουθῶς θέλομεν ἔχει Αε: εβ:: ΑΕ: ΕΒ, καὶ Δζ: ζγ:: ΔΖ: ΖΓ· λοιπὸν Αε: εβ:: Δζ: ζγ, ἢ, ἐν συνθέσει, Αε: Δζ:: Αβ: Δγ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘβ, ΔΘγ, ἔχομεν Αβ: Δγ:: ΑΘ: ΘΔ· λοιπὸν Αε: Δζ:: ΑΘ: ΘΔ: ἄλλως τὰ τρίγωνα ΑΘβ, γΘΔ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ΘΑΕ=ΘΔζ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΘε, ΔΘζ, εἶναι ὅμοια (20, 3)· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΘε=ΔΘζ. Ἐκ τούτου ἔπεται κατὰ πρῶτον ὅτι εΘζ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ οὕτως αἱ τρεῖς παράλληλοι

(1) Διὰ τριῶν σημείων πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ ἐπίπεδον· ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προεκβαλλόμενον περάσῃ καὶ ἀπὸ τέταρτον, τότε τὰ τέσσαρα σημεῖα εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἐνοῦντες αὐτὰ ἀνὰ δύο, σχηματίζουσαν τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ὅλο εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐξ ἐναντίας ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν διέλθῃ ἀπὸ τὸ τέταρτον, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον εὐρίσκεται μοιρασμένον εἰς δύο ἐπίπεδα, καὶ τότε λέγεται ὅτι δὲν κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται ἀπὸ τοὺς Γάλλους *quadrila tère gauche*· οἱ ἡμέτεροι ἃς τὸ ὀνομάσῃν ὅπως ἀγαπῶν. Εἰς τοιοῦτου εἶδους τετράπλευρον λοιπὸν ἃς φαντασθῇ ὃ ἀναγκαστικὴν τὴν ἀνωτέρω κατὰσκευὴν καὶ ἀπόδειξιν. Ο. Μ.

Εε, ΗΘ, Ζζ κείνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει καὶ τὰς δύο εὐθείας ΕΖ, ΗΘ· λοιπὸν αὗται πρέπει νὰ τέμνονται εἰς μίαν στιγμὴν Μ. Ἐπειτα ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Εε, ΜΘ, Ζζ, θέλομεν ἔχει  $EM : MZ :: εΘ : ΘΖ :: ΑΘ : ΘΔ$ .

Ἐάν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἀναφέρωμεν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι  $ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ$ . (1)

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

### Θεώρημα.

Ἡ περιεχομένη γωνία μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΑΝ, ΜΑΠ, ἥμπορεῖ, κατὰ τὸν ὀρισμὸν, νὰ μετρηθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΝΑΠ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των αἱ δύο κάθετοι ΑΝ, ΑΠ ἡγμέναι εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ. σχ. 193.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ νόμιμον τούτου τοῦ μέτρου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν 1.<sup>ον</sup> ὅτι εἶναι σταθερὸν, ἢ ὅτι ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιανδήποτε στιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ δύο κάθετοι.

Τῷ ὄντι, ἐάν ληθῇ ἄλλη στιγμὴ Μ, καὶ ἀχθῇ ἡ μὲν ΜΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ, ἡ δὲ ΜΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΠ κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας κοινῆς τομῆς· αἱ εὐθεῖαι ΜΒ καὶ ΑΠ ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ΑΜ, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΜΓ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΝ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΜΓ=ΠΑΝ (πρό. 13)· ἀδιάφορον λοιπὸν εἶναι νὰ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ἐκ τῆς στιγμῆς Μ ἢ ἐκ τῆς στιγμῆς Α· ἡ περιεχομένη γωνία πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτή.

2.<sup>ον</sup> Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἐάν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων αὐξάνῃ ἢ ὀλιγοστεύῃ κατὰ τινα λόγον, κατὰ τὸν αὐτὸν θέλει αὐξάνει ἢ ὀλιγοστεύει ἡ γωνία ΠΑΝ.

(1) Ὅταν τὸ τετράπλευρον εὐρίσκηται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, οὐδεμία ἀμφιβολία ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουσι τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ἀναλόγως, τέμνονται εἰς μίαν στιγμὴν Μ. Τὴς ἀναλογίας ὅμως  $EM : MZ :: ΑΘ : ΘΔ$  καὶ  $ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ$ , ἀποδεικνύομεν ὡς ἀκολούθως.

Γινομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, τὰ ὁμοία τρίγωνα ΑΒβ, ΑΕ: θέλουν ὅσοι ΑΕ: ΕΒ:: Αε: εβ παρομοίως καὶ τὰ ὁμοία τρίγωνα ΔΓγ, ΔΖζ, Δς: ΖΓ: Δς: ζγ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΕ: ΕΒ:: ΔΖ: ΖΓ· λοιπὸν Αε: εβ:: Δς: ζγ· καὶ ἐν συνθέσει Αβ: εβ:: Δς: εβ:: Δγ: ζγ (1)· ἄλλως ΒΗ: ΗΓ:: βθ: θγ, καὶ ΑΘ: ΘΔ:: ΒΗ: ΗΓ· λοιπὸν ΑΘ: ΘΔ:: βθ: θγ, καὶ, ἐν μεταθέσει, ΑΘ: βθ:: ΘΔ: θγ· ὅθεν, ἐν διαιρέσει ΑΘ—βθ ἢ Αβ: βθ:: ΘΔ—θγ ἢ γδ: θγ· ἔκ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας καὶ τῆς (1) συνάγουμεν εβ: θβ:: ζγ: θγ· ὅθεν ἐν συνθέσει εβ+θβ: θβ ἢ εθ: θβ:: ζγ+θγ ἢ θς: θγ, καὶ ἐν μεταθέσει εθ: θς:: θβ: θγ· ἀλλὰ εθ: θς:: ΕΜ: ΜΖ· λοιπὸν ΕΜ: ΜΖ:: θβ: θγ· ἐπειδὴ δὲ βθ: θγ:: ΒΗ: ΗΓ:: ΑΘ: ΘΔ· διὰ τοῦτο καὶ ΕΜ: ΜΖ:: ΑΘ: ΘΔ· ἀναφέροντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ὁμοίως συλλογισζόμενοι δεκνύομεν ὡς αὐτοῖς ὅτι  $ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ$ . Ο. Μ.



Εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\Pi\Lambda\Lambda$  ἐκ τοῦ κέντρου  $\Lambda$  καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ἄς γραφθῇ τὸ τόξον  $\Lambda\Delta\Gamma$ · ἐκ τοῦ κέντρου  $\Lambda$  καὶ μὲ ἴσην ἀκτῖνα ἄς γραφθῇ τὸ τόξον  $\Gamma\epsilon\beta$ , ἄς ἀχθῇ ἡ  $\Lambda\Delta$  κατ' ἀρέσκειαν· ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα  $\Pi\Lambda\Lambda$ ,  $\beta\Gamma\epsilon$ , εἶναι κάθετα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν  $\Lambda\Delta$ , εἶναι διὰ τοῦτο παράλληλα (πρό. 9)· λοιπὸν αἱ κοιναὶ τομαὶ των  $\Lambda\Delta$ ,  $\beta\Gamma\epsilon$  ὑπὸ τρίτου τινὸς  $\Lambda\Delta$  εἶναι παράλληλοι· λοιπὸν ἡ γωνία  $\beta\Gamma\epsilon$  εἶναι ἴση τῇ  $\Pi\Lambda\Delta$  (πρό. 13).

Ἄς καλέσωμεν πρὸς ὀλίγον ἀγκωνὴν (1) τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα  $\beta\Gamma\epsilon$ ,  $\Gamma\epsilon\beta$ · τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γωνία  $\Delta\Lambda\Gamma$  ᾖ ἴση μὲ τὴν  $\Delta\Lambda\Lambda$ , φανερόν ὅτι καὶ ἡ ἀγκωνὴ  $\Delta\Lambda\beta\Gamma$  θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀγκωνὴν  $\Delta\Lambda\Gamma\epsilon$ · διότι ἡ βᾶσις  $\Lambda\Delta$  ἀκριβῶς ἡμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $\Delta\Lambda\Lambda$ , τὸ δὲ ὕψος  $\Lambda\beta$  εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό· λοιπὸν αἱ δύο ἀγκωναὶ ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐὰν ἡ γωνία  $\Delta\Lambda\Gamma$  περιέχετο ἀριθμὸν τινὰ φορῶν εἰς τὴν γωνίαν  $\Pi\Lambda\Lambda$ , ἡ ἀγκωνὴ  $\Delta\Lambda\beta\Gamma$  ἤθελε περιέχεσθαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὴν ἀγκωνὴν  $\Pi\Lambda\Lambda$ · λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν  $\Delta\Lambda\Gamma$ ,  $\Pi\Lambda\Lambda$  ἐκφράζεται δι' ἀκαράων ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῶν δύο ἀγκωνῶν  $\Delta\Lambda\beta\Gamma$ ,  $\Pi\Lambda\Lambda$  θέλει ἐκφράζεται διὰ τῶν ἰσίων ἀριθμῶν καὶ ἐπομένως γωνία  $\Delta\Lambda\Gamma$ · γωνία  $\Pi\Lambda\Lambda$  :: ἀγκωνὴ  $\Delta\Lambda\beta\Gamma$ · ἀγκωνὴ  $\Pi\Lambda\Lambda$ . Ἀλλὰ καθὼς καὶ εἰς ἄλλην παραμοίαν περιστασιν (17, 2), οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἡμποροῦμεν νὰ δεῖξωμεν ὅτι ὅποιοςδήποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν  $\Delta\Lambda\Gamma$ ,  $\Pi\Lambda\Lambda$ , αὗται θέλουν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντικειμένων ἀγκωνῶν· λοιπὸν ὅποιοςδήποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος τῆς γωνίας  $\Delta\Lambda\Gamma$  πρὸς τὴν γωνίαν  $\Pi\Lambda\Lambda$ , ἡ ἀγκωνὴ  $\Delta\Lambda\beta\Gamma$  θέλει εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὴν ἀγκωνὴν  $\Pi\Lambda\Lambda$ · λοιπὸν ἡ γωνία  $\Delta\Lambda\Gamma$  ἡμπορεῖ νὰ ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ἀγκωνῆς  $\Pi\Lambda\Lambda$ , ἢ τῆς γωνίας τὴν ὅποιαν κάμνουν μετὰ τῶν τὰ δύο ἐπίπεδα  $\beta\Gamma\epsilon$ ,  $\Gamma\epsilon\beta$ .

Σχόλιον. Ὅτι ὑπάρχει διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο εὐθείας, ὑπάρχει καὶ διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο ἐπίπεδα. Οὕτως ὅταν δύο ἐπίπεδα ἀμοιβαίως τὸ ἓν διαπερᾷ τὸ ἄλλο, αἱ ἀπέναντι εἰς τὴν κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ προσκείμεναι κάμνουν ὁμοῦ δύο ὁρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπίπεδον ᾖ κάθετον εἰς ἄλλο, τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἐκεῖνο. Παραμοίως εἰς τὴν συναπάντησιν παραλλήλων ἐπιπέδων μὲ τρίτον ἐπίπεδον, ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰσότητες καὶ αἱ αὐταὶ ιδιότητες

(1) Ὀνόμασα ἀγκωνὴν τὴν ὅποιαν ὁ συγγραφεὺς λέγει εἶναι ἐπὶ αὐτῇ μετρίσθαι ὅτι ἡ λέξις αὕτη εἶναι εἰς ὅλους μας εὐλαπτος.

αὶ ὁποῖαι καὶ εἰς τὴν συναπάντησιν δύο παραλλήλων γραμμῶν μετρίτην τινά.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν ΑΗ ᾗναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε ἐπίπεδον ΑΗΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

• Ἐστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΒΠ, ἡ ΑΗ, οὔσα κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς κάθε μίαν τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο καθέτους ΠΑ, ΠΔ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των (ὁρ. 5).

Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ΑΗ, ΒΠ, ΔΠ, ᾗναι κάθετοι μεταξύ των, ἐκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ᾗναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀχθῇ ἡ ΠΑ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, λέγω ὅτι ἡ ΠΑ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των· λοιπὸν ἡ ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΠΒ, ΠΔ· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ᾗναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, καὶ ἐκ μιᾶς στιγμῆς Π τῆς κοινῆς τομῆς ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει εὐρίσκειται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ· διότι, ἀλλέως, ἡμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ μίαν κάθετον ΑΠ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, ἥτις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν Π ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

## Θεώρημα.

Ἐάν δύο ἐπίπεδα  $AB$ ,  $AD$  ᾗναι κάθετα εἰς ἄλλο τρίτον  $MN$ , ἡ κοινὴ τομὴ των  $AM$  θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον. σχ. 194.

Διότι ἐάν ἐκ τῆς στιγμῆς  $M$  ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $MN$ , ἡ κάθετος αὕτη πρέπει ἐν ταύτῳ νὰ εὗρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον  $AB$  καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον  $AD$  (πορ. 19). λοιπὸν εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ των  $AM$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'. ✕

## Θεώρημα.

Ἐάν μία στερεὰ γωνία ᾗναι σχηματισμένη ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιοῦνδήποτε τούτων τῶν γωνιῶν, θέλει εἶναι μείζον τῆς τρίτης. σχ. 195.

Ἐάν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαί ᾗναι ἴσαι μεταξὺ των, φανερόν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης. Ἐάν δὲ ἀνισοὶ καὶ ἐκάστη τῶν δύο μείζων τῆς τρίτης, φανερόν ἀκόμη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης. Ἡ μόνη λοιπὸν περίπτωση καθ' ἣν ἡ ἐκφωνηθεῖσα πρότασις ἔχει χρεῖαν ἀποδείξεως, εἶναι ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ἡ παραβαλλομένη ἐπίπεδος γωνία μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων εἶναι μείζων ἐκάστης τούτων. Ἐστω λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία  $\Sigma$  σχηματιζομένη ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἐπιπέδους  $ASB$ ,  $AS\Gamma$ ,  $BS\Gamma$ , καὶ ὥς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία  $ASB$  εἶναι μείζων τῶν ἄλλων δύο· λέγω ὅτι θέλει εἶναι  $ASB < AS\Gamma + BS\Gamma$ .

Εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ASB$  ὥς γένῃ ἡ γωνία  $BS\Delta = BS\Gamma$ , ὥς ἀχθῇ κατ' ἀρέσκειαν ἡ εὐθεῖα  $ADB$ : καὶ, ληφθείσης τῆς  $S\Gamma = S\Delta$ , ἐπιζευχθήτωσαν αἱ  $AG$ ,  $B\Gamma$ .

Αἱ δύο πλευραὶ  $BS$ ,  $S\Delta$ , εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο  $BS$ ,  $S\Gamma$ , ἡ γωνία  $BS\Delta = BS\Gamma$ . λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα  $BS\Delta$ ,  $BS\Gamma$  εἶναι ἴσα· λοιπὸν  $BD = B\Gamma$ . Ἀλλ' ἔχομεν  $AB < AG + B\Gamma$ . ἀφαιρέθείσης ἀπὸ τὸ ἐν μέρος τῆς  $BD$ , καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $B\Gamma$ , μένει  $AD < AG$ . Αἱ δύο πλευραὶ  $AS$ ,  $S\Delta$ , εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο  $AS$ ,  $S\Gamma$ , ἡ τρίτη  $AD$  εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης  $AG$ . λοιπὸν (10, 1) ἡ γωνία  $AS\Delta < AS\Gamma$ . Προσθέσει τῆς  $BS\Delta = BS\Gamma$ , προκύπτει  $AS\Delta + BS\Delta$  ἢ  $ASB < AS\Gamma + BS\Gamma$ .



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'. †

### Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσιν γωνίαν στερεάν, εἶναι πάντοτε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἄς τμηθῇ ἡ στερεὰ γωνία  $\Sigma$  ἀπὸ ὁποιοῦνδήποτε ἐπίπεδον  $ΑΒΓΔΕ$ · εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἂς ληθῇ σημειόν τι  $O$ , καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀχθῶσιν εἰς ἕλας τὰς γωνίας αἱ γραμμαὶ  $ΟΑ$ ,  $ΟΒ$ ,  $ΟΓ$ ,  $ΟΔ$ ,  $ΟΕ$ . σχ. 196.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων  $ΑΣΒ$ ,  $ΒΣΓ$ , κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὀλόγυρα τῆς κορυφῆς  $\Sigma$ , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων  $ΑΟΒ$ ,  $ΒΟΓ$ , κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὀλόγυρα τῆς κορυφῆς  $O$ . Ἀλλ' εἰς τὴν στιγμὴν  $B$  αἱ γωνίαι  $ΑΒΟ$ ,  $ΟΒΓ$ , ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμνουν τὴν γωνίαν  $ΑΒΓ$  μικρότεραν τοῦ ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν  $ΑΒΣ$ ,  $ΣΒΓ$  (πρό. 21)· ὥσαύτως εἰς τὴν στιγμὴν  $\Gamma$  ἔχομεν  $ΒΓΟ + ΟΓΔ < ΒΓΣ + ΣΓΔ$ · καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ πολυγώνου  $ΑΒΓΔΕ$ . Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς  $O$ , τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς  $\Sigma$ . Τώρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς  $\Sigma$  μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς  $\Sigma$ , καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου  $ΑΒΓΔΕ$ · καλοῦντες  $A$  τὸ πρῶτον καὶ  $B$  τὸ δεύτερον, ἔχομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τούτων  $A + B$ · παρομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς  $O$  μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα νῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς  $O$ , καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου  $ΑΒΓΔΕ$ · καλοῦντες τὸ πρῶτον ἄθροισμα  $A$  καὶ τὸ δεύτερον  $B'$ , ἔχομεν  $A + B$  διὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γωνιῶν· ἐπεὶ δὲ τὰ δύο ἄθροίσματα  $A + B$ , καὶ  $A' + B'$  πρέπει νὰ ᾖναι ἴσα· διὰ τοῦτο  $A + B = A' + B'$ · ἀλλὰ δέδεικται ὅτι  $B > A'$ · λοιπὸν ἀναγκαίως  $A < B'$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ὀλόγυρα τῆς στιγμῆς  $O$ , εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν ὀλόγυρα τῆς στιγμῆς  $\Sigma$ . Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀλόγυρα τῆς στιγμῆς  $O$  γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθὰς (5, 1)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσιν τὴν στερεάν γωνίαν  $\Sigma$  εἶναι μικρότερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθὰς.

**Σχόλιον.** Ἡ ἀπόδειξις αὕτη προϋποθέτει ὅτι ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κυρτή, ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον μίᾳ εὐθρας προσεκβαλλόμενον δὲν ἔμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὴν στερεάν γωνίαν Σ· ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δὲν ἦθελεν ἔχει ὄριον, καὶ ἔμποροῦσε νὰ ᾖναι ὁποιοῦδῃποτε μεγέθους.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'. +

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι νὰ ᾖναι ἴσαι ἢ καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκως θέλουν κλίνειν τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἐστω ἡ γωνία  $\text{ΑΣΓ}=\text{ΔΤΖ}$ , ἡ γωνία  $\text{ΑΣΒ}=\text{ΔΤΕ}$ , καὶ ἡ γωνία  $\text{ΒΣΓ}=\text{ΕΤΖ}$ . λέγω ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα  $\text{ΑΣΓ}$ ,  $\text{ΑΣΒ}$ , θέλουν ἔχει μεταξὺ τῶν κλίσεων ἴσην μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων  $\text{ΔΤΖ}$ ,  $\text{ΔΤΕ}$ . σχ. 197.

Ληθβείσης τῆς  $\text{ΣΒ}$  κατ' ἀρέσκειαν, ἃς ἀχθῇ ἡ  $\text{ΒΟ}$  κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\text{ΑΣΓ}$ . ἐκ τῆς στιγμῆς  $\text{Ο}$ , ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἃς ἀχθῶσιν αἱ  $\text{ΟΑ}$ ,  $\text{ΟΓ}$  κάθετοι, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς  $\text{ΣΑ}$ , ἡ δὲ ἐπὶ τῆς  $\text{ΣΓ}$ . ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΒΓ}$ . ἃς ληρθῇ ἀκολούθως  $\text{ΤΕ}=\text{ΣΒ}$ . ἃς ἀχθῇ ἡ  $\text{ΕΠ}$  κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου  $\text{ΤΔΖ}$ . ἐκ τῆς στιγμῆς  $\text{Π}$  ἃς ἀχθῶσιν αἱ  $\text{ΠΔ}$ ,  $\text{ΠΖ}$  κάθετοι ἐπὶ τῶν  $\text{ΤΔ}$ ,  $\text{ΤΖ}$ . τέλος ἃς ἐνωθῶσιν αἱ  $\text{ΔΕ}$ ,  $\text{ΕΖ}$ .

Τὸ τρίγωνον  $\text{ΣΑΒ}$  εἶναι ὀρθογώνιον εἰς  $\text{Α}$ , καὶ τὸ τρίγωνον  $\text{ΤΔΕ}$  εἰς  $\text{Δ}$  (πρό. 6), καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία  $\text{ΑΣΒ}=\text{ΔΤΕ}$ , ἔχομεν ὡσαύτως  $\text{ΣΒΑ}=\text{ΤΕΔ}$ . Ἀλλως  $\text{ΣΒ}=\text{ΤΕ}$ . λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\text{ΣΑΒ}$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $\text{ΤΔΕ}$  (5, 1). λοιπὸν  $\text{ΣΑ}=\text{ΤΔ}$ , καὶ  $\text{ΑΒ}=\text{ΔΕ}$ . Ὁμοίως θέλομεν δεῖξει ὅτι  $\text{ΣΓ}=\text{ΤΖ}$ , καὶ  $\text{ΒΓ}=\text{ΕΖ}$ . Τοῦτου τεθέντος, τὸ τετράπλευρον  $\text{ΣΑΟΓ}$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράπλευρον  $\text{ΤΔΠΖ}$ . διότι τεθείσης τῆς γωνίας  $\text{ΑΣΓ}$  ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $\text{ΔΤΖ}$ , ἐπειδὴ  $\text{ΣΑ}=\text{ΤΔ}$  καὶ  $\text{ΣΓ}=\text{ΤΖ}$ , ἡ στιγμή  $\text{Α}$  θέλει πέσει εἰς  $\text{Δ}$  καὶ ἡ  $\text{Γ}$  εἰς  $\text{Ζ}$ . Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν  $\text{ΑΟ}$ , κάθετος εἰς τὴν  $\text{ΣΑ}$ , θέλει πέσει ἐπὶ τῆς  $\text{ΔΠ}$  καθέτου εἰς τὴν  $\text{ΤΔ}$ , καὶ παρομοίως  $\text{ΟΓ}$  ἐπὶ τῆς  $\text{ΠΖ}$ . λοιπὸν ἡ στιγμή  $\text{Ο}$  θέλει πέσει ἐπὶ τῆς στιγμῆς  $\text{Π}$ , καὶ θέλομεν ἔχει  $\text{ΑΟ}=\text{ΔΠ}$ . Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα  $\text{ΑΟΒ}$ ,  $\text{ΔΠΕ}$  εἶναι ὀρθογώνια εἰς  $\text{Ο}$  καὶ  $\text{Π}$ , ἡ ὑποτείνουσα  $\text{ΑΒ}=\text{ΔΕ}$ , καὶ ἡ πλευρὰ  $\text{ΑΟ}=\text{ΔΠ}$ . λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18, 1). λοιπὸν ἡ γωνία  $\text{ΟΑΒ}=\text{ΠΔΕ}$ . Ἡ γωνία  $\text{ΟΑΒ}$  εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων  $\text{ΑΣΒ}$ ,  $\text{ΑΣΓ}$ .

ἡ γωνία ΠΔΕ εἶναι ἡ τῶν δύο ἐπιπέδων ΔΤΕ, ΔΤΖ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται κλίσεις εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πρέπει ὁμῶς νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ δὲν εἶναι κυρίως ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, παρ' ὅταν ἡ κάθετος ΒΟ πίπτῃ, ὡς πρὸς τὴν ΣΑ, ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος ὁποῦ καὶ ἡ ΣΓ· ἐὰν δὲ ἐπιπτεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τότε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἤθελεν εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Α ἤθελε χάμνει δύο ὀρθάς. Ἀλλ' εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ ἤθελεν εἶναι παρομοίως ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΔΠΕ, ἤθελε χάμνει δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία Α πάντοτε ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ Δ, ὡσαύτως ἠθέλαμεν συμπεράνει ὅτι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ.

**Σχόλιον.** Ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ ἴσαι ἢ ὁμόλογοι γωνίαι ᾗναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, τότε αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ ἐὰν τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης θέλουν ἐφαρμόσει. Τῷ ὄντι εἶδομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ ἤμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΤΔΠΖ· οὕτως τεθείσης τῆς ΣΑ ἐπὶ τῆς ΤΔ, ἡ ΣΓ πίπτει ἐπὶ τῆς ΤΖ, καὶ ἡ στιγμὴ Ο ἐπὶ τῆς στιγμῆς Η. Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΔΠΕ, ἡ κάθετος ΟΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΠΕ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΤΔΖ· περιπλέον αἱ κάθετοι αὗται διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Β θέλει πέσει ἐπὶ τῆς στιγμῆς Ε, ἡ γραμμὴ ΣΒ ἐπὶ τῆς ΤΕ, καὶ αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην.

Ἡ ἐφαρμοσις ὁμῶς αὕτη δὲν ἔχει χώραν παρ' ὅσας ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας· διότι ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι ᾗσαν διατεταγμέναι εἰς τὰξιν ἀντίστροφον, ἢ, ὅπερ ταῦτόν, ἐὰν αἱ κάθετοι ΟΒ, ΠΕ ἀντὶ νὰ διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΔΤΖ, ἐδιευθύνοντο κατ' ἐναντίας, τότε ἀδύνατον ἤθελεν εἶναι νὰ γένῃ ἡ ἐφαρμοσις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ὅχι ὀλιγώτερον ἤθελεν εἶναι ἀληθές, κατὰ τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἤθελον κλίνει ἰσάκεις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι ἤθελον εἶναι



ἴσαι καθ' ὅλα των τὰ συστατικά μέρη, χωρίς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἡμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἰσότητος, ἥτις δὲν εἶναι ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως πρέπει νὰ διακριθῇ μὲ μερικὴν τινὰ ὀνομασίαν: θέλομεν τὴν ὀνομάζει ἰσότητα ἐκ συμμετρίας.

Οὕτως αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, αἱ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ἀλλὰ διατεταγμένας κατ' ἀντίστροφον τάξιν θέλουν ὀνομάζεσθαι γωνίαι ἴσαι ἐκ συμμετρίας ἢ ἀπλῶς γωνίαι συμμετρικαί.

Ἡ αὕτῃ σημείωσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰς στερεὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ περισσοτέρας παρὰ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας: οὕτως στερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ μία ἄλλη στερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας εἰς τάξιν ἀντίστροφον Α, Ε, Δ, Γ, Β, ἡμποροῦν νὰ ᾔναι τοιαῦται ὥστε τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ κλίνουν ἰσάκως τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ δύο αὗται στερεαὶ γωνίαι, αἵτινες ἤθελον εἶναι ἴσαι χωρίς ἢ ἐπιθέσεις νὰ ᾔναι δυνατὴ, θέλουν ὀνομάζεσθαι γωνίαι στερεαὶ ἴσαι ἐκ συμμετρίας, ἢ γωνίαι στερεαὶ συμμετρικαί.

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα δὲν ὑπάρχει κυρίως ἰσότης ἐκ συμμετρίας, καὶ ὅσας ἤθελέ τις ὀνομάσει οὕτως ἤθελον εἶναι ἀπόλυτοι ἰσότητες ἢ ἐπιθέσεως: ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἐπίπεδον σχῆμα ἡμπορεῖ νὰ ἀναποδογυρισθῇ, καὶ νὰ ληθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἄνω διὰ τὸ κάτω. Ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ στερεὰ ὅπου ἡ τρίτη διάστασις ἡμπορεῖ νὰ ληθῇ κατὰ δύο διαφορετικὰς ἐννοίας.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

### Θ ε ώ ρ η μ α.

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες σχηματίζουν στερεάν τινὰ γωνίαν, νὰ εὕρωμεν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμουν μεταξύ των.

Ἐστω Σ ἡ προτεθεῖσα στερεὰ γωνία, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ. Ζητεῖται γωνία τὴν ὁποίαν κάμουν μεταξύ τῶν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων, παραδείγματος χάριν, τὰ ἐπίπεδα ΑΣΒ, ΑΣΓ. σχ. 198.

ΑΣ φαντασθῶμεν ὅτι ἐκάμαμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὅπου καὶ εἰς τὸ προλαβόν θεώρημα, ἡ γωνία ΟΑΒ ἤθελεν εἶναι ἡ ζητούμενη. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἢ ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐκτελουμένης.



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
Μ. ΟΛΛΑΤΤΕ

Πρὸς τοῦτα ὅς γένουν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς αἱ γωνίαι  $B'SA$ ,  $AS\Gamma$ ,  $B'S\Gamma$ , ἴσαι μὲ τὰς γωνίας  $B\Lambda A$ ,  $AS\Gamma$ ,  $B\Lambda\Gamma$ , εἰς τὸ στερεὸν σχῆμα ὅς ληφθῇ ἐκάστη τῶν  $B'S$ ,  $B'S$  ἴση μὲ τὴν  $B\Lambda$  τοῦ στερεοῦ σχήματος· ἐκ τῶν στιγμῶν  $B'$  καὶ  $B''$  ὅς κατεβασθῶσιν αἱ  $B'A$ ,  $B'\Gamma$  κάθετοι ἐπὶ τῶν  $\Sigma A$  καὶ  $\Sigma\Gamma$ , αἱ ὁποῖαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς στιγμὴν τινα  $O$ . Ἐκ τῆς στιγμῆς  $A$  ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα  $AB'$  ὅς γραφθῇ ἡ ἡμιπερίφεια  $B'\beta E$ · εἰς τὴν στιγμὴν  $O$  ὅς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς  $B'E$  ἡ κάθετος  $O\beta$  συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς  $\beta$ , ὅς ἐπιζευχθῇ  $A\beta$ , καὶ ἡ γωνία  $EA\beta$  θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων  $AS\Gamma$ ,  $ASB$ , εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν.

Τὸ πᾶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον  $AO\beta$  τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $AOB$  τοῦ στερεοῦ. Τώρα τὰ δύο τρίγωνα  $B'SA$ ,  $B\Lambda A$  εἶναι ὀρθογώνια εἰς  $A$ , αἱ ἐν  $\Sigma$  γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ ἐν  $B$  καὶ  $B'$  γωνίαι εἶναι πορομοίως ἴσαι. Ἀλλ' ἡ ὑποτείνουσα  $\Sigma B'$  εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν  $\Sigma B$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· λοιπὸν  $\Sigma A$  τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν  $\Sigma A$  τοῦ στερεοῦ, καὶ ὁμοίως  $AB'$ , ἡ ἴση μὲ αὐτὴν  $A\beta$  εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἴση μὲ τὴν  $AB$  εἰς τὸ στερεόν. Ὡσαύτως θέλομεν δείξει ὅτι  $\Sigma\Gamma$  εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· ὅθεν ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον  $\Sigma AO\Gamma$  εἶναι ἴσον καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, οὕτως  $AO$  τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν  $AO$  τοῦ στερεοῦ· λοιπὸν καὶ εἰς τὰ δύο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα  $AOB$ ,  $AO\beta$ , ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ ἡ γωνία  $EA\beta$ , εὑρεθεῖσα διὰ τῆς ἐπιπέδου κατασκευῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Sigma AB$ ,  $\Sigma A\Gamma$ , εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν.

Ὅταν τὸ σημεῖον  $O$  πέσῃ μεταξὺ  $A$  καὶ  $B'$  εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, ἡ γωνία  $EA\beta$  ἀποβαίνει ἀμβλεία, καὶ μετρεῖ πάντοτε τὴν ἀληθινὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων· ἰδοὺ διατὶ ἐσημειώσαμεν διὰ  $EA\beta$ , καὶ ὅχι διὰ  $OA\beta$  τὴν ζητούμενην κλίσιν, διὰ νὰ ἀνῆκῃ ἡ αὐτὴ λύσις εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις ἄνευ ἐξαίρεσεως.

**Σ χ ό λ ι ο ν .** Ἡμπορεῖ νὰ ζητηθῇ ἐὰν μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἡλημμένας κατ' ἀρέσκειαν, εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία.

Κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων γωνιῶν πρέπει νὰ ᾔῃαι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· διότι χωρὶς ταύτης τῆς συνθήκης δὲν ἡμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἡ στερεὰ γωνία (πρό. 22).

Πρέπει περιπλέον ἀφ' οὗ ληρθῶσι δύο τῶν γωνιῶν κατ' ἀρέ-



σκειαν  $B'SA$ ,  $AS\Gamma$ , ή τρίτη  $\Gamma\Sigma B''$  νά ἦναι τοιαύτη, ὥστε ή κάθετος  $B'\Gamma$  ἐπὶ τῆς πλευρᾶς  $\Sigma\Gamma$  νά συναπαντᾷ τὴν διάμετρον  $B'E$  μεταξύ τῶν ἄκρων  $B'$  καὶ  $E$ . Οὕτω τὰ ὅρια τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας  $\Gamma\Sigma B''$  εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ὅταν φθάσῃ, ή κάθετος  $B'\Gamma$  τελειώνει εἰς τὰς στιγμὰς  $B'$  καὶ  $E$ . Ἐκ τῶν στιγμῶν τούτων ἅς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς  $\Sigma\Gamma$  αἱ κάθετοι  $B'I$ ,  $EK'$ , συναπαντῶσαι εἰς  $I$  καὶ  $K'$  τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν μέ τὴν ἀκτῖνα  $\Sigma B''$ , καὶ τὰ ὅρια τῆς  $\Gamma\Sigma B''$  θέλουν εἶναι αἱ γωνίαι  $\Gamma\Sigma I$ ,  $\Gamma\Sigma K'$ .

Ἄλλ' εἰς τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον  $B\Sigma I$ , ἐπειδὴ ή γραμμὴ  $\Sigma\Gamma$  προεκβληθεῖσα συναπαντᾷ κατὰ κάθετον τὴν βάσιν  $B'I$ , ἔχομεν τὴν γωνίαν  $\Gamma\Sigma I = \Gamma\Sigma B' = A\Sigma\Gamma + A\Sigma B'$ . Καὶ εἰς τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον  $E\Sigma K'$ , ἐπειδὴ ή  $\Sigma\Gamma$  εἶναι κάθετος εἰς τὴν  $EK'$ , ἔχομεν τὴν γωνίαν  $\Gamma\Sigma K' = \Gamma\Sigma E$ . Ἄλλως ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων  $A\Sigma E$ ,  $A\Sigma B'$ , ή γωνία  $A\Sigma E = A\Sigma B'$ · λοιπὸν  $\Gamma\Sigma E$  ή  $\Gamma\Sigma K' = A\Sigma\Gamma - A\Sigma B'$ .

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν ὡσάκις ή τρίτη γωνία  $\Gamma\Sigma B''$  εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων  $A\Sigma\Gamma$ ,  $A\Sigma B'$ , ἀλλὰ μεγαλύτερα τῆς διαφορᾶς των: συνθήκη ἣτις συμφωνεῖ μέ τὸ  $KA'$  θεώρημα· διότι, δυνάμει τούτου τοῦ θεωρήματος, πρέπει νά ἦναι  $\Gamma\Sigma B'' < A\Sigma\Gamma + A\Sigma B'$ · πρέπει ὡσαύτως  $A\Sigma\Gamma < \Gamma\Sigma B'' + A\Sigma B'$ , ή  $\Gamma\Sigma B'' > A\Sigma\Gamma - A\Sigma B'$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

#### Πρόβλημα.

Δεδομένων δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν στερεάν γωνίαν, μετὰ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των, νά εὑρεθῇ ή τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Ἔστωσαν  $A\Sigma\Gamma$ ,  $A\Sigma B'$  αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ ἅς ὑποθέσωμεν πρὸς ὀλίγον ὅτι  $\Gamma\Sigma B'$  εἶναι ή τρίτη ζητούμενη γωνία· τότε γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὸ προλαβόν πρόβλημα, ή περιεχομένη γωνία μεταξύ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο πρώτων ἤθελεν εἶναι  $EA\beta$ . Τώρα καθὼς προσδιορίζεται ή γωνία  $EA\beta$  διὰ μέσου τῆς  $\Gamma\Sigma B''$  δεδομένων τῶν δύο ἄλλων. οὕτω δυνατόν εἶναι νά προσδιορισθῇ ή γωνία  $\Gamma\Sigma B''$  διὰ μέσου τῆς  $EA\beta$ , καὶ μέ τοῦτον τὸν τρόπον θέλει λυθῇ τὸ προτεθὲν πρόβλημα.

Ληφθείσης τῆς  $\Sigma B'$  κατ' ἀρέσκειαν, ἅς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς  $\Sigma A$  ή ἀπροσδιόριστος κάθετος  $BE$ , ἅς γένη ή γωνία  $EA\beta$  ἴση μέ τὴν τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων ἀπὸ τὴν στιγμὴν  $\beta$  ὅπου ή πλευρά  $A\beta$  συναπαντᾷ τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου  $A$  μέ τὴν ἀκτῖνα  $AB'$ , ἅς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς  $AE$  ή κάθετος  $\beta O$ ,



καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν  $O$  ἄς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς  $\Sigma\Gamma$  ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος  $ΟΓΒ''$ , ἣτις ἄς περατωθῇ εἰς  $B''$  ὥστε  $\Sigma B'' = \Sigma B'$ . ἡ γωνία  $\Gamma\Sigma B''$  θέλει εἶναι ἡ τρίτη ἐπίπεδος ζητούμενη γωνία.

Διότι ἐὰν σχηματισθῇ στερεὰ γωνία μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $B\Sigma A$ ,  $\Lambda\Sigma\Gamma$ ,  $\Gamma\Sigma B''$ , ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ὅπου εὐρίσκονται αἱ δεδομέναι γωνίαι  $\Lambda\Sigma B'$ ,  $\Lambda\Sigma\Gamma$  θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν  $ΕΑΒ$ . σγ. 198.

**Σχόλιον.** Ἐὰν μία στερεὰ γωνία ᾗται τετραπλῇ, ἡ σχηματισμένη ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας  $\Lambda\Sigma B$ ,  $B\Sigma\Gamma$ ,  $\Gamma\Sigma\Delta$ ,  $\Delta\Sigma A$ , ἡ γῶσις τῶν γωνιῶν τούτων δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἀμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων των· διότι μὲ τὰς αὐτὰς ἐπιπέδους γωνίας δυνατόν νά σχηματισθῇ ἀπειρία στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ἐὰν προστεθῇ μία συνθήκη, ἐὰν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Lambda\Sigma B$ ,  $B\Sigma\Gamma$ , τότε ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη, καὶ δυνατόν εἶναι νά προσδιορισθῇ ἡ κλίσις δύο ὁποιονδήποτε τῶν ἐπιπέδων τῆς. Τῷ ὄντι ἄς φαντασθῶμεν στερεὰν τριπλὴν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας  $\Lambda\Sigma B$ ,  $B\Sigma\Gamma$ ,  $\Lambda\Sigma\Gamma$ . αἱ δύο πρῶται γωνίαι εἶναι δεδομέναι, καθὼς καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων των· δυνατόν λοιπὸν νά προσδιορισθῇ, διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος, ἡ τρίτη γωνία  $\Lambda\Sigma\Gamma$ . Ἀκολούθως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τριπλὴν στερεὰν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας  $\Lambda\Sigma\Gamma$ ,  $\Lambda\Sigma\Delta$ ,  $\Delta\Sigma\Gamma$ , βλέπομεν ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταί· οὕτως ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη. Ἀλλ' ἡ στερεὰ τετραπλῇ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἔνωσιν τῶν εἰρημένων δύο στερεῶν τριπλῶν γωνιῶν· λοιπὸν ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταὶ καὶ προσδιωρισμέναι, ἡ ὅλη γωνία εἶναι παρομοίως γνωστὴ καὶ προσδιωρισμένη.

Ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Lambda\Sigma\Delta$ ,  $\Delta\Sigma\Gamma$ , εὐρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς στερεᾶς γωνίας. Ὅσον διὰ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων  $B\Sigma\Gamma$ ,  $\Gamma\Sigma\Delta$ , πρέπει εἰς μίαν στερεὰν μερικὴν γωνίαν νά ζητηθῇ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Lambda\Sigma\Gamma$ ,  $\Delta\Sigma\Gamma$ , καὶ εἰς ἄλλην ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Lambda\Sigma\Gamma$ ,  $B\Sigma\Gamma$ . τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων  $B\Sigma\Gamma$ ,  $\Delta\Sigma\Gamma$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡθέλαμεν εἶρεν ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν στερεᾶς πενταπλῆς γωνίας, πρέπει νά ᾗται γνωσταὶ ἐκτὸς τῶν πέντε γωνιῶν αἵτινες τὴν συνθέτουν δύο ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων των· ἤθελον χρειασθῇ τρεῖς εἰς τὴν ἑξαπλὴν στερεὰν γωνίαν καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σγ. 199.

## Τ Α Π Ο Λ Υ Ε Δ Ρ Α

## Ορισμοί.

Α'. Καλεῖται στερεὸν πολύεδρον, ἡ ἀπλῶς πολύεδρον, κάθε στερεὸν περατούμενον ἀπὸ ἐπίπεδα ἢ ἑδρας ἐπιπέδους (Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναγκαίως περατοῦνται ἀπὸ εὐθείας γραμμῆς). Ἐν μέρει καλεῖται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἑδρας στερεόν· ἑξάεδρον τὸ ἑξ' ὀκτάεδρον τὸ ὀκτώ· δωδεκάεδρον τὸ δώδεκα· εἰκοσάεδρον τὸ εἴκοσι, κ. τ. λ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἀπλούστερον τῶν πολυέδρων· διότι τοῦλάχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεῆς γωνίας, καὶ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἀφίνουσι κενὸν τι, τὸ ὁποῖον διὰ τὴν κλεισθῆ, ἀπαιτεῖ τοῦλάχιστον τέταρτον ἐπίπεδον.

Β'. Ἡ κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἐδρῶν πολυέδρου τινὸς καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις (1) τοῦ πολυέδρου.

Γ'. Καλεῖται κανονικὸν πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἑδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μετὰξὺ τῶν. Τὰ πολύεδρα ταῦτα εἶναι πέντε τὸν ἀριθμὸν. Ὅρα τὸ παράρτημα εἰς τὰ βιβλία ΣΤ' καὶ Ζ'.

Δ'. Πρίσμα εἶναι τὸ περιεχόμενον στερεὸν ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατουμένων ἀπὸ τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ἀπὸ δύο ἐπίπεδα πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα.

Πρὸς κατασκευὴν τούτου τοῦ στερεοῦ, ἔστω ΑΒΓΔΕ ὁποῖον-δήποτε πολύγωνον· ἐὰν εἰς ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΑΒΓ, ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, κ. τ. λ. ἴσαι καὶ παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλει σχηματισθῇ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ' ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ· ἐὰν ἀκολούθως ἐνωθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἐπιπέδου ἕως τοῦ ἄλλου αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων γωνιῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. αἱ ἑδραι ΑΒΗΖ, ΒΓΘΖ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ τὸ οὕτως σχηματιζόμενον στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ' θέλει εἶναι πρίσμα. σχ. 200.

Ε'. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ', καλοῦνται βάσεις τοῦ πρίσματος· τὰ ἄλλα παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα ὁμοῦ λαμβανόμενα συνιστοῦν τὴν παρά πλευρον

(1) Κρίνιν ὀνόματα τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει (arête) διότι ἡ λέξις αὕτη μὲ ἱρὰν κατὰκλιπὴ καὶ συνήθη εἰς τὴν γλῶσσάν μας.

(laterale) ἡ κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι AZ, BH, ΓΘ, κ. τ. λ. καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πρίσματος.

ΣΤ'. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο του βάσεων, ἡ ἡ γήμενὴ κάθετος ἀπὸ ἐν σημείου τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω.

Ζ'. Τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν, ὅταν αἱ πλευραὶ AZ, BH, κ. τ. λ. ᾗναι κάθετοι εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων: τότε ἐκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· εἰς κάθε ἄλλην περίστασιν τὸ πρίσμα εἶναι πλάγιον, καὶ τὸ ὕψος εἶναι μικρότερον τῆς πλευρᾶς· διότι ἐκεῖνο μὲν εἶναι κέθετος, αὕτη δὲ πλαγία.

Η'. Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικόν, ἑξαγωνικόν, κ. τ. λ. καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

Θ'. Τὸ πρίσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, ἔχει ὅλας του τὰς ἑδρας παραλληλογραμμικάς· καλεῖται δὲ παραλληλεπίπεδον. σχ. 206.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν ὅλαι του αἱ ἑδραι ᾗναι ὀρθογώνιαι.

Ι'. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ κύβος ἡ τὸ κανονικόν ἑξάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ἑξ ἴσων τετραγώνων.

ΙΑ'. Πυραμὶς εἶναι τὸ σχηματιζόμενον στερεόν ὅταν πολλὰ τριγωνικά ἐπίπεδα ἀναχωροῦντα ἀπὸ τὴν αὐτὴν στιγμὴν Σ, τελειοῦν εἰς τὰς διαφόρους πλευράς τοῦ αὐτοῦ πολυγωνικοῦ ἐπιπέδου ABΓΔΕ. σχ. 196.

Τὸ πολύγωνον ABΓΔΕ καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, ἡ στιγμὴ Σ κορυφή, καὶ ἡ ἔνωσις τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ. σχηματίζει τὴν κυρτὴν ἢ παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

ΙΒ'. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, προεκβαλλόμενον εἰς ἡν ᾗναι ἀναγκαῖον.

ΙΓ'. Ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, κ. τ. λ. καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον (εἰς γενικὴν σημασίαν) κ. τ. λ.

ΙΔ'. Ἡ πυραμὶς εἶναι κανονικὴ, ὅταν ἡ βάσις εἶναι κανονικόν πολύγωνον, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ταύτης τῆς βάσεως· ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται τότε ἄξων τῆς πυραμίδος.



ΙΕ'. Διαγώνιος πολυέδρου τινός, είναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἐνώνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν.

ΙΣΤ'. Καλῶ συμμετρικὰ πολύεδρα δύο πολύεδρα τὰ ὁποῖα, ἔχοντα μίαν κοινὴν βάσιν, εἶναι ὁμοίως κατασκευασμένα, τὸ μὲν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, τὸ δὲ ὑποκάτω, μὲ ταύτην τὴν συνθήκην, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν νὰ κεῖνται εἰς ἴσα διαστήματα ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, μετρούμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Ἐάν, π. χ. ἡ εὐθεῖα ΣΤ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ο, ὅπου συναπαντᾷ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ, θέλουν εἶναι δύο συμμετρικὰ πολύεδρα. σχ. 202.

ΙΖ'. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες λέγονται ὅμοιαι, ὅταν ἔχουν δύο ἔδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκεις κλινούσας.

Οὕτως, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ γωνίαι  $ΑΒΓ = ΔΕΖ$ ,  $ΒΑΓ = ΕΔΖ$ ,  $ΑΒΣ = ΔΕΤ$ ,  $ΒΑΣ = ΕΔΤ$ , ἔάν περιπλέον ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΒΣ, ΑΒΓ, ἦναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων τῶν ΔΤΕ, ΔΕΖ, αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, θέλουν εἶναι ὅμοιαι. σχ. 203.

ΙΗ'. Ἀφ' οὗ σχηματισθῇ τρίγωνον μὲ τὰς κορυφὰς τριῶν γωνιῶν εἰλημένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔδρας ἡ βάσεως πολυέδρου τινός, ἡμπορεῖ τις νὰ φαντασθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν διαφόρων στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως κειμένων, εἶναι κορυφαὶ τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ σημειωθὲν τρίγωνον· ἐκάστη δὲ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει προσδιορίζει τὴν θέσιν καθεμιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ πολυέδρου ὡς πρὸς ταύτην τὴν βάσιν. Τούτου θεθέντος :

Δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια ὅταν, ἐν ᾧ ἔχουν βάσεις ὁμοίας, αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς τούτων τῶν βάσεων, προσδιορίζονται ἀπὸ τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

ΙΘ'. Καλῶ κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου τὰς στιγμὰς αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς τῶν διαφόρων στερεῶν γωνιῶν του.

Σ. Κ. Ὅλα τὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν, εἶναι πολύεδρα μὲ γωνίας ἐξελούσας ἢ κυρτὰ πολύεδρα. Καλοῦμεν οὕτως ἐλεῖνα τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἡμπορεῖ νὰ συναπαντηθῇ ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεία. Εἰς τοιοῦτου εἶδους πολύεδρα τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἔδρας ἔάν προεκκληθῇ, δὲν ἡμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὸ πολύεδρον· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι μέρος τοῦ πολυέδρου νὰ εὑρίσκηται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἔδρας, καὶ μέρος ὑποκάτω· τὸ πολύεδρον εἶναι ὅλον ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος· τούτου τοῦ ἐπιπέδου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

## Θεώρημα.

Δύο πολυέδρα δὲν ἡμικοῦν νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς χωρὶς νὰ ἐφαρμόζηται τὸ ἐν μὲ τὸ ἄλλο.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ἐν τῶν πολυέδρων κατεσκευασμένον. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἐν ἄλλο, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, πρέπει τὰ ἐπίπεδα τούτου νὰ μὴ διέρχωνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται τὰ ἐπίπεδα τοῦ πρώτου· διότι ἄλλως δὲν ἤθελε διαφέρει τὸ ἐν ἀπὸ τὸ ἄλλο: πλὴν τότε φανερὸν εἶναι ὅτι μερικὰ τῶν νέων ἐπιπέδων ἤθελον τέμνει τὸ πρῶτον πολυέδρον· ἤθελον ὑπάρχει κορυφαὶ ἄνω τούτων τῶν ἐπιπέδων, καὶ κορυφαὶ ὑποκάτω, τὸ ὁποῖον δὲν ἡμικοῦν νὰ ἀνήκῃ εἰς κυρτὸν πολυέδρον: λοιπὸν ἐὰν δύο πολυέδρα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἐφαρμόζηται τὸ ἐν μὲ τὸ ἄλλο.

Σχόλιον. Δεδομένων κατὰ θέσιν τῶν σημείων  $A, B, \Gamma, K$ , κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ χρησιμεύσουν ὡς κορυφαὶ ἐνὸς πολυέδρου, εὐκόλον εἶναι νὰ διαγράψωμεν τὸ πολυέδρον.

Ἐκλέγομεν τρία πλησίον σημεῖα  $\Delta, E, \Theta$ , τοιαῦτα ὥστε τὸ ἐπίπεδον  $\Delta E \Theta$  νὰ διέρχεται, ἐὰν τοῦτο ἔχῃ χώραν, διὰ νέων σημείων  $K', \Gamma$ , ἀλλ' ἔλα τὰ ἄλλα νὰ ἀφίγη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ ἔλα ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ἢ ἔλα ὑποκάτω· τὸ ἐπίπεδον  $\Delta E \Theta$  ἢ  $\Delta E \Theta K \Gamma$ , οὕτω προσδιορισμένον, θέλει εἶναι μία ἔδρα τοῦ στερεοῦ. Διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ  $E \Theta$  περνοῦμεν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον περιστρέφομεν ἕως οὔ νὰ συναπαντήσῃ νέαν κορυφὴν  $Z$ , ἢ πολλὰς ἐν ταύτῃ  $Z, \Gamma$  θέλομεν ἔχει μίαν δευτέραν ἔδραν τὴν  $Z E \Theta$  ἢ  $Z E \Theta \Gamma$ . ἐξακολουθοῦμεν νὰ περνοῦμεν ἐπίπεδα διὰ τῶν εὐρημένων πλευρῶν, ἕως οὔ τὸ στερεὸν νὰ περατωθῇ πανταχόθεν: τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πολυέδρον, διότι δὲν ὑπάρχουν δύο τὰ ὁποῖα νὰ ἡμικοῦν νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς κορυφὰς. σχ. 204.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

## Θεώρημα.

Εἰς δύο συμμετρικὰ πολυέδρα αἱ ὁμόλογοι ἔδραι εἶναι ἴσαι ἢ καθε μία μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἔδρων εἰς τὸ ἐν τούτων τῶν στερεῶν, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν ὁμολόγων ἔδρων εἰς τὸ ἄλλο.

Ἐστω  $AB\Gamma\Delta E$  ἡ κοινὴ βᾶσις εἰς τὰ δύο πολυέδρα, ἔστωσαν  $M$  καὶ  $N$  αἱ κορυφαὶ δύο ὁποιοῦνδήποτε στερεῶν γωνιῶν τοῦ ἐνός

πολυέδρου,  $M'$  καὶ  $N'$  αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τοῦ ἄλλου· πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν, αἱ εὐθεῖαι  $MM'$ ,  $NN'$ , νὰ ᾔηται κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον  $AB\Gamma$ , καὶ νὰ διαιρῶνται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὰς στιγμάς  $\mu$  καὶ  $\nu$  ὅπου συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι τὸ διάστημα  $MN$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ  $M'N'$ . σχ. 205.

Διότι ἐὰν στραφῇ τὸ τραπέζιον  $\mu M'N'$  ὁλόγυρα τῆς  $\mu\nu$  ἕως οὗ τὸ ἐπίπεδόν του νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου  $\mu MN$ · ἐξ αἰτίας τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς  $\mu$  καὶ εἰς  $\nu$ , ἡ πλευρὰ  $\mu M'$  θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $\mu M$ , καὶ ἡ  $\nu N'$  ἐπὶ τῆς  $\nu N$ · λοιπὸν τὰ δύο τραπέζια θέλουν ἐφαρμόσει, καὶ θέλει εἶναι  $MN = M'N'$ .

Ἔστω  $\Pi$  μία τρίτη κορυφή τοῦ ἄνω πολυέδρου, καὶ  $\Pi'$  ἡ ὁμόλογος αὐτῇ εἰς τὸ κάτω, ὡσαύτως θέλει εἶναι  $M\Pi = M'\Pi'$  καὶ  $N\Pi = N'\Pi'$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $MN\Pi$ , τὸ ὁποῖον ἐνδύει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἄνω πολυέδρου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $M'N'\Pi'$  τὸ ὁποῖον ἐνδύει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ κάτω πολυέδρου.

Ἐὰν μεταξὺ τούτων τῶν τριγώνων θεωρήσωμεν μόνον τὰ σχηματιζόμενα εἰς τὴν ἐπιφανείαν τῶν πολυέδρων, ἡμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ ἐπιφανεῖαι τῶν δύο πολυέδρων σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων τὰ ὅποια εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν.

Λέγω τώρα ὅτι ἐὰν τινὰ ἐκ τούτων τῶν τριγώνων εὐρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν πολύγωνον ἑδραν, τὰ ὁμολογὰ τρίγωνα θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας καὶ σχηματίζει μίαν ἴσην πολύγωνον ἑδραν.

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν  $MN\Pi$ ,  $N\Pi K$ , δύο προσκείμενα τρίγωνα τὰ ὅποια ὑποτίθενται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν  $M'\Pi N'$ ,  $N'\Pi K'$  τὰ ὁμολογὰ τῶν. Ἐχομεν τὴν γωνίαν  $MN\Pi = M'N'\Pi'$ , τὴν γωνίαν  $N\Pi K = N'\Pi K'$ · καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $MK$ ,  $M'K'$ , τὸ τρίγωνον  $MNK$  θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ  $M'N'K'$ , οὕτως ἡ γωνία  $MNK = M'N'K'$ . Ἀλλ' ἐπειδὴ  $MN\Pi K$  εἶναι ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἔχομεν τὴν γωνίαν  $MNK = MN\Pi + N\Pi K$ · λοιπὸν ὡσαύτως  $M'N'K' = M'N'\Pi' + N'\Pi K'$ . Τώρα, ἐὰν τὰ τρία ἐπίπεδα  $M'N'\Pi'$ ,  $N'\Pi K'$ ,  $MNK$  δὲν ἐστατίζοντο, ἤθελον σχηματίζει στερεὰν γωνίαν, καὶ ἤθελον εἶναι  $(20, 5)$   $M'N'K' < M'N'\Pi' + N'\Pi K'$ · λοιπὸν, ἐπειδὴ αὕτη ἡ συνθήκη δὲν ἔχει χώραν, τὰ δύο τρίγωνα  $MN\Pi$ ,  $N\Pi K$ , εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι κάθε ἑδρα, εἴτε τριγωνική εἴτε πολύγωνος εἰς τὸ ἓν πολυέδρον, ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἴσην ἑδραν εἰς τὸ ἄλλο,



καὶ οὕτως τὰ δύο πολύεδρα περιέχονται ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν.

Μένει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιονδήποτε προσκειμένων ἐδρῶν εἰς τὸ ἓν πολύεδρον εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἐδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Ἐστωσαν  $M\Pi N$ ,  $N\Pi K$ , δύο τρίγωνα σχηματισμένα ἐπὶ τῆς κοινῆς κόψεως  $N\Pi$  εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἐδρῶν ἔστωσαν  $M'\Pi N'$ ,  $N'\Pi K'$ , τὰ ὁμολογὰ των· ἡμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν εἰς  $N$  γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $MNK$ ,  $M\Pi N$ ,  $\Pi NK$ , καὶ εἰς  $N'$  γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς  $M'N'K'$ ,  $M'\Pi N'$ ,  $\Pi N'K'$ . Τώρα, ἐδείξαμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαί εἶναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων  $M\Pi N$ ,  $\Pi NK$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των  $M'\Pi N'$ ,  $\Pi N'K'$  (22, 5).

Λοιπὸν εἰς τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα, αἱ ἔδραι εἶναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰ ἐπίπεδα δύο ὁποιονδήποτε προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν στερεῶν, ἔχουν μεταξὺ των τὴν αὐτὴν κλίσιν τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο ὁμολόγων ἐδρῶν τοῦ ἄλλου.

**Σχόλιον.** Δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαί τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι αἱ συμμετρικαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου· διότι ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία  $\Pi$  σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα  $M\Pi N$ ,  $\Pi NK$ ,  $K\Pi P$  κ. τ. λ. ἡ ὁμολογος αὐτῇ  $N'$  σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα  $M'\Pi N'$ ,  $\Pi N'K'$ ,  $K'\Pi P'$ , κ. τ. λ. Ταῦτα φαίνονται διατεταγμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὥς καὶ τὰ ἄλλα· πλὴν ἐπειδὴ αἱ δύο στερεαὶ γωνίαί εἶναι εἰς θέσιν ἀντίστροφον ἢ μία ὥς πρὸς τὴν ἄλλην, ἔπεται ὅτι ἡ πραγματικὴ διάταξις τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν  $N'$  εἶναι ἀντίστροφος τῆς διατάξεως ἣτις ὑπάρχει εἰς τὴν ὁμολόγον γωνίαν  $N$ . Ἄλλως ἡ κλίσις τῶν προσεχῶν ἐπιπέδων εἶναι ἴση εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην στερεὰν γωνίαν· λοιπὸν αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαί εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης. Βλέπε τὸ σχόλιον τῆς  $K\Gamma'$  προτάσεως, βιβλ. Ε'.

Ἡ σημείωσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁποιονδήποτε πολύεδρον ἔν μόνον συμμετρικὸν δύναται νὰ ἔχῃ. Διότι ἐὰν ἐπὶ ἄλλης βάσεως κατασκευασθῇ νέον πολύεδρον συμμετρικὸν μὲ τὸ δεδομένον, αἱ στερεαὶ τοῦ γωνίαί πάντοτε θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἐπὶ τῆς πρώτης βάσεως κατασκευασμένου. Ἄλλως αἱ ὁμολογοὶ ἔδραι θέλουν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα συμμετρικὰ πολύεδρα ἐπὶ μιᾷ ἢ ἄλλης βάσεως

κατασκευασμένα θέλουν ἔχει τὰς ἑδρας καὶ τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας· λοιπὸν θέλουν ἐφαρμόσει διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ σχηματίζει ἐν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ πολυέδρον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. +

Θεώρημα.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν στερεάν γωνίαν περιχομένην μεταξὺ τριῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἐν μὲ τὸ κάθε ἐν καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐστω ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἴση μὲ τὴν βάσιν αβγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΖ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον αβηζ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΘΗ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον βγθη· λέγω ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΙ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρίσμα αβγι. σχ. 200.

Διότι ἂς τεθῇ ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν αβγδε, αἱ δύο αὗται βάσεις θέλουν ἐφαρμόσει· ἀλλ' αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Β εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν β, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τοὔτεστι, ΑΒΓ=αβγ, ΑΒΗ=αβη, καὶ ΗΒΓ=ηβγ· περιπλέον αἱ γωνίαι αὗται κεῖνται ὁμοίως· λοιπὸν αἱ στερεαὶ γωνίαι Β καὶ β εἶναι ἴσαι, καὶ ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΒΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν βη. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων παραλληλογράμμων ΑΒΗΖ, αβηζ, ἡ πλευρὰ ΗΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ηζ, καὶ ὁμοίως ἡ ΗΘ ἐπὶ τῆς ηθ· λοιπὸν ἡ ἄνω βάσις ΖΗΘΙΚ' θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ τὴν ἴσην μὲ αὐτὴν ζηθικ', καὶ τὰ δύο στερεὰ θέλουν ταυτισθῇ· διότι θέλουν ἔχει τὰς αὐτὰς κορυφάς (πρό. Ι).

Πόρισμα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας, καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἴσα. Διότι οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης μὲ τὴν αβ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ἴσου μὲ τὸ βη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον αβηζ· τὸ αὐτὸ θέλει ὑπάρχει διὰ τὰ ὀρθογώνια ΒΗΘΓ, βηθγ. Οὕτως τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Β εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν β. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Κατὰ τὸν ὅρισμὸν τούτου τοῦ στερεοῦ, αἱ βάσεις ΑΒΓΔ,

**ΕΖΗΘ**, είναι παραλληλόγραμμο ἴσα, καὶ αἱ πλευραὶ τῶν εἶναι παράλληλοι: μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ἀπέναντι παραπλεύρους ἑδρας, ὡς **ΑΕΘΔ**, **ΒΖΗΓ**. Τώρα **ΑΔ** εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ **ΒΓ**: διότι τὸ σχῆμα **ΑΒΓΔ** εἶναι παραλληλόγραμμον διὰ τὸν αὐτὸν λόγον **ΑΕ** εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ **ΒΖ**: λοιπὸν ἡ γωνία **ΔΑΕ** εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ **ΓΒΖ** (13, 5), καὶ τὸ ἐπίπεδον **ΔΑΕ** παράλληλον τοῦ **ΓΒΖ**: λοιπὸν ὡς αὐτῶς τὸ παραλληλόγραμμον **ΔΑΕΘ** εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον **ΓΒΖΗ**. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμο **ΑΒΖΕ**, **ΔΓΗΘ**, εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. σγ. 206.

**Πόρισμα.** Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐξ ἐπιπέδων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ ἀπέναντι εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, ἔπεται ὅτι μία ὁποιαδήποτε ἑδρα καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἡμποροῦν νὰ ληρθοῦν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

**Σχόλιον.** Δεδομένων τριῶν εὐθειῶν **ΑΒ**, **ΑΕ**, **ΑΔ** αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς στιγμῆς **Α**, καὶ κάμνουν μεταξύ των γωνίας δεδομένας, δυνατόν εἶναι ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον: πρὸς τοῦτο πρέπει ἀπὸ τὸ ἄκρον ἐκάστης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων τούτεστιν ἀπὸ τὴν στιγμὴν **Β** ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ **ΔΑΕ**, ἀπὸ τὴν στιγμὴν **Δ** ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ **ΒΑΕ**: καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν **Ε** ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ **ΒΑΔ**: αἱ ἀμοιβαῖαι συναπαντήσεις τούτων τῶν ἐπιπέδων θέλουν σχηματίσει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

### Θεώρημα.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον αἱ ἀπέναντι στερεαὶ γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης καὶ αἱ ἡγμέναι διαγώνιοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἄς συγκρίνομεν, παραδείγματος χάριν, τὴν στερεὰν γωνίαν **Α** μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς **Η**: ἡ γωνία **ΕΑΒ**, ἴση τῇ **ΕΖΒ**, εἶναι ὁμοίως ἴση τῇ **ΘΗΓ**, ἡ γωνία **ΔΑΕ** = **ΔΘΕ** = **ΓΗΖ**, καὶ ἡ γωνία **ΔΑΒ** = **ΔΓΒ** = **ΘΗΖ**: λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν **Α** εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν **Η**, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν ἄλλως εὐκόλον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ διάταξις των διαφέρει εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην: λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι **Α** καὶ **Η** εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης (23, 5).



Ἄς φαντασθῶμεν τώρα δύο διαγωνίους ΕΓ, ΑΗ, ἡγμένους ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφάς: ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΗ, τὸ σχῆμα ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν αἱ διαγωνίαι ΕΓ, ΑΗ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Ὅμοίως θέλομεν δεῖξει ὅτι ἡ διαγωνίος ΕΓ καὶ μία ἄλλη ΔΖ τέμνονται ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> αἱ τέσσαρες διαγωνίαι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς ἴσα μέρη, εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν ἣτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

### Θεώρημα.

Τὸ ἐπίπεδον ΒΔΘΖ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι παραλλήλων κορυφῶν ΒΖ, ΔΘ, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ εἰς δύο πρίσματα τριγωνικὰ ΑΒΔΘΕΖ, ΗΘΖΒΓΔ, συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου. σχ. 207.

Κατὰ πρῶτον τὰ δύο ταῦτα στερεὰ εἶναι πρίσματα· διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΖΘ, ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι ἴσα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ παράπλευροι ἑδραὶ ΑΒΖΕ, ΑΔΘΕ, ΒΔΘΖ, εἶναι παραλληλόγραμμα· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΒΔΘΕΖ εἶναι πρίσμα: τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ στερεὸν ΗΘΖΒΓΔ· λέγω τώρα ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΔ ἂς γένη τὸ πρίσμα ΑΒΔΕΖΘ' τὸ ὁποῖον νὰ ᾖ τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΕΖΘ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρό. 2) τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ'Ε' εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖΕ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘ'Ε' ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘΕ· ἀλλ' ἡ σύγκρισις τοῦ πρίσματος ΗΘΖΒΓΔ μὲ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'ΕΖ', δεικνύει ὅτι ἡ βάσις ΗΘΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΔ· τὸ παραλληλόγραμμον ΗΘΔΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΒΖΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΒΖ'Ε', καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖΒΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΔΘΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΔΘ'Ε'· λοιπὸν τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Η εἰς τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Α εἰς τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'ΕΖ', τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν ἄλλως εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρό. 3), καὶ ἡμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσιν. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'ΕΖ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘΕΖ· λοιπὸν καὶ τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ὡσαύτως τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΔΘΕΖ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

## Λήμμα.

Εἰς κάθε πρίσμα ΑΒΓΙ, αἱ γινόμεναι τομαὶ ΝΟΠΚΡΣΤΦΧΨ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι πολύγωνα ἴσα. σχ. 201.

Διότι αἱ πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ, εἶναι παράλληλοι, ὥς κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου ΑΒΗΖ· αἱ ἴδιαι πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ περιέχονται μεταξύ τῶν παραλλήλων ΝΣ, ΟΤ αἵτινες εἶναι πλευραὶ τοῦ πρίσματος· λοιπὸν ΝΟ εἶναι ἴση τῇ ΣΤ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΟΠ, ΠΚ, ΚΡ, κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΤΦ, ΦΧ, ΧΨ κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΣΤΦΧΨ. Ἄλλως ἐπειδὴ αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι καὶ παράλληλοι, ἔπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κ. τ. λ. τῆς πρώτης τομῆς, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΣΤΦ, ΤΦΧ, κ. τ. λ. τῆς δευτέρας. Λοιπὸν αἱ δύο τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΦΧΨ, εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Πόρισμα. Κάθε τομὴ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάσιν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

## Θεώρημα.

Τὰ δύο συμμετρικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΒΓΔΖΗΘ, εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, εἶναι ἰσodύναμα μεταξύ των. σχ. 208.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Ζ ἄς ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Ζεθι κάθετα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΖ, τὰ ὁποῖα συναπαντοῦν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος εἰς α, δ, γ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰς ε, θ, η, τὰς τρεῖς ἄλλας πλευρὰς ΕΑ, ΔΘ, ΓΗ τοῦ ἰδίου παραλληλεπίπεδου· αἱ τομαὶ Βαδγ, Ζεθι εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι ὥς τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων εἰς τὴν αὐτὴν εὐθείαν καὶ ἐπομένως παραλλήλων (πρό. 7)· εἶναι παραλληλόγραμμα, διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ τῆς αὐτῆς τομῆς αΒ, δγ, εἶναι αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ λόγον παρόμοιον, τὸ σχῆμα ΒαεΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι εἶναι ΒΖηγ, γδθη, αδθε, τοῦ στερεοῦ ΒαδγΖεθι· λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρ. 4)· καὶ τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι ὀρθόν, διότι ἡ πλευρὰ ΒΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΖΘΔ μοιρασθῇ τὸ ὀρθὸν πρίσμα Βθ εἰς δύο τριγωνικὰ ὀρθὰ πρίσματα αΒδεΖθ, ΒδγΖθη·

λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα  $AB\Delta EZ\Theta$ , θέλει ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ τριγωνικὸν ὀρθὸν  $\alpha B\delta\epsilon Z\theta$ .

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ἔχουν κοινὸν τὸ στερεὸν  $AB\Delta\theta\epsilon Z$ , ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη δηλαδὴ, τὰ στερεὰ  $B\alpha A\Delta\delta$ ,  $Z\epsilon E\Theta\theta$  εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Τώρα ἐξ αἰτίας τῶν παραλληλογράμμων  $ABZE$ ,  $\alpha BZe$ , αἱ πλευραὶ  $AE$ ,  $\alpha\epsilon$ , ἴσαι μετὰ τὴν παράλληλόν των  $BZ$ , εἶναι καὶ μεταξὺ των ἴσαι οὕτω, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κοινοῦ μέρους  $A\epsilon$ , μένει  $A\alpha = E\epsilon$ . Ὁμοίως δείξομεν ὅτι  $\Delta\delta = \Theta\theta$ .

Ἦδη, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο στερεῶν  $B\alpha A\Delta\delta$ ,  $Z\epsilon E\Theta\theta$ , ἃς θέσωμεν τὴν βάσιν  $Z\epsilon\theta$  ἐπὶ τῆς ἴσης μετὰ αὐτὴν  $B\alpha\delta$ · τότε ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ  $\epsilon$  πίπτει εἰς  $\alpha$ , καὶ ἡ  $\theta$  εἰς  $\delta$ , αἱ πλευραὶ  $\epsilon E$ ,  $\Theta\theta$ , θέλουσι πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων μετὰ αὐτάς  $\alpha A$ ,  $\Delta\delta$ , διότι εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον  $B\alpha\delta$ . λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος κατὰ πάντα θέλουσι ἐφαρμόσει τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο· λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα  $BA\Delta ZE\Theta$  ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ ὀρθὸν  $B\alpha\delta Z\epsilon\theta$ .

Μετὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλομεν δείξει ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα  $B\Delta\Gamma Z\Theta H$  ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ ὀρθὸν  $B\delta\gamma Z\theta\eta$ . Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα  $B\alpha\delta Z\epsilon\theta$ ,  $B\delta\gamma Z\theta\eta$  εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος  $BZ$  καὶ αἱ βάσεις των  $B\alpha\delta$ ,  $B\delta\gamma$  εἶναι ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου (πρό. 3. πόρ.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικά πρίσματα  $BA\Delta ZE\Theta$ ,  $B\Delta\Gamma Z\Theta H$ , ἰσοδύναμα μετὰ ἴσα πρίσματα, εἶναι καὶ μεταξύ των ἰσοδύναμα.

**Πόρισμα.** Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα  $AB\Delta\Theta EZ$  εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου  $AH$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας  $A$ , μετὰ τὰς αὐτάς κόψεις  $AB$ ,  $AD$ ,  $AE$  κατασκευαζομένου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο παραλληλεπίπεδα  $AH$ ,  $AL$ , ἔχουν μίαν κοινὴν βάσιν  $AB\Gamma\Delta$ , καὶ αἱ ἄνω βάσεις των  $EZH\Theta$ ,  $IK'\Lambda M$ , περιέχωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξύ τῶν αὐτῶν παραλλήλων  $EK'$ ,  $\Theta\Lambda$ , τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα θέλουσι εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 209.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατόν νὰ ἀκολουθήσουν, καθὼς ἡ  $EI$  εἶναι μείζων, μικρότερα ἢ ἴση τῇ  $EZ$ · πλὴν ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας· καὶ κατὰ πρῶτον λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα  $AEI\Delta\Theta M$  εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τριγωνικὸν  $BZK'\Theta H\Lambda$ .

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ  $AE$  εἶναι παράλληλος τῇ  $BZ$  καὶ ἡ  $\Theta E$  τῇ



$HZ$ , ἡ γωνία  $AEI=BZK'$ ,  $\Theta EI=HZK'$ , καὶ  $\Theta EA=HZB$ . Ἀπὸ τὰς ἑξ ταύτας γωνίας αἱ τρεῖς πρῶται σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν  $E$ , αἱ τρεῖς ἄλλαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν  $Z$ . λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως διατεταγμένοι, ἔπεται ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι  $E$  καὶ  $Z$  εἶναι ἴσαι. Ἦδη, ἐὰν τεθῇ τὸ πρίσμα  $AEM$  ἐπὶ τοῦ πρίσματος  $BZA$ , κατὰ πρῶτον ἡ βάσις  $AEI$  ἐπὶ τῆς βάσεως  $BZK$ , αἱ δύο αὗται βάσεις ὡς ἴσαι θέλουν ἐφαρμόσει καὶ ἐπειδὴ ἡ στερεὰ γωνία  $E$  εἶναι ἴση τῇ στερεᾷ γωνίᾳ  $Z$ , ἡ πλευρὰ  $E\Theta$  θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν  $ZH$ : ἀλλὰ δὲν εἶναι χρεῖα περισσότερον διὰ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὰ δύο πρίσματα θέλουν ἐφαρμόσει καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν· διότι ἡ βάσις  $AEI$  καὶ ἡ κόψις  $E\Theta$  προσδιορίζουν τὸ πρίσμα  $AEM$ , ὡς ἡ βάσις  $BZK'$  καὶ ἡ κόψις  $ZH$  προσδιορίζουν τὸ πρίσμα  $BZA$  (πρό. 3). λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἄλλ' ἐὰν ἀπὸ τὸ στερεὸν  $AA$  ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα  $AEM$ , μένει τὸ παραλληλεπίπεδον  $AIA$ . καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ στερεὸν  $AA$  ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα  $BZA$ , μένει τὸ παραλληλεπίπεδον  $AEH$ . λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα  $AIA$ ,  $AEH$ , εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

### Θεώρημα.

Δύο παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

Ἐστω  $AB\Gamma\Delta$  ἡ κοινὴ βάση εἰς τὰ δύο παραλληλεπίπεδα  $AH$ ,  $AA$ . ἐπειδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των  $EZH\Theta$ ,  $IK'AM$ , θέλει εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Περιπλέον αἱ πλευραὶ  $EZ$  καὶ  $AB$  εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς  $IK'$  καὶ  $AB$ . λοιπὸν  $EZ$  εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ  $IK'$ : διὰ τὸν αὐτὸν λόγον  $HZ$  εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ  $AK'$ . Ἀς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ  $EZ$ ,  $H\Theta$ , καθὼς καὶ αἱ  $AK'$ ,  $IM$ , ἕως οὗ καὶ αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι μὲ τὰς συναπαντήσεις των νὰ σχηματίσουν τὸ παραλληλόγραμμον  $NO\Gamma K$ . φανερόν εἶναι ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο θέλει ἰσοῦται μὲ κάθε μίαν τῶν βάσεων  $EZH\Theta$ ,  $IK'AM$ . Τώρα ἐὰν φαντασθῶμεν τρίτον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον μὲ τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν  $AB\Gamma\Delta$ , νὰ ἔχῃ δι' ἄνω βάσιν  $NO\Gamma K$ , τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἠθέλην ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον  $AH$  (πρό. 9), διότι ἐν ᾧ ἔχουν τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν, αἱ ἄνω βάσεις περιέχονται

εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΗΚ, ΖΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των. σχ. 210.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

#### Θεώρημα.

Κάθε παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ τρεθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἰσοδύναμον.

Ἐστω ΑΗ τὸ προτεθὲν παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Β, Γ, Δ, ἃς ἀρχθῶσιν αἱ ΑΙ, ΒΚ', ΓΛ, ΔΜ κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Οὕτω θέλει σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ ἰσοδύναμον μετὰ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἔδραι ΑΚ', ΒΛ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ὀρθογώνια. (σχ. 210). Ἐάν λοιπὸν ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον ΑΛ, θέλει εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἰσοδύναμον μετὰ τὸ προτεθὲν ΑΗ (σχ. 211). Ἀλλ' ἐάν ΑΒΓΔ δὲν ᾖ ὀρθογώνιον, ἃς ἀρχθῶσιν ΑΟ καὶ ΒΝ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἀκολουθῶς ΟΚ καὶ ΝΠ κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως· θέλει προκύψει τὸ στερεὸν ΑΒΝΟΙΚ'ΠΚ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ βάσις ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΙΚ'ΠΚ εἶναι ὀρθογώνια· αἱ παράπλευροι ἔδραι εἶναι ὁμοίως, διότι αἱ κόψεις ΑΙ, ΟΚ κ. τ. λ. εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΠ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΠ, ΑΛ ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΚ'Ι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα· λοιπὸν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, τὸ ὁποῖον κατὰ πρῶτον ἐτρέφθη (σχ. 210 καὶ 211) εἰς ἰσοδύναμον παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἰσοδυναμεῖ τώρα μετὰ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΠ, ὕψος τοῦ ὁποίου εἶναι ΑΙ καὶ βάσις ΑΒΝΟ ἰσοδύναμος μετὰ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

#### Θεώρημα.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ, εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΙ. σχ. 212.

Ἀς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ εἶναι μεταξὺ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, παραδείγματος χάριν, ὡς 15 πρὸς 8. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν

ὁποίων ΑΙ θέλει περιέχει 8, καὶ ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς διαιρέσεως χ, ψ, ω, κ. τ. λ. ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουν μοιράσει τὸ στερεὸν ΑΗ εἰς 15 μερικὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὅλα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα· βάσεις ἴσας, διότι κάθε τομὴ ὡς ΜΙΚ'Μ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔ, εἶναι ἴση μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν (πρό. 7)· ὕψη ἴσα, διότι ταῦτα τὰ ὕψη εἶναι αἱ ἴδιαι διαιρέσεις Αχ, χψ, χω, κ. τ. λ. Τώρα, ἀπὸ ταῦτα τὰ 15 ἴσα παραλληλεπίπεδα, ὁκτὼ περιέχονται εἰς ΑΛ· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΗ εἶναι πρὸς τὸ στερεὸν ΑΛ ὡς 15 πρὸς 8, ἢ ἐν γένει ὡς τὸ ὕψος ΑΕ πρὸς τὸ ὕψος ΑΙ.

Δεύτερον, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ ὕψους ΑΕ πρὸς ΑΙ δὲν ἡμπορῇ νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμῶν, λέγω ὅτι ἐπίσης θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ: στερ. ΑΛ:: ΑΕ: ΑΙ. Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, ἅς ὑποθέσωμεν ὅτι στερ. ΑΗ: στερ. ΑΛ:: ΑΕ: ΑΟ. Ἄς διαιρεθῇ ΑΕ εἰς ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ᾖται μικρότερον παρὰ ΟΙ· τοῦλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἐν σημεῖον διαιρέσεως μ μεταξύ Ο καὶ Ι. Ἐστω Π τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓΔ καὶ ὕψος Αμ· ἐπειδὴ τὰ ὕψη ΑΕ, Αμ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ: Π:: ΑΕ: Αμ. Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως, στερ. ΑΗ: στερ. ΑΛ:: ΑΕ: ΑΟ· ἐντεῦθεν ἔπεται στερ. ΑΛ: Π:: ΑΟ: Αμ. Ἀλλὰ ΑΟ > Αμ ἔπρεπε λοιπὸν, διὰ τὴν ὑπάρχῃ ἢ ἀναλογία, τὸ στερεὸν ΑΛ νὰ ᾖται > Π. Ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον: ἀδύνατον λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας στερ. ΑΗ: στερ. ΑΛ:: ΑΕ: χ νὰ ᾖται γραμμὴ μείζων τῆς ΑΙ. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἡθέλαμεν δεῖξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖται γραμμὴ ἐλάσσων τῆς ΑΙ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ ΑΙ· λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΚ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ. σχ. 213.

Ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο στερεὰ ἐν πλησίον τοῦ ἄλλου, ὡς τὸ σχῆμα τὰ παριστάνει, ἅς προεκβληθῇ τὸ ἐπίπεδον ΟΝΚ'Λ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΗΘ κατὰ τὴν ΠΚ· θέλει προκύψει τρίτον παραλληλεπίπεδον ΑΚ, τὸ ὁποῖον ἡμπορεῖ νὰ



συγκριθῇ μὲ ἕκαστον τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΗ, ΑΚ'. Τὰ δύο στερεὰ ΑΗ, ΑΚ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕΘΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΒ, ΑΟ, παρομοίως τὰ δύο στερεὰ ΑΚ, ΑΚ', ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟΛΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΔ, ΑΜ. Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας,

$$\text{στερ. ΑΗ} : \text{στερ. ΑΚ} :: \text{ΑΒ} : \text{ΑΟ},$$

$$\text{στερ. ΑΚ} : \text{στερ. ΑΚ}' :: \text{ΑΔ} : \text{ΑΜ}.$$

Πολυπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολυπλασιαστὴν στερ. ΑΚ, θέλομεν ἔχει,

$$\text{στερ. ΑΗ} : \text{στερ. ΑΚ}' :: \text{ΑΒ} \times \text{ΑΔ} : \text{ΑΟ} \times \text{ΑΜ}.$$

Ἀλλὰ  $\text{ΑΒ} \times \text{ΑΔ}$  παριστάνει τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ  $\text{ΑΟ} \times \text{ΑΜ}$  τὴν βάσιν ΑΜΝΟ· λοιπὸν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

#### Θ ε ὡ ρ η μ α.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων των ἐπὶ τῶν ὕψων των, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν διαστάσεών των.

Διότι ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο στερεὰ ΑΗ, ΑΩ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐπιφανεῖαι των νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἃς προεκβληθῶσι τὰ ἀναγκαῖα ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου παραλληλεπιπέδου ΑΚ' τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, θέλομεν ἔχει,

$$\text{στερ. ΑΗ} : \text{στερ. ΑΚ}' :: \text{ΑΒΓΔ} : \text{ΑΜΝΟ}.$$

Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΚ', ΑΩ, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΜΝΟ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΧ· οὕτως ἔχομεν,

$$\text{στερ. ΑΚ}' : \text{στερ. ΑΩ} :: \text{ΑΕ} : \text{ΑΧ}.$$

Πολυπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολυπλασιαστὴν στερ. ΑΚ', θέλομεν ἔχει,

$$\text{στερ. ΑΗ} : \text{στερ. ΑΩ} :: \text{ΑΒΓΔ} \times \text{ΑΕ} : \text{ΑΜΝΟ} \times \text{ΑΧ}.$$

Ἀντὶ τῶν βάσεων ΑΒΓΔ καὶ ΑΜΝΟ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν  $\text{ΑΒ} \times \text{ΑΔ}$  καὶ  $\text{ΑΟ} \times \text{ΑΜ}$ , καὶ οὕτως ἔχομεν,

$$\text{στερ. ΑΗ} : \text{στερ. ΑΩ} :: \text{ΑΒ} \times \text{ΑΔ} \times \text{ΑΕ} : \text{ΑΟ} \times \text{ΑΜ} \times \text{ΑΧ}.$$

Λοιπὸν δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των, κ. τ. λ. σχ. 213.

Σχόλιον. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ

μέτρον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του, ἢ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων. Καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς ἀρχῆς θέλομεν ἐκτιμήσει ὅλα τὰ ἄλλα στερεά.

Πρὸς κατάληψιν τούτου τοῦ μέτρου πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι διὰ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν, ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν οἵτινες παριστάνουν ταύτας τὰς γραμμάς, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν γραμμικὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἡμποροῦμεν νὰ λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν: τούτου τεθέντος, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀριθμὸς ὅστις καθ' ἑαυτὸν δὲν σημαίνει τίποτε, καὶ ὅστις ἤθελεν εἶναι διαφορετικὸς ἐὰν ἐλαμβάνετο μία ἄλλη γραμμικὴ μονάς. Ἀλλ' ἐὰν ὁμοίως πολυπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις ἄλλου παραλληλεπιπέδου, ἐκτιμῶντες αὐτάς μετὰ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν μονάδα, τὰ δύο γινόμενα θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ στερεά, καὶ θέλουν δώσει τὴν ἰδέαν τοῦ σχετικοῦ μεγέθους των.

Τὸ μέγεθος ἑνὸς στερεοῦ, ὁ ὄγκος του ἢ ἡ ἔκτασίς του συνιστοῦν τὴν στερεότητά του, καὶ τὴν λέξιν ταύτην μάλιστα μεταχειρίζομεθα διὰ νὰ σημειῶμεν τὸ μέτρον ἑνὸς στερεοῦ: οὕτω, λέγομεν ὅτι ἡ στερεότης ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μετὰ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του ἢ μετὰ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐὰν ἡ πλευρὰ ᾖ 1, ἡ στερεότης θέλει εἶναι  $1 \times 1 \times 1$  ἢ 1· ἐὰν ἡ πλευρὰ ᾖ 2, ἡ στερεότης θέλει εἶναι  $2 \times 2 \times 2$ , ἢ 8· ἐὰν δὲ 3, ἡ στερεότης θέλει εἶναι  $3 \times 3 \times 3$ , ἢ 27, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὅθεν ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ. τ. λ., οἱ κύβοι ἢ αἱ στερεότητές των εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 8, 27, κ. τ. λ. Ἐκ τούτου προῆλθε νὰ ὀνομάζεται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ προκύπτον γινόμενον ἀπὸ τρεῖς ἴσους πρᾶγοντας μετὰ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν.

Ἐὰν ἐπροτείνετο νὰ κατασκευασθῇ κύβος διπλάσιος δεδομένου, ἔπρεπε νὰ ᾖ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητούμενου νὰ ᾖ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου ὡς ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Τώρα εὐκλῶς εὐρίσκεται, διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2· πλὴν δὲν εἶναι δυνατόν ὡσαύτως νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ του, τούλάχιστον διὰ τῶν ἀπλῶν ἐργασιῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι συνίστανται εἰς τὴν χρῆσιν εὐθειῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, καὶ κύκλων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι προσδιορισμένα.

Διὰ τὴν δυσκολίαν ταύτην τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ἐστάθη περίφημον τοῖς ἀρχαίοις γεωμέτραις, ὡς τὸ τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον εἶναι σχεδὸν τῆς αὐτῆς κατηγορίας. Ἀλλὰ πρὸ πολλοῦ εἶναι γνωστὰ αἱ λύσεις τῶν ὁποίων τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἶναι δεκτικὰ, αἱ ὁποῖαι ἐὰν καὶ δὲν φέρουσι τὴν ἀπλότητα τῶν κατασκευῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, δὲν εἶναι ὅμως ὀλιγώτερον ἀκριβεῖς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

### Θεώρημα.

Ἡ στερεότης ἐνὸς παραλληλεπίπεδου, καὶ ἐν γένει ἡ στερεότης ὁποιοῦδήποτε πρίσματος, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ὁποιοῦδήποτε παραλληλεπίπεδον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ ἰσοδυνάμου βάσεως (πρό. 11)· ἀλλ' ἡ στερεότης τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν καὶ ἡ στερεότης ἐκείνου ἰσοῦται παρομοίως μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

2.<sup>ον</sup> Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλεπίπεδου εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχη τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρό. 8). Ἀλλ' ἡ στερεότης τούτου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπίπεδου, ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

3.<sup>ον</sup> Ὅποιοῦδήποτε πρίσμα ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὅσα τρίγωνα εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθοῦν εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς αὐτὸ ὡς βάση. Ἀλλ' ἡ στερεότης ἐκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ὕψους του· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισματῶν θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγῶνων τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰ ὡς βάσεις, πολυπλασιασθέν ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ὕψους· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισματῶν συγκροτεῖ τὸ ὅλον πρίσμα· ἄρα ἡ στερεότης ὁποιοῦδήποτε πολυγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Ἐὰν παραβληθῶσι δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τῶν ὑψῶν θέλουν εἶναι ὡς αἱ βάσεις· λοιπὸν δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μετὰξύτων ὡς αἱ βάσεις των· διὰ λόγον παρόμοιον, δύο



πρίσματα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς τὰ ὕψη των.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ις'.

#### Λήμμα.

Ἐάν μία πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀβδ παραλλήλου τῆς βάσεώς της. σχ. 214.

1.<sup>ον</sup> αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, . . . : καὶ τὸ ὕψος ΣΟ, θέλουν διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς α, β, γ, . . . καὶ ο.

2.<sup>ον</sup> ἡ τομὴ ἀβγδε θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μετὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.

Διότι 1.<sup>ον</sup> ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, αβγ, εἶναι παράλληλα, αἱ κοιναὶ τομαὶ των ΑΒ, αβ, ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ, εἶναι παράλληλοι (10, 5). λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΣΑΒ Σαβ εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΣΑ:Σα::ΣΒ:Σβ· ὡσαύτως ΣΒ:Σβ::ΣΓ:Σγ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κ. τ. λ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς α, β, γ, κ. τ. λ. Τὸ ὕψος ΣΟ τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν στιγμὴν ο. διότι ΒΟ καὶ βο εἶναι παράλληλοι, καὶ οὕτως ΣΟ:Σο::ΣΒ:Σβ.

2.<sup>ον</sup> Ἐπειδὴ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ βγ τῇ ΒΓ, ἡ γδ τῇ ΓΔ, κ. τ. λ., ἡ γωνία αβγ=ΑΒΓ, ἡ γωνία βγδ=ΒΓΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΒ, Σαβ, ἔχομεν ΑΒ:αβ::ΣΒ:Σβ· καὶ ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΒΓ, Σβγ, ΣΒ:Σβ::ΒΓ:βγ· λοιπὸν ΑΒ:αβ::ΒΓ:βγ. Ὁσαύτως ΒΓ:βγ::ΓΔ:γδ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν καθὲ μίαν μετὴν καθὲ μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Ἐστωσαν ΣΑΒΓΔΕ, ΣΧΨΩ, δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι κοινὴ, καὶ τὸ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἡ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις κείνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐάν αἱ πυραμίδες αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, καὶ προκύψωσιν αἱ τομαὶ ἀβγδε, χψω· λέγω ὅτι αἱ τομαὶ ἀβγδε, χψω, θέλουν εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ.

Διότι ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοια, αἱ ἐπιράνειαί των εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν

—2  
ΑΒ, αβ· ἀλλὰ ΑΒ:αβ::ΣΑ:Σα· λοιπὸν ΑΒΓΒΕ:αβγδε::ΣΑ:Σα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΧΨΩ:χψω::ΣΧ:Σχ. Ἄλλ' ἐπειδὴ

αὐτῶν εἶναι ἐν μόνον ἐπίπεδον, ἔπεται ὅτι  $AX$  καὶ  $αχ$  εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ  $ΣΑΧ$ . λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα  $ΣΑΧ$ ,  $Σαχ$  εἶναι ὅμοια καὶ διδουν  $ΣΑ$ :

$$-2 \quad -2$$

$Σα :: ΣΧ :: Σχ ::$  ἐπομένως  $ΧΨΩ :: χψω :: ΣΑ :: Σα$  καὶ ἐπειδὴ ὡσαύτως  $ΑΒΓΔΕ :: αβγδε :: ΣΑ :: Σα$  ἄρα  $ΑΒΓΔΕ :: αβγδε :: ΧΨΩ :: χψω$ . λοιπὸν αἱ τομαὶ  $αβγδε$ ,  $χψω$ , εἶναι μετὰ τῶν ὡς αἱ βάσεις  $ΑΒΓΔΕ$ ,  $ΧΨΩ$ . Ἐὰν λοιπὸν αἱ βάσεις  $ΑΒΓΔΕ$ ,  $ΧΨΩ$  ᾖναι ἰσοδύναμοι, αἱ γινόμεναι τομαὶ εἰς ἴσον ὕψος εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, βάσεις ἔχουσαι ἰσοδύναμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐστωσαν  $ΣΑΒΓ$ ,  $σαβγ$  αἱ δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων αἱ βάσεις  $ΑΒΓ$ ,  $αβγ$ , τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος  $ΤΑ$ . ἐὰν αἱ πυραμίδες αὗται δὲν ᾖναι ἰσοδύναμοι, ἔστω  $σαβγ$  ἡ μικρότερα καὶ  $ΑΑ$  τὸ ὕψος ἐνὸς πρίσματος, τὸ ὁποῖον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς βάσεως  $ΑΒΓ$ , ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν (1). σχ. 215.

Ἄς διαιρεθῇ τὸ κοινὸν ὕψος  $ΑΤ$  εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ  $Αχ$ , καὶ ἔστω  $κ$  ἐν τούτων τῶν μερῶν ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους, ἃς διέλθωσιν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων αἱ γινόμεναι τομαὶ ἀπὸ καθέν τούτων τῶν ἐπιπέδων, θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι (πρό. 16. πορ.), ὡς, παραδείγματος χάριν,  $ΔΕΖ$  καὶ  $δεζ$ ,  $ΗΘΙ$  καὶ  $ηθι$  κ. τ. λ. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τῶν τριγώνων  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ ,  $ΗΘΙ$ , κ. τ. λ. λαμβανομένων ὡς βάσεων, ἃς κατασκευασθῶσιν ἐξωτερικὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ μέρη  $ΑΔ$ ,  $ΔΗ$ ,  $ΗΚ'$ , κ. τ. λ. τῆς πλευρᾶς  $ΣΑ$ . ὡσαύτως ἐπὶ τῶν τριγώνων  $δεζ$ ,  $ηθι$ ,  $κλμ$ , κ. τ. λ. ὡς βάσεων λαμβανομένων, ἃς κατασκευασθῶσιν εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα πρίσματα ἐσωτερικὰ τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ ἀντιστοιχοῦντα μέρη τῆς πλευρᾶς  $Σα$ . ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ πρίσματα θέλουσιν ἔχει διὰ κοινὸν ὕψος  $κ$ .

(1) Τοῦτο πάντοτε ἡμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν διότι ἂς παριστάνη  $α$ . τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὅπου εἰς προσδιορισμένον ὄγκον περιέχεται εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα·  $β$ . τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὅπου ὁ αὐτὸς ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν δευτέραν τὴν ἐξ ὑποθέσεως μικρότεραν·  $α-β$  παριστάνει τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παρογόντων τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις παριστάνει τὴν βάσιν καὶ ἐνὸς ἄλλου ὅστις προσδιορίζεται τῶρα ἐν δώτωμεν εἰς πρίσμα διὰ βάσιν τὴν βάσιν τῶν πυραμίδων, καὶ διὰ ὕψος τὸν δευτέρον παράγοντα, ὁ ὄγκος τοῦτου τοῦ πρίματος θίλει ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων. Ο. Μ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμαίων, εἶναι μείζον ταύτης τῆς πυραμίδος· τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρισμαίων, εἶναι μικρότερον ταύτης τῆς πυραμίδος· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἄθροισμάτων τῶν πρισμαίων πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλητέρα τῆς μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων.

Τώρα ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὰς βάσεις ΑΒΓ, αβγ ἀπαντῶμεν τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΖΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεζα, διότι αἱ βάσεις των ΔΕΖ, δεζ, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος κ'· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἰσοδύναμα τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΗΘΙΚ' καὶ τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν ηθιδ, τὸ τέταρτον ἐξωτερικὸν καὶ τὸ τρίτον ἐσωτερικὸν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου τῶν πρώτων, καὶ τοῦ τελευταίου τῶν δευτέρων. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρίσματα, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ, ἔχουν τὰ ἰσοδύναμά των εἰς τὰ ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρίσματα. Λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμαίων καὶ τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἄθροισμάτων εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων· ἔπρεπε λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ νὰ ᾖναι μεγαλήτερον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· διότι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των κ καὶ Αχ· ἀλλὰ κ εἶναι ἔλαττον τοῦ Αχ· ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἔλαττον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἄρα ἰσοδυναμοῦσι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'. +

#### Θεώρημα.

Κάθε τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Ἐστω ΣΑΒΓ τριγωνικὴ πυραμὶς, ΑΒΓΔΕΣ τριγωνικὸν πρίσμα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος.

Ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ πρίσμα τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, μένει τὸ στερεὸν ΣΑΓΔΕ τὸ ὁποῖον ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι Σ καὶ ἡ βάση τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ· ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΕ, καὶ ἃς ἀχθῇ



τὸ ἐπίπεδον ΣΓΕ τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ. Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν κατεβαζομένην κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΕ· ἔχουν βάσεις ἴσας, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΔΓΕ, εἶναι τὰ δύο ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ, εἶναι ἰσοδύναμοι μετὰ τῶν· ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΣΔΓΕ καὶ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ ἔχουν βάσεις ἴσας ΑΒΓ, ΔΕΣ· ἔχουν ὁμοίως τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΣ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ πυραμὶς ΣΔΓΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΓΕ· λοιπὸν αἱ τρεῖς πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ, ΣΑΓΕ αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ πρίσμα ΑΒΔ εἶναι ἰσοδύναμοι μετὰ τῶν. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος ΑΒΔ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

**Πόρισμα.** Ἡ στερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως τῆς ἐπὶ τοῦ ὕψους τῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

### Θεώρημα.

Κάθε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ἔχει μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως τῆς ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τοῦ ὕψους τῆς ΑΟ. σχ. 214.

Διότι ἐὰν διὰ τῶν διαγωνίων ΕΒ, ΕΓ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα ΣΕΒ, ΣΕΓ, ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ, θέλει μοιρασθῇ εἰς τριγωνικάς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι ἔλαι θέλουν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΟ. Ἀλλὰ, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ἐκάστη τούτων μετρεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον κάθε μιᾶς τῶν βάσεων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ, ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τῆς ΣΟ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἢ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ  $\frac{1}{3}$  ΣΟ· λοιπὸν κάθε πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως τῆς ἐπὶ τοῦ ὕψους τῆς.

**Πόρισμα Α'.** Κάθε πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

**Πόρισμα Β'.** Δύο πυραμίδες τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μετὰ τῶν ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μετὰ τῶν ὡς τὰ ὕψη των.

**Σχόλιον.** Ἡμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν στερεότητα κάθε πολυέδρου σώματος, ἀναλύοντές το εἰς πυραμίδας. Ἡ δὲ ἐνά-

λυσις αὕτη ἡμπορεῖ νὰ γένη κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἀπλούστερος τούτων εἶναι τὸ νὰ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ ἐνωθῇ ἡ κορυφὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας μετὰ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου· οὕτω θέλουν προκύβηαι τόσαι μερικαὶ πυραμίδες, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐξαίρουμένων τῶν σχηματίζουσῶν τὴν στερεάν γωνίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Θεώρημα.

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των, ἢτε ἴσα κατὰ τὴν στερεότητα.

Διότι 1.<sup>ον</sup> δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, ὡς ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ ἔχουν κοινὸν μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τοῦ ὕψους ΣΟ ἢ ΤΟ· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξὺ των. σχ. 202.

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν καὶ ὁποιοιδήποτε τρόπον μοιρασθῇ ἐν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὸ ἄλλο πολύεδρον ἡμπορεῖ ὥσαύτως νὰ μοιρασθῇ εἰς συμμετρικὰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἀλλ' αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ἢ καθεμία μετὰ τὴν καθεμίαν· λοιπὸν καὶ τὰ ὅλα πολύεδρα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των, εἴτε ἴσα κατὰ τὴν στερεότητα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη φαίνεται ὡς προκύπτουσα ἀμέσως ἀπὸ τὴν Β' πρότασιν, ἔπου δεικνύεται, ὅτι εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα ὅλα τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἐνὸς εἶναι ἴσα μετὰ τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἄλλου. Ἀλλὰ δὲν ἦτον ἐλιγώτερον ἀναγκαῖον νὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τρόπον ἀκριβέστερον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεώς της, ὁ ἐναπομένων κορμὸς, ἀφαιρεθείσης τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μετὰ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁπαίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι, τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

Ἐστω ΣΑΒΓΔΕ μία πυραμὶς, ἡ ὁποία ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεως· ἔστω ΤΖΗΘ μία τριγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἔστωσαν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα μετὰ τὰ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ.

Ἡμποροῦμεν νὰ υποθέσωμεν τὰς δύο βάσεις κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· καὶ τότε τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ προεκβαλλόμενον θέλει προσδιορίσει εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα τὴν τομὴν  $\zeta\eta\theta$  ἀπέχουσαν ἐξίσου ἀπὸ τὸ κοινὸν ἐπίπεδον τῶν βάσεων: ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ τομὴ  $\zeta\eta\theta$  εἶναι πρὸς τὴν τομὴν αὐτὴν, ὡς ἡ βάσις  $ZH\Theta$  πρὸς τὴν βάσιν  $AB\Delta$  (πρόσ. 16)· καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ τομαὶ εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν  $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ ,  $\Gamma\zeta\eta\theta$  εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδύναμους. Αἱ ὅλαι πυραμίδες  $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ ,  $\Gamma\zeta\eta\theta$ , εἶναι ἰσοδύναμοι διὰ τῶν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν καὶ οἱ κορμοὶ  $AB\Gamma\delta\alpha\beta$ ,  $ZH\Theta\zeta\eta$ , εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἐπομένως ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν διὰ τὸν κορμὸν τριγωνικῆς πυραμίδος. σλ. 217.

Ἐστω  $ZH\Theta\zeta\eta$  κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις: διὰ τῶν τριῶν σημείων  $Z$ ,  $\eta$ ,  $\Theta$ , ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον  $\zeta\eta\theta$ , τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν κορμὸν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα  $\eta\zeta\theta$ . Ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν κάτω βάσιν  $ZH\Theta$  τοῦ κορμοῦ, διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφή ἡ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄνω βάσεως  $\zeta\eta\theta$ . σλ. 218.

Ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἡ πυραμὶς αὕτη, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς  $\eta\zeta\theta\Theta Z$ , τῆς ὁποίας κορυφή εἶναι τὸ  $\eta$  καὶ βάσις τὸ  $\zeta\theta\Theta Z$ . Διὰ τῶν τριῶν σημείων  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\Theta$  ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον  $\zeta\eta\theta$ , τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς  $\eta\zeta\theta$ ,  $\eta\zeta\theta$ . Ἡ τελευταία αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν  $\eta\zeta\theta$  τοῦ κορμοῦ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου, ἐπειδὴ ἡ κορυφή τῆς  $\Theta$  ἀνήκει εἰς τὴν κάτω βάσιν: οὕτως ἔχομεν δύο τῶν τριῶν πυραμίδων αἵτινες πρέπει νὰ συγκροτήσουν τὸν κορμὸν.

Μένει νὰ θεωρήσωμεν τὴν τρίτην  $\eta\zeta\theta$ : τώρα, ἐὰν ἄξωμεν  $\eta K'$  παράλληλον τῇ  $\zeta Z$ , καὶ σπαντασθῶμεν νέαν πυραμίδα  $\zeta Z\theta K'$ , τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι  $K'$  καὶ ἡ βάσις  $\zeta Z\theta$ , αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουσιν ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν  $\zeta Z\theta$ . θέλουσιν ἔχει ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ  $\eta$  καὶ  $K'$  εὐρίσκονται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς  $\eta K'$  παραλλήλου τῇ  $\zeta Z$ , καὶ ἐπομένως παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, καὶ τὰ σημεία εὐθείας παραλλήλου ἐνὸς ἐπιπέδου ἰσάκεις ἀπέχουσιν ἀπ' αὐτοῦ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἄλλ' ἡ πυραμὶς  $\zeta Z K'\theta$  ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν τῆς εἰς  $\zeta$ , καὶ οὕτως θέλει ἔχει τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ. Ὅσον δὲ διὰ τὴν βάσιν  $ZK'\theta$ , λέγω ὅτι αὕτη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων  $ZH\Theta$ ,  $\zeta\eta\theta$ .

Τὸ ἐντι τὰ τρίγωνα  $Z\theta K'$ ,  $\zeta\eta\theta$ , ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην  $Z=\zeta$ ,



καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην  $ZK' = \zeta\eta$ · ἔχομεν λοιπὸν (24, 3)  $Z\Theta K' : \zeta\eta\theta :: Z\Theta : \zeta\theta$ · ἔχομεν ὡσαύτως  $Z\Theta H : Z\Theta K' :: ZH : ZK'$  ἢ  $\zeta\eta$ · Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα  $Z\Theta\theta$ ,  $\zeta\eta\theta$ , δίδουν  $ZH : \zeta\eta :: Z\Theta : \zeta\theta$ · λοιπὸν  $Z\Theta H : Z\Theta K' :: Z\Theta K' : \zeta\eta\theta$  καὶ οὕτως ἡ βάσις  $Z\Theta K'$  εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων  $Z\Theta\theta$ ,  $\zeta\eta\theta$ . Λοιπὸν ὁ κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος, ὁ ἔχων παραλλήλους βάσεις, ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας, τῶν ἐποίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι, τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

### Θεώρημα.

Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου  $AB\Gamma$  εἶναι ἡ βάσις, τηρῇ ὑπὸ ἐπίπεδου  $\Delta E\Sigma$  κλίνοντος (1) πρὸς ταύτην τὴν βάσιν, τὸ ἐκ ταύτης τῆς τομῆς προκύπτον στερεὸν  $AB\Gamma\Delta E\Sigma$ , θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων κορυφαὶ μὲν εἶναι τὸ  $\Delta$ ,  $E$ ,  $\Sigma$ , βάσις δὲ κοινὴ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ . σχ. 216.

Διὰ τῶν τριῶν σημείων  $\Sigma$ ,  $A$ ,  $\Gamma$ , ἃς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον  $\Sigma A\Gamma$ , τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ κολοβὸν πρίσμα (*Prisme tronqué*)  $AB\Gamma\Delta E\Sigma$  τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα  $\Sigma AB\Gamma$ : ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὸ  $AB\Gamma$  καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν  $\Sigma$ .

Ἀφαιρεθείσης ταύτης τῆς πυραμίδος, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς  $\Sigma A\Gamma\Delta E$ , τῆς ὁποίας  $\Sigma$  εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ  $A\Gamma\Delta E$  ἡ βάσις. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν  $\Sigma$ ,  $E$ ,  $\Gamma$  ἃς ἀχθῇ προσέτι τὸ ἐπίπεδον  $\Sigma E\Gamma$ , τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς  $\Sigma A\Gamma E$ ,  $\Sigma\Gamma\Delta E$ .

Ἡ πυραμὶς  $\Sigma A\Gamma E$ , ἣτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον  $A\Gamma E$  καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν  $\Sigma$ , εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μίαν πυραμίδα  $EAB\Gamma$ , ἣτις ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸ  $A\Gamma E$  καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν  $B$ . Διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ  $B\Sigma$ , οὕσα παράλληλος ἐκάστης τῶν γραμμῶν  $AE$ ,  $\Gamma\Delta$ , εἶναι παράλληλος καὶ τοῦ ἐπίπεδου τῶν  $A\Gamma E$ · λοιπὸν ἡ πυραμὶς  $\Sigma A\Gamma E$  ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα  $EAB\Gamma$ , ἡ ὁποία ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ  $AB\Gamma$  καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν  $E$ .

Ἡ τρίτη πυραμὶς  $\Sigma\Gamma\Delta E$  ἡμπορεῖ νὰ τραπῇ καταπρῶτον εἰς

(1) Τὸ τέμνον ἐπίπεδον υποτίθεται ὅτι κλίνει πρὸς τὴν βάσιν· διότι ἐὰν οὐκ ἔκλινεν, ἦσαν, ἐὰν ἦτο παράλληλον, τὸ προκύπτον στερεὸν ἡθελεν εἶναι ἐπίσης πρίσμα· καὶ τοῦ σώματος τούτου ἡξιοῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν στερεότητα. Ο. Μ.

**ΑΣΓΔ·** διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν **ΣΓΔ·** ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι **ΑΕ** εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου **ΣΓΔ·** λοιπὸν ἡ πυραμὶς **ΣΓΔΕ** ἰσοδύναμει μὲ τὴν **ΑΣΓΔ·** ἀκολούθως ἡ πυραμὶς **ΑΣΓΔ** ἡμπορεῖ νὰ τραπῇ εἰς **ΑΒΓΔ**, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν **ΑΓΔ·** ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν **Σ** καὶ **Β** κεῖνται ἐπὶ μιᾷς εὐθείας παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς **ΣΓΔΕ**, ἰσοδύναμος μὲ τὴν **ΑΣΓΔ**, εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμος μὲ τὴν **ΑΒΓΔ·** ἀλλ' αὕτη ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ **ΑΒΓ**, καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν **Δ**.

Λοιπὸν τέλος τὸ κολοβὸν πρίσμα **ΑΒΓΔΕΣ** ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ **ΑΒΓ**, αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν εἶναι διαδοχικῶς **Δ**, **Ε**, **Σ**.

**Πόρισμα.** Ἐὰν αἱ κόψεις **ΑΕ**, **ΒΣ**, **ΓΔ**, ᾗναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, θέλουν εἶναι ἐνταύτῳ τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ κολοβὸν πρίσμα· εἰς τρόπον ὥστε ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, θέλει ἐκφράζεται διὰ  $\frac{1}{6}$  **ΑΒΓ** × **ΑΕ** +  $\frac{1}{6}$  **ΑΒΓ** × **ΒΣ** +  $\frac{1}{6}$  **ΑΒΓ** × **ΓΔ**, ποσότης ἣτις ἄγεται εἰς  $\frac{1}{6}$  **ΑΒΓ** × (**ΑΕ** + **ΒΣ** + **ΓΔ**).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

### Θεώρημα.

Δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς μὲν ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας, τὰς δὲ ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Κατὰ τὸν ὅρισμὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες **ΣΑΒΓ**, **ΤΔΕΖ**, εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα **ΣΑΒ**, **ΑΒΓ**, ᾗναι ὅμοια μὲ τὰ δύο **ΤΔΕ**, **ΔΕΖ**, καὶ ὁμοίως κείμενα, τουτέστιν ἐὰν ἡ γωνία **ΑΒΣ** = **ΔΕΤ**, ἡ **ΒΑΣ** = **ΕΔΤ**, ἡ **ΑΒΓ** = **ΔΕΖ**, ἡ **ΒΑΓ** = **ΕΔΖ**, καὶ προσέτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων **ΣΑΒ**, **ΑΒΓ**, ᾗναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων **ΤΔΕ**, **ΔΕΖ**. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν ὅλας τὰς ἑδρας ὁμοίας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας. σγ. 203.

Ἄς ληρθῶσι **ΒΗ** = **ΕΔ**, **ΒΘ** = **ΕΖ**, **ΒΙ** = **ΕΓ**, καὶ ἄς ἐπίκεινται αἱ **ΗΘ**, **ΗΙ**, **ΙΘ**. Ἡ πυραμὶς **ΤΔΕΖ** εἶναι ἴση μὲ τὴν πυραμίδα **ΙΗΒΘ**· διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ **ΗΒ**, **ΒΘ**, ἐλήφθησαν ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς **ΔΕ**, **ΕΖ**, καὶ ἡ γωνία **ΗΒΘ** εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν **ΔΕΖ** τὸ τρίγωνον **ΗΒΘ** εἶναι ἴσον μὲ τὸ **ΔΕΖ**· λοιπὸν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο πυραμίδων, ἡμικοροῦμεν κατὰ πρῶτον νὰ θέσωμεν τὴν βάσιν **ΔΕΖ** ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν **ΗΒΘ**· ἀκολούθως, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον **ΔΤΕ** κλίνει

ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ ὅσον τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, φανερόν εἶναι ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΔΕΓ θέλει πέσει ἀπροσδιόριστως ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου ΑΒΣ. Ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΔΕΤ=ΗΒΙ, λοιπὸν ΕΤ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΙ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Τ, ἐφαρμόζουσι μὲ τέσσαρα Η, Β, Θ, Ι, δύο δὲ πολυέδρα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐφαρμόζουσιν· ἔπεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς ΤΔΕΖ ἐφαρμόζει μὲ τὴν πυραμίδα ΗΒΘ.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων ΔΕΖ, ΗΒΘ, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΒΗΘ=ΕΔΖ=ΒΑΓ'· λοιπὸν ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΗΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΣ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΗΘ εἶναι παράλληλον τοῦ ΣΑΓ (13, 5). Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΔΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΑΓ (πρό. 15), καὶ τὸ τρίγωνον ΙΒΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΕΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΒΓ· λοιπὸν αἱ δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, ἔχουν τὰς τέσσαρας ἑδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Περιπλέον ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Διότι ἡ στερεὰ γωνία Ε ἐτέθη ἤδη ἐπὶ τῆς ὁμολόγου της Β, καὶ τὸ αὐτὸ ἤμποροῦσε νὰ γένη διὰ δύο ἄλλας ὁμολόγους στερεὰς γωνίας· πλὴν βλέπομεν ἀμέσως ὅτι δύο ὁμολόγοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, π. γ. αἱ γωνίαι Τ καὶ Σ, διότι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

Λοιπὸν, δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

**Πόρισμα Α'.** Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰς τὰς δύο πυραμίδας δίδουν τὰς ἀναλογίας  $AB : DE :: BG : EZ :: AG : AZ :: AS : AT :: SB : TE :: SG : TZ$ · λοιπὸν εἰς τὰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας, αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

Β'. ἐπειδὴ δὲ αἱ ὁμολόγοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποίωνδήποτε ἑδρῶν τῆς μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τῆς ὁμοίας πυραμίδος.

Γ'. Ἐὰν τμηθῇ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου ΗΙΘ παράλληλου μιᾶς τῶν ἑδρῶν ΣΑΓ, ἡ μερικὴ πυραμὶς ΒΗΙΘ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην πυραμίδα ΒΑΣΓ· διότι τὰ τρίγωνα ΒΗΙ, ΒΗΘ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΒΑΣ, ΒΑΓ, τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν, καὶ ὁμοίως κείμενα· ἡ κλίσις τῶν



ἐπιπέδων των εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.

Δ'. Ἐν γένει, ἐὰν τμηθῇ ὁποιαδήποτε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀβγδε παραλλήλου τῆς βάσεως, ἡ μερικὴ πυραμὶς Σαβγδε θέλει εἶναι ὁμοία μετὴν ὅλῃν ΣΑΒΓΔΕ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ἀβγδε, εἶναι ὅμοιαι, καὶ, ἐπιχειρῶντων τῶν ΑΓ, αγ, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι ὁμοία μετὴν πυραμίδι Σαβγ (πόρ. Γ'). λοιπὸν ἡ στιγμὴ Σ προσδιορίζεται ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ ὡς ἡ στιγμὴ Σ ὡς πρὸς τὴν βάσιν ἀβγ (ὁρ. 18). λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε, εἶναι ὅμοιαι σχ. 214.

Σχόλιον. Ἀντὶ τῶν πέντε δεδομένων τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν, διὰ νὰ ᾔῃαι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὅμοιαι, δυνατόν νὰ ἀντικατασταθῶσι πέντε ἄλλα, κατὰ διαφόρους συνδυασμοὺς, καὶ οὕτως ἤθελον προκύψῃ τόσα θεωρήματα, μετὰ τῶν ὁποίων ἡμπορεῖ νὰ διακριθῇ τὸ ἀκόλουθον: Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ὅταν ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Διότι, ἐὰν ἔχομεν τὰς ἀναλογίας  $AB : DE :: BF : EZ :: AG : AZ :: AS : AT :: SB : TE :: SG : TZ$ , αἱ ὁποῖαι περιέχουσι πέντε συνθήκας, τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΑΒΓ θέλουσι εἶναι ὅμοια μετὰ τὰ τρίγωνα ΔΕΤ, ΔΕΖ καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΣΒΓ θέλει εἶναι ὅμοιον μετὸ ΤΕΖ. λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπιπεδοὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Β, θέλουσι εἶναι ἴσαι μετὰ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Ε, ἡ καθεμιά μετὴν καθεμίνην ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπεταί, ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ εἶναι ἴση μετὴν τῶν ὁμολόγων των ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ οὕτως αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι σχ. 203.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

### Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολυέδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Ἐστω ΑΒΓΔΕ ἡ βάση τοῦ ἐνὸς πολυέδρου· ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο στερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ βάση εἶναι ΑΒΓ· ἔστωσαν εἰς τὸ ἄλλο πολυέδρον, ἀβγδε ἡ ὁμολογὸς βάση ἡ ὁμοία μετὴν ΑΒΓΔΕ, μ καὶ ν αἱ ὁμολογοὶ κορυφαὶ τῶν Μ καὶ Ν, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ

τὰς πυραμίδας  $\mu\alpha\beta\gamma$ ,  $\nu\alpha\beta\gamma$ , ὁμοίας μὲ τὰς πυραμίδας  $MAB\Gamma$ ,  $NAB\Gamma$ · λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ διαστήματα  $MN$ ,  $\mu\nu$ , εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς  $AB$ ,  $\alpha\beta$ . σχ. 219.

Τῶντι, ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες  $MAB\Gamma$ ,  $\mu\alpha\beta\gamma$ , εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων  $MA\Gamma$ ,  $BA\Gamma$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων  $\mu\alpha\gamma$ ,  $\nu\alpha\gamma$ · παρομοίως ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες  $NAB\Gamma$ ,  $\nu\alpha\beta\gamma$ , εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων  $NA\Gamma$ ,  $BA\Gamma$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων  $\nu\alpha\gamma$ ,  $\beta\alpha\gamma$ · λοιπὸν, ἐὰν αἱ πρῶται κλίσεις ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς δευτέρας, μένει ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων  $NA\Gamma$ ,  $MA\Gamma$  ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων  $\nu\alpha\gamma$ ,  $\mu\alpha\gamma$ . Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν πυραμίδων, τὸ τρίγωνον  $MA\Gamma$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\mu\alpha\gamma$ , καὶ τὸ τρίγωνον  $NA\Gamma$  εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\nu\alpha\gamma$ · λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες  $MNA\Gamma$ ,  $\mu\nu\alpha\gamma$ , ἔχουν δύο ἑδρας ὁμοίας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκεις κλινούσας μεταξὺ των· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι (πρό. 21), καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ των δίδουν τὴν ἀναλογίαν  $MN : \mu\nu :: AM : \alpha\mu$ . Ἀλλως  $AM : \alpha\mu :: AB : \alpha\beta$ · λοιπὸν  $MN : \mu\nu :: AB : \alpha\beta$ .

Ἔστωσαν  $\Pi$  καὶ  $\pi$  δύο ἄλλαι ὁμολογοὶ κορυφαὶ τῶν αὐτῶν πολυέδρων, καὶ ὁμοίως θέλωμεν ἔχει  $\Pi N : \pi\nu :: AB : \alpha\beta$ ,  $\Pi M : \pi\mu :: AB : \alpha\beta$ . Λοιπὸν  $MN : \mu\nu :: \Pi N : \pi\nu :: \Pi M : \pi\mu$ . Λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $\Pi NM$  τὸ ὁποῖον ἐνόησε τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἐνὸς πολυέδρου εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον  $\pi\mu\nu$  τὸ ὁποῖον ἐνόησε τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ ἄλλου πολυέδρου.

Ἔστωσαν προσέτι  $K$  καὶ  $k$  δύο ὁμολογοὶ κορυφαί, καὶ τὸ τρίγωνον  $\Pi KN$  θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ  $\pi\kappa\nu$ · λέγω περιπλέον ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων  $\Pi KN$ ,  $\Pi MN$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων  $\pi\kappa\nu$ ,  $\pi\mu\nu$ .

Διότι ἐὰν ἐνώσωμεν  $KM$  καὶ  $k\mu$ , πάντοτε θέλωμεν ἔχει τὸ τρίγωνον  $KNM$  ὅμοιον μὲ τὸ  $\kappa\mu\nu$ , καὶ ἐπομένως τὴν γωνίαν  $KNM$  ἴσην μὲ τὴν  $\kappa\mu\nu$ . Ὡς φαντασθῶμεν εἰς  $N$  στερεάν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $KNM$ ,  $KN\Gamma$ ,  $\Pi NM$ , καὶ εἰς  $\nu$  στερεάν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $\kappa\mu\nu$ ,  $\kappa\nu\pi$ ,  $\pi\mu\nu$ · ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ καθὲ μία μὲ τὴν καθὲ μίαν, ἔπεται ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων  $\Pi NK$ ,  $\Pi NM$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των  $\pi\kappa\nu$ ,  $\pi\mu\nu$ · λοιπὸν, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα  $\Pi NK$ ,  $\Pi NM$ , ᾗσαν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ἤθελεν εἶναι ἡ γωνία  $KNM = KN\Gamma$

+ ΠΝΜ, ἤθελον εἶναι ὡσαύτως ἡ γωνία κνμ = κνπ + πνμ, καὶ τὰ δύο τρίγωνα κνπ, πνμ ἤθελον σχηματίζει ἐν μόνον ἐπίπεδον.

Τὰ ἀποδειχθέντα ἔχουν χώραν, ὅποια καὶ ἂν ᾦναι αἱ γωνίαι Μ, Ν, Π, Κ, παραβαλλόμεναι μὲ τὰς ὁμολόγους τῶν μ, ν, π, κ.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐνὸς πολυέδρου εἶναι μοιρασμένη εἰς τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΜΝΠ, ΝΗΚ, κ.τ.λ. βλέπομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄλλου πολυέδρου θέλει περιέχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων αβγ, αγδ, μνπ, νπκ, κ.τ.λ., ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων καὶ ἐὰν πολλὰ τρίγωνα, ὡς ΜΠΝ, ΝΠΚ, κ.τ.λ., ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἑδραν, καὶ εὐρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὰ ὁμολογὰ τῶν μνπ, νπκ, κ.τ.λ. θέλει εὐρίσκωνται παρομοίως εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Λοιπὸν κάθε πολύγωνος ἑδρα εἰς τὸ ἐν πολυέδρον θέλει ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ὁμοίαν πολύγωνον ἑδραν εἰς τὸ ἄλλο πολυέδρον· λοιπὸν τὰ δύο πολυέδρα θέλει περιέχονται ὑπὸ ἰσαρίθμων ἐπιπέδων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ ὁμολογοὶ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ στερεὰ γωνία Ν σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΚΝΠ, ΠΝΜ, ΜΝΡ, ΚΝΑ ἡ ὁμολογος στερεὰ γωνία ν θέλει σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας κνπ, πνμ, μνρ, κνρ. Τώρα αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ πλείσις δύο προσκειμένων ἐπιπέδων εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων τῶν· λοιπὸν αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς δυνάμεναι νὰ ἐπιτεθῶσι.

Λοιπὸν τέλος δύο ὅμοια πολυέδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Π ὁ ρ ι σ μ α. Ἀπὸ τὴν προλαβούσαν ἀπόδειξιν εἴπεται, ὅτι ἐὰν μὲ τέσσαρας κορυφὰς ἐνὸς πολυέδρου σχηματισθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς, καὶ μὲ τέσσαρας ὁμολόγους κορυφὰς ἐνὸς ὁμοίου πολυέδρου δευτέρα πυραμὶς, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουν εἶναι ὅμοιαι· διότι θέλουν ἔχει τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους (πρό. 21. σχόλ.).

Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι δύο ὁμολογοὶ διαγώνιοι, π. χ. ΑΝ, αν, εἶναι μεταξύ τῶν ὡς δύο ὁμολογοὶ πλευραὶ ΑΒ, αβ.

## Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε'.

### Θ ε ὠ ρ η μ α.

Δύο ὅμοια πολυέδρα ἢμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὅποια νὰ ᾦναι ὅμοιαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως κείμεναι.



Διότι εἶδομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων ἡμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν, καὶ ὁμοίως κειμένων. Ἄς θεωρήσωμεν ὅλα τὰ τρίγωνα τοῦ ἐνὸς πολυέδρου, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὅποια σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Α, ὡς βάσεις τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς Α· αἱ πυραμίδες αὗται ὁμοῦ λαμβανόμεναι συγκροτοῦν τὸ πολυέδρον· ἄς μοιράσωμεν παρομοίως τὸ ἄλλο πολυέδρον εἰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας α ὁμολόγου τῇ Α· φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ἐνόηστος πυραμὶς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ ἐνὸς πολυέδρου θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα τὴν ἐνόησσαν τὰς τέσσαρας ὁμολόγους τοῦ ἄλλου πολυέδρου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολυέδρα, κ. τ. λ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κς'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι ἐπειδὴ αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἡ μικροτέρα ἡμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ κοινήν. Τότε αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ἀβγδε, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι, ἐπειδὴ αἱ ὁμολόγοι ἑδραι εἶναι ὅμοιαι (πρό. 22), ἡ γωνία Σαβ εἶναι ἴση τῇ ΣΑΒ, καθὼς καὶ ἡ Σβγ τῇ ΣΒΓ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον αβγ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (13, 5). Τούτου τεθέντος, ἔστω ΣΟ ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καὶ ὁ ἡ στιγμὴ ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον αβγ· κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρ. 15), θέλομεν ἔχει, ΣΟ:Σο::ΣΑ:Σα::ΑΒ:αβ, καὶ ἐπομένως,

$$\frac{1}{3}\Sigma\text{Ο} \div \frac{1}{3}\Sigma\text{ο} :: \text{ΑΒ} : \alpha\beta,$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ἀβγδε, εἶναι ὅμοια σχήματα, διὰ τοῦτο,

$$\frac{-2}{\text{ΑΒΓΔΕ}} : \frac{-2}{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} :: \frac{-2}{\text{ΑΒ}} : \frac{-2}{\alpha\beta}.$$

Ὁ πολυπλασιασμὸς τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ὅρου ἐπὶ ὅρον, δίδει τὴν ἀναλογίαν,

$$\frac{-3}{\text{ΑΒΓΔΕ}} \times \frac{1}{3}\Sigma\text{Ο} : \frac{-3}{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \times \frac{1}{3}\Sigma\text{ο} :: \frac{-3}{\text{ΑΒ}} : \frac{-3}{\alpha\beta}.$$

Τώρα, ΑΒΓΔΕ  $\times \frac{1}{3}\Sigma\text{Ο}$  εἶναι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ (πρό. 18), καὶ ἀβγδε  $\times \frac{1}{3}\Sigma\text{ο}$  εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος Σαβγδε· λοιπὸν δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς ο κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. σχ. 214.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

## Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολυέδρα εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι δύο ὅμοια πολυέδρα ἡμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ᾔναι ὅμοιοι ἢ χάθε μία μὲ τὴν χάθε μίαν (πρό. 25). Τώρα αἱ δύο ὅμοιοι πυραμίδες ΑΠΝΜ, απνμ, εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΜ, αμ, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ. Ὁ αὐτὸς λόγος ἔχει χώραν καὶ ἐπὶ δύο ἄλλων ὁποιονδήποτε ὁμολόγων πυραμίδων· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ ἐν πολυέδρον, ἤτοι αὐτὸ τὸ πολυέδρον, εἶναι πρὸς τὸ ἄλλο πολυέδρον, ὡς ὁ κύβος μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς τοῦ πρώτου, εἶναι πρὸς τὸν κύβον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.

## Γενικὸν Σχόλιον.

Ἡμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀλγεβρικῶν ὄρων, τουτέστι μὲ τὸν πλέον σύντομον τρόπον, τὴν ἀνακεφαλαιώσιν τῶν ἀρχικῶν προτάσεων τούτου τοῦ βιβλίου, ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰς στερεότητας τῶν πολυέδρων.

Ἐστω Β ἡ βάσις ἐνὸς πρίσματος, Υ τὸ ὕψος του· ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι  $B \times Y$  ἢ  $BY$ .

Ἐστω Β ἡ βάσις πυραμίδος, Υ τὸ ὕψος της· ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος θέλει εἶναι  $B \times \frac{1}{3} Y$ , ἢ  $Y \times \frac{1}{3} B$ , ἢ  $\frac{1}{3} BY$ .

Ἐστω Υ τὸ ὕψος κορυμῆς πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις, ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ βάσεις του·  $\sqrt{(AB)}$  θέλει εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξύ τούτων, καὶ ἡ στερεότης τοῦ κορυμῆ θέλει εἶναι  $\frac{1}{3} Y (A + B + \sqrt{(AB)})$ .

Ἐστω Β ἡ βάσις κορυμῆς τριγωνικοῦ πρίσματος, Υ, Υ', Υ'', τὰ ὕψη τῶν τριῶν ἄνω κορυφῶν του, ἡ στερεότης τοῦ κορυμῆ θέλει εἶναι  $\frac{1}{3} B (Y + Y' + Y'')$ .

Ἐπὶ τῶν τελευτῶν Π καὶ π αἱ στερεότητες δύο ὁμοίων πολυέδρων, Α καὶ α δύο πλευραὶ ἢ δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι τούτων

—3—3

τῶν πολυέδρων, θέλει εἶναι  $\Pi : \pi :: A : \alpha$ .

## Η ΣΦΑΙΡΑ.

## Ὅρισμοί.

Α'. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεὸν περατούμενον ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἐξίσου ἀπέχουσιν ἀπὸ τι ἐντὸς σημεῖον καλούμενον κέντρον.

Γενᾶται δὲ ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἡμικυκλίου, ὡς τοῦ ΔΑΕ, ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ: διότι τὰ σημεῖα τῆς εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἀπὸ τὴν καμπύλην ΔΑΕ γραφομένης ἐπιφανείας ἐξίσου θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Γ. σχ. 220.

Β'. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀγομένη ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς μίαν στιγμὴν τῆς ἐπιφανείας· διάμετρος δὲ ἡ ἄξων ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη γραμμὴ, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν περατουμένη.

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Γ'. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 1) ὅτι κάθε τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος. Τούτου τεθέντος, καλεῖται μέγιστος κύκλος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τομὴ· μικρὸς δὲ κύκλος ἡ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη.

Δ'. Ἐπίπεδον ἄπτεται τῆς σφαίρας, ὅταν ἔν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχη μὲ τὴν ἐπιφανείαν της.

Ε'. Πόλος κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐξίσου ἀπέχον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τούτου τοῦ κύκλου. Θέλομεν δὲ ἰδεῖ (πρό. 6) ὅτι κάθε κύκλος εἴτε μέγιστος εἴτε μικρὸς, ἔχει πάντοτε δύο πόλους.

Ζ'. Τρίγωνον σφαιρικὸν εἶναι μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, πάντοτε ὑποτίθενται μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

Ζ'. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ἴσο-



τελές, ἰσόπλευρον, εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις καθ' ἃς καὶ τὸ εὐθύγραμμον.

Η'. Σφαιρικὸν πολύγωνον εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Θ'. Ἄτρακτος (Fuseau) εἶναι τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων, οἱ ὅποιοι τελειοῦν εἰς μίαν κοινὴν διάμετρον.

Ι'. Καλῶ σφῆνα ἢ ὄνυχα σφαιρικὸν (coin, onglet sphérique) τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμιμεγίστων κύκλων, καὶ εἰς τὸ ὅποιον ὁ ἄτρακτος χρησιμεύει ὡς βάσις.

ΙΑ'. Πυραμὶς σφαιρικὴ εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων μιᾶς στερεᾶς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι εἰς τὸ κέντρον. Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ἀποχωριζόμενον ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα.

ΙΒ'. Καλεῖται Ζώνη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ὅποιον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης. Τὸ ἐν ἀπὸ αὐτὰ δυνατόν νὰ ἄπτηται τῆς σφαίρας, καὶ τότε ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΓ'. Τμήμα σφαιρικὸν εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τοῦ.

Τὸ ἐν ἀπὸ αὐτὰ δυνατόν νὰ ἄπτηται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ σφαιρικὸν τμήμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΔ'. Τὸ ὕψος τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. σχ. 220.

ΙΕ'. Ἐν ᾧ τὸ ἡμικύκλιον ΔΑΕ στρεφόμενον ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γράφει τὴν σφαῖραν, κάθε κυκλικὸς τομεὺς, ὡς ΔΓΖ ἢ ΖΓΘ γράφει στερεόν, τὸ ὅποιον καλεῖται σφαιρικὸς τομεὺς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

### Θεώρημα.

Κάθε τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος.

Ἐστω AMB ἡ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς τὴν σφαῖραν τομὴ, τὸ κέντρον τῆς ὁποίας σφαίρας εἶναι Γ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Γ ἃς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΟ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AMB, καὶ διάφοροι

γραμμαὶ ΓΜ, ΓΜ, εἰς διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἥτις περατώνει τὴν τομὴν. σχ. 221.

Αἱ πλάγιαί ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ, εἶναι ἴσαι, ὥς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας· ἰσάκεις λοιπὸν ἀπέχουσι τῆς καθέτου ΓΟ (5, 5)· ὅλοι λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΟΜ, ΟΜ, ΟΒ εἶναι ἴσαι· ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἥτις περατώνει τὴν τομὴν, ἰσάκεις ἀπέχουσι ἀπὸ τι ἐντὸς αὐτῆς σημείου Ο· ἡ καμπύλη λοιπὸν αὕτη εἶναι κύκλου περιφέρεια τοῦ ὁποῖου τὸ κέντρον εἶναι Ο· ἡ τομὴ λοιπὸν ΑΜΒ εἶναι κύκλος.

**Πόρισμα Α'.** Ἐὰν ἡ τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς τῆς θέλει εἶναι ἡ τῆς σφαίρας· ὅλοι λοιπὸν οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι μεταξὺ των.

**Β'.** Δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπειδὴ πρέπει νὰ εὕρισκῃται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρώτου, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δευτέρου, ἀναγκάως εἶναι ἐκ τῶν σημείων τῆς κοινῆς τομῆς των· ἡ κοινὴ των λοιπὸν τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· εἶναι λοιπὸν διάμετρος· ἀλλὰ κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν κ. τ. λ.

**Γ'.** Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφανείαν τῆς εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἐὰν, ἀφ' οὗ χωρίσωμεν τὰ δύο ἡμισφαίρια, θέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως στρέφοντες τὴν κυρτότητά των κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσῃ ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην· διότι ἄλλως ἦθελον ὑπάρχει σημεῖα ἀνισάκεις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου.

**Δ'.** Τὸ κέντρον μικροῦ τινος κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας εὕρισκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου. σχ. 221.

**Ε'.** Οἱ μικροὶ κύκλοι τόσον εἶναι μικρότεροι, ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι ὅσον περισσότερον τὸ ἀπόστημα ΓΟ εἶναι μεγαλύτερον, τόσον περισσότερον ἡ χορδὴ ΑΒ, ἡ διάμετρος τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΜΒ εἶναι μικρότερα.

**ς'.** Δύο δεδομένων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινός, εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ τόξον μεγίστου κύκλου· διότι τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι τρία σημεῖα προσδιορίζοντα τὴν θέσιν ἐπιπέδου. ἐὰν ὅμως τὰ δύο δεδομένα σημεῖα τύχῃ νὰ ᾔναι τὰ ἄκρα διαμέτρου τινός, τότε τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας, καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι δυνατόν νὰ διέλθωσι· διότι ἄπειρα ἐπίπεδα διὰ δύο σημείων δυνατόν νὰ διέλθωσι.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

## Θεώρημα.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον  $AB\Gamma$ , ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σγ. 222.

Ἐστω  $O$  τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθῆτωσαν αἱ ἀκτῖνες  $OA, OB, OG$ . Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ ἐπίπεδα  $AOB, AOG, GOB$ , ταῦτα σχηματίζουν εἰς τὴν στιγμὴν  $O$  γωνίαν στερεάν, καὶ αἱ γωνίαι  $AOB, AOG, GOB$ , μετροῦνται ἀπὸ τὰς πλευρὰς  $AB, AG, BG$ , τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τώρα, ἐκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὴν στερεάν γωνίαν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (21, 5). λοιπὸν ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

## Θεώρημα.

Ὁ βραχύτατος δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον ἐνώνει τὰ δύο δεδομένα σημεῖα.

Ἐστω  $ANB$  τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον ἐνώνει τὰ σημεῖα  $A$  καὶ  $B$ , καὶ ἔστω ἐκτὸς τούτου τοῦ τόξου, εἰ δυνατόν,  $M$  ἐν σημεῖον τῆς βραχυτάτης γραμμῆς μεταξὺ  $A$  καὶ  $B$ . Διὰ τῆς στιγμῆς  $M$  ἄς ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων  $MA, MB$ , καὶ ἄς ληρῶ  $BN=MB$ .

Κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα τὸ τόξον  $ANB$  εἶναι βραχυτέρον τοῦ  $AM+MB$ . ἀφαιρέσει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ  $BN=BM$ , μένει  $AN < AM$ . Τώρα τὸ διάστημα ἀπὸ  $B$  εἰς  $M$ , εἴτε ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον  $BM$ , ἢ εἶναι ὁποιαδήποτε ἄλλη γραμμὴ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα ἀπὸ  $B$  εἰς  $N$ . διότι στρέφοντες τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου  $BM$  ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ  $B$ , δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν στιγμὴν  $M$  εἰς τὴν στιγμὴν  $N$ , καὶ τότε ἡ βραχυτάτη γραμμὴ ἀπὸ  $M$  εἰς  $B$ , ὁποῖα καὶ ἂν ᾖναι, θέλει ταυτισθῇ μὲ τὴν βραχυτάτην γραμμὴν ἀπὸ  $N$  εἰς  $B$ . λοιπὸν οἱ δύο δρόμοι ἀπὸ  $A$  εἰς  $B$ , ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν διέρχεται διὰ  $M$ , ὁ δὲ διὰ  $N$ , ἔχουν ἓν μέρος ἴσον ἀπὸ  $M$  εἰς  $B$  καὶ ἀπὸ  $N$  εἰς  $B$ . Ὁ πρῶτος δρόμος εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ὁ βραχύτερος. λοιπὸν τὸ διάστημα ἀπὸ  $A$  εἰς  $M$  ἵνα βραχύτερον τοῦ διαστήματος ἀπὸ  $A$  εἰς  $N$ , τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον  $AM$  εἶναι μείζον τοῦ  $AN$ . λοιπὸν κανὲν σημεῖον τῆς βραχυτάτης γραμμῆς μεταξὺ  $A$



καὶ B δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι ἐκτὸς τοῦ τόξου ANB· λοιπὸν αὐτὸ τὸ τόξον εἶναι ἡ βραχυτάτη γραμμὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων του. σχ. 223.

Σημείωσις τοῦ Μεταφραστοῦ. Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν κατάληψιν εἰς τὸν ἀναγνώστην ταύτης τῆς προτάσεως, ἔκρινα εὐλογον, χωρὶς νὰ ἀπομακρυνθῶ ἀπὸ τὸν συγγραφέα, νὰ τὴν ἐκθέσω ὡς ἀκολούθως.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ.

Μεταξὺ δύο στιγμῶν ἐπὶ τῆς ἰδίας σφαίρας τὸ βραχύτατον διάστημα εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν ἰδίων στιγμῶν, ὡς τὸ AB τόξον.

Ἐπειδὴ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ A καὶ B εἶναι ἄλλη τις καμπύλη γραμμὴ ὡς ἡ AMB: δηλαδὴ  $AMB < AB$ , καὶ κάθε ἄλλης καμπύλης διερχομένης διὰ A καὶ B. Τώρα ἐὰν ἐκ τῆς B καὶ M φέρωμεν τὸ τόξον μεγίστου κύκλου MB, καὶ παρομοίως ἐκ τῆς A καὶ M τὸ τόξον μεγίστου κύκλου AM, καὶ λάβωμεν τὸ τόξον BN ἴσον μὲ τὸ τόξον MB· τότε τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ B καὶ N θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μεταξὺ B καὶ M· ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑπάγωμεν ἀπὸ B εἰς A ἢ διατρέχοντες τὴν καμπύλην AMB, ἢ τὸ διάστημα μεταξὺ B καὶ N, καὶ τὸ διάστημα μεταξὺ N καὶ A, καὶ ὁ πρῶτος δρόμος, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι βραχύτερος τοῦ δευτέρου, ἔπεται, ἐξ αἰτίας ὅπου τὸ βραχύτατον διάστημα ἀπὸ B εἰς M εἶναι ἴσον μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα ἀπὸ B εἰς N, ὅτι τὸ διάστημα μεταξὺ A καὶ M ἐκτιμώμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης AMB ἀπὸ A ἕως M, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ διάστημα μεταξὺ A καὶ N. Τώρα ἐπειδὴ τὸ τόξον AM πλεόν τὸ MB εἶναι μείζον τοῦ τόξου AB, καὶ ἐλήφθη  $MB = BN$ · διὰ τοῦτο τὸ τόξον AM εἶναι μείζον τοῦ AN· λοιπὸν λαμβάνοντες ἐπὶ τοῦ τόξου AB τόξον τι ἴσον μὲ τὸ AM, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ στιγμή M πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τῆς N μεταξὺ N καὶ B. Ἡ στιγμή λοιπὸν αὕτη ἀπέχει ἐκ τῆς στιγμῆς A περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀπέχει ἡ στιγμή N· ἀλλ' ὅσον ἀπέχει ἡ στιγμή ἢ μεταξὺ τῆς N καὶ B ἀπὸ τὴν A, τόσον ἀπέχει καὶ ἡ M ἀπὸ τὴν A· λοιπὸν τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ M εἶναι ἴσον μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B· ὅταν λοιπὸν τὸ τόξον AM πέσῃ ἐπὶ τοῦ AB, τότε ἡ στιγμή M πίπτει ἐπὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B· καὶ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ M ταυτίζεται μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B. Τώρα ἐπει-

ὅη ἢ N εἶναι πλησιεστέρα εἰς τὴν A παρὰ ἢ μεταξὺ τῆς N καὶ B στιγμῇ, ἔπεται ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ A καὶ N, εἶναι μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ A καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ N καὶ B, ἢ μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ τῆς A καὶ M.

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ N πλεόν τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ N καὶ B, εἶναι μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ A καὶ M πλεόν τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ M καὶ B, δηλαδὴ τῆς καμπύλης AMB· ψευδὲς λοιπὸν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ A καὶ B εἶναι ἡ καμπύλη AMB. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν, ὅτι κάθε ἄλλη καμπύλη, ἣτις ἐνώνει τὴν στιγμὴν A καὶ B, καὶ δὲν ἔχει ὅλας τὰς στιγμὰς τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου AB, δὲν εἶναι ἐκείνη ἣτις παριστάνει τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ A καὶ B· ἀλλὰ μεταξὺ τῆς A καὶ B εὐρίσκεται τὸ ζητούμενον βραχύτατον διάστημα· λοιπὸν ἡ καμπύλη ἣτις ἐκφράζει αὐτὸ, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου δηλαδὴ τὸ AB· ἐπειδὴ εἰς τὰς στιγμὰς τούτου, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν· καὶ λοιπὸν δὲν δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη ἣτις ἐνώνει τὴν A καὶ B μικροτέρα τοῦ τόξου AB. Ὅπερ ἔδει ἀποδείξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

#### Θέωρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἐστω ABΓ ὁποιοῦνδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· ἃς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ AB, AΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν ἐκ νέου εἰς Δ. Τὰ τόξα ABΔ, AΓΔ, θέλουν εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, διότι δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη (πρό. 1)· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον BΓΔ ἔχομεν τὴν πλευρὰν BΓ < BΔ + ΓΔ (πρό. 2)· προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ AB + AΓ, προκύπτει  $AB + AΓ + BΓ < ABΔ + AΓΔ$ , τουτέστι μικρότερον περιφερείας. σχ. 224.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

#### Θέωρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κάθε σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, τὸ πεντάγωνον ABΓΔΕ ἃς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ AB, AΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς

Ζ· ἐπειδὴ ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΖ+ΓΖ, ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικρότερα τῆς τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ. Ἀς προεκβληθῶσιν ἐκ νέου αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΖΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς Η· θέλει εἶναι  $ΕΔ < ΕΗ + ΗΔ$ . λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ εἶναι μικρότερα τῆς τοῦ τριγώνου ΑΖΗ· αὕτη εἶναι μικρότερα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· λοιπὸν πολὺ περισσότερο ἢ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικρότερα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. σχ. 225.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τῶ ὄντι ἡ αὕτη μὲ τὴν ΚΒ' τοῦ ἐ βιβλίου· διότι ἐὰν Ο ᾖναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἰς τὴν στιγμὴν Ο, γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κ. τ. λ. τώρα ἐκάστη τούτων τῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου· λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου, ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν πρέπει νὰ ᾖναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν. Ἡ ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἶναι διαφορετικὴ τῆς τοῦ ἐ βιβλίου· ἀλλὰ καὶ αἱ δύο προϋποθέτουσιν ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι κυρτὸν, ἢ ὅτι οὐδεμίᾳ πλευρᾷ προεκβαλλομένη τέμνει τὸ σχῆμα.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜΒ ἀγθῇ κάθετος ἡ διάμετρος ΔΕ, τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε ταύτης τῆς διαμέτρου θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΑΜΒ, καὶ ὅλων τῶν μικρῶν κύκλων, ὡς ΖΝΗ, τῶν παραλλήλων μὲ αὐτόν. σχ. 220.

Διότι ἡ ΔΓ ἢ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΜ, ΓΒ, κ. τ. λ. ἡγμένας ἀπὸ τὸν πόδα τῆς ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΑ, ΔΜ, ΔΒ, κ. τ. λ. εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰ τόξα ΕΑ, ΕΜ, ΕΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν ἕκαστον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεία τῆς περιφερείας ΑΜΒ· λοιπὸν εἶναι οἱ πόλοι ταύτης τῆς περιφερείας. (ὁρ. 5).

Δεύτερον, ἡ ἀκτὶς ΔΓ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι καὶ κάθετος εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ΖΝΗ· λοιπὸν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου ΖΝΗ (πρό. 1)· λοιπὸν ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ πλάγιαὶ ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, αἱ πλάγιαὶ αὗται ἰσάκις



θέλουν ἀπέχει τῆς καθέτου ΔΟ καὶ θέλουν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ὅταν αἱ χορδαὶ ᾖναι ἴσαι, τὰ τόξα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅθεν ἡ στιγμή Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ΖΝΗ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ στιγμή Ε εἶναι ὁ ἄλλος πόλος.

**Πόρισμα Α'.** Κάθε τόξον ΔΜ ἡγμένον ἀπὸ μίαν στιγμήν τόξου μεγίστου κύκλου ΑΜΒ εἰς τὸν πόλον του εἶναι ἐν τέταρτον περιφερείας, τὸ ὁποῖον διὰ συντομίαν θέλομεν ὀνομάζει τεταρτημόριον (quadrant), καὶ τὸ τεταρτημόριον τοῦτο κάμνει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τὸ τόξον ΑΜ· διότι, οὐσης τῆς γραμμῆς ΔΓ καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ, κάθε ἐπίπεδον ΔΜΓ δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ (18, 6)· λοιπὸν ἡ γωνία τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἢ, κατὰ τὸν 5' ὀρισμὸν, ἡ γωνία ΑΜΔ εἶναι ὀρθή.

**Β'.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον δεδομένου τόξου ΑΜ, ἄγομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΜΔ κάθετον εἰς ΑΜ, λαμβάνομεν ΜΔ ἴσον μετὰ τεταρτημόριον, καὶ ἡ στιγμή Δ θέλει εἶναι εἰς τῶν πόλων τοῦ τόξου ΑΜ· ἡ ἄγομεν εἰς τὰς δύο στιγμάς Α καὶ Μ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΜΔ κάθετα εἰς ΑΜ, ἡ στιγμή τῆς συνδρομῆς Δ τῶν δύο τούτων τόξων θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος.

**Γ'.** Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῆς στιγμῆς Δ ἀπὸ καθ' ἓν τῶν σημείων Α καὶ Μ ᾖναι ἴσον μετὰ τεταρτημόριον, λέγω ὅτι ἡ στιγμή Δ θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἐν ταύτῃ αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ θέλουν εἶναι ὀρθαί.

Διότι ἔστω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΔ, ΓΜ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΜΓΔ εἶναι ὀρθαί, ἡ γραμμὴ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΑ, ΓΜ. λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των· λοιπὸν ἡ στιγμή Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ, εἶναι ὀρθαί.

**Σχόλιον.** Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξα κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μετὰ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν μετὰ τὴν ὁποίαν γράφωμεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν στρέψωμεν τὸ τόξον ΔΖ ἢ κάθε ἄλλην γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ διαστήματος ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Ζ θέλει γράψει τὸν μικρὸν κύκλον ΖΝΗ· καὶ ἐὰν στρέψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΖΑ ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Α θέλει γράψει τόξον μεγίστου κύκλου τὸ ΑΜ.

Ἐὰν λάβωμεν χρεῖαν νὰ προσεβάλωμεν τὸ τόξον ΑΜ, ἢ ἐὰν δὲν ἔχωμεν δεδομένας παρὰ μόνον τὰς στιγμάς Α καὶ Μ διὰ

τῶν ὁποίων τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ διέλθῃ, κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν πόλον  $\Delta$  διὰ τῆς κοινῆς τομῆς δύο τόξων γεγραμμένων ἐκ τῶν στιγμῶν  $A$  καὶ  $M$  ὥς ἐκ κέντρων μὲ διάστημα ἴσον μὲ τεταρτημόριον· εὐρεθέντος τοῦ πόλου  $\Delta$ , γράφομεν ἐκ τῆς στιγμῆς  $\Delta$  ὥς ἐκ κέντρου καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα τὸ τόξον  $AM$  καὶ τὴν προεκβολὴν του.

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν χρεῖαν ἀπὸ δεδομένην στιγμήν  $\Pi$  νὰ καταβάσωμεν τόξον κάθετον ἐπὶ τοῦ δεδομένου  $AM$ , προεκβάλωμεν τοῦτο εἰς  $\Sigma$  ἕως οὗ τὸ διάστημα  $\Pi\Sigma$  νὰ ᾔηται ἴσον μὲ τεταρτημόριον· ἀκολουθῶς ἐκ τοῦ πόλου  $\Sigma$  καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα γράφομεν τὸ τόξον  $\Pi M$ , τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κάθετον τόξον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Θεώρημα.

Κάθε ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν. σχ. 226.

Ἐστω  $ZAH$  ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος  $OA$ · ἐὰν ληθῇ ὁποιοδήποτε σημεῖον  $M$  ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἐπιζευχθῇ  $OM$  καὶ  $AM$ , ἡ γωνία  $OAM$  θέλει εἶναι ὀρθή, καὶ οὕτως τὸ διάστημα  $OM$  θέλει εἶναι μείζον τοῦ  $OA$ . Ἡ στιγμή  $M$  εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καὶ, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου  $ZAH$ , ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν δὲν ἔχει παρὰ μόνον τὸ  $A$ · λοιπὸν ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (ὁρ. 4).

Σχόλιον. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ δεῖξωμεν ὅτι δύο σφαῖραι ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν, καὶ ἐπομένως ἅπτονται ἀλλήλων· ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων των ᾔηται ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των· τότε τὰ κέντρα καὶ ἡ στιγμή τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπ' εὐθείας.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Θεώρημα.

Ἡ γωνία  $BA\Gamma$  τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ των δύο τόξα μεγίστων κύκλων  $AB$ ,  $AG$ , εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν  $ZAH$ , τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τούτων τῶν τόξων εἰς τὴν στιγμήν  $A$ · ἔχει ὁμοίως διὰ μέτρον τὸ τόξον  $\Delta E$ , γραφόμενον ἐκ τῆς στιγμῆς  $A$  ὥς ἐκ πόλου μεταξὺ τῶν πλευρῶν  $AB$ ,  $AG$ , προεκβαλλομένων ἐὰν ᾔηται ἀναγκαῖον. σχ. 226.

Διότι ἡ ἐφαπτομένη  $AZ$ , ἡγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου  $AB$ , εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα  $AO$ · ἡ ἐφαπτομένη  $AH$ , ἡγ-

μένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΓ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΑΟ. λοιπὸν ἡ γωνία ΖΑΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΑΓ (17, 5), ἥτις εἶναι ἡ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, καὶ σημειοῦται διὰ ΒΑΓ.

Παρομοίως, εἰὰν τὸ τόξον ΑΔ εἶναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καθὼς καὶ ΑΕ, αἱ γραμμαὶ ΟΔ, ΟΕ, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς ΑΟ, καὶ ἡ γωνία ΔΟΕ θέλει εἶναι ἀκόμη ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΑΟΔ, ΑΟΕ. λοιπὸν τὸ τόξον ΔΕ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἡ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΑΒ.

**Πόρισμα.** Αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἡμποροῦν νὰ παραβάλλωνται μεταξύ των διὰ τῶν τόξων μεγίστων κύκλων γεγραμμένων ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ πόλων καὶ μεταξύ τῶν πλευρῶν των περιεχομένων: ὅθεν εὐκολον εἶναι νὰ κάμωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

**Σχόλιον.** Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὡς ΑΓΟ καὶ ΒΓΝ εἶναι ἴσαι διότι ἡ ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη πάντοτε εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΒ, ΟΓΝ.

Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι εἰς τὴν συναπάντησιν δύο τόξων ΑΓΒ, ΟΓΝ, αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΟ, ΟΓΒ ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν πάντοτε μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 238.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

#### Θεώρημα.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἰὰν ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Β, Γ, ὡς ἐκ πόλων, γραφθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΔ, ΔΕ, τὰ ὅποια σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀντιστρόφως αἱ τρεῖς στιγμαὶ Δ, Ε, Ζ, θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ. σχ. 227.

Διότι ἐπειδὴ ἡ στιγμή Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΕΖ, τὸ διάστημα ΑΕ εἶναι τεταρτημόριον· ἐπειδὴ ἡ στιγμή Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ διάστημα ΓΕ εἶναι παρομοίως τεταρτημόριον· λοιπὸν ἡ στιγμή Ε ἀπέχει τεταρτημόριον ἀπὸ καθέν τῶν σημείων Α καὶ Γ· εἶναι λοιπὸν ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ (6, πόρ. 3). Ὀμοίως δεῖξωμεν ὅτι Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ Ζ ὁ τοῦ τόξου ΑΒ.

**Πόρισμα.** Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ γραφθῇ διὰ τοῦ ΔΕΖ, ὡς τὸ ΔΕΖ διὰ τοῦ ΑΒΓ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

#### Θεώρημα.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐκάστη γωνία ἐνὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ,



ΔΕΖ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἡμιπεριφέρειαν μείον τὴν ἀπέναντι πλευράν εἰς τὸ ἄλλο τρίγωνον. σχ. 227.

Ἄς προεκβληθῶσιν, ἐάν ᾦναι ἀναγκαῖον, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὴν ΕΖ εἰς Η καὶ Θ· ἐπειδὴ ἡ στιγμή Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΗΘ, ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΘ, ὡς καὶ τὸ ΗΖ, εἶναι τεταρτημόριον, ἐπειδὴ Ε εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΑΘ, καὶ Ζ ὁ πόλος τοῦ ΑΗ· λοιπὸν ΕΘ+ΗΖ ἴσονται μὲ ἡμιπεριφέρειαν. Τώρα ΕΘ+ΗΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ΕΖ+ΗΘ· λοιπὸν τὸ τόξον ΗΘ μέτρον τῆς γωνίας Α εἶναι ἴσον μὲ ἡμιπεριφέρειαν μείον τὴν πλευράν ΕΖ· ὡσαύτως ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον  $\frac{1}{2}$  περ. — ΔΖ, καὶ ἡ γωνία Γ,  $\frac{1}{2}$  περ. — ΔΕ.

Ἡ ἰδιότης αὕτη πρέπει νὰ ᾦναι ἀντίστροφος μεταξὺ τῶν δύο τριγώνων, διότι γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἐν διὰ μέσου τοῦ ἄλλου. Οὕτω θέλομεν εὑρεῖν ὅτι αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ μετροῦνται διαδοχικῶς ὑπὸ  $\frac{1}{2}$  περ. — ΒΓ,  $\frac{1}{2}$  περ. — ΑΓ,  $\frac{1}{2}$  περ. — ΑΒ. Τῷ ὄντι ἡ γωνία Δ, παραδείγματος χάριν, ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΜΙ. Τώρα ΜΙ+ΒΓ=ΜΓ+ΒΙ= $\frac{1}{2}$  περ· λοιπὸν τὸ τόξον ΜΙ, μέτρον τῆς γωνίας Δ, =  $\frac{1}{2}$  περ. ΒΓ, καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας.

Σχόλιον. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ δυνατόν νὰ σχηματισθῶσι τρία ἄλλα ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν τριῶν τόξων ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ. Ἀλλ' ἡ παρούσα πρότασις δὲν ἔχει χώραν παρὰ διὰ τὸ κεντροικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον διακρίνεται ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα ἐκ τούτου ὅτι αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Δ κεῖνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Ε ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ, καὶ δύο γωνίαι Γ καὶ Ζ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ· (σχ. 228 καὶ 227).

Διάφορα ὀνόματα δίδονται εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ· ἡμεῖς θέλομεν τὰ ὀνομάζει τρίγωνα πολικά.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Α ἡ μ α.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐάν ἐκ τοῦ πόλου Α καὶ μὲ τὸ διάστημα ΑΓ γραφθῇ τὸ τόξον τοῦ μικροῦ κύκλου ΔΕΓ· ἐάν ἐκ τοῦ πόλου Β καὶ μὲ τὸ διάστημα ΒΓ γραφθῇ παρομοίως τὸ τόξον ΔΖΓ, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Δ, ὅπου τὰ τόξα ΔΕΓ, ΔΖΓ τέμνονται, ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΑΔ, ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΒ θέλει ἔχει ὅλα του τὰ μέρη ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. σχ. 229.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ πλευρὰ  $ΑΔ=ΑΓ$ ,  $ΑΒ=ΒΓ$ ,  $ΑΒ$  εἶναι κοινή· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Λέγω τώρα ὅτι αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς ἴσας πλευράς γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς  $O$ , ἡμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν γωνίαν στερεάν σχηματιζομένην εἰς τὴν στιγμὴν  $O$  ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $ΑΟΒ$ ,  $ΑΟΓ$ ,  $ΒΟΓ$ · ἡμποροῦμεν ὡσαύτως νὰ φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν γωνίαν στερεάν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας  $ΑΟΒ$ ,  $ΑΟΔ$ ,  $ΒΟΔ$ . Καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου  $ΑΒΓ$  εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου  $ΑΔΒ$ , ἔπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν μίαν τούτων τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ἄλλην στερεάν γωνίαν, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἀλλ' εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀπεδείχθη (23, 5) ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκως κλίνουν μεταξύ των· λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου  $ΔΑΒ$  εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου  $ΓΑΒ$ , τουτέστι  $ΔΑΒ=ΒΑΓ$ ,  $ΔΒΑ=ΑΒΓ$ , καὶ  $ΑΔΒ=ΑΓΒ$ · λοιπὸν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου  $ΑΔΒ$  εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευράς καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου  $ΑΓΒ$ .

Σχόλιον. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων τούτων δὲν εἶναι ὁμοίως ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως ἰσότης, διότι ἀδύνατον ἦθελεν εἶναι νὰ ἐσαρμόσωσιν ἀκριβῶς τὰ δύο τρίγωνα, ἐκτὸς εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἦθελον εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἡ περὶ τῆς ὁ λόγος ἰσότης εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα  $ΑΓΒ$ ,  $ΑΔΒ$  θέλομεν ὀνομάζει τρίγωνα συμμετρικά.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

### Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἡ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ πλευρῶν αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν.

Ἐστω ἡ πλευρὰ  $ΑΒ=ΕΖ$ , ἡ πλευρὰ  $ΑΓ=ΕΗ$ , καὶ ἡ γωνία  $ΒΑΓ=ΖΕΗ$ · τὸ τρίγωνον  $ΕΖΗ$  ἡμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου  $ΑΒΓ$ , ἡ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ  $ΑΒΔ$ , καθ' ὃν τρόπον ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ πλευρῶν ἴσων. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ

τριγώνου  $EZH$  θέλουν εἶναι ἴσα μετὰ τοῦ τριγώνου  $ABΓ$ , τοῦ-  
τέστιν ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν τῶν ὑποτιθεμένων ἴσων, θέλει εἶναι  
ἡ πλευρὰ  $BΓ=ZH$ , ἡ γωνία  $ABΓ=EZH$ , καὶ ἡ γωνία  $ΑΓΒ=$   
 $ΕΗΖ$ . σχ. 230.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἡ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κεί-  
μενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν  
ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μετὰ τὴν  
κάθε μίαν.

Διότι δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἐν τούτων τῶν τριγόνων  
ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του, ὡς ἐκάμαμεν εἰς  
παρομοίαν περίστασιν διὰ τὰ εὐθύγραμμμα τρίγωνα. Βλέπε  
πρότ. Ζ'. βιβλ. Α'.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἡ ἐπὶ ἴσων σφαι-  
ρῶν κείμενα, ᾗναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, θέλουν εἶναι ὡσαύτως  
καὶ ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι θέλουν εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴ-  
σων πλευρῶν.

Τοῦτο εἶναι φανερόν ἐκ τῆς ΙΑ' προτάσεως, ὅπου εἶδομεν ὅτι  
μὲ τρεῖς δεδομένας πλευρὰς  $AB, ΑΓ, BΓ$  δύο μόνον τρίγωνα  
 $ΑΓΒ, ΑΒΔ$  δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, διαφορετικὰ μὲν ὡς  
πρὸς τὴν θέσιν τῶν μερῶν, ἀλλ' ἴσα ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν  
ἰδίων τούτων μερῶν. Λοιπὸν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρα μεταξύ των  
εἶναι ἢ ἀπολύτως ἴσα, ἢ τοῦλάχιστον ἴσα ἐκ συμμετρίας· καὶ εἰς  
τάς δύο περιστάσεις εἶναι ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀ-  
πέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν. σχ. 229.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων  
πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο γωνίαι σφαι-  
ρικοῦ τινος τριγώνου ᾗναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

1.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ πλευρὰ  $AB=ΑΓ$ . λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γω-  
νία  $Γ=B$ : διότι, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν  $A$  ἀχθῇ εἰς τὴν  
στιγμὴν  $Δ$ , μέσον τῆς βάσεως, τὸ τόξον  $ΑΔ$ , τὰ  
δύο τρίγωνα  $ΑΒΔ, ΑΔΓ$ , θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς  
ἴσας τὴν κάθε μίαν μετὰ τὴν κάθε μίαν τουτέστιν,  $ΑΔ$  κοινὴν,  $ΒΔ =$



$\Delta\Gamma$ , καὶ  $AB=AG$ : λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, καὶ θέλει εἶναι  $B=G$ .  
σχ. 231.

2.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ γωνία  $B=G$ . λέγω ὅτι θέλει εἶναι  $AG=AB$ : διότι ἐὰν ἡ πλευρὰ  $AB$  δὲν ᾖ ἴση τῇ  $AG$ , ἔστω  $AB$  ἡ μεγαλύτερα τῶν δύο, ἃς ληφθῇ  $BO=AG$ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ  $OG$ . Αἱ δύο πλευραὶ  $BO$ ,  $BG$ , εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο  $AG$ ,  $BG$ . ἡ περιεχομένη γωνία  $OBG$  ἀπὸ τὰς πρώτας εἶναι ἴση μὲ τὴν περιεχομένην ἀπὸ τὰς δευτέρας  $AIG$ . Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα  $BOG$ ,  $AIG$ , ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα τῶν μέρη ἴσα (πρό. 21), ἐπομένως ἡ γωνία  $OGB=ABG$ : ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία  $ABG=AGB$ . λοιπὸν ἤθελεν εἶναι  $OGB=AGB$ , ὅπερ ἀδύνατον· ἀδύνατον λοιπὸν νὰ ὑποτεθῇ ἡ  $AB$  διαφορετικὴ τῆς  $AG$ . αἱ πλευραὶ ἄρα  $AB$ ,  $AG$ , ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν  $B$  καὶ  $G$ , εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει, ὅτι ἡ γωνία  $BAG=ΔAG$ , καὶ ἡ γωνία  $BAG=ΔAG$ . λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταῖαι εἶναι ὀρθαί: ἄρα τὸ ἀγόμενον τόξον ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τινος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ εἶναι κάθετον εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ  $ABG$ , ἐὰν ἡ γωνία  $A$  ᾖ μείζων τῆς γωνίας  $B$ , ἡ πλευρὰ  $BG$  ἀπέναντι τῆς γωνίας  $A$  θέλει εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς  $AG$  ἀπέναντι τῆς γωνίας  $B$ . ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πλευρὰ  $BG$  εἶναι μείζων τῆς  $GA$ , ἡ γωνία  $A$  θέλει εἶναι μείζων τῆς γωνίας  $B$ . σχ. 232.

1.<sup>ον</sup> Ἐστω ἡ γωνία  $A > B$ , ἃς γένῃ ἡ γωνία  $BAG = B$ , θέλει εἶναι  $AG = BG$  (πρό. 15): ἀλλὰ  $AG < BG$  εἶναι μείζων ἀπὸ  $AG$ . ἀντὶ τῆς  $AG$  τεθείσης τῆς  $BG$ , θέλει εἶναι  $BG < AG$  ἢ  $BG > AG$ .

2.<sup>ον</sup> Ὑποτεθείσης τῆς  $BG > AG$ , λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία  $BAG$  μείζων τῆς  $ABG$ : διότι, ἐὰν  $BAG$  ᾖ ἴση μὲ  $ABG$ , ἤθελεν εἶναι  $BG = AG$ . ἐὰν δὲ  $BAG < ABG$ , κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, ἤθελεν εἶναι  $BG < AG$ . ὅπερ ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Λοιπὸν ἡ γωνία  $BAG$  εἶναι μείζων τῆς  $ABG$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ  $AB$ ,  $AG$ , τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου  $ABG$  ᾖναι

ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευράς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ μιᾷ ἴσης σφαίρας χαραγμένου, ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία Α ᾖναι μείζων τῆς γωνίας Δ, λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μείζων τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 233.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία μὲ τὴν τῆς προτάσεως Ι', βιβλ. Α'.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

#### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν χαραγμένα ᾖναι ἰσογώνια μεταξύ των, θέλουν εἶναι καὶ ἰσόπλευρα.

Ἐστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο δεδομένα τρίγωνα, Π καὶ Κ τὰ πολικάτων· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν Π καὶ Κ θέλουν εἶναι ἴσαι (πρό. 10): ἀλλ' ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τρίγωνα Π καὶ Κ εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, ἔπεται ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνια (πρό. 14)· τέλος, ἐκ τοῦ ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Π καὶ Κ εἶναι ἴσαι, ἔπεται (πρό. 10) ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν Α καὶ Β εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα Α καὶ Β εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καὶ ἰσόπλευρα μεταξύ των.

Ἡμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ἀποδείξωμεν τὴν αὐτὴν πρότασιν χωρὶς νὰ συνδράμωμεν εἰς τὰ πολικὰ τρίγωνα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ἐστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ, δύο τρίγωνα ἰσογώνια μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ. σχ. 234.

Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἃς ληρθῇ ΑΗ=ΔΕ, καὶ ΑΘ=ΔΖ· ἃς ἐπιζευθῇ ΗΘ καὶ ἃς προεκβληθῶσι τὰ τόξα ΒΓ, ΗΘ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ι καὶ Κ'.

Αἱ δύο πλευραὶ ΑΗ, ΑΘ, εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι μὲ τὰς δύο ΔΖ, ΔΕ· ἡ περιεχομένη γωνία ΗΑΘ=ΒΑΓ=ΕΔΖ· λοιπὸν (πρό. 12) τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΗΘ=ΔΕΖ=ΑΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΘΗ=ΔΖΕ=ΑΓΒ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, Κ'ΒΗ, ἡ πλευρὰ ΒΗ εἶναι κοινὴ, ἡ γωνία ΙΒΗ=ΗΒΚ'. καὶ ἐπειδὴ ΙΒΗ+ΒΗΚ' ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, καθὼς καὶ ΗΒΚ'+ΙΒΗ, ἔπεται ὅτι ΒΗΚ'=ΙΒΗ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, ΗΒΚ', εἶναι ἴσα (πρό. 13)· ἄρα ΙΗ=ΒΚ', καὶ ΙΒ=ΗΚ'.

Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΘΗ=ΑΓΒ, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΓΘ, ΘΓΚ', ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἄρα ΙΘ=ΓΚ', καὶ ΘΚ'=ΙΓ.



Τώρα, ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων  $BK'$ ,  $IH$ , ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα  $IK'$ ,  $IO$ , τὰ ὑπόλοιπα  $BΓ$ ,  $HO$ , θέλουν εἶναι ἴσα. Ἄλλως ἡ γωνία  $BΓA = AΘH$ , καὶ ἡ γωνία  $ABΓ = AHΘ$ . Λοιπὸν τὰ τρίγωνα  $ABΓ$ ,  $AΘH$ , ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα: ἀλλὰ τὸ τρίγωνον  $ΔΕΖ$  εἶναι ἴσον καθ' ὅλα του τὰ μέρη μετὰ τὸ τρίγωνον  $AΘH$ · λοιπὸν εἶναι ἴσον καὶ μετὰ τὸ τρίγωνον  $ABΓ$ , καὶ θέλει εἶναι  $AB = ΔΕ$ ,  $AΓ = ΔΖ$ ,  $BΓ = ΕΖ$ . Ἄρα, ἐὰν δύο σφαιρικά τρίγωνα ᾖναι ἰσογώνια μεταξύ των, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἴσαι.

**Σχόλιον.** Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅπου ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἄλλο τι δὲν συνάγεται παρὰ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν. Ἄλλ' εὐκολον εἶναι νὰ δώσωμεν λόγον τῆς τοιαύτης διαφορᾶς ἥτις κατὰ τοῦτο ὑπάρχει μεταξύ τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων. Εἰς τὴν παροῦσαν πρότασιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς προτάσεις  $IB'$ ,  $II'$ ,  $IA'$  καὶ  $IZ'$ , εἰς τὰς ὁποίας γίνεται λόγος περὶ τῆς συγκρίσεως τῶν τριγώνων, λέγομεν ἐκφραστικῶς (*expressement*) ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι *χαραγμένα* ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν. Τώρα τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, δύο τρίγωνα δὲν ἔμπορουν νὰ ᾖναι ὅμοια χωρὶς νὰ ᾖναι ἴσα. Δὲν εἶναι λοιπὸν θαυμαστὸν ὅτι ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπιφέρει τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν.

Δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ ἐὰν τὰ τρίγωνα ᾖσαν *χαραγμένα* ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Τότε διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀσκήνες τῶν σφαιρῶν. (1)

(1) Εἰς τὴν  $KΓ'$  πρότασιν τοῦ *Ε.* βιβλίου ἀπεδείχθη ὅτι ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μετὰ τὴν κάθε μίαν, αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τώρα εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἀντίστροφος: δηλαδή, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα δύο τριέδρων στερεῶν γωνιῶν ἰσάνικι κλίνουν μεταξύ των, αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν ὁποίων ἡ κλίσις εἶναι ἴση εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, θίλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι (βλέπε διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀντιστροφῆς ταύτης προτάσεως (*les reciproques de la Geometrie par M. Garnier*) τούτου στερέντος, ὅταν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ᾖναι ἰσογώνια, ὅταν δηλαδή αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν ἐδρῶν τῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ παράβαλλόμενα τρίγωνα, ᾖναι ἴσαι ἢ κάθε μία μετὰ τὴν κάθε μίαν, τότε αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν πρώτην στερεάν γωνίαν εἶναι ἴσαι μετὰ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν δευτέραν στερεάν γωνίαν· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦν ταύτας τὰς γωνίας ἢ αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἓν, ὅταν ᾖναι *χαραγμένα* ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἀνάλογα δὲ τῶν ἀκτίνων ὅταν ᾖναι *χαραγμένα* ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν· διότι τότε μετροῦνται γωνίας εἰς τὸ κέντρο ἴσας, εἶναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀκτίνες *O. M.*



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

## Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἑξ καὶ μεγαλύτερον ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Διότι 1.<sup>ον</sup> κάθε γωνία παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερα ἀπὸ δύο ὀρθῶν (βλέπε τὸ ἑξῆς σχόλιον). λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον ἑξ ὀρθῶν.

2.<sup>ον</sup> Τὸ μέτρον ἐκάστης γωνίας παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μείον ἢ ἀντιστοιχοῦσα πλευρὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου (πρό. 10). λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον τρεῖς ἡμιπεριφερείας μείον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Τώρα τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι μικρότερον περιφερείας (πρό. 4). λοιπὸν, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἀπὸ τρεῖς ἡμιπεριφερείας, ἐπειδὴ ἀφαιρούμεν ποσότητα μικρότεραν περιφερείας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶναι μείζον ἡμιπεριφερείας, ἥτις εἶναι τὸ μέτρον δύο ὀρθῶν γωνιῶν. λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μείζον δύο ὀρθῶν.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι σταθερὸν, ὥς τὸ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων· ἀλλὰ μεταβάλλεται ἀπὸ δύο ὀρθάς γωνίας ἕως ἑξ, χωρὶς οὔτε μὲ τὸ ἐν οὔτε μὲ τὸ ἄλλο ὄριον νὰ ἡμπορῇ νὰ γένη ἴσον. Οὕτω δύο γωνίαι δεδομένοι δὲν κάμνουν γνωστὴν τὴν τρίτην.

Πόρισμα Β'. Τρίγωνον σφαιρικὸν ἡμπορεῖ νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς ὀρθάς γωνίας, δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ᾗναι δις ὀρθογώνιον, τοὔτέστιν ἔχῃ δύο τῶν γωνιῶν τοῦ Β καὶ Γ ὀρθάς, ἡ κορυφή Α θέλει εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως ΒΓ (πρό. 6). καὶ αἱ πλευраὶ ΑΒ, ΑΓ, θέλουν εἶναι τεταρτημόρια. σχ. 235.

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ γωνία Α ᾗναι ὀρθή, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι τρις ὀρθογώνιον, ὅλαι τοῦ αἱ γωνίαι θέλουν εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τεταρτημόρια. Τὸ τρις ὀρθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὁκτὼ φοραῖς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· τοῦτο γίνεται φανερόν ἀπὸ τὸ σχῆμα 236, ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΜΝ ἴσου μὲ τεταρτημόριον.

Σχόλιον. Εἰς τὰ προηγούμενα, συμφώνως μὲ τὸν 5.<sup>ον</sup> ὅρισμόν, ὑποθέσαμεν ὅτι τὰ σφαιρικά τρίγωνα ἔχουν πάντοτε τὰς πλευράς των μικροτέρας τῆς ἡμιπεριφερείας· τότε ἔπεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι πάντοτε μικρότεραι δύο ὀρθῶν· διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ᾗναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριφερείας, καθὼς καὶ ἡ ΑΓ, τὰ τόξα ταῦτα πρέπει νὰ προεχ-

βληθῶν καὶ τὰ δύο διὰ τὰ συναπαντηθῶν εἰς Δ. Τώρα αἱ δύο γωνίαι  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma B\Delta$ , ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμουν δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία  $AB\Gamma$  μόνη τῆς εἶναι μικροτέρα δύο ὀρθῶν. σχ. 224.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὑπάρχουν σφαιρικά τρίγωνα, τῶν ὁποίων μερικαὶ πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἡμισφαιρείας, καὶ μερικαὶ γωνίαι μεγαλύτεραι δύο ὀρθῶν· διότι ἐὰν προσεχθῇ ἡ πλευρὰ  $AF$  ἀκεραίαν περιφέρειαν  $AF\Gamma$ , ὅτι μένει, ἀφ' οὗ ἀπὸ τὸ ἡμισφαίριον ἀραιεθῇ τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ , εἶναι νέον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἡμπορεῖ νὰ σημειωθῇ ὡσπύτως διὰ  $AB\Gamma$ , καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $AF\Delta\Gamma$ . Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ  $AF\Delta\Gamma$  εἶναι μείζων τῆς ἡμισφαιρείας  $AF\Delta$ · ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ εἰς  $B$  ἀπέναντι γωνία ὑπερέχει δύο ὀρθὰς κατὰ τὴν ποσότητα  $\Gamma B\Delta$ .

Ὁ λόγος δὲ διὰ τὸν ὁποῖον ἀπεκλείσαμεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι τοιούτου μεγέθους, εἶναι ὅτι ἡ λύσις των ἢ ἡ προσδιορίσις των μερῶν των ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν λύσιν των τριγώνων τὰ ὁποῖα περικλείονται εἰς τὸν ὁρισμὸν. Τῷ ὄντι βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  εἶναι γνωσταὶ, ἀμέσως γίνονται γνωσταὶ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰδίου ὀνόματος τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἡμισφαιρίου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

### Θεώρημα.

Ὁ ἄτρακτος  $AMBNA$  εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία  $MAN$  τούτου τοῦ ἀτράκτου εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, ἢ ὡς τὸ τόξον  $MN$  μέτρον ταύτης τῆς γωνίας πρὸς τὴν περιφέρειαν. σχ. 236.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ τόξον  $MN$  εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειαν  $MNIK$  εἰς λόγον συμμετρικόν, φερ' εἰπεῖν, ὡς 5 πρὸς 48. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν  $MNIK$  εἰς 48 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων  $MN$  θέλει περιέχει 5· ἐνόνοντες ἔπειτα τὸν πόλον  $A$  καὶ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ τεταρτημορίων περιφέρειας, θέλομεν ἔχει 48 τρίγωνα εἰς τὸ ἡμισφαίριον  $AMNIK$ , τὰ ὁποῖα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξὺ των, ὡς ἔχοντα ὅλα των τὰ μέρη ἴσα. Ἡ ὅλη σφαῖρα θέλει περιέχει λοιπὸν 96 τοιαῦτα μερικὰ τρίγωνα, ὁ δὲ ἄτρακτος  $AMBNA$  10· λοιπὸν ὁ ἄτρακτος εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς 10 πρὸς 96, ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς τὸ τόξον  $MN$  πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Ἐὰν τὸ τόξον  $MN$  δὲν ᾖ συμμετρικόν μετὰ τὴν περιφέρειαν, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ τοῦ ὁποίου ἤδη εἶδομεν πολλὰ παραδείγ-



ματα, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ ἀτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς τὸ τόξον MN πρὸς τὴν περιφέρειαν.

**Πόρισμα Α'.** Δύο ἀτρακτοὶ εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἰδιαί των γωνίαι.

**Πόρισμα Β'.** Εἶδομεν ἤδη ὅτι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ὁκτὼ τρισσορθογώνια τρίγωνα (πρό. 19): ἐὰν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τούτων τῶν τριγώνων ληφθῇ ὡς μονάς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θέλει παρῆρσιασθῇ διὰ 8. Τούτου τεθέντος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου τοῦ ὁποῦ ἡ γωνία εἶναι Α θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 2Α (ἐννοουμένου ὅμως ὅτι ἡ γωνία Α ἐκτιμᾶται ἐπὶ τῆς ὀρθῆς λαμβανομένης ὡς μονάδος): διότι ἔχομεν  $2Α : 8 :: Α : 4$ . Ἐδῶ λοιπὸν εἶναι δύο διαφορετικαὶ μονάδες: ἡ μία διὰ τὰς γωνίας, καὶ εἶναι ἡ ὀρθή· ἡ ἄλλη διὰ τὰς ἐπιφανείας, καὶ εἶναι τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον, ἡ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποῦ ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἄρθαι, καὶ αἱ πλευραὶ τεταρτημόρια περιφερείας.

**Σχόλιον.** Ὁ σφαιρικὸς ὄνυχς ὁ περιεχόμενος ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων AMB, ANB, εἶναι πρὸς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθάς: διότι ὅταν οἱ ἀτρακτοὶ ᾖναι ἴσοι, οἱ σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι παρομοίως ἴσοι: λοιπὸν δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ὁποῦ τοὺς περιέχουν. (1)

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

### Θεώρημα.

Δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐστωσαν ABΓ, ΔΕΖ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα, τούτέστι δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευράς ἴσας,  $AB = ΔΕ$ ,  $ΑΓ = ΔΖ$ ,  $ΓΒ = ΕΖ$ , καὶ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπίθεσις: λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ABΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖ. σχ. 237.

(1) Ἡ αὐτὴ ἀναλογία ἥτις ὑπάρχει μεταξύ τοῦ ἀτράκτου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει καὶ μεταξύ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος καὶ τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας: διότι ἐν ᾧ, υποτιθεμένου τοῦ λόγου τοῦ τόξου MN πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς 5 πρὸς 48, ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ὅλη σφαῖρα περιέχει 96 τρίγωνα, ἐν ᾧ ὁ ἀτρακτος 10, βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας περιέχει 96 ἴσας σφαιρικὰς πυραμίδας, ἐν ᾧ ὁ σφαιρικὸς ὄνυχς τοῦ ὁποῦ βάσις εἶναι ὁ παραβαλλόμενος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀτρακτος περιέχει 10, λοιπὸν ὁ σφαιρικὸς ὄνυχς ὅστις ἔχει διὰ βάσιν τοῦτον τὸν ἀτρακτον, εἶναι πρὸς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὡς 10 πρὸς 96 ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθάς: καὶ ἡ αὐτὴ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει ἐὰν ἡ γωνία Α ὀδὲν εἶναι εἰς λόγον συμμετρικὸν μὲ τὰς τέσσαρας ὀρθάς: ἀπὸ ἄλλο μέρος εἶδομεν ὅτι τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὁκτὼ φοραὶς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας: ἀλλ' εὐκόλως βλέπομεν ἀκόμη ὅτι ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται εἰς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὁκτὼ φοραὶς: ἐὰν λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη ληφθῇ ὡς μονάς, τὸ στερεὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφραστῇ διὰ 8. Ἄρα ὁ σφαιρικὸς ὄνυχς τοῦ ὁποῦ ἡ γωνία εἶναι Α ἐκφράζεται διὰ 2Α. Καὶ εἰς ἄλλος τοῦ ὁποῦ ἡ γωνία εἶναι Β θίλει ἐκφραστῇ διὰ 2Β. λοιπὸν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δευτέρον :: Α : Β. Ο. Μ.



Εστω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ (I): ἀπὸ τὴν στιγμήν ταύτην ἄς ἀχθῶσι τὰ ἴσα τόξα (πρό. 6) ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ· εἰς τὴν στιγμήν Ζ ἄς γένῃ ἡ γωνία ΔΖΚ = ΑΓΗ, τὸ τόξον ΖΚ = ΓΠ, καὶ ἄς ἐνωθῶσι ΔΚ, ΕΚ.

Αἱ πλευραὶ ΔΖ, ΖΚ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευράς ΑΓ, ΓΗ, ἡ γωνία ΔΖΚ = ΑΓΗ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΗ εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη (πρό. 12)· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΔΚ = ΑΗ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ = ΑΗΓ.

Εἰς τὰ προτεθέντα τρίγωνα ΔΖΕ, ΑΒΓ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΖΕ, ΑΓΒ, ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΕ, ΑΒ εἶναι ἴσαι (πρό. 11), ἐὰν ἀραιεθῶσιν ἀπ' αὐτῆς αἱ γωνίαι ΔΖΚ, ΑΓΗ ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς, μένει ἡ γωνία ΚΖΕ ἴση μὲ τὴν ΓΗΒ. Ἄλλως αἱ πλευραὶ ΚΖ, ΖΕ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευράς ΠΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΖΚΕ, ΠΓΒ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΚΕ = ΠΒ, καὶ ἡ γωνία ΖΚΕ = ΓΠΒ.

Ἐὰν τώρα παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΗ, τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν, εἶναι ἐν ταυτῷ ἰσοσκελεῖ, βλέπομεν ὅτι ἡμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι καὶ ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσωσι· διότι, ἀφ' οὗ τεθῇ ἡ ΠΓ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΖ, ἡ πλευρὰ ΠΑ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΔ, καὶ οὕτω τὰ δύο τρίγωνα θέλουν ταυτισθῇ εἰς ἓν μόνον· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιράνεια ΔΚΖ = ΑΠΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ἡ ἐπιράνεια ΖΚΕ = ΓΠΒ, καὶ ἡ ἐπιράνεια ΔΚΕ = ΑΠΒ· λοιπὸν ἔχομεν  $\DeltaΚΖ + ΖΚΕ - \DeltaΚΕ = ΑΠΓ +$

(1) Ὁ κύκλος ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἡ ὅστις περιγράφεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι παρὰ μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας διότι, ἐὰν ᾖτο μέγιστος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ἤθελον εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤθελον ἔχῃ εἰς μίαν τῶν πλευρῶν των. (Σημείωσις τοῦ Συγγραφέως)

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ὅττω ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι μέγιστος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ Α, Β, Γ εἶναι μέγιστος, τὸ κέντρον τοῦτου τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ἐπειδὴ τὸ κέντρον τοῦτου εὐρίσκεται εἰς τὸν καθὲν τῶν ἐπιπέδων τὰ ὅποια περιέχουν τὰς πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ· ἐπεται ὅτι καθὲν τούτων τῶν ἐπιπέδων ἔχει τρεῖς κοινὰ σημεῖα μὴ ἐπιυθίας μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ· καὶ ἐπειδὴ ὅταν ἐν ἐπίπεδον ἔχει τρεῖς κοινὰ σημεῖα μὲ ἐν ἄλλο ταυτίζεται μὲ αὐτὸ, ἐπεται ὅτι τὰ τρεῖς ἐπίπεδα τὰ ὅποια περιέχουν τὰς τρεῖς πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον σχηματίζου ἐν μόνον ἐπίπεδον μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ· αἱ τρεῖς λοιπὸν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον τῷ ὅτι εὐρίσκεισθαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· πλὴν τότε δὲν σχηματίζου τρίγωνον. Ο. Μ.

ΓΠΒ—ΑΠΒ· ἢ ΔΖΕ=ΑΒΓ· λοιπὸν τὰ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. (1)

Σχόλιον. Δυνατὸν εἶναι οἱ πόλοι Π καὶ Κ νὰ εὗρεθοῦν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ· τότε πρέπει νὰ προστεθοῦν τὰ τρία τρίγωνα ΔΚΖ, ΖΚΕ, ΔΚΕ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ παρομοίως τὰ τρία τρίγωνα ΑΠΓ, ΓΠΒ, ΑΠΒ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἄλλως ἢ ἀπόδειξις καὶ ἡ συνέπεια ἤθελον εἶναι αἱ αὐταί.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

### Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΟΒ, ΓΟΔ τέμνωνται ὡς πωδῆποτε εἰς τὸ ἡμισφαίριον ΑΟΓΒΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. σχ. 238.

Διότι, προεκβληθέντων τῶν τόξων ΟΒ, ΟΔ, εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς Ν, ΟΒΝ, καθὼς καὶ ΑΟΒ, θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ΟΒ, θέλει προκύψῃ ΒΝ=ΑΟ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΔΝ=ΓΟ, καὶ ΒΔ=ΑΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἄλλως ἢ θέσις των εἶναι τοιαύτη ὥστε εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἐν τοῦ ἄλλου· λοιπὸν εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (πρό. 21), καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον ΟΒΝΔΟ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ.

Σχόλιον. Φανερόν εἶναι ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ πυραμίδες βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄγκον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. (2)

(1) Ἡ αὕτῃ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ πυραμὶς ἣτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴση κατὰ τὴν στερεότητα μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ο. Μ.

(2) Ὁ σφαιρικὸς ὄγκος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ μοιράζεται εἰς δύο σφαιρικὰς πυραμίδας βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΔΝ· τώρα ἡ πυραμὶς ἣτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΒΔΝ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΟΓ (βλέπε τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποιαὶ συγκροτοῦν τὸν σφαιρικὸν ὄγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ. Ο. Μ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

## Θεώρημα.

Ἡ ἐπιράνεια ὁποιουδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν διαφοράν δύο ὀρθῶν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του.

Ἐστω  $AB\Gamma$  τὸ προτεθὲν τρίγωνον· ἃς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὸν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ὅπως ἔήκοτε ἡγμένον μέγιστον κύκλον  $\Delta EZH$ . Δυνάμει τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, τὰ δύο τρίγωνα  $\Delta\Delta E$ ,  $AH\Theta$ , ὁμοῦ ληφέντα, ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι  $A$ , καὶ ὅστις ἔχει μέτρον  $2A$  (πρό. 20): οὕτω θέλει εἶναι  $\Delta\Delta E + AH\Theta = 2A$ · διὰ λόγον παρόμοιον  $BHZ + B\Delta\Delta = 2B$ ,  $\Gamma\Theta + \Gamma ZE = 2\Gamma$ . Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων ὑπερέχει τὸ ἡμισφαίριον τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ · ἄλλως τὸ ἡμισφαίριον παριστάνεται διὰ 4· λοιπὸν τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  εἶναι ἴσον μὲ  $2A + 2B + 2\Gamma$ , καὶ ἐπομένως  $AB\Gamma = A + B + \Gamma - 2$ · λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο ὀρθῶν γωνίας. σχ. 239.

**Πόρισμα Α'.** Ὅσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἰς τοῦτο τὸ μέτρον περιέχονται, ἄλλα τόσα τριστορθογώνια τρίγωνα ἢ ὄγδοα μέρη τῆς σφαίρας τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας (πρό. 20), τὸ προτεθὲν τρίγωνον περιέχει. Ἐάν, φερ' εἰπεῖν, ἐκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι  $\frac{1}{3}$  τῆς ὀρθῆς, τότε αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ 4 ὀρθῶς, καὶ τὸ προτεθὲν τρίγωνον παριστάνεται διὰ  $4 - 2$  ἢ 2· λοιπὸν θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο τριστορθογώνια τρίγωνα.

**Πόρισμα Β'.** Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι  $\frac{A+B+\Gamma}{2} - 1$  ὁμοίως ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι  $AB\Gamma$ , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι  $\frac{A+B+\Gamma}{2} - 1$  (i)

(1) Εἰς τὸ σχόλιον τῆς προλαβούσης προτάσεως ἐσημειώθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν διὰ βάσεις τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὅταν δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὸ ἡμισφαίριον, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία τῶν τριγώνων· ἐπειδὴ δὲ ἡ στερεότης τοῦ ὄνυχος ἐκφράζεται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας του, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν εἰρημένων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς ἰδίας γωνίας. Τούτου τεθέντος διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιράνεια ἐνὸς τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἄθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθῶς, ἀποδεικνύεται ἐνταῦτά ὅτι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ἣτις ἔχει



**Σχόλιον.** Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐποῦ παραβάλλεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον  $AB\Gamma$  μετ' τὸ τρισσορθογώνιον, ἡ σφαιρική πυραμὶς ἣτις ἔχει βάσιν  $AB\Gamma$  παραβάλλεται μετ' τὴν τρισσορθογώνιον πυραμίδα, καὶ προκύπτει ἡ αὐτὴ ἀναλογία. Ἡ στερεὰ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος παραβάλλεται ὡσαύτως μετ' τὴν στερεὰν γωνίαν τῆς τρισσορθογωνίου πυραμίδος: τῷ ὄντι ἡ σύγκρισις στερεοῦνται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μερῶν. Τώρα ἐὰν αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἐφαρμόζωσι, φανερόν ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ πυραμίδες ἐφαρμόζουσι, καθὼς καὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν των στερεαὶ γωνίαι: ἐντεῦθεν προκύπτουσι πολλαὶ συνέπειαι.

1.<sup>ον</sup> Δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· καὶ ἐπειδὴ πολυγωνικὴ πυραμὶς ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς πολλὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἔπεται ὅτι δύο ὁποιαδήποτε σφαιρικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰς ὡς βάσεις.

2.<sup>ον</sup> Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν τῶν ἰδίων πυραμίδων στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἐπίσης εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν βάσεων· λοιπὸν διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ὁποιασδήποτε στερεὰς γωνίας, πρέπει νὰ θέσωμεν τὰς κορυφὰς των εἰς τὸ κέντρον δύο ἴσων σφαιρῶν, καὶ αἱ στερεαὶ αὐταὶ γωνίαι θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ἀποχωριζόμενα μεταξύ τῶν ἐπιπέδων ἢ ἐδρῶν των.

Ἡ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς τρισσορθογωνίου πυραμίδος γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των ἡ γωνία αὕτη ἣτις ἡμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ὀρθὴ στερεὰ γωνία, εἶναι πολλὰ ἄρμοδια διὰ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μέτρου εἰς τὰς στερεὰς γωνίας. Τοῦτου τεθέντος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου θέλει δώσῃ τὸ μέτρον τῆς ἀντικειμένης στερεὰς γωνίας. Ἐὰν, φερ' εἰπεῖν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ᾗται  $\frac{1}{2}$ , τουτέστι τὰ  $\frac{1}{2}$  τοῦ τρισσορθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀντικειμένη στερεὰ γωνία θέλει εἶναι ὡσαύτως τὰ  $\frac{1}{2}$  τῆς ὀρθῆς στερεὰς γωνίας.

βάσιν τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἔχει μέτρον τὴν ἰδίαν ποσότητα. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐκφράζει εἰς τὴν πρώτην περίστασιν μονάδος τρισσορθογωνίου τριγώνου, καὶ εἰς τὴν δευτέραν μονάδας στερεοῦ. Ζητοῦντες τώρα μετ' ποῖον ὄνυχον ἡ πυραμὶς  $AB\Gamma$  ἰσοδυναμεῖ, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἀναλογίαν  $A + B + \Gamma - 2 : 8 :: X : 4$  ὅθεν  $X =$

$$\frac{4A + 4B + 4\Gamma - 8}{8} = \frac{A + B + \Gamma}{2} - 1 \text{ ο.μ.}$$

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

## Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον τὸ γινόμενον δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἐλαττωμένον κατὰ δύο.

Ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυρὴν Α ἃς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ· τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει μοιρασθῇ εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ μείον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια κάθε τρίγωνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον δύο ὀρθὰς, καὶ φανερόν εἶναι ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον τοσάκις δύο ὀρθὰς γωνίας ὅσας πλευρὰς ἔχει παρὰ 2.

Σχόλιον. Ἐστω α τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου, π ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ὑποτεθείσης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου θέλει ἔχει μέτρον,  $\alpha - 2\pi - 2$  ἢ  $\alpha - 2\pi + 4$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

## Θεώρημα.

Ἐστω Σ ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν ἐνὸς πολυέδρου, Θ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν του, Α ὁ ἀριθμὸς τῶν κόψεων του· λέγω ὅτι πάντοτε θέλει εἶναι  $\Sigma + \Theta = A + 2$ .

Ἀς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ πολυέδρου μία στιγμὴ ἐκ τῆς ὁποίας ἃς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς κορυφὰς ὅλων τῶν στερεῶν γωνιῶν του· ἃς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ὡς ἀπὸ κέντρον γράφεται σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἥτις νὰ συναπαντᾶται ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς γραμμὰς εἰς τόσας στιγμάς· ἃς ἐνωθῶσι ταῦτα τὰ σημεῖα διὰ τόξων μεγίστων κύκλων, ὥστε νὰ σχηματισθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πολύγωνα ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἐδράς τοῦ πολυέδρου καὶ ἰσάριθμα μὲ αὐτάς. Ἐστω ΑΒΓΔΕ ἐν τούτων τῶν πολυγώνων (σχ. 240) καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι  $\sigma - 2\pi + 4$ , ἔπου σ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἐὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτιμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἐκάστου τῶν ἄλλων σφαιρικῶν πολυγώνων, καὶ προστεθῶσιν ὅλοι ὁμοῦ, θέλει συναχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας παριστανομένη διὰ Σ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν



πολυγώνων, μείον δύο φοραῖς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πλέον 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολυέδρον. Τώρα, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι συνέρχονται ὁλόγυρα τῆς ἰδίας στιγμῆς A ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι· εἶναι λοιπὸν ἴσον μὲ 4Σ. Ἀκολούθως τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν AB, BG, ΓΔ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψεων ἢ  $= 4A$ , ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κόψις χρησιμεύει ὡς πλευρὰ εἰς δύο ἑδρας· λοιπὸν θέλει εἶναι  $8 = 4Σ - 4A + 4Θ$ · ἢ, διαιρεθέντων τῶν δύο μελῶν διὰ 4,  $2 = Σ - A + Θ$ · λοιπὸν  $Σ + Θ = A + 2$ .

**Πόρισμα.** Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς στερεὰς γωνίας ἐνὸς πολυέδρου εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις τέσσαρας ὀρθάς, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς  $Σ - 2$ , ὄντος Σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου.

Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἑδραν τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ταύτης τῆς ἑδρας θέλει εἶναι  $2ν - 4$  ὀρθαὶ γωνίαι (25, 1). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν  $2ν$ , ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ἐδρῶν,  $= 4A$ , καὶ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ ἑδραι,  $= 4Θ$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἐδρῶν  $= 4A - 4Θ$ . Τώρα, κατὰ τὸ ἀποδειχθέν θεώρημα,  $A - Θ = Σ - 2$ , καὶ ἐπομένως  $4A - 4Θ = 4(Σ - 2)$ . Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κ.τ.λ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κς'.

### Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευράς ΓΒ, ΓΑ, καὶ μίαν τρίτην κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλύτερον ABΓ εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευράς γωνία Γ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Α καὶ Β. σγ. 272 καὶ 273.

Ἀς προεκβληθῶσιν αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΑΒ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ. θέλει προκύψει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΔΒΓ θέλει εἶναι ὁμοίως ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ΒΔΓ, ΒΕΔ· διότι  $ΒΓΔ + ΒΓΑ$  ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, ὡς καὶ  $ΓΒΑ + ΓΒΔ$ , ἔχομεν  $ΒΓΔ + ΒΓΑ = ΓΒΑ + ΓΒΔ$ · προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῆς ΒΔΓ



$=BA\Gamma$ , προκύπτει  $B\Gamma\Delta + B\Gamma A + B\Delta\Gamma = \Gamma B A + \Gamma B \Delta + B A \Gamma$ .  
 Τώρα, ἐξ ὑποθέσεως,  $B\Gamma A = \Gamma B A + B A \Gamma$ . λοιπὸν  $\Gamma B \Delta = B \Gamma \Delta + B \Delta \Gamma$ .

Ἄς ἀγθῇ τὸ τόξον  $BI$  ὥστε νὰ κάμνη τὴν γωνίαν  $\Gamma BI = B\Gamma\Delta$ , καὶ ἐπομένως  $IB\Delta = B\Delta\Gamma$ . τὰ δύο τρίγωνα  $IB\Gamma$ ,  $IB\Delta$ , θέλουν εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ θέλει εἶναι  $IB = IB = ID$ . λοιπὸν ἡ στιγμὴ  $I$  μέσον τῆς  $\Delta\Gamma$ , ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα  $B, \Gamma, \Delta$ : διὰ λόγον παρόμοιον ἡ στιγμὴ  $O$ , μέσον τῆς  $AB$ , ἰσάκεις θέλει ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς στιγμὰς  $A, B, \Gamma$ .

Ἐστω τώρα  $\Gamma A = \Gamma A$  καὶ ἡ γωνία  $B\Gamma A' > B\Gamma A$ . ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ  $A'B$ , καὶ προεκβληθῶσι τὰ τόξα  $A'\Gamma, A'B$ , ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς  $\Delta'$ , τὸ τόξον  $\Delta\Gamma A'$  θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρειαν καθὼς καὶ  $\Delta\Gamma A$ . λοιπὸν ἐπειδὴ  $\Gamma A = \Gamma A$ , θέλει εἶναι καὶ  $\Gamma\Delta' = \Gamma\Delta$ . Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον  $\Gamma I \Delta'$ , ἔχομεν  $\Gamma I + I\Delta' > \Gamma\Delta'$ . λοιπὸν  $I\Delta' > \Gamma\Delta - \Gamma I$ , ἢ  $I\Delta' > I\Delta$ . σχ. 272.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $\Gamma IB$  ἂς διαιρεθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς  $I$  εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ τόξου  $EIZ$  τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ  $B\Gamma$ . Ἐὰν ληφθῇ μία στιγμὴ  $\Lambda$  μεταξὺ  $I$  καὶ  $E$ , τὸ διάστημα  $B\Lambda$ , ἴσον μὲ  $\Lambda\Gamma$ , θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ  $BI$ . διότι δυνατόν νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς εἰς τὴν  $\Theta'$  πρότασιν τοῦ  $A'$  Βιβλίου, ὅτι  $B\Lambda + \Lambda\Gamma < BI + I\Gamma$ . λοιπὸν μετὰ τὴν διαίρεσιν τῶν δύο μερῶν διὰ δύο θέλει εἶναι  $B\Lambda < BI$ . Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον  $\Delta' A\Gamma$  ἔχομεν  $\Delta'A > \Delta'\Gamma - \Gamma\Lambda$ , καὶ πολὺ περισσότερον  $\Delta'A > \Delta\Gamma - \Gamma I$ , ἢ  $\Delta'A > \Delta I$ , ἢ  $\Delta\Lambda > BI$ . λοιπὸν  $\Delta'A > B\Lambda$ . Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου  $EIZ$  ζητηθῇ μία στιγμὴ ἰσάκεις ἀπέχουσα τῶν τριῶν σημείων  $B, \Gamma, \Delta'$ , ἡ στιγμὴ αὕτη δὲν ἡμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ παρὰ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τοῦ τόξου  $EI$  πρὸς τὸ  $Z$ . Ἐστω  $I'$  ἡ ζητουμένη στιγμὴ, εἰς τὸν ὅστε  $\Delta' I' = BI' = \Gamma I'$ . ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα  $I'\Gamma B, I'\Gamma\Delta', IB\Delta'$ , εἶναι ἰσοσκελῆ, θέλομεν ἔχει τὰς ἴσας γωνίας  $I'\Gamma B = I'\Gamma\Delta', IB\Delta' = I'\Delta'B, I'\Gamma\Delta' = I'\Delta'\Gamma$ . Ἀλλ' αἱ γωνίαι  $\Delta'\Gamma B + \Gamma B A'$  κάμνουν δύο ὀρθάς, καθὼς καὶ  $\Delta'\Gamma B + B\Gamma A'$ . λοιπὸν

$$\Delta'BI' + I'\Gamma B + \Gamma B A' = 2,$$

$$B\Gamma I' - I'\Gamma\Delta' + B\Gamma A' = 2.$$

Προσθέτοντες, τὰ δύο ἀθροίσματα καὶ παρατηροῦντες ὅτι  $I'\Gamma B = BI'\Gamma$  καὶ  $\Delta'BI' - I'\Gamma\Delta' = B\Delta I' - I'\Delta'\Gamma = \Gamma\Delta B = \Gamma A'B$ , θέλομεν ἔχει

$$2I'\Gamma B + \Gamma A'B + \Gamma B A' + B\Gamma A' = 4.$$

Λοιπὸν  $\Gamma A'B + \Gamma B A' + B\Gamma A' - 2$  (μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου  $A'B\Gamma$ )  $= 2 - 2 I'\Gamma B$ . εἰς τὸν τρόπον ὥστε ἐμβαδὸν  $A'B\Gamma$

$\angle B = 2 - 2$  γωνία  $\angle BGF$ . ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον  $ABG$ , ἐμβάδον  $\angle ABG = 2 - 2$  γωνία  $\angle BGF$ . Τώρα ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γωνία  $\angle BGF$  εἶναι μείζων τῆς  $\angle BGF$  (1) λοιπὸν τὸ ἐμβάδον  $\angle BGF$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $\angle ABG$ .

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ἡ αὐτὴ συνέπεια ἤθελον ἔχει χώραν ἐὰν λαμβάνοντες πάντοτε τὸ τόξον  $\Gamma A' = \Gamma A$ , ἐκάμναμεν τὴν γωνίαν  $\angle BGA' < \angle BGA$ . λοιπὸν  $\angle ABG$  εἶναι τὸ μεγαλύτερον τριγώνον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὅποια ἔχουν δεδομένας τὰς δύο πλευράς καὶ τὴν τρίτην κατ' ἀρέσκειαν. σχ. 273.

Σχόλιον Α'. Τὸ τρίγωνον  $ABG$ , τὸ μεγαλύτερον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὅποια ἔχουν δύο δεδομένας πλευράς  $\Gamma A$ ,  $\Gamma B$ , ἡμπορεῖ νὰ ἐγγραφεθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς τρίτης πλευρᾶς  $AB$  θέλει εἶναι ἡ διάμετρος· διότι ἐὰν  $O$  ᾖ τὸ μέσον τῆς  $AB$ , εἶδομεν ὅτι τὰ διαστήματα  $OG$ ,  $OB$  εἶναι ἴσα· ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ ἐκ τῆς στιγμῆς  $O$  ὡς ἐκ πόλου καὶ μὲ διάστημα  $OB$  γραφομένου διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων  $A, B, G$ . Περιπλέον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $AB$  εἶναι διάμετρος τούτου τοῦ μικροῦ κύκλου· διότι τὸ κέντρον τὸ ὁποῖον ἐνταύτῳ πρέπει νὰ εὐρίσκηται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου  $BOA$  (πρόβ. 1, πέρ. 4), ἀναγκαίως πρέπει νὰ εὐρίσκηται εἰς τὴν κοινὴν τομὴν τούτων τῶν δύο ἐπιπέδων ἥτις εἶναι ἡ εὐθεῖα  $BA$ , καὶ οὕτω  $BA$  εἶναι διάμετρος. σχ. 241.

Β'. Εἰς τὸ τρίγωνον  $ABG$ , ἐπειδὴ ἡ γωνία  $\Gamma$  εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων  $A$  καὶ  $B$ , ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι διπλάσιον τῆς γωνίας  $\Gamma$ . Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτο εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν (19)· λοιπὸν ἡ γωνία  $\Gamma$  εἶναι μεγαλύτερα ὀρθῆς.

Γ'. Ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ  $\Gamma B$ ,  $\Gamma A$  ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς  $E$ , τὸ τρίγωνον  $BAE$  θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ἡ γωνία  $E = \Gamma = \angle ABG + \angle GAB$ · λοιπὸν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου  $BAE$  γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰς τέσσαρας  $\angle ABG$ ,  $\angle ABE$ ,  $\angle GAB$ ,  $\angle BAE$ , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου  $BAE$  (πρόβ. 24)  $= 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2}$  τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

(1) Διότι ἐὰν ᾗτον ἴση τότε ἡ στιγμὴ  $I$  ἔπρεπε νὰ πέσῃ εἰς  $I$  καὶ ἡ ἀπέχουσα στιγμὴ ἰσάκεις ἀπὸ  $\Delta$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , ἤθελαν εἶναι ἡ  $I$  τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον· ἐὰν δὲ μικρότερον, ἡ στιγμὴ  $I$  ἔπρεπε νὰ ᾖναι μεταξὺ  $I$  καὶ  $E$  τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ ζητούμενη στιγμὴ  $I$  οὕτως εἰς  $I$  οὕτως μεταξὺ  $I$  καὶ  $E$  εὐρίσκεται, ἐπεται ὅτι ἡ γωνία  $\angle BGF > \angle ABG$ . Ο. Μ.



Δ'. Δὲν ἔθελεν ὑπάρχει μὲγιστον ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἦτον ἴσον ἢ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου. Διότι ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ ἐγγράφηται εἰς ἡμικύκλιον τῆς σφαίρας, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἀπαιτεῖται νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΓΒ (πρό. 3), καὶ ἐπομένως μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχει μὲγιστον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου, εἶναι ὅτι τότε τὸ τρίγωνον αὐξάνει μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀναλόγως ὅπου ἡ περιεχομένη γωνία ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γίνεται μεγαλητέρα· τέλος ὅταν γένη ἴση μετὰ δύο ὀρθάς, αἱ τρεῖς πλευραὶ θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ σχηματίζει ἀκροαίαν περιφέρειαν· τὸ τρίγωνον λοιπὸν θέλει γένη ἡμισφαίριον, ἀλλὰ παύει ἀπὸ τὸ νὰ ἦναι τρίγωνον. (1)

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

### Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δεδομένην πλευράν καὶ δεδομένην περίμετρον, τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο μὴ προσδιωρισμέναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

(1) Ἀρ' οὗ σχηματίζωμεν ἐν τρίγωνον μὲ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς δίδοντας κλίσει εἰς αὐτὰς κατ' ἀρέσκειαν, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ τριγώνου αὐξάνει ἀναλόγως μετὰ τὴν αὐξῆσιν τῆς περιεχομένης γωνίας ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς, καὶ, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, τότε φθάνει εἰς τὴν μεγίστην του κατὰστάσιν, ὅταν ἡ γωνία αὕτη γένη ἴση μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ τὸ τοιοῦτον τρίγωνον, ὡς ἀπεδείχθη, ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ ἐγγράφηται εἰς ἡμιπερίφειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ χορδὴ τῆς ἀπροσδιορίστου πλευρᾶς· ἐκ τοῦ ὁποίου ἐσυνάχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν πρέπει νὰ ἦναι ἑλκυστον ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου ἕπειτα λοιπὸν ὅτι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῇ ἡ γωνία ἡ περιεχόμενη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς δὲν ἔμπορεῖ ποτὲ νὰ ὦσιν ἐν τρίγωνον τὸ ὅπουον νὰ περιέχῃ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τρίγωνον ἔμπορεῖ νὰ λάβῃ ὅποιονδήποτε μέγεθος· καὶ τὸ μέγεθος του χρηματίζεται ἀπὸ τὸ τοιοῦτον τῆς περιεχομένης ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς. Ὅθεν ἐὰν αὐτὰ γένη ἴση μετὰ δύο ὀρθάς, ἡ ἐπιφάνειά του γίνεται ἴση μετὰ τὴν τοῦ ἡμισφαίριου· διότι τότε τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ὅποια περιέχουν τὰς δεδομένας πλευρὰς ταυτίζονται εἰς ἓν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ δύο δεδομέναί πλευραὶ εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐπειδὴ δὲ διὰ νὰ σχηματίζωμεν τὸ τρίγωνον ἀνάγκη νὰ ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων πλευρῶν διὰ τῆς μεγίστου κύκλου, ἕπεται ὅτι ὁ μέγιστος οὗτος κύκλος θέλει συναπαντᾶ τὴν μεγίστον κύκλον τοῦ ὁποίου μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν, εἰς αὐτὰ τὰ δύο ἄκρα ἀπὸ ἄλλο μέρος οἱ δύο οὗτοι μέγιστοι κύκλοι δὲν ἔμπορεῖν νὰ τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι τὸ δεδομένον ἄθροισμα μετὰ τὸ νὰ ἦναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἐπίλοιπον μέρος τοῦ ἐνὸς εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας ἕπεται λοιπὸν ὅτι οἱ δύο κύκλοι οὗτοι ταυτίζονται καὶ οὕτως ταυτίζονται τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου μὲ μέγιστον κύκλον, ἡ ἐπιφάνειά του ταυτίζεται μετὰ τὴν τοῦ ἡμισφαίριου· ἐὰν λάβῃ μίαν μεγαλητέραν αὐξῆσιν ἡ γωνία τὸ τοιοῦτον αὐξάνει παρομοίως· ὥστε δύναται νὰ λάβῃ ὅποιονδήποτε μέγεθος. Ο. Μ.



Ἐστω  $AB$  ἡ δεδομένη πλευρὰ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα  $AGB$ ,  $AAB$ , καὶ ἔστω  $AG + GB = AA + AB$ . λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $AGB$ , εἰς τὸ ὁποῖον  $AG = GB$ , εἶναι μείζον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς  $AAB$ . σχ. 242.

Διότι ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ  $AOB$ , ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον  $BOA$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $AOΓ$ . Ἡ γωνία  $GBA$  ἴση τῇ  $GAB$ , εἶναι μεγαλύτερα τῆς  $OAB$ . οὕτως ἡ πλευρὰ  $AO$  εἶναι μείζων τῆς  $OB$  (πρό. 21). ὥς ληφθῇ  $OI = OB$ . ὥς γένη  $OK' = OD$ , καὶ ὥς ἐπιζευχθῇ  $K'I$  τὸ τρίγωνον  $OK'I$  θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ  $DOB$ . Ἐὰν τώρα τὸ τρίγωνον  $DOB$  ἢ τὸ ἴσον τοῦ  $K'OI$  δὲν ᾔῃαι μικρότερον τοῦ  $OAG$ , πρέπει νὰ ᾔῃαι ἴσον ἢ μεγαλύτερον καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις, ἐπειδὴ ἡ στιγμή  $I$  εἶναι μεταξύ τῶν στιγμῶν  $A$  καὶ  $O$ , πρέπει ἡ στιγμή  $K'$  νὰ εὐρίσκηται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς  $OG$ , ἄλλως τὸ τρίγωνον  $OK'I$  ἤθελε περιέχεται εἰς τὸ τρίγωνον  $GAO$ , καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικρότερον. Τούτου θεέντος, ἐπειδὴ ὁ συμποτινότερος δρόμος ἀπὸ  $\Gamma$  εἰς  $A$  εἶναι  $GA$ , ἔχομεν  $GK' + K'I + IA > GA$ . Ἀλλὰ  $GK' = OD = GO$ ,  $AI = AO = OB$ ,  $K'I = BD$ . λοιπὸν  $OD + GO + AO + OB + BD > GA$ , καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης,  $AD + GB + BD > GA$ , ἢ  $AD + DB > AG + GB$ . Τώρα ἡ ἀνίσότης αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν  $AD + DB = AG + GB$ . λοιπὸν ἡ στιγμή  $K'$  δὲν ἔμπορεῖ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς  $OG$ . λοιπὸν πίπτει μεταξύ  $O$  καὶ  $\Gamma$ , καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον  $KOI$ , ἢ τὸ ἴσον τοῦ  $ODB$ , εἶναι μικρότερον τοῦ  $AGO$ . λοιπὸν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $AGB$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς  $AAB$  τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

Σχόλιον. Αἱ δύο αὗται τελευταῖαι προτάσεις εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς προτάσεις  $A'$  καὶ  $\Gamma'$  τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ  $\Delta'$  βιβλίον. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικά πολύγωνα, τὰς συνεπείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν χώραν διὰ τὰ εὐθύγραμμα πολύγωνα.

Ἰδοὺ αἱ ἀρχικαί:

1.<sup>η</sup> Ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα σφαιρικά πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Ἡ αὕτη ἀπόδειξις μὲ τὴν τῆς  $B'$  προτάσεως τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ  $\Delta'$  βιβλίον.

2.<sup>α</sup> Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικά πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευράς καὶ μίαν τελευταίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύ-

κλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς μὴ προσδιωρισμένης πλευρᾶς θέλει εἶναι ἡ διάμετρος.

Ἡ ἀπόδειξις συνάγεται ἀπὸ τὴν πρότασιν Κς', ὡς εἶδομεν εἰς τὴν Ε' πρότασιν τοῦ ῥηθέντος παραρτήματος· πρέπει διὰ τὴν ὑπαρξιν τοῦ μεγίστου, τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν νὰ ᾖναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

3.<sup>τη</sup> Τὸ μεγαλύτερον τῶν σχηματιζομένων σφαιρικῶν πολυγώνων μὲ δεδομένης πλευρᾶς, εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τῆς σφαίρας.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὁποῦ καὶ διὰ τὴν ς'. πρότασιν τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ'. βιβλίον ἐδόκαμεν.

4.<sup>τη</sup> Τὸ μεγαλύτερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων τὰ ὅποια ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας τοῦ ἴσας καὶ τὰς πλευράς τοῦ ἴσας.

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὰ προηγούμενα 1 καὶ 2 πορίσματα.

Σημείωσις. Ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ μεγίστου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐφαρμόζονται εἰς τὰ στερεὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦσι ταῦτα τὰ πολύγωνα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ς'. ΚΑΙ Ζ'.

## ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

#### Θεώρημα.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολυέδρα ὑπάρχουσι.

Διότι κανονικὰ πολυέδρα ὠρίσμεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἑδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς πολλὰ ὀλίγας περυστάσεις ἔχουν χῶραν.

1.<sup>η</sup> Ἐὰν αἱ ἑδραι ᾖναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κάθε στερεάν γωνίαν τοῦ πολυέδρου μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας, ἢ μὲ πέντε γωνίας τούτων τῶν τριγώνων : ἐντεῦθεν γεννῶνται τρία κανονικὰ σώματα, τὰ ὅποια εἶναι, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, καὶ τὸ εἰκοσάεδρον. Δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν περι-

σότερα με ισόπλευρα τρίγωνα· διότι ὁ σχηματισμὸς γωνίας στερεᾶς με ἐξ γωνίας ἰσοπλευρῶν τριγώνων, ἐπειδὴ ἰσοδυναμοῦν με τέσσαρας ὀρθάς, εἶναι ἀδύνατος. (21, 5)

2.<sup>ον</sup> Ἐὰν αἱ ἑδραὶ ᾦναι τετράγωνα, δυνάμεθα νὰ ἐνώσωμεν τὰς γωνίας των ἀνά τρεῖς· καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ ἑξάεδρον ἢ κύβος.

Τέσσαρες γωνίαι τετράγωνων ἰσοδυναμοῦν με τέσσαρας ὀρθάς, καὶ δὲν ἡμποροῦν νὰ σχηματίσουν γωνίαν στερεάν.

3.<sup>ον</sup> Τέλος ἐὰν αἱ ἑδραὶ ᾦναι κανονικὰ πεντάγωνα, δυνατόν ἀκόμη νὰ ἐνωθῶν αἱ γωνίαι των ἀνά τρεῖς τρεῖς, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον.

Δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάγωμεν περαιτέρω· διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἑξαγώνων ἰσοδυναμοῦν με τέσσαρας ὀρθάς, καὶ τρεῖς ἑπταγώνων με ἔτι περισσότερον.

Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάρχωσι παρὰ μόνον πέντε κανονικὰ πολυέδρα, τρία σχηματιζόμενα με ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἓν με τετράγωνα, καὶ ἓν με πεντάγωνα.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν θέλομεν δεῖξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα πολυέδρα πραγματικῶς ὑπάρχουν, καὶ ὅτι εἶναι δυνατόν, γνωστῆς μιᾶς τῶν ἑδρῶν των, νὰ προσδιορισθῶσιν ὅλοι των αἱ διαστάσεις.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

### Πρόβλημα.

Δεδομένης μιᾶς τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου, ἢ μόνον τῆς πλευρᾶς του, νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολυέδρον.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο παρρησιάζει πέντε τὰ ὁποῖα διὰδοχικῶς θέλομεν λύσει.

### Κατασκευὴ τοῦ τετραέδρου.

Ἐστω  $AB\Gamma$  τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ᾦναι μία τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου· εἰς τὴν στιγμήν  $O$  κέντρον τούτου τοῦ τριγώνου, ἃς ὑψωθῇ  $OS$  κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $AB\Gamma$ · ἃς περατωθῇ ἡ κάθετος αὕτη εἰς τὴν στιγμήν  $\Sigma$ , ὥστε  $AS = AB$ · ἃς ἐπιτευχθῶσιν αἱ  $SB$ ,  $SG$ , καὶ ἡ πυραμὶς  $\Sigma AB\Gamma$  θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τετράεδρον. σχ. 243.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων διαστημάτων  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$ , αἱ πλάγιαι  $SA$ ,  $SB$ ,  $SG$ , ἰσάκεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου  $SO$  καὶ εἶναι ἴσαι. Ἡ μία τούτων  $SA = AB$ · λοιπὸν αἱ τέσσαρες ἑδραὶ τῆς πυραμίδος  $\Sigma AB\Gamma$  εἶναι τρίγωνα ἴσα με τὸ δεδομένον  $AB\Gamma$ . Ἄλλως αἱ στερεαὶ γωνίαι ταύτης τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι μετα-



ξύ των, ἐπειδὴ ἡ κάθε μια σύγκειται ἀπὸ τρεῖς ἴσα ἐπίπεδα· λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

### Κατασκευὴ τοῦ ἑξαέδρου.

Ἐστω  $ABΓΔ$  δεδομένον τετράγωνον· ἐπὶ τῆς βάσεως  $ABΓΔ$  ἃς κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος  $AE$  νὰ ᾔῃαι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν  $AB$ . Φανερόν εἶναι ὅτι αἱ ἑδραὶ τοῦ εἶναι τετράγωνα ἴσα, καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ εἶναι ἴσαι μεταξὺ των ὡς συγκείμεναι ἀπὸ τρεῖς γωνίας ὀρθάς· λοιπὸν τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἑξαέδρον ἢ κύβος. σχ. 244.

### Κατασκευὴ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐστω  $AMB$  δεδομένον τρίγωνον ἰσόπλευρον· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς  $AB$  ἃς γραφθῇ τὸ τετράγωνον  $ABΓΔ$ · εἰς τὴν στιγμὴν  $O$  κέντρον τούτου τοῦ τετραγώνου ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἢ κάθετος  $ΤΣ$ , ἥτις ἃς περατωθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς  $T$  καὶ  $Σ$ , εἰς τρόπον ὥστε  $OT=OS=AO$ · ἃς ἐπιξευχθῶσιν ἀκολουθῶς αἱ  $ΣΑ$ ,  $ΣΒ$ ,  $ΤΑ$ , κ. τ. λ., θέλει προκύψει τὸ στερεὸν  $ΣABΓΔΤ$ , σθένετον ἀπὸ δύο τετραγωνικάς πυραμίδας  $ΣABΓΔ$ ,  $ΤABΓΔ$ , αἱ ὁποῖαι ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως  $ABΓΔ$ · τὸ στερεὸν τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκταέδρον. σχ. 245.

Τῶ ὄντι, τὸ τρίγωνον  $AOΣ$ , καθὼς καὶ τὸ τρίγωνον  $AOΔ$ , εἶναι ὀρθογώνιον εἰς  $O$ · αἱ πλευραὶ  $AO$ ,  $OS$ ,  $OD$ , εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο  $AS=AD$ . Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖκνύμεν ὅτι ὅλα τὰ ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα  $AOΤ$ ,  $BOΣ$ ,  $ΓOT$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνον  $AOΔ$ · λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ  $AB$ ,  $AS$ ,  $AT$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξὺ των, καὶ ἐπομένως τὸ στερεὸν  $ΣABΓΔΤ$  περιέχεται ὑπὸ ὁκτὼ ἴσων τριγώνων μὲ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον  $AMB$ . Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι μεταξὺ των· ἡ γωνία  $Σ$ , φέρ' εἰπεῖν, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ  $B$ .

Διότι τὸ τρίγωνον  $ΣΑΓ$ , εἶναι φανερὰ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον  $ΔΑΓ$ , καὶ οὕτως ἡ γωνία  $ΑΣΓ$  εἶναι ὀρθή· λοιπὸν τὸ σχῆμα  $ΣΑΤΓ$  εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον  $ABΓΔ$ . Ἄλλ' ἢ σύγκρισις τῆς πυραμίδος  $ΒΑΣΓΤ$  μὲ τὴν πυραμίδα  $ΣABΓΔ$ , δεῖκνύει ὅτι ἡ βάσις  $ΑΣΓΤ$  τῆς πρώτης ἢμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως  $ABΓΔ$  τῆς δευτέρας· τότε ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ  $O$  εἶναι κοινὸν κέντρον, τὸ ὕψος  $OB$  τῆς πρώτης θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὸ ὕψος  $OS$  τῆς δευτέρας, καὶ αἱ δύο πυραμίδες θέλουν ταυτισθῇ· λοιπὸν

ἡ στερεὰ γωνία  $\Sigma$  εἶναι ἴση μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν  $B$ · τὸ στερεὸν ἄρα  $\Sigma AB\Gamma\Delta T$  εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

**Σχόλιον.** Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι,  $AG$ ,  $BD$ ,  $\Sigma T$ , εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνονται εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἡμισείας των, τὰ ἄκρα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλουν εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

### Κατασκευὴ τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἐστω  $AB\Gamma\Delta E$  δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔστωσαν  $AB\Pi$ ,  $\Gamma B\Pi$ , δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν  $AB\Gamma$  μὲ ταύτας τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἅς σχηματισθῇ ἡ στερεὰ γωνία,  $B$ , καὶ ἅς προσδιορισθῇ διὰ τῆς  $K\Delta'$  προτάσεως τοῦ  $E'$  βιβλίου, ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων τῆς, τὴν ὁποίαν κλίσιν καλῶ  $K$ . Ἄς σχηματισθῶσι παρομοίως εἰς τὰς στιγμὰς  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $A$  γωνίαι στερεαὶ ἴσαι μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν  $B$ , καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κείμεναι: τὸ ἐπίπεδον  $\Gamma B\Pi$  θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπίπεδον  $B\Gamma H$ , διότι καὶ τὰ δύο κλίνουν τὴν αὐτὴν ποσότητα  $K$  ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου  $AB\Gamma\Delta$ . Δυνάμεθα λοιπὸν εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\Pi B\Gamma H$  νὰ γράψωμεν τὸ πεντάγωνον  $B\Gamma H Z\Pi$  ἴσον μὲ τὸ πεντάγωνον  $AB\Gamma\Delta E$ . Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν εἰς ἕκαστον τῶν ἄλλων ἐπιπέδων  $\Gamma\Delta I$ ,  $\Delta E\Lambda$ , κ. τ. λ. θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν  $\Pi Z H\Theta$ , κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ ἑξ κανονικὰ πεντάγωνα ἴσα καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν αὐτὴν ποσότητα  $K$ . Ἐστω πζηθ. κ. τ. λ. μία δευτέρα ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν  $\Pi Z H\Theta$ , κ. τ. λ. λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἡμποροῦν νὰ ἐνωθῶν εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Τῷ ὄντι ἡ γωνία οπζ, παραδείγματος χάριν, ἡμπορεῖ νὰ ἐνωθῇ μὲ τὰς δύο γωνίας  $O\Pi B$ ,  $B\Pi Z$ , ὥστε νὰ γένῃ μία στερεὰ γωνία  $\Pi$  ἴση τῇ γωνίᾳ  $B$ , καὶ εἰς ταύτην τὴν ἐνωσιν οὐδεμία τροπὴ θέλει προξενηθῇ εἰς τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων  $B\Pi Z$ ,  $B\Pi O$ , διότι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ὁποία πρέπει νὰ ᾔῃ διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Ἄλλ' ἐν ᾧ ἡ στερεὰ γωνία  $\Pi$  σχηματίζεται, ἡ πλευρὰ πζ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην τῆς  $\Pi Z$ , καὶ εἰς τὴν στιγμὴν  $Z$  θέλουν εὑρεθῇ ἐνωμέναι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι  $\Pi Z H$ , πζε, εζη, αἱ ὁποῖαι θέλουν σχηματίσει γωνίαν στερεὰν ἴσην μὲ ἐκάστην τῶν ἤδη σχηματισμένων· ἡ ἐνωσις αὕτη θέλει γένῃ χωρὶς τὴν παραμικρὰν τροπὴν, οὔτε τῆς γωνίας  $\Pi$ , οὔτε τῆς ἐπιφανείας εζηθ, κ. τ. λ. διότι τὰ ἐπίπεδα  $\Pi Z H$ , εζπ ἤδη ἐνωθέντα εἰς  $\Pi$ , ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀρμοδίαν κλίσιν  $K$ , καθὼς καὶ τὰ ἐπίπεδα εζη, εζπ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω κατὰ διαδοχὴν βλέπομεν ὅτι αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ



τὴν ἄλλην ὥστε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν καὶ εἰς ἑαυτὴν ἐπανερχομένην· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κανονικοῦ δωδεκαέδρου, ὡς σύνθετος ἀπὸ δώδεκα ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα, καὶ ἐπειδὴ ὅλαι τοῦ αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 246.

### Κατασκευὴ τοῦ εἰκοσαέδρου.

Ἐστω  $AB\Gamma$  μία τῶν ἐδρῶν τοῦ· πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ πάντε ἴσα ἐπίπεδα μὲ τὸ ἐπίπεδον  $AB\Gamma$ , καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσάκεις νὰ κλίνη ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του. Πρὸς τοῦτο, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς  $B\Gamma'$ , ἴσης μὲ τὴν  $B\Gamma$ , ἃς κατασκευασθῇ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον  $B'\Theta'\Gamma\Delta$ . εἰς τὸ κέντρον τούτου τοῦ πενταγώνου ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μία κάθετος, ἣτις ἃς περατωθῇ εἰς  $A'$  εἰς τρόπον ὥστε  $B'A' = B'\Gamma'$ . ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ  $A'\Gamma'$ ,  $A'\Theta'$ ,  $A'\Gamma$ ,  $A'\Delta$ , καὶ ἡ στερεὰ γωνία  $A'$  σχηματισμένη ἀπὸ τὰ πέντε ἐπίπεδα  $B'A'\Gamma'$ ,  $\Gamma'A'\Theta'$  κ. τ. λ. θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη στερεὰ γωνία. Διότι αἱ πλάγιοι  $A'B'$ ,  $A'\Gamma'$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, καὶ μία τούτων  $A'B'$  εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν  $B'\Gamma'$ . λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα  $B'A'\Gamma'$ ,  $\Gamma'A'\Theta'$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον  $AB\Gamma$ . σχ. 247.

Ἄλλως δὲ φανερόν εἶναι ὅτι ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων  $B'A'\Gamma'$ ,  $\Gamma'A'\Theta'$ , κ. τ. λ. ἰσάκεις κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του· διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι  $B', \Gamma'$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς σχηματισμέναι μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου. Ἄς χαλῶμεν  $K$  τὴν κλίσιν δύο ἐπιπέδων ὅπου εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἡ ὁποία δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς  $K\Delta'$  προτάσεως τοῦ  $E'$  βιβλίου· ἡ γωνία  $K$  θέλει εἶναι ἐνταυτῷ ἡ κλίσις ἐκάστου τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν στερεάν γωνίαν  $A'$  ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του.

Τούτου θεέντος, ἐὰν εἰς τὰς στιγμὰς  $A, B, \Gamma$ , κάμωμεν γωνίας στερεὰς ἐκάστη τῶν ὁποίων νὰ ᾔηται ἴση μὲ τὴν γωνίαν  $A'$ . θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν  $\Delta EZH$ , κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ δέκα ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων θέλει κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν ποσότητα  $K$ · καὶ αἱ γωνίαι  $\Delta, E, Z$ , κ. τ. λ. τῆς περιμέτρου τῆς θέλου· ἐνόνει ἀλληλοδιαδόχως τρεῖς, καὶ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων. Ἄς φαντασθῶμεν μίαν δεύτεραν ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν ἐπιφάνειαν  $\Delta EZH$ , κ. τ. λ. αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἡμποροῦν ἀμοιβαίως νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἐννομένης ἐκάστης τριπλῆς γωνίας τῆς μιᾶς μὲ μίαν διπλὴν τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν τούτων ἔχουν ἥδη μεταξύ των



τὴν ἀναγκαίαν κλίσιν διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς πενταπλῆς γωνίας ἴσης μὲ Α, οὐδεμία μεταβολὴ εἰς ταύτην τὴν ἔνωσιν θέλει προξηγηθῇ εἰς ἐκάστην ἐπιφάνειαν κατὰ μέρος, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ θέλουν σχηματίζει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν, σύνθετον ἀπὸ εἴκοσι ἰσοπλευρα τρίγωνα. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, διότι περιπλέον ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξὺ των.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

### Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἡ κλίσις αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ΚΔ' πρότασιν τοῦ Ε' βιβλίου, διὰ τῆς ὁποίας, δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν, προσδιορίζεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξὺ των.

Εἰς τὸ τετράεδρον. Ἐκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων· πρέπει λοιπὸν νὰ ζητηθῇ διὰ τοῦ ῥηθέντος προβλήματος ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξὺ των· ἡ γωνία αὕτη θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ τετράεδρου. σχ. 243.

Εἰς τὸ ἐξάεδρον. Ἡ γωνία δύο προσκειμένων ἐδρῶν εἶναι ὀρθή. σχ. 244.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον. Ἄς σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν ὀρθήν· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. σχ. 245.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον. Ἐκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται μὲ τρεῖς γωνίας κανονικῶν πενταγώνων. Οὕτως ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων δύο τούτων τῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ τῶν δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου. σχ. 246.

Εἰς τὸ εἰκοσαέδρον. Ἄς σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου· ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων, θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου. σχ. 247.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

### Πρόβλημα.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυέδρου, νὰ εὕρωμεν τὴν

ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ ἐκείνην τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι κάθε κανονικὸν πολυέδρον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ νὰ περιγραφῇ εἰς αὐτήν. σχ. 248.

Ἐστω  $AB$  ἡ κοινὴ πλευρὰ εἰς δύο προσκειμένας ἑδρας· ἔστωσαν  $\Gamma$  καὶ  $E$  τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ἐδρῶν, καὶ  $\Gamma\Delta$ ,  $E\Delta$  αἱ ἡγμέναι κάθετοι ἀπὸ ταῦτα τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς  $AB$ , αἱ ὁποῖαι θέλουν πέσει εἰς τὴν στιγμὴν  $\Delta$ , μέσον ταύτης τῆς πλευρᾶς. Αἱ δύο κάθετοι  $\Gamma\Delta$ ,  $E\Delta$ , κάμνουν μεταξύ των μίαν γνωστὴν γωνίαν ἣτις εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἐδρῶν, προσδιοριζομένην διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος. Τώρα ἐὰν, εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\Gamma\Delta E$ , κάθετον εἰς  $AB$ , ἀκθῶσιν ἐπὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  καὶ  $E\Delta$  αἱ ἀπροσδιόριστοι κάθετοι  $\Gamma O$  καὶ  $EO$ , αἱ ὁποῖαι συναπαντῶνται εἰς  $O$ , λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ  $O$  θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας· οὗσης τῆς ἀκτίνος τῆς πρώτης  $OG$ , καὶ τῆς δευτέρας  $OA$ .

Τῶ ὄντι, ἐπειδὴ τὰ ἀποστήματα  $\Gamma\Delta$ ,  $E\Delta$ , εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ὑποτείνουσα  $\Delta O$  κοινὴ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον  $\Gamma\Delta O$  εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον  $O\Delta E$  (18, 1), καὶ ἡ κάθετος  $OG$  εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον  $OE$ . Ἄλλ' ἐπειδὴ  $AB$  εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\Gamma\Delta E$ , τὸ ἐπίπεδον  $AB\Gamma$  εἶναι κάθετος εἰς  $\Gamma\Delta E$ , (17, 5), ἡ  $\Gamma\Delta E$  εἰς  $AB\Gamma$ · περιπλέον  $\Gamma O$ , εἰς τὸ ἐπίπεδον  $\Gamma\Delta E$ , εἶναι κάθετος εἰς  $\Gamma\Delta$ , κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων  $\Gamma\Delta E$ ,  $AB\Gamma$ · λοιπὸν  $\Gamma O$  (18, 5) εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $AB\Gamma$ . Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον  $EO$  εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον  $ABE$ · λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι  $\Gamma O$ ,  $EO$  ἡγμέναι εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἐδρῶν ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἰδίων, συναπαντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ εἶναι ἴσαι. Ἄς υποθέσωμεν τώρα ὅτι  $AB\Gamma$  καὶ  $ABE$  παριστάνουν δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε προσκειμένας ἑδρας, τὸ ἀπόστημα  $\Gamma\Delta$  πάντοτε θέλει μένει τοῦ ἰδίου μεγέθους, καθὼς καὶ ἡ γωνία  $\Gamma\Delta O$ , ἡμίσεια τῆς  $\Gamma\Delta E$ · λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον  $\Gamma\Delta O$  καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ  $\Gamma O$  θέλουν εἶναι ἴσα δι' ὅλας τὰς ἑδρας τοῦ πολυέδρου· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν στιγμὴν  $O$  ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα  $OG$  γράψωμεν μίαν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἄπτεται ὅλων τῶν ἐδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα των (διότι τὰ ἐπίπεδα  $AB\Gamma$ ,  $ABE$ , θέλουν εἶναι κάθετα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος), καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον ἢ τὸ πολυέδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἄς ἐνωθῶσιν αἱ  $OA$ ,  $OB$ · ἐπειδὴ  $\Gamma A = \Gamma B$ , αἱ δύο πλάγμαι



ΟΑ, ΟΒ, με τὸ νὰ ἀπομάκρυνονται ἰσάκεις τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ὁποιασδήποτε ἄλλας γραμμὰς ἡγμένας ἀπὸ τὸ κέντρον Ο εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· ὅλαι λοιπὸν αὗται αἱ γραμμαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν στιγμήν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μετὴν ἀκτῖνα ΟΑ γραφθῇ σφαιρική ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διέλθῃ διὰ τῶν κορυφῶν ὅλων τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον, ἢ τοῦτο ἐγγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Τούτου τεθέντος, ἡ λύσις τοῦ προτεθέντος προβλήματος δὲν ἔχει καμμίαν δυσκολίαν καὶ ἡμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς ἀκολούθως.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς μιᾶς ἑδρας τοῦ πολυέδρου, ἃς γραφθῇ αὕτη ἡ ἑδρα, καὶ ἔστω ΓΔ τὸ ἀπόστημά της. Ἄς ζητηθῇ διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἃς γένη ἡ γωνία ΓΔΕ ἴση μετὰ αὐτὴν τὴν κλίσιν. Ἄς ληθῇ ΔΕ ἴση μετὰ ΓΔ, ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΓΟ καὶ ΕΟ κάθετοι ἐπὶ ΓΔ καὶ ΕΔ· αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπανητηθῇ εἰς μίαν στιγμήν Ο, καὶ ΓΟ θέλει εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ πολυέδρον· σχ. 249.

Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΔΓ ἃς ληθῇ ΓΑ ἴση μετὰ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς μίαν ἑδραν τοῦ πολυέδρου, καὶ ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολυέδρον σφαίρας.

Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΑΟ, τοῦ σχήματος 249, εἶναι ἴσα μετὰ τὰ τρίγωνα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἰς τὸ σχῆμα 248· οὕτως ἐν ᾧ ΓΔ καὶ ΓΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἑδραν τοῦ πολυέδρου, ΟΓ καὶ ΟΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολυέδρον.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὰς προηγουμένας προτάσεις πολλὰς συνεπείας.

1.<sup>ον</sup> Κάθε κανονικὸν πολυέδρον ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολυέδρον· ἡ κοινὴ κορυφή τούτων τῶν πυραμίδων θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πολυέδρου, τὸ ὅποιον εἶναι ἐνταυτῷ ἐκεῖνο τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης.

2.<sup>ον</sup> Ἡ στερεότης ἐνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3.<sup>ον</sup> Δύο κανονικὰ πολυέδρα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἶναι δύο



ἔμοιχα στερεά, καὶ αἱ ὁμόλογοι διχστάσεις των εἶναι ἀνάλογοι λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ πλευραὶ τούτων τῶν πολυέδρων.

4.<sup>ον</sup> Ἐὰν ἐγγραφῇ κανονικὸν πολυέδρον εἰς μίαν σφαῖραν, τὰ ἡγμένα ἐπίπεδα ἀπὸ τὸ κέντρον κατὰ τὰς διαφόρους πλευρὰς θέλουν μοιράσκει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τόσα ἴσα καὶ ὅμοια σφαιρικά πολύγωνα ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολυέδρον.

## B I B Λ I O N Η'.

## ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΑ ΣΩΜΑΤΑ.

### Ὅρισμοί.

**Α'.** Καλεῖται κύλινδρος τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφήν ὀρθογωνίου τινὸς  $AB\Gamma\Delta$ , ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς  $AB$ . σχ. 250.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν αἱ πλευραὶ  $AD$ ,  $BF$ , πάντοτε μένουσαι κάθετοι ἐπὶ τῆς  $AB$ , γράφουσιν ἴσα κυκλικά ἐπίπεδα  $A\Theta\Pi$ ,  $\Gamma\eta\kappa$ , τὰ ὁποῖα καλοῦνται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἡ πλευρὰ  $\Gamma\Delta$  γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφανείαν του.

Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ  $AB$  καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου.

Κάθε τομὴ  $K'AM$ , γινομένη εἰς τὸν κύλινδρον κατὰ κάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος ἴσος μετὰ ἐκάστην τῶν βάσεων· διότι ἐν ᾧ τὸ ὀρθογώνιον  $AB\Gamma\Delta$  στρέφεται ὁλόγυρα τῆς  $AB$ , ἡ γραμμὴ  $IK'$  κάθετος εἰς τὴν  $AB$ , γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μετὰ τὴν βάσιν, καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ γινομένη τομὴ κατακάθετον τοῦ ἄξονος εἰς τὴν στιγμήν  $I$ .

Κάθε τομὴ  $\Pi\kappa\Theta\eta$ , γινομένη διὰ τοῦ ἄξονος, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος  $AB\Gamma\Delta$ .

**Β'.** Καλεῖται κῶνος τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφήν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου  $\Sigma AB$ , ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς  $\Sigma A$ . σχ. 251.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἡ πλευρὰ  $AB$  γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον  $B\Delta\Gamma E$ , τὸ ὁποῖον καλεῖται βάσις τοῦ κώνου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα  $\Sigma A$  γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφανείαν του.

Ἡ στιγμή  $\Sigma$  καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου,  $\Sigma A$  ἄξων ἢ ὕψος, καὶ  $\Sigma B$  πλευρὰ ἢ ἀπόστημα.

Κάθε τομή ΘΚ'ΖΙ γινομένη κατακάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος· κάθε δὲ τομή ΣΔΕ διὰ τοῦ ἄξονος γινομένη εἶναι ἰσοσκελές τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γενήτορος ΣΑΒ.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τὸν κῶνον ΣΓΔΒ ἀφαιρεθῇ διὰ τομῆς παραλλήλου τῆς βάσεως, ὁ κῶνος ΣΖΚ'Θ, τὸ ἐναπομένον στερεὸν ΓΒΘΖ καλεῖται κολοβὸς κῶνος ἢ κορυμὸς κῶνου.

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι γράρεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τραπέζιου ΑΒΘΗ, τοῦ ὁποῦ αἱ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι ὀρθαί, ὁλόγυρα τῆς πλευρᾶς ΑΗ. Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ ΑΗ καλεῖται ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κορυμοῦ, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΘΖΚ', εἶναι αἱ βάσεις του, ἡ δὲ ΒΘ ἡ πλευρά του.

Δ'. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι ὅταν οἱ ἄξονές των ᾔηται μεταξύ των, ὡς αἱ διάμετροι τῶν βάσεών των.

Ε'. Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΔ ὅστις χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς ἕνα κύλινδρον, ἐγγραφθῇ πολὺγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ὑψωθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοῦψές μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ δὲ κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 252.

Φανερόν ὅτι ἐπειδὴ αἱ κόψεις ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. τοῦ πρίσματος, εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, περιέχονται εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἄπτονται κατὰ ταύτας τὰς κόψεις.

ς'. Παρομοίως ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι πολὺγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν κυλίνδρου τινὸς, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοῦψές μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ δὲ κύλινδρος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 253.

Ἐστώσαν Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ στιγμαὶ τῆς ἀφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. καὶ ἅς ὑψωθῶσιν ἀπὸ τὰς στιγμὰς Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ κάθετοι ΜΧ, ΝΨ, κ. τ. λ. εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· φανερόν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουν εἶναι ἐνταυτῷ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος· λοιπὸν θέλουν εἶναι αἱ γραμμαὶ κατὰ τὰς ὁποίας ἄπτονται.

Σ. Κ. Ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος, καὶ ἡ σφαῖρα, εἶναι τὰ τρία στρογγύλα σώματα περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὰ στοιχεῖα.

Προοιμιώδη λήμματα ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας.

Α'.

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, ἥτις περατοῦται εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. σχ. 254.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τόσο φανερά, ὥστε ἔπρεπε νὰ συγκαταριθμηθῇ μετὰ τῶν ἀξιωμάτων διότι δυνατόν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι μετὰ τῶν ἐπιφανειῶν ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ μετὰ τῶν γραμμῶν: ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ βραχυτέρα μετὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων, ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἡ μικροτέρα ἐπιφάνεια μετὰ τῶν ὅλων ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον· πλὴν ἐπειδὴ τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὸν ὅσον τὸ δυνατόν μικρότερον ἀριθμόν, ἰδοὺ εἰς συλλογισμὸς ὅστις καμμίαν ἀμφισβολίαν δὲν θέλει ἀφήσῃ ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν.

Ἐπειδὴ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἑκτασις μῆκος καὶ πλάτος ἔχουσα, ἀδύνατον νὰ νοηθῇ ὅτι ἐπιφάνειά τις εἶναι μαγαλητέρα ἄλλης τινὸς, χωρὶς αἱ διαστάσεις τῆς πρώτης νὰ ὑπερέχῃσι κατὰ τινὰς ἐννοίας τὰς τῆς δευτέρας· καὶ ἐὰν ἀκολουθήσῃ ὅτι αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας τινὸς καθ' ὅλας τὰς ἐννοίας εἶναι μικρότεροι τῶν διαστάσεων ἄλλης ἐπιφανείας, φανερόν ὅτι ἡ πρώτη θέλει εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο. Τώρα καθ' ὅποιαν ἐννοιαν καὶ ἂν διέλθῃ, τὸ ἐπίπεδον ΒΠΔ, τὸ ὅποιον τὴν μὲν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν θέλει τέμνει κατὰ τὴν ΒΔ, τὴν δὲ ἄλλην ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ΒΠΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΔ πάντοτε θέλει εἶναι μικρότερη τῆς ΒΠΔ· ἡ ἐπίπεδος λοιπὸν ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς περικυκλούσης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ.

Β'.

Κάθε κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ὁποιασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας ἥτις ἐπιστηριζομένη ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλῶναι τὴν πρώτην. σχ. 255.

Ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα ὅτι διὰ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐννοοῦμεν ἐπιφάνειαν ἥτις δὲν δύναται νὰ συναπληρωθῇ ἀπὸ εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεία: καὶ ὁμοίως δυνατόν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀκριβῶς νὰ ἐφαρμόζηται κατὰ τινὰ ἐννοιαν ἐπὶ μιᾷ κυρτῆς ἐπιφανείας βλέπομεν τοῦτου παραδείγματα εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ κυλίνδρου. Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι ἡ ὀνομασία κυρτὴ ἐπιφάνεια δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας· ἀλλὰ περιλαμβάνει καὶ τὰς πολυεδρικές ἐπιφανείας ἢ συνθέτους ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα, καὶ ὁμοίως



τάς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι μέρος καμπύλαι, καὶ μέρος πολυεδρικάι.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια  $OAB\Gamma\Delta$  δὲν εἶναι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τὴν περικυκλόνουν, ἔστω μετὰ τούτων  $\Pi AB\Gamma\Delta$  ἡ μικρότερα ἐπιφάνεια ἡ ὁποία τὸ πολὺ θέλει εἶναι ἴση μὲ  $OAB\Gamma\Delta$ . Δι' ὁποιασδήποτε στιγμῆς  $O$  ἅς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἄπτηται τῆς ἐπιφανείας  $OAB\Gamma\Delta$  χωρὶς νὰ τὴν τέμνῃ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει συναπαντήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν  $\Pi AB\Gamma\Delta$ , καὶ τὸ μέρος τὸ ὁποῖον ἀπ' αὐτὴν θέλει ἀφαιρέσει θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (λῆμμ. Α'): λοιπὸν, φυλαττομένου τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας  $\Pi AB\Gamma\Delta$  δυνατόν ἀντὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μέρους νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἤθελε προκύψει νέα ἐπιφάνεια ἥτις ἤθελε περικυκλόνει τὴν ἐπιφάνειαν  $OAB\Gamma\Delta$ , καὶ ἤθελεν εἶναι μικρότερα τῆς  $\Pi AB\Gamma\Delta$ . Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη εἶναι μικρότερα ἀπὸ ὅλας· τοιαύτη λοιπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· ὅθεν ἐπεταί ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια  $OAB\Gamma\Delta$  εἶναι μικρότερα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἥτις τελειόνουσα εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον  $AB\Gamma\Delta$  ἤθελε περικυκλόνει τὴν  $OAB\Gamma\Delta$ .

Σχόλιον. Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῇ.

1.<sup>ον</sup> ὅτι, ἐὰν κυρτὴ τις ἐπιφάνεια περατουμένη ἀπὸ δύο περιμέτρους  $AB\Gamma$ ,  $\Delta E\Z$ , περικυκλοῦται ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἄλλην ἐπιφάνειαν εἰς τὰς αὐτὰς περιμέτρους περατουμένην, ἡ περικυκλούμενη θέλει εἶναι ἡ μικρότερα τῶν δύο. σχ. 256.

2.<sup>ον</sup> ὅτι, ἐὰν κυρτὴ τις ἐπιφάνεια  $AB$  περικυκλοῦται πανταχόθεν ἀπὸ ἄλλην τινὰ  $MN$ , εἴτε ἔχουσι σημεῖα, γραμμὰς ἢ ἐπίπεδα κοινὰ, εἴτε δὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ἡ περικυκλούμενη πάντοτε θέλει εἶναι μικρότερα τῆς περικυκλούσης.

Διότι μετὰ τούτων ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ καμμία ἥτις νὰ ᾔῃαι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας, ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις δυνατόν νὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον  $\Gamma\Delta$  ἐφαπτόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας  $\Gamma M\Delta$  (λῆμμ. Α'). καὶ οὕτως ἡ ἐπιφάνεια  $\Gamma N\Delta$  θὰ ᾔῃτο μικρότερα τῆς  $MN$ , τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ  $MN$  εἶναι μικρότερα ἀπὸ ὅλας. Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια  $AB$  εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὰς ὅσαι τὴν περικυκλόνουν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θ ε ὡ ρ η μ α.

Ἡ στερεότης παντὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐστω ΑΓ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος τοῦ ἄς παραστήσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Διότι, ἐὰν ἐπιφ. ΓΑ×Υ δὲν εἶναι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, τὸ γινόμενον τοῦτο θέλει εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου. Καὶ πρῶτον μὲν ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μικροτέρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ἄς περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς (10,4). Ἀς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὀρθὸν πρίσμα βάσιν ἔχον τὸ πολύγωνον ΗΘΠ, καὶ ὕψος Υ, τὸ ὁποῖον πρίσμα θέλει εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ. Τούτου τεθέντος, ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν ΗΘΠ, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ· ἡ βάσις ΗΘΠ εἶναι μικρότερα τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς: ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ πρίσματος εἶναι μικρότερα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Ἀλλὰ ἐπιφ. ΓΑ×Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ στερεότης τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πρίσμα κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα ἔθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· τῶρα, ἐξ ἐναντίας, ὁ κύλινδρος εἶναι μικρότερος τοῦ πρίσματος ὡς περιεχόμενος· ἀδύνατον λοιπὸν ἐπιφ. ΓΑ×Υ νὰ ᾔῃαι τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος· ἢ, μὲ γένικωτέρους ὅρους, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρηῇ μικρότερον κύλινδρον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρηῇ μεγαλήτερον κύλινδρον: διότι, διὰ νὰ μὴ πολυπλασιάσωμεν τὰ σχήματα, ἔστω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐπιφ. ΓΔ×Υ τὸ μέτρον μεγαλητέρου κυλίνδρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος.

Ἐὰν γένῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν δεδομένον κύλινδρον πρίσμα θέλει ἔχει μέτρον ΗΘΠ×Υ: τὸ ἐμβαδὸν ΗΘΠ εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐπιφ. ΙΔ· λοιπὸν ἡ στερεότης τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσματος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔ×Υ: τὸ πρίσμα λοιπὸν ἔθελεν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἰσούψου κυλίνδρου ὅστις ἔχει βάσιν

ἐπιρ. ΓΑ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ πρίσμα, ὡς περιεχόμενον, εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· ἀδύνατον λοιπὸν ἢ βάσεις ἐνὸς κυλίνδρου πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ νὰ ᾔηται τὸ μέτρον ἐνὸς μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

**Πόρισμα Α'.** Οἱ ἰσοῦφεῖς κύλινδροι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

**Πόρισμα Β'.** Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων· διότι αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων των· καὶ ἐπειδὴ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων εἶναι ὡς τὰ ὕψη (ὁρ. 4.) λοιπὸν αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν· ὅθεν αἱ βάσεις πολυπλασιασθεῖται ἐπὶ τὰ ὕψη, ἢ οἱ ἴδιοι κύλινδροι, εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν.

**Σχόλιον.** Ἐστω Α ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, Υ<sup>2</sup> τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως θέλει εἶναι πΑ<sup>2</sup> (12, 4), καὶ ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου πΑ<sup>2</sup> × Υ<sup>2</sup> ἢ πΑΥ. —

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

#### Λήμμα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΖΗΒ, ΒΗΘΓ, ΓΘΙΔ, κ. τ. λ. ἀπὸ τὰ ὁποῖα συγκροτεῖται· τώρα τὰ ὕψη ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. τούτων τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· αἱ βάσεις των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ. τ. λ. ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν ὀρθογωνίων ἢ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του σχ. 252.

**Πόρισμα.** Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περίμετροι τῶν βάσεών των.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

#### Λήμμα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλητέρα τῆς κυρ-



τῆς ἐπιφανείας κάθε ἐγγεγραμμένου πρίσματος, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου.

Διότι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μῆκος, διότι κάθε τομὴ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην παραλλήλως τῇ ΑΖ γινομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖ· ἐὰν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῆς βάσεως ἢ καθετῶν εἰς τὴν κόψιν ΑΖ, αἱ προκύπτουσαι τομαὶ θέλουν εἶναι τὰ πλάτη τούτων τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἴσαι, ἡ μὲν, μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, ἡ δὲ, μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ μικροτέραν ταύτης τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἔχει μὲν μῆκος ἴσον μὲ τὴν πρισματικήν, πλάτος δὲ μεγαλῆτερον, ἔπεται εἶναι μεγαλητέρα. σχ. 252.

Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου πρίσματος ΒΓΔΚ'ΛΘ. σχ. 253.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

### Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἐστω ΓΑ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος τοῦ· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ περ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ, λέγω ὅτι περ. ΓΑ×Υ θέλει εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου· διότι, ἐὰν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, πρέπει περ. ΓΑ×Υ νὰ ᾔῃαι ἡ ἐπιφάνεια κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου· καὶ πρῶτον μὲν ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κυλίνδρου μικροτέρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ἄς περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὀρθὸν πρίσμα ὕψος ἔχον Υ, καὶ βάσιν τὸ πολύγωνον ΗΘΠ. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΠ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολυπλασιασθεῖσαν (πρό. 2): ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περ. ΓΑ×Υ. Ἀλλὰ περ. ΓΑ×Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, καὶ ὁ ὁποῖος

κυλίνδρος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλύτερα (πρό. 3)· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποῖαν ἀνεχωρήσαμεν, εἶναι ἀτοπος· λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἤμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κυλίνδρου.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἤμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου. Διότι, διὰ νὰ μὴν ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔστω  $\Gamma\Delta$  ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καί, εἰ δυνατόν, ἔστω περ.  $\Gamma\Delta \times \Upsilon$  ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου ὅστις μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἤθελεν ἔχει βάσιν κύκλον μεγαλύτερον, φέρ' εἰπεῖν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι  $\Gamma\Lambda$ . Ἐκτελεσθείσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου  $\text{ΗΘΗ}$  ἐπὶ τὸ ὕψος  $\Upsilon$  πολυπλασιασθεῖσαν. Ἄλλ' ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ περ.  $\Gamma\Delta$ · ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ περ.  $\Gamma\Delta \times \Upsilon$ , τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἰδίου ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι  $\Gamma\Lambda$ . Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας τούτου τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ πρίσμα ᾗτον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ ἐπιφάνειά του ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου, (πρό. 3), πολὺ περισσότερον εἶναι μικροτέρα ὅταν τὸ πρίσμα δὲν ἐκτείνεται μέχρι τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἡ δευτέρα ἄρα ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἤμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

#### Θεώρημα.

Ἡ στερεότης τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους τοῦ.

Ἐστω  $\Sigma\Theta$  τὸ ὕψος τοῦ δεδομένου κώνου,  $\text{ΑΟ}$  ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· ἐὰν σημειωθῇ διὰ ἐπιφ.  $\text{ΑΟ}$  ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως,



λέγω ὅτι ἡ στερεότης τούτου τοῦ κώνου θέλει εἶναι ἴση με ἐπιφ.  $AO \times \frac{1}{3} SO$ . σχ. 259.

Τῷ ὄντι, ἃς ὑποθέσωμεν 1.<sup>ον</sup> ὅτι ἐπιφ.  $AO \times \frac{1}{3} SO$  εἶναι ἡ στερεότης μεγαλητέρου κώνου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου  $SO$  εἶναι πάντοτε τὸ ὕψος· ἀλλὰ τοῦ ὁποίου  $OB$ , μεγαλητέρα ἀπὸ  $AO$ , εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι  $AO$  ἃς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον τὸ  $MNΠΓ$  τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι  $OB$  (10, 4)· ἃς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ πολύγωνον καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν  $\Sigma$ . Ἡ στερεότης ταύτης τῆς πυραμίδος (19, 6) εἶναι ἴση με τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου  $MNΠΓ$  πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους  $SO$ . Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον, εἶναι μεγαλητερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὅστις παριστάνεται διὰ ἐπιφ.  $AO$ · λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ.  $AO \times \frac{1}{3} SO$ , τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου  $\Sigma$  εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ  $OB$  ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς ὡς περιεχομένη εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου· λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> ἀδύνατον ἡ βάσις τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους τοῦ πολυπλασιασθεῖσα νὰ ᾔῃαι τὸ μέτρον μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.<sup>ον</sup> ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔῃαι τὸ μέτρον κώνου μικροτέρου. Διότι, διὰ νὰ μὴν ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔστω  $OB$  ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καὶ, εἰ δυνάτὸν, ἔστω, ἐπιφ.  $OB \times \frac{1}{3} SO$  ἡ στερεότης τοῦ κώνου ὅστις ἔχει ὕψος  $SO$  καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου  $AO$  εἶναι ἡ ἀκτίς. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ πυραμὶς  $\Sigma MNΠΓ$  θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν  $MNΠΓ$  πολυπλασιασθὲν ἐπὶ  $\frac{1}{3} SO$ . Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν  $MNΠΓ$  εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ.  $OB$ · λοιπὸν ἡ πυραμὶς ἤθελεν ἔχει μέτρον μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ.  $OB \times \frac{1}{3} SO$ , καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸν κώνον τοῦ ὁποίου  $AO$  εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως καὶ  $SO$  τὸ ὕψος. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα τοῦ κώνου, διότι οὗτος περιέχεται· λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἀδύνατον ἡ βάσις ἐνὸς κώνου πολυπλασιασθεῖσα τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τοῦ νὰ ᾔῃαι τὸ μέτρον μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ στερεότης τοῦ κώνου εἶναι ἴση με τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους του.

**Πόρισμα.** Κώνος εἶναι τὸ τριτημόριον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰοίου ὕψους· ὅθεν ἔπεται.



- 1.<sup>ον</sup> Ὅτι οἱ ἰσοῦψεῖς κῶνοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.  
 2.<sup>ον</sup> Ὅτι οἱ κῶνοι ἴσων βάσεων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.  
 3.<sup>ον</sup> Ὅτι οἱ ὁμοιοκῶνοι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων των, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψων των.

Σχόλιον. Ἐστω Α ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, Υ τὸ ὕψος του· ἡ στερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι  $\pi A \times \frac{1}{2} Y$  ἢ  $\frac{1}{3} \pi A Y$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

### Θεώρημα.

Ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΔΕΒ, τοῦ ὁποίου ΑΟ, ΔΠ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ ΠΟ τὸ ὕψος, ἔχει μέτρον  $\frac{1}{3} \pi$ .

ΟΠ.  $(AO + \Delta\Pi + AO \times \Delta\Pi)$ . Σχ. [260].

Ἐστω ΤΖΗΘ τριγωνικὴ πυραμὶς τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸν κῶνον ΣΑΒ, καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΖΗΘ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο αὐταὶ βάσεις εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· τότε αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Τ ἰσάκεις θέλουν ἀπέγει ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΠΔ προεκβληθὲν θέλει κάμει εἰς τὴν πυραμίδα τὴν τομὴν ΙΚ'Α. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τομὴ αὕτη ΙΚ'Α ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν βάσιν ΔΕ· διότι αἱ βάσεις ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΠ (11, 4), ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὕψων ΣΟ, ΣΠ· τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚ'Α, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ὕψων (15, 6)· λοιπὸν οἱ κύκλοι ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚ'Α. Ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τρίγωνον ΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΙΚ'Α εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΔΕ.

Τώρα, ἡ βάσις ΑΒ πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ  $\frac{1}{3} \Sigma O$  εἶναι ἡ στερεότης τοῦ κώνου ΣΑΒ, καὶ ἡ βάσις ΖΗΘ· πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ  $\frac{1}{3} \Sigma O$  εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος ΖΗΘ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τῶν ἰσοδυναμῶν βάσεων, ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κώνου. Διὰ λόγον παρόμοιον, ἡ πυραμὶς ΤΙΚ'Α εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κῶνον ΣΔΕ· λοιπὸν ὁ κορμὸς τοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κορμὸν τῆς πυραμίδος ΖΗΘΙΚ'Α. Ἀλλ' ἡ βάσις ΖΗΘ, ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὺς εἶναι ΑΟ,

ἔχει μέτρον  $\pi \times AO$  ὁμοίως ἡ βάσις ΙΚ'Α  $= \pi \times \Delta\Pi$ , καὶ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξύ  $\pi \times AO$  καὶ  $\pi \times \Delta\Pi$  εἶναι  $\pi \times AO \times \Delta\Pi$ .

ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ κορυμοῦ τῆς πυραμίδος, ἢ ἡ στερεότης τοῦ  
 $\frac{1}{3}$  κορυμοῦ τοῦ κώνου, ἔχει μέτρον  $\frac{1}{3} \text{ΟΠ} \times (\pi \times \text{ΑΟ} + \pi \times \text{ΔΠ} + \pi \times \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ})$  (20, 6), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ  $\frac{1}{3} \pi \times \text{ΟΠ}$   
 $\times (\text{ΑΟ} + \text{ΔΠ} + \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ})$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἐστω ΑΟ ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, Σ ἡ κορυφή του, καὶ ΣΑ ἡ πλευρά του· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφανεία του θέλει εἶναι περ.  $\text{ΑΟ} \times \frac{1}{2} \text{ΣΑ}$ . Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, περ.  $\text{ΑΟ} \times \frac{1}{2} \text{ΣΑ}$ , ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου ὅστις κορυφὴν μὲν ἔχει τὴν στιγμὴν Σ, βάσιν δὲ τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ μεγαλητέραν τῆς ΑΟ· σχ. 259.

Ἄς περιγραφθῇ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΠΝΗΤ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ· καὶ ἔστω ΣΜΝΗΤ κανονικὴ πυραμὶς, ἣτις βάσιν μὲν ἤθελεν ἔχει τὸ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὴν στιγμὴν Σ· τὸ τρίγωνον ΣΜΝ ἐν ἀπὸ τὰ συγκροτοῦντα τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, ἔχει μέτρον τὴν βάσιν του ΜΝ ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους ΣΑ πολυπλασιασθεῖσαν, τὸ ὁποῖον ὕψος εἶναι ἐνταῦθα ἡ πλευρά τοῦ δεδομένου κώνου· ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἴσον εἰς ὅλα τὰ ἄλλα τρίγωνα ΣΝΗ, ΣΗΚ, κ. τ. λ. ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΠΝΗΤΜ ἐπὶ  $\frac{1}{2}$  ΣΑ πολυπλασιασθεῖσαν· ἀλλ’ ἡ περίμετρος ΜΝ-ΠΤΜ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΑΟ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ.  $\text{ΑΟ} \times \frac{1}{2} \text{ΣΑ}$ , καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ὅστις μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Σ ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν τῆς πυραμίδος· διότι ἐάν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ἐτέρας ἴσης πυραμίδος, καὶ τὸ αὐτὸ γένη καὶ ὡς πρὸς τὸν κῶνον ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο κῶνων θέλει περικυκλώσει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο πυραμίδων· ἡ πρώτη λοιπὸν ἐπιφάνεια θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας (λήμ. 2)· διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἣτις περιέχεται. Τὸ ἐναντίον

ἤθελεν εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μας· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀδύνατος· ἄρα 1.<sup>ον</sup> ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.<sup>ον</sup> ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου. Διότι ἔστω BO ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καὶ, εἰ δυνατόν ἔστω περ.  $BO \times \frac{1}{2} SB$  ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφή, καὶ AO, μικρότερα τῆς OB, ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ΣΜΝΠΤ πάντοτε θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΜΝΠΤ πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ  $\frac{1}{2} SA$ . Τώρα ἡ περίμετρος ΜΝΠΤ εἶναι μικρότερα τῆς περ. BO, SA εἶναι μικρότερα ἀπὸ SB· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μικρότερα ἀπὸ περ.  $BO \times \frac{1}{2} SB$ , τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου AO εἶναι ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἤθελεν εἶναι μικρότερα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, εἶναι μεγαλητέρα· διότι ἐὰν τεθῇ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς βάσεως ἐτέρας ἴσης πυραμίδος καὶ τὸ αὐτὸ γένη καὶ ὡς πρὸς τὸν κώνον, ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο πυραμίδων πανταχόθεν θέλει περιτυλίσσει τὴν τῶν δύο κώνων, καὶ ἐπομένως θέλει εἶναι μεγαλητέρα. Λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως δεδομένου κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσα νὰ μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσαν.

Σχόλιον. Ἐστω Π ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, Α ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεώς του, ἡ περιφέρεια ταύτης τῆς βάσεως θέλει εἶναι  $2\pi A$ , καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει ἔχει μέτρον  $2\pi A \times \frac{1}{2} \Pi$  ἢ  $\pi A \Pi$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

### Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ ἐπὶ τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο του βάσεων ΑΒ, ΔΕ πολυπλασιασθεῖσαν. σχ. 261.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ, καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΑΖ ἴση μὲ



τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα  $AO$  ἃς ἐπιξευχθῇ  $\Sigma Z$  καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ  $\Delta\Theta$  παράλληλος τῇ  $AZ$ .

Ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων  $\Sigma AO$ ,  $\Sigma \Delta \Gamma$ , ἔχομεν  $AO : \Delta \Gamma :: \Sigma A : \Sigma \Delta$ , καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων  $\Sigma AZ$ ,  $\Sigma \Delta \Theta$ , ἔχομεν ὡσαύτως  $AZ : \Delta \Theta :: \Sigma A : \Sigma \Delta$ . λοιπὸν  $AZ : \Delta \Theta :: AO : \Delta \Gamma$ , ἢ :: περ.  $AO$  : περ.  $\Delta \Gamma$  (11, 4). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς  $AZ =$  περ.  $AO$  λοιπὸν  $\Delta \Theta =$  περ.  $\Delta \Gamma$ . Τοῦτου τεθέντος, τὸ τρίγωνον  $\Sigma AZ$ , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον  $AZ \times \frac{1}{2} \Sigma A$ , εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου  $\Sigma AB$ , ἣτις ἔχει μέτρον περ.  $AO \times \frac{1}{2} \Sigma A$ . Διὰ λόγον παρόμοιον τὸ τρίγωνον  $\Sigma \Delta \Theta$  εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου  $\Sigma \Delta E$ . λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορυμμοῦ  $A \Delta E B$  εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ τραπέζιου  $A \Delta \Theta Z$ . αὕτη ἔχει μέτρον (7, 3),  $A \Delta \times \frac{(AZ + \Delta \Theta)}{2}$  ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κορυμμοῦ τοῦ κώ-

νου  $A \Delta E B$  εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του  $A \Delta$  πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων του.

Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν στιγμήν  $I$ , μέσον τῆς  $A \Delta$ , ἃς ἀχθῇ ἡ  $IK' \Lambda$  παράλληλος τῇ  $AB$ , καὶ ἡ  $IM$  παράλληλος τῇ  $AZ$  δεκνόμεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι  $IM =$  περ.  $IK'$ . Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον  $A \Delta \Theta Z = A \Delta \times IM = A \Delta \times$  περ.  $IK'$ . Ἡμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἰπωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κωνικοῦ κορυμμοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς τομῆς τῆς γινομένης εἰς ἴσον ἀπόστημα ἀπὸ τὰς δύο βάσεις.

Σχόλιον. Ἐάν γραμμῆτις  $A \Delta$ , καθ' ὅλην τῆς τὴν ἔκτασιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γραμμῆς  $OF$  καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένη, περιστρέφεται ὁλόγυρα τῆς  $OF$ , ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν  $A \Delta$  θέλει ἔχει μέτρον  $A \Delta \times$  (περ.  $AO +$  περ.  $\Delta \Gamma$ ), ἡ  $A \Delta$

$\times$  περ.  $IK'$ . ὅπου αἱ γραμμαὶ  $AO$ ,  $\Delta \Gamma$ ,  $IK'$  εἶναι κάθετοι ἡγμέναι ἀπὸ τὰ ἄκρα καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς γραμμῆς  $A \Delta$  ἐπὶ τοῦ ἄξονος  $OF$ .

Διότι ἐάν προεκβληθῶσιν αἱ  $AO$ ,  $OF$  ἕως οὔ νὰ συναπκντηθῶσιν εἰς  $\Sigma$ , φανερόν ὅτι ἡ γραφομένη ἀπὸ τὴν  $A \Delta$  ἐπιφάνεια εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου τῶν βάσεων τοῦ ὁποῖου  $OA$  καὶ  $\Delta \Gamma$  εἶναι αἱ ἀκτῖνες, ἔχοντος τοῦ ὅλου κώνου κορυφὴν τὴν στιγμήν  $\Sigma$ . λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει ἔχει τὸ εἰρημένον μέτρον.

Τὸ μέτρον τοῦτο ἤθελε πάντοτε ὑπάρχει, καὶ ὅταν ἡ στιγμή  $\Delta$  ἤθελε πέσει εἰς  $\Sigma$ , ἐκ τοῦ ὁποῖου ἤθελε προκύψει κώνος, καὶ ὡσαύτως ὅταν ἡ γραμμὴ  $A \Delta$  ἤθελεν εἶναι παράλληλος τοῦ ἄ-

ξονος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε γεννηθῇ κύλινδρος. Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἡ ΔΓ ἤθελεν εἶναι μηδὲν, εἰς τὴν δευτέραν ἴση μὲ τὴν ΑΟ καὶ μὲ τὴν ΙΚ'.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Λήμμα.

Ἐστώσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλάι διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὑποθεθέντος ὅτι ἡ μερίς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ, ὅλη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ κειμένη, περιττρέφεται ὁλόγυρα ταύτης τῆς διαμέτρου, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΑΒΓΔ θέλει ἔχει μέτρον  $ΜΚ \times \text{περ. ΟΙ}$ , ὅντος ΜΚ τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ περιεχομένου μέρους τοῦ ἄξονος μεταξὺ τῶν καθέτων ΑΜ, ΔΚ. σχ. 262.

Ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ ΙΚ' κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἡγμένη ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ θέλει ἔχει μέτρον  $ΑΒ \times \text{περ. ΙΚ'}$  (πρό. 8). Ἀς ἀχθῇ ἡ ΑΧ παράλληλος τοῦ ἄξονος· τὰ τρίγωνα ΑΒΧ, ΟΙΚ' ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, δηλαδή τὴν ΟΙ εἰς τὴν ΑΒ, τὴν ΙΚ' εἰς τὴν ΑΧ, καὶ τὴν ΟΚ' εἰς τὴν ΒΧ· εἶναι λοιπὸν ὁμοία καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ: ΑΧ ἢ ΜΝ :: ΟΙ: ΙΚ', ἢ: :: περ. ΟΙ: περ. ΙΚ'· λοιπὸν  $ΑΒ \times \text{περ. ΙΚ'} = ΜΝ \times \text{περ. ΟΙ}$ . Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ΜΝ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολυπλασιασθέν· ὡσαύτως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΒΓ,  $= ΝΠ \times \text{περ. ΟΙ}$ , ἡ γραφομένη ἀπὸ ΓΔ,  $= ΠΚ \times \text{περ. ΟΙ}$ . Λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὴν μερίδα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ γραφομένη ἔχει μέτρον  $(ΜΝ + ΝΠ + ΠΚ) \times \text{περ. ΟΙ}$ , ἢ  $ΜΚ \times \text{περ. ΟΙ}$ · εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολυπλασιασθέν.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ὅλον πολύγωνον εἶναι ἀρτιόπλευρον, καὶ ὁ ἄξων ΖΗ διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν Ζ καὶ Η, ἡ ὅλη γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμιπολυγώνου ΖΑΓΗ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸν ἄξωνα ΖΗ πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὁ ἄξων ΖΗ ἐνταύτῃ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θέωρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθεῖσαν.

Λέγω 1.<sup>ον</sup> ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιράνειαν μεγαλητέρας σφαίρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν,  $AB \times$  περ.  $AG$  ἡ ἐπιράνεια τῆς σφαίρας ἣτις ἔχει ἀκτῖνα  $GA$ . σχ. 263.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι  $GA$ , ἃς περιγραφθῇ ἰστίοπλευρον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα  $GA$ . ἔστωσαν  $M$  καὶ  $\Sigma$  δύο ἀπέναντι κορυφαὶ τούτου τοῦ πολυγώνου· καὶ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου  $MS$  ἃς περιστραφῇ τὸ ἡμιπολύγωνον  $MHS$ . Ἡ γραφομένη ἐπιράνεια θέλει ἔχει μέτρον  $MS \times$  περ.  $AG$  (πρό. 9.)· ἀλλὰ  $MS$  εἶναι μεγαλητέρα τῆς  $AB$ · λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένη ἐπιράνεια εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ  $AB \times$  περ.  $AG$ , καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν ἐπιράνειαν τῆς σφαίρας ἀκτὸς τῆς ὁποίας εἶναι  $GA$ . Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ ἐπιράνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένης, ἐπεὶδὴ ἡ πρώτη περιτυλίσσει πανταχόθεν τὴν δευτέραν. Λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιράνειαν μεγαλητέρας σφαίρας.

Λέγω 2.<sup>ον</sup> ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιράνειαν μικροτέρας σφαίρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν,  $DE \times$  περ.  $GD$  ἡ ἐπιράνεια τῆς σφαίρας ἣτις ἔχει ἀκτῖνα  $GA$ . Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ἡ ἐπιράνεια τοῦ γενομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον θέλει εἶναι ἴση μὲ  $MS \times$  περ.  $AG$ . Ἀλλὰ  $MS$  εἶναι μικροτέρα τῆς  $DE$ , καὶ περ.  $AG$  μικροτέρα τῆς περ.  $GD$ · λοιπὸν, διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους, ἡ ἐπιράνεια τοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένου στερεοῦ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ  $DE \times$  περ.  $GD$ , καὶ ἐπομένως μικροτέρα τῆς ἐπιράνειας τῆς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι  $AG$ . Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ γραφομένη ἀπὸ τὸ πολύγωνον ἐπιράνεια, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιράνειας τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι  $GA$ , διότι ἡ πρώτη ἐπιράνεια, περιτυλίσσει τὴν δευτέραν· λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιράνειαν μικροτέρας σφαίρας.

Ἡ ἐπιράνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν τῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς πολυπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἡ ἐπιράνεια μεγίστου κύκλου ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος ἢ τὸ τέ-



ταρτον τῆς διαμέτρου· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασία τῆς ἐπιφανείας μεγίστου κύκλου.

Σχόλιον. Ἀφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμετρήθη καὶ ἐσυγκρίθη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, εὐκολον γὰρ προσδιορισθῆ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν ἀτράκτων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσθη ὁ λόγος μὲ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Καὶ πρῶτον μὲν ὁ ἀτράκτος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, εἶναι πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθάς (20, 7), ἢ ὡς τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν Α πρὸς τὴν περιφέρειαν τούτου τοῦ ἰδίου μεγίστου κύκλου. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ταύτην τὴν περιφέρειαν πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν τούτου τοῦ ἀτράκτου ἐπὶ τὴν διάμετρον πολυπλασιασθέν.

Δεύτερον δὲ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἀτράκτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς (23, 7). Ἐστῶσαν λοιπὸν Π, Κ, Ρ τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου. Ἐστω Γ ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου καὶ Δ ἡ διάμετρος του· τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἀτράκτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ἔχει μέτρον  $\frac{\Pi + \Lambda + \text{P} - \frac{1}{2}\Gamma}{2}$ , καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι  $\Delta \times \frac{(\Pi + \text{K} + \text{P} - \frac{1}{2}\Gamma)}{2}$ .

Οὕτως, ὅταν τὸ τρίγωνον ᾗναι τρισορθογώνιον, ἕκαστον τῶν τόξων Π, Κ, Ρ, εἶναι ἴσον μὲ  $\frac{1}{3}\Gamma$ , τὸ ἀθροισμά των μὲ  $\frac{1}{2}\Gamma$ , ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐπάνω εἰς  $\frac{1}{2}\Gamma$ , εἶναι  $\frac{1}{4}\Gamma$ , καὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς ὑπεροχῆς  $= \frac{1}{8}\Gamma$ . ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου  $= \frac{1}{8}\Gamma \times \Delta$ , ἰσοῦται δηλαδὴ μὲ τὸ ὄγδοον μέρος τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ μέτρον τῶν πολυγώνων ἔπεται ἀμέσως ἀπὸ τῶν τριγώνων, ἄλλως δὲ κατὰ πάντα ἐπροσδιορίσθη διὰ τῆς προ. ΚΔ' βιβλ. Ζ', διότι ἡ μονὰς τοῦ μέτρου, ἣτις εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἐκτιμήθη εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

### Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση μὲ τὸ

ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν. σχ. 269.

Ἐστω EZ ὁποιοδήποτε τόξον ἔλασσον ἢ μεῖζον τεταρτημορίου περιφέρειας, καὶ ἂς καταβασθῇ ἡ ZH κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ· λέγω ὅτι ἡ μὲ μίαν μόνην βάσιν ζώνη, ἡ ἀπὸ τὴν περιτροπὴν τοῦ τόξου EZ ὁλόγυρα τῆς ΕΓ γραφομένη, θέλει ἔχει μέτρον EH  $\times$  περ. ΕΓ. σχ. 269.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ ζώνη αὕτη ἔχει μέτρον μικρότερον, καὶ, εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ μέτρον τοῦτο = EH  $\times$  περ. ΓΑ. Ἄς ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον EZ μερὶς κανονικοῦ πολυγώνου EMNOHZ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ φθάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφομένην, καὶ ἂς καταβασθῇ ἡ ΓΙ κάθετος, ἐπὶ τὴν ΕΜ· ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον ΕΜΖ ὁλόγυρα τῆς EZ στρεφόμενον γραφομένη ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον EH  $\times$  περ. ΓΙ (πρό. 9). Ἡ προσότης αὕτη εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ EH  $\times$  περ. ΑΓ, τὴν, ἐξ ὑποθέσεως, μετροῦσαν τὴν ἀπὸ τὸ τόξον EZ γραφομένην ζώνην. Ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον λοιπὸν EMNOHZ γραφομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερα τῆς ὑπὸ τοῦ περιγεγραμμένου τόξου EZ γραφομένης ἐπιφανείας· τῶρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ τελευταία αὕτη ἐπιφάνεια ὡς περιτυλίττουσα τὴν πρώτην πανταχόθεν εἶναι μεγαλύτερα αὐτῆς· λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> τὸ μέτρον κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖται μικρότερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ μέτρον τῆς ἰδίας ζώνης δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖται μεγαλύτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου AB ὁλόγυρα τῆς ΑΓ γραφομένης ζώνης, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, ζώνη AB > ΑΔ  $\times$  περ. ΑΓ. Ἡ ὅλη τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἀπὸ δύο ζώνας AB, BΘ συνισταμένη, ἔχει μέτρον ΑΘ  $\times$  περ. ΑΓ (πρό. 10), ἡ ΑΔ  $\times$  περ. ΑΓ + ΔΘ  $\times$  περ. ΑΓ· ἐὰν λοιπὸν ζώνη AB > ΑΔ  $\times$  περ. ΑΓ, ἀναγκαίως ζώνη BΘ < ΔΘ  $\times$  περ. ΑΓ· τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὰ ἥδη ἀποδειχθέντα. Λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> τὸ μέτρον μὲ μίαν μόνην βάσιν σφαιρικῆς ζώνης δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖται μεγαλύτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος.

Λοιπὸν τέλος κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν ἔχει μέτρον τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ὁποιαδήποτε ζώνην, μὲ δύο βάσεις, ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τόξου ΖΘ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γραφομένην, καὶ ἄς καταβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΟ, ΘΚ ἐπὶ ταύτης τῆς διαμέτρου. Ἡ ἀπὸ τὸ τόξον ΖΘ γραφομένη ζώνη εἶναι ἢ διαφορὰ δύο ζωνῶν ἀπὸ τὰ τόξα ΔΘ καὶ ΔΖ γραφομένων· αὗται μετροῦνται ὑπὸ ΔΚ  $\times$  περ. ΓΔ καὶ ΔΟ  $\times$  περ. ΓΔ· ἐκεῖνη λοιπὸν ἔχει μέτρον (ΔΚ — ΔΟ)  $\times$  περ. ΓΔ ἢ ΟΚ  $\times$  περ. ΓΔ.

Ὅποιαδήποτε λοιπὸν σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, ἔχει μέτρον τὸ ὕψος τῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν. σχ. 220.

Πόρισμα. Δύο ζῶναι εἰς τὴν αὐτὴν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας λαμβανόμεναι, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ ὁποιαδήποτε ζώνη εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφανείαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης πρὸς τὴν διάμετρον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Θ ε ὡ ρ η μ α.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ταυτοχρόνως στρέφονται ὁλόγυρα τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ, τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου στερεὸν θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τοῦ γραφόμενου ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου. σχ. 264 καὶ 265.

Ἄς καταβασθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ κάθετος ΑΔ· ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΒΔ γραφόμενου κυλίνδρου (πρό. 5), ὡσαύτως ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΓΕ γραφόμενου κυλίνδρου· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο κῶνων ἢ τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον γραφόμενον στερεὸν εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο κυλίνδρων ἢ τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ γραφόμενου κυλίνδρου. σχ. 264.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ γραφόμενον στερεὸν θέλει εἶναι ἢ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ γραφομένων κῶνων· ἀλλ' ἐνταύτῃ ὁ ἀπὸ ΒΓΕΖ γραφόμενος κυλίνδρος θέλει εἶναι ἢ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΖΒΔ, ΑΕΓΔ γραφομένων κυλίνδρων. Ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου γραφόμενου στερεοῦ, πάντοτε θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους γραφόμενου κυλίνδρου. σχ. 265.

Σχόλιον. Ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου ὅστις



ἔχει ἀκτῖνα  $ΑΔ$  εἶναι  $\pi \times \overset{-2}{ΑΔ}$ · λοιπὸν  $\pi \times \overset{-2}{ΑΔ} \times ΒΓ$  εἶναι τὸ  
 μέτρον τοῦ γραγομένου κυλίνδρου ἀπὸ  $ΒΓΕΖ$ , καὶ  $\frac{1}{4} \pi \times \overset{-2}{ΑΔ}$   
 $\times ΒΓ$  εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραγομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸ τρίγωνον  
 $ΑΒΓ$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

### Πρόβλημα.

ὑποθεθέντος ὅτι τὸ τρίγωνον  $ΓΑΒ$  στρέφεται ὁλόγυρα τῆς  
 γραμμῆς  $ΓΔ$ , ἡγμένης ὁποσδήποτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῆς  
 κορυφῆς του  $Γ$ , νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ οὕτω γενομένου στε-  
 ρεοῦ. σχ. 266.

Ἄς προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ  $ΑΒ$  ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸν ἄ-  
 ξονα  $ΓΔ$  εἰς  $Δ$ , ἀπὸ τῆς σιγμῆς  $Α$  καὶ  $Β$  ἅς καταβασθῶσιν  
 ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι  $ΑΜ$ ,  $ΒΝ$ .

Τὸ γραγομένον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον  $ΓΑΔ$  ἔχει μέτρον  
 (πρό. 12)  $\frac{1}{4} \pi \times \overset{-2}{ΑΜ} \times \overset{-2}{ΓΔ}$ · τὸ γραγομένον στερεὸν ἀπὸ τὸ  
 τρίγωνον  $ΓΒΔ$  ἔχει μέτρον  $\frac{1}{4} \pi \times \overset{-2}{ΒΝ} \times \overset{-2}{ΓΔ}$ · ἡ διαφορὰ λοιπὸν  
 τῶν στερεῶν τούτων ἢ τὸ ἀπὸ  $ΑΒΓ$  γραγομένον στερεὸν ἔχει  
 μέτρον  $\frac{1}{4} \pi \cdot (\overset{-2}{ΑΜ} - \overset{-2}{ΒΝ}) \times \overset{-2}{ΓΔ}$ .

Δυνατὸν νὰ δοθῇ εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἄλλη μορφή· ἀπὸ  
 τὴν σιγμὴν  $Ι$ , μέσον τῆς  $ΑΒ$ , ἅς ἀγθῇ ἡ  $ΙΚ'$  κάθετος ἐπὶ τὴν  
 $ΓΔ$ , καὶ διὰ τῆς σιγμῆς  $Β$  ἅς ἀγθῇ ἡ  $ΒΟ$  παράλληλος τῇ  $ΓΔ$ ,  
 θέλει εἶναι  $ΑΜ + ΒΝ = 2ΙΚ'$  (7, 3) καὶ  $ΑΜ - ΒΝ = ΑΟ$ .

λοιπὸν  $(ΑΜ + ΒΝ) (ΑΜ - ΒΝ)$  ἢ  $\overset{-2}{ΑΜ} - \overset{-2}{ΒΝ} = 2ΙΚ' \times ΑΟ$   
 (10, 3). Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεοῦ ἐκ-  
 φράζεται καὶ διὰ  $\pi \times ΙΚ' \times ΑΟ \times ΓΔ$ . Ἄλλ' ἐὰν καταβασθῇ  
 ἡ  $ΓΠ$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $ΑΒ$ , τὰ τρίγωνα  $ΑΒΟ$ ,  $ΔΓΠ$ , θέλουν  
 εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσῃ τὴν ἀναλογίαν  $ΑΟ : ΓΠ :: ΑΒ : ΓΔ$ .  
 ὅθεν προκύπτει  $ΑΟ \times ΓΔ = ΓΠ \times ΑΒ$ · ἄλλως  $ΓΠ \times ΑΒ$   
 εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου  $ΑΒΓ$ · οὕτως ἔ-  
 χομεν  $ΑΟ \times ΓΔ = 2ΑΒΓ$ · τὸ γραγομένον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ  
 τὸ τρίγωνον  $ΑΒΓ$  ἔχει ὁμοίως μέτρον  $\frac{1}{4} \pi \times ΑΒΓ \times ΙΚ'$ , ἢ,  
 ὅπερ ταύτὸν,  $ΑΒΓ \times \frac{1}{2}$  περ.  $ΙΚ'$  (διότι περ.  $ΙΚ' = 2\pi \cdot ΙΚ'$ ).  
 Τὸ γραφομένον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν  
 τοῦ τριγώνου  $ΑΒΓ$ , ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν τούτου  
 τοῦ τριγώνου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς

περιφερείας τὴν ὁποίαν γράφει ἡ στιγμὴ I μέσον τῆς βάσεως του.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ πλευρὰ  $ΑΓ = ΓΒ$ , ἡ γραμμὴ  $ΓΙ$  θέλει εἶναι κάθετος εἰς  $ΑΒ$ , τὸ ἐμβαδὸν  $ΑΒΓ$  θέλει ἴσῃται μὲ  $ΑΒ \times \frac{1}{2} ΓΙ$ , καὶ ἡ στερεότης  $\frac{1}{3} \pi \times ΑΒΓ \times ΙΚ'$  ἀποδίνει  $\frac{2}{3} \pi \times ΑΒ \times ΙΚ' \times ΓΙ$ . Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα  $ΑΒΟ$ ,  $ΓΙΚ'$ , εἶναι ὅμοια καὶ οἶδουν τὴν ἀναλογίαν  $ΑΒ:ΒΟ \text{ ἢ } ΜΝ::ΓΙ:ΙΚ'$ . λοιπὸν  $ΑΒ \times ΙΚ' = ΜΝ \times ΓΙ$  τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸ ἴσο-  
σκελὲς τρίγωνον  $ΑΒΓ$  θέλει ἔχει μέτρον  $\frac{2}{3} \pi \times ΜΝ \times ΓΙ$ .  
σχ. 267.

Σχόλιον. Ἡ γενικὴ λύσις φαίνεται ὅτι ὑποθέτει τὴν συνα-  
πάντησιν μὲ τὸν ἄξονα τῆς γραμμῆς  $ΑΒ$  ὅταν προεκβληθῇ· ἀλλὰ  
τὰ ἐξαγόμενα ἐπίσης ἤθελον εἶναι ἀληθῆ καὶ ὅταν ἡ  $ΑΒ$  ἤθελεν  
εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος.

Τῷ ὄντι ὁ γραφόμενος κύλινδρος ἀπὸ  $ΑΜΝΒ$  ἔχει μέτρον  $\pi$ .  
 $ΑΜ \cdot ΜΝ$ , ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ  $ΑΓΜ = \frac{1}{3} \pi \cdot ΑΜ \cdot ΓΜ$ ,  
καὶ ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ  $ΒΓΝ = \frac{1}{3} \pi \cdot ΑΜ \cdot ΓΝ$ . Ἡ πρόσθε-  
σις τῶν δύο πρώτων στερεῶν καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον  
τοῦ τρίτου, οἶδει διὰ τὴν στερεότητα τοῦ γραφομένου στερεοῦ ἀπὸ  
 $ΑΒΓ$ ,  $\pi \cdot ΑΜ \cdot (ΜΝ + \frac{1}{3} ΓΜ - \frac{1}{3} ΓΝ)$ : καὶ ἐπειδὴ  $ΓΝ - ΓΜ = ΜΝ$ ,  
ἡ ἔκφρασις αὕτη ἄγεται εἰς  $\pi \cdot ΑΜ \cdot \frac{2}{3} ΜΝ$  ἢ  $\frac{2}{3} \pi \cdot ΓΠ \cdot ΜΝ$ ,  
τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὰ ἤδη εὐρεθέντα ἐξαγόμενα. σχ. 268.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

### Θεώρημα.

Ἐστῶσαν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ , πολλὰ διαδοχικὰ πλευρὰ κανονικοῦ  
πολυγώνου,  $Ο$  τὸ κέντρον του, καὶ  $ΟΙ$  ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμ-  
μένου κύκλου· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς  $ΑΟΔ$ , ἀπὸ  
τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου  $ΖΗ$  κείμενος, στρέρεται ὁλόγυρα

αὐτῆς, τὸ γραφόμενον στερεὸν θέλει ἔχει μέτρον  $\frac{2}{3} \pi \cdot ΟΙ \cdot ΜΚ$ ,  
ἐνθα  $ΜΚ$  εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ὁποῖον περατοῦται ἀπὸ  
τὰς ἀκρινὰς καθέτους  $ΑΜ$ ,  $ΔΚ$ . σχ. 262.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν, ὅλα τὰ τρί-  
γωνα  $ΑΟΒ$ ,  $ΒΟΓ$ , κ. τ. λ. εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Τώρα, κατὰ  
τὸ πόρισμα τῆς προλαβούσης προτάσεως, τὸ περαγόμενον  
στερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον  $ΑΟΒ$  ἔχει μέτρον  $\frac{2}{3} \pi$ .

—<sup>2</sup>  
 ΟΙ. ΜΝ, τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ' ἔχει μέτρον  
 $\frac{2}{3}$  π. ΟΙ. ΝΗ, καὶ τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον  
 $\frac{2}{3}$  π. ΟΙ. ΠΚ· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τούτων τῶν  
 στερεῶν, ἢ τὸ ὅλον στερεὸν τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὸν πολυγωνι-  
 κὸν τομέα ΑΟΔ, θέλει ἔχει μέτρον  $\frac{2}{3}$  π. ΟΙ. (ΜΝ + ΝΗ +  
 ΠΚ) ἢ  $\frac{2}{3}$  π. ΟΙ. ΜΚ.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

#### Θεώρημα.

Κάθε σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην τὴν χρησι-  
 μέουσαν εἰς αὐτὸν ὡς βάσιν ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος  
 πολυπλασιασθεῖσαν, καὶ ἡ ὅλη σφαῖρα ἔχει μέτρον τὴν ἐπιφανείαν  
 τῆς ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἐστω ΑΒΓ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅστις, μὲ τὴν περιστροφὴν του  
 ὀλόγουρα τῆς ΑΓ, γράρει τὸν σφαιρικὸν τομέα. Οὕσης τῆς γρα-  
 φομένης ἀπὸ ΑΒ ζώνης ἴσης μὲ ΑΔ × περ. ΑΓ ἢ 2π. ΑΓ.  
 ΑΔ (πρό. 12), λέγω ὅτι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς θέλει ἔχει μέτρον  
 ταύτην τὴν ζώνην ἐπὶ  $\frac{1}{3}$  ΑΓ πολυπλασιασθεῖσαν, ἢ  $\frac{2}{3}$  π. ΑΓ.  
 ΑΔ. σγ. 269.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν 1.<sup>ον</sup>, εἰ δυνατόν, ὅτι ἡ ποσότης αὐ-  
 τη  $\frac{1}{3}$  π. ΑΓ. ΑΔ εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου σφαιρικοῦ τομέως,  
 ρερ' εἰπεῖν, τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΕΓΖ ὅμοιον  
 μὲ τὸν ΑΓΒ.

Ἄς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ ἡ μερὶς κανονικοῦ πολυγώνου  
 ΕΜΝΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ συναπαντοῦν τὸ τόξον ΑΒ·  
 ἂς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὅτι ἐν ᾧ στρέφεται ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΕΓΖ,  
 στρέφεται καὶ ὁ πολυγωνικὸς ΕΝΖΓ ὀλόγουρα τῆς ΕΓ. Ἐστω  
 ΓΙ ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, καὶ  
 ἂς καταβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΓ. Τὸ γραφόμενον στε-  
 ρεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει μέτρον  $\frac{2}{3}$  π. ΓΙ. ΕΗ  
 (πρό. 14). Τώρα ΓΙ εἶναι μείζων τῆς ΑΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς,  
 καὶ ΕΗ μείζων τῆς ΑΔ· διότι, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΑΒ, ΕΖ,  
 τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΒΔ, ὄντα ὅμοια, δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΕΗ:  
 ΑΔ::ΖΗ:ΒΔ::ΓΖ:ΓΒ· λοιπὸν ΕΗ > ΑΔ.



Διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους  $\frac{2}{3}$  π. ΓΓ. ΕΗ εἶναι μείζον τοῦ  $\frac{2}{3}$  π. ΓΑ. ΑΔ: ἡ πρώτη ἔκφρασις εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα, ἡ δευτέρα, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΕΓΖ· λοιπὸν τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μείζον γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικόν. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν εἶναι μικρότερον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὡς περιεχόμενον· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 1.<sup>ον</sup> ἡ ζώνη ἢ βάσις σφαιρικοῦ τομέως ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρήῃ μεγαλύτερον σφαιρικόν τομέα.

Λέγω 2.<sup>ον</sup> ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρήῃ μικρότερον σφαιρικόν τομέα. Διότι ἔστω ΓΕΖ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅστις μὲ τὴν περιστροφὴν του παράγει τὸν σφαιρικόν δε-

δομένον τομέα, καὶ ὡς ὑποθεθῇ, εἰ δυνατόν ὅτι  $\frac{2}{3}$  π. ΓΕ. ΕΗ εἶναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΓΒ παραγομένου. Μενοῦσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν

πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει πάντοτε μέτρον  $\frac{2}{3}$  π. ΓΓ. ΕΗ. Ἀλλὰ ΓΓ εἶναι μικρότερα τῆς ΓΕ· λοιπὸν τὸ στερεὸν εἶναι μι-

κρότερον τοῦ  $\frac{2}{3}$  π. ΓΕ. ΕΗ, μέτρου, ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΑΓΒ. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ ΑΓΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν, ὡς περιέχον τὸν σφαιρικὸν τομέα, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ αὐτόν. Λοιπὸν 2.<sup>ον</sup> ἀδύνατον ἡ ζώνη σφαιρικοῦ τομέως πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος νὰ ᾔηται τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως.

Κάθε λοιπὸν σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην, ἣτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος.

Κυκλικὸς τομεὺς ΑΓΒ ἔμπορεῖ νὰ αὐξήσῃ ἕως οὗ νὰ γένηται ἵσος μὲ τὸ ἡμικύκλιον· τότε ὁ γραφόμενος ἀπὸ τὴν περιστροφὴν του σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι ἡ ὅλη σφαῖρα. Ἡ στερεότης· λοιπὸν τῆς σφαίρας ἴσοῦται μὲ τὴν ἐπιφανείαν τῆς ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτίνος τῆς πολυπλασιασθεῖσαν.

**Πόρισμα.** Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ἐπὶ τὰς ἀκτίνας πολυπλασιασθεῖσαι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων. Λοιπὸν αἱ στερεότητες δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων των.

**Σχόλιον.** Ἐστω  $A$  ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, ἡ ἐπιφάνειά της  $2$  θέλει εἶναι  $4\pi A$ , καὶ ἡ στερεότης της  $2$   $4\pi A \times \frac{1}{3} A$ , ἢ  $\frac{4}{3} \pi A^3$ . Ἐὰν κληθῇ  $\Delta$  ἡ διάμετρος, θέλει εἶναι  $A = \frac{1}{2} \Delta$ , καὶ  $A^3 = \frac{1}{8} \Delta^3$ . ἡ στερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ καὶ διὰ  $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} \Delta^3$ , ἢ  $\frac{\pi}{6} \Delta^3$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

#### Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (περιλαμβανομένων τῶν βάσεων του) ὡς 2 πρὸς 3. Αἱ στερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἐστω  $MNPK$  ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας,  $AB\Gamma\Delta$  τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν ἐνταύτῳ περιστραφῶσι τὸ ἡμικύκλιον  $PMK$  καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον  $PA\Delta K$  ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου  $PK$ , τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν εἰς ταύτην περιγεγραμμένον κυλίνδρον· σχ. 270.

Τὸ ὕψος  $AD$  τούτου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον  $PK$ , ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ὡς ἔχουσα διάμετρον τὴν  $AB$  ἴσην μὲ τὴν  $MN$ , ἰσοῦται μὲ τὸν μέγιστον κύκλον· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρό. 4) εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν. Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (πρό. 10)· ὁθεν ἔπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους· ἐὰν προστεθῶσιν αἱ δύο βάσεις ἰσοδυναμοῦσαι μὲ δύο μεγίστους κύκλους, ἡ ὅλη τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἴση μὲ ἑξ μεγίστους κύκλους· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 4 πρὸς 6, ἢ ὡς 2 πρὸς 3. Ἰδοὺ ἀποδεδειγμένον τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου, ὡς παρατηρηθῇ ὅτι ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ μάλιστα τὸν κύκλον καὶ τὸ ὕψος τοῦ μὲ τὴν διάμετρον, ἡ στερεότης τοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸν μάλιστα τὸν κύκλον πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν διάμετρον (πρό. 1). Ἀλλ' ἡ στερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τῆς σφαίρας μάλιστα τοὺς κύκλους πολυπλασιασθέντας ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τῆς ἀκτίνος (πρό. 16), ἡ μὲ εἶνα μάλιστα τὸν κύκλον πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὰ  $\frac{4}{3}$  τῆς ἀκτίνος, ἢ τὰ  $\frac{4}{3}$  τῆς διαμέτρου. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν εἶναι πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον ὡς 2 πρὸς 3, καὶ ἐπομένως αἱ στερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφανείαι των.

**Σχόλιον.** Ἐὰν φαντασθῶμεν πολυέδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἑδραὶ νὰ ἄπτονται τῆς σφαίρας, τὸ πολυέδρον τοῦτο ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς συνιστάμενον ἀπὸ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ὅλαι ἔχουν διὰ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἑδρας τοῦ πολυέδρου. Τώρα εἶναι φανερόν ὅτι ὅλαι αὗται αἱ πυραμίδες θέλουν ἔχει κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, εἰς τὸν ὅστε κάθε πυραμὶς θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἑδραν τοῦ πολυέδρου ἣτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βάσις, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τῆς ἀκτίνος. Τὸ ὅλον λοιπὸν πολυέδρον θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφανείαν τοῦ ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τῆς ἀκτίνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ στερεότητες τῶν εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφανείαι των. Οὕτως ἡ ιδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν διὰ τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι κοινὴ εἰς ἀναρίθμητα ἄλλα σώματα.

Δυνατὸν νὰ σημειωθῇ ἐπίσης ὅτι αἱ ἐπιφανείαι τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περιμέτραι των.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

### Πρόβλημα.

Ὑποθεθέντος ὅτι τὸ κυκλικὸν τμήμα ΒΜΔ στρέφεται ὁλόγυρα μᾶς διαμέτρου ἐκτὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γεννωμένου στερεοῦ. σχ. 271.

Ἀς καταβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΒΕ, ΔΖ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΔ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΒ, ΓΔ.

—2

Τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΒΓΑ =  $\frac{2}{3}$  π. ΓΒ. ΑΕ. (πρό. 15): τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΔΓΑ =





τελοῦντες πᾶσαν ἀναγωγὴν, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν στερεότητα τοῦ τμήματος,

$$\frac{1}{6} \pi Z. E. (3BE + 3AZ + EZ). \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2$$

Ἐκφορὰς ἥτις ἀναλύεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν  $\frac{1}{6} \pi. EZ. (3BE + 3AZ)$ , ἡ  $EZ. (\pi. BE + \pi. AZ)$  εἶναι τὸ ἡμιάρθρῳσμα τῶν βάσεων

πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ δὲ  $\frac{1}{6} \pi. EZ$  παριστάνει τὴν σφαῖραν τῆς ὁποίας  $EZ$  εἶναι ἡ διάμετρος (πρό. 15. σχόλ.): λοιπὸν κάθε τμήμα σφαίρας, κτλ.

**Ἡ ὀρίσμου.** Ἐὰν μία τῶν βάσεων ᾖ μὴδὲν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τμήμα ἀποβαίνει σφαιρικὸν τμήμα μὲ μίαν μόνην βάσιν· λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τμήμα μὲ μίαν μόνην βάσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἡμισὺ τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους, πλεόν ἢ σφαῖρα τῆς ὁποίας τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι ἡ διάμετρος.

### Γενικὸν σχόλιον.

Ἐστω  $A$  ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου,  $Y$  τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι  $\pi A \times Y$  ἢ  $\pi AY$ .

Ἐστω  $A$  ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κώνου,  $Y$  τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι  $\pi A. \frac{1}{3} Y$ , ἢ  $\frac{1}{3} \pi AY$ .

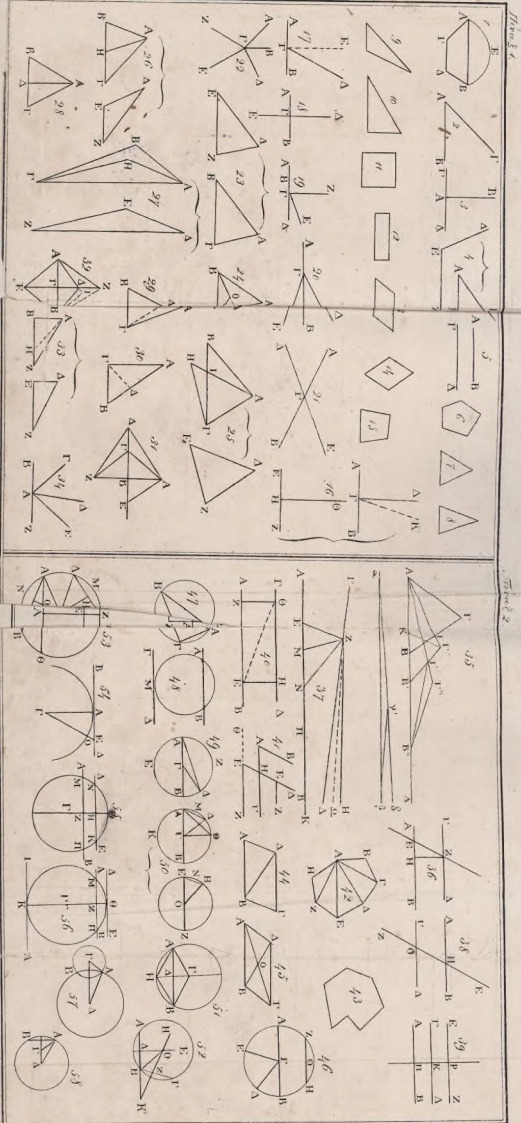
Ἐστωσαν  $A$  καὶ  $B$  αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολοβοῦ κώνου,  $Y$  τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης του θέλει εἶναι  $\frac{1}{3} \pi Y (A + B + AB)$ .

Ἐστω  $A$  ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας· ἡ στερεότης της θέλει εἶναι  $\frac{4}{3} \pi A$ .

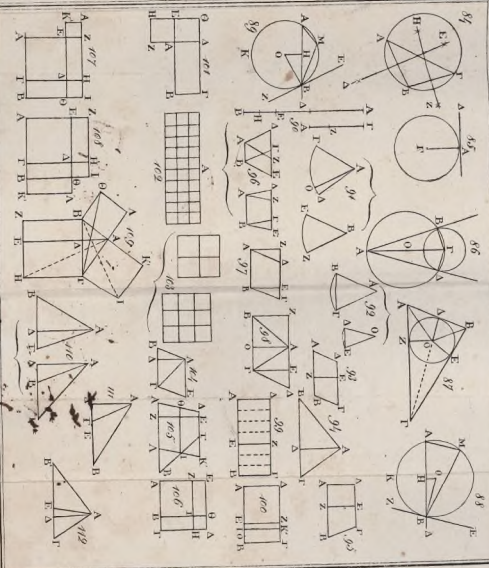
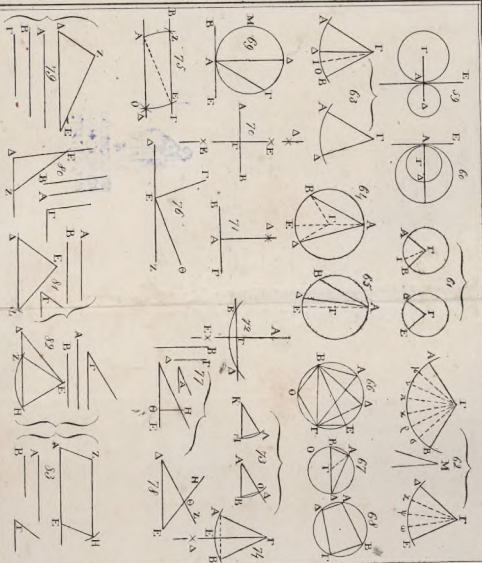
Ἐστω  $A$  ἡ ἀκτίς σφαιρικοῦ τομέως,  $Y$  τὸ ὕψος τῆς ζώνης ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις· ἡ στερεότης του θέλει εἶναι  $\frac{2}{3} \pi AY$ .

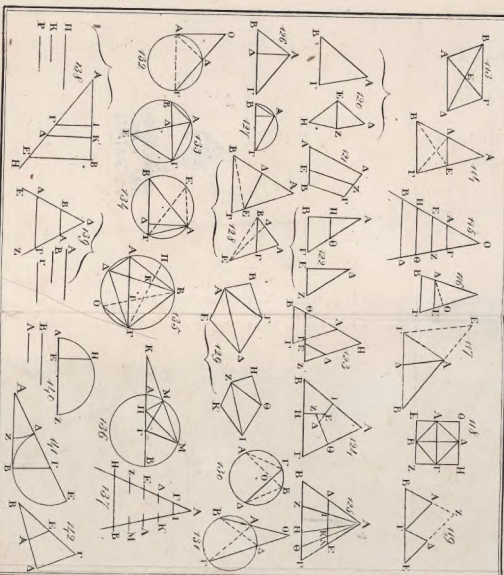
Ἐστωσαν  $\Pi$  καὶ  $K$  αἱ δύο βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος,  $Y$  τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης τούτου τοῦ τμήματος θέλει εἶναι  $\frac{(\Pi + K)}{3} Y + \frac{1}{6} \pi Y$ .

Ἐὰν τὸ σφαιρικὸν τμήμα ἔχῃ μίαν βάσιν  $\Pi$ , ἐπειδὴ ἡ ἄλλη εἶναι μὴδὲν, ἡ στερεότης του θέλει εἶναι  $\frac{1}{3} \Pi Y + \frac{1}{6} \pi Y$ .

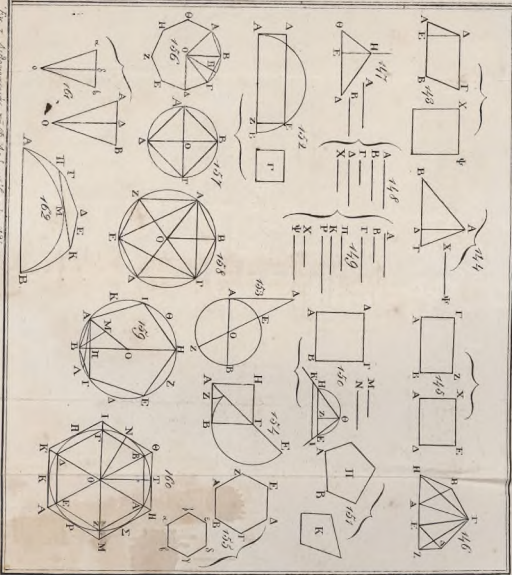




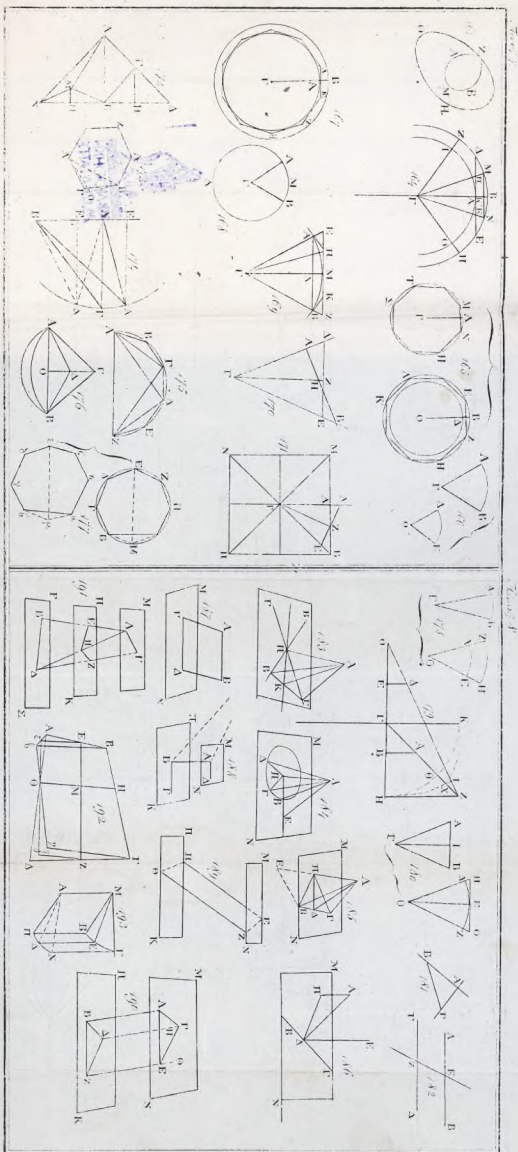




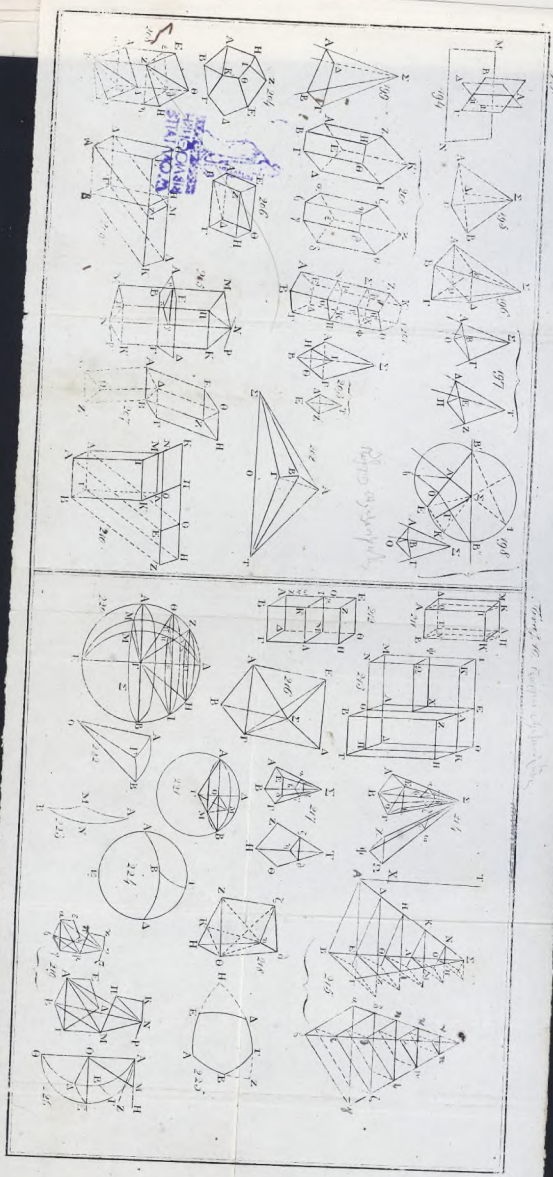
Figuren aus K. H. 101-134

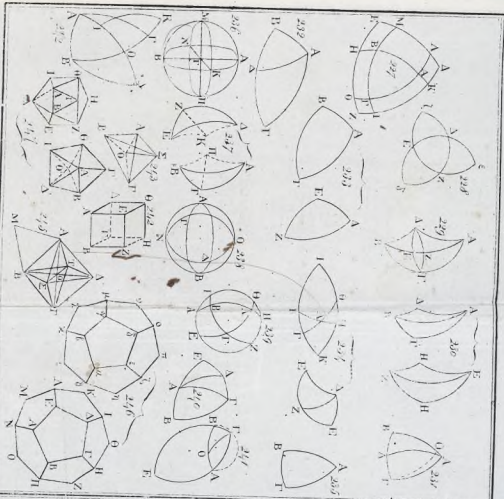


Figuren aus K. H. 135-162

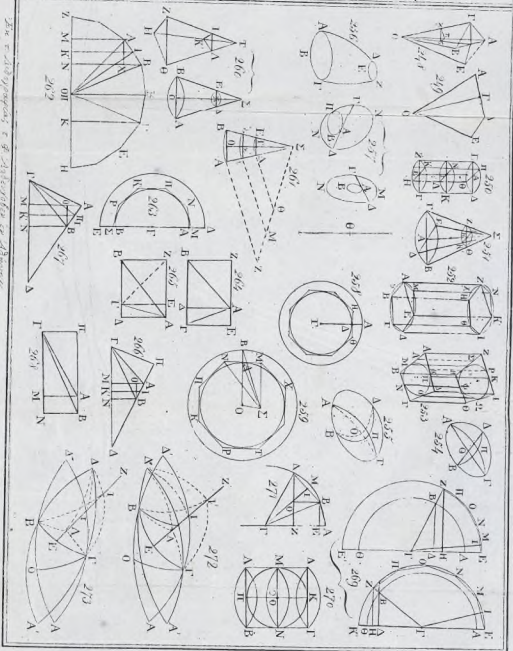








Geometriae libri 1. et 2. diagrammata.



Geometriae libri 1. et 2. diagrammata.







ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
Μ. ΟΑΛΤΑΤΣ

*Juicyms Li Kurons*



BIBLIOTHEKE  
M. QALATZ

