UN

MILLION DE FAITS

AIDE-MÉMOIRE UNIVERSEL

des Sciences, des Arts et des Lettres

PAR

J. Aicard, Desportes, Paul Gervais, Jung, Léon Lalanne

Ludovic Lalanne, A. Le Pileur, C. Martins, C. Vergé

ONZIÈME ÉDITION

PARIS

GARNIER FRÈRES, LIBRAIRES-ÉDITEURS

6, RUE DES SAINTS-PÈRES, ET PALAIS-ROYAL, 215.

UN

MILLION DE FAITS

UN

MILLION DE FAITS

AIDE-MÉMOIRE UNIVERSEL

DES SCIENCES, DES ARTS ET DES LETTRES

PAR

J. Aicard, Desportes, Paul Gervais, Léon Lalanne, Ludovic Lalanne,
A. Le Pileur, Ch. Martins, Ch. Vergé et Young

DOUZIÈME EDITION

REVUE ET CORRIGÉE

LIBRAIRIE FRANÇAISE
RUE VENIZELOS
SALONIQUE

PARIS
GARNIER FRÈRES, LIBRAIRES
6, RUE DES SAINTS-PÈRES

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION

Il y a quelques années, on publia pour la première fois en Angleterre un ouvrage intitulé : *A million of Facts, of correct data, and elementary constants, in the entire circle of the sciences, and on all subjects of speculation and practice.*

Ce livre eut un succès brillant, que son titre seul rend facile à comprendre. Quel est l'homme, en effet, qui ne trouverait quelque avantage moral ou matériel à disposer d'un répertoire dans lequel serait enregistré méthodiquement tout ce qui est exactement connu, tout ce qu'il peut être utile de savoir sur un sujet déterminé?

Du reste, l'idée de réunir avec ordre et de concentrer dans un petit espace tous les faits, ou au moins certains ordres de faits définitivement acquis à l'intelligence humaine, n'était pas nouvelle. Dès le commencement du seizième siècle, le célèbre Erasme la mettait à exécution dans ses *Chiliades adagiorum*, dont le titre est traduit à peu près littéralement par celui de MILLION DE FAITS. Mais l'œuvre d'Erasme était presque entièrement littéraire et philosophique ; et quoiqu'elle ne soit peut-être pas connue et appréciée aujourd'hui autant qu'elle le mérite, elle ne pourrait suffire aux exigences d'une époque où les sciences et leurs applications ont pris un si prodigieux développement.

De nos jours, un savant anglais, M. Babbage, a émis sur le même sujet un vœu qui a reçu un commencement d'exécution par la publication du *Recueil de Tables* de feu Génieys. Nous empruntons à la préface mise en tête de ce recueil le passage suivant d'un rapport que M. Babbage faisait en 1833 à la Société britannique à Cambridge: « Parmi les ouvrages destinés à l'avancement des sciences j'en vais « signaler un dont la nécessité me paraît évidente, et dont la publi-« cation serait éminemment utile au monde savant. Son titre serait : « *Les Constantes de la nature et de l'art.* Il devrait contenir tous « les faits qui peuvent être représentés par des nombres dans toutes « les branches des arts et des sciences. » Pour donner une idée plus complète de ce projet d'ouvrage, M. Babbage énumérait et classait ces divers faits, et il indiquait sommairement les sources d'où la plupart des résultats pourraient être tirés.

Quoi qu'il en soit des tentatives de ce genre qui ont pu être faites dans le domaine de la littérature ou des sciences, nous reconnaissons que c'est au *Million of Facts* que nous devons l'idée première de notre MILLION DE FAITS. Mais c'est, avec le titre et la disposition typographique, tout ce que nous avons emprunté à l'ouvrage anglais. Nous rendons pleine justice aux intentions qui ont présidé à la rédaction de cet ouvrage ; nous y avons vu avec plaisir plus d'un témoignage de sympathie envers ceux de nos compatriotes qui ont servi la cause du progrès par leurs travaux intellectuels ou par les combats qu'ils ont soutenus. Néanmoins, nous avons bientôt reconnu que le *Million of Facts* ne pouvait contribuer en rien à faciliter notre tâche telle que nous l'avions comprise. Le manque de méthode, l'omission de certaines sciences importantes, des erreurs nombreuses dans les faits, des hérésies incroyables dans les théories *, font du livre anglais une œuvre trop imparfaite pour être jamais utile aux personnes qui veulent ne puiser qu'à des sources entièrement dignes de confiance. A peine la curiosité banale de l'ignorant peut-elle être satisfaite par une accumulation indigeste de faits dont un assez grand nombre sont au moins douteux.

Le but que nous nous sommes proposé est d'un ordre plus élevé. Tout en mettant notre livre à la portée des esprits qui, par suite de circonstances diverses, ne possèdent que des connaissances peu étendues, nous avons voulu qu'il pût être utilement consulté par des personnes d'une instruction solide. Les *faits* y apparaissent dépouillés des raisonnements qui trop souvent les rendent plus difficiles à reconnaître à des esprits peu familiarisés avec les études sérieuses; cependant ils sont présentés dans leur ordre logique, et sont réunis en assez grand nombre pour justifier aux yeux mêmes des gens instruits, le titre d'AIDE-MÉMOIRE UNIVERSEL, que nous avons joint à celui de MILLION DE FAITS.

Nous avons donc cherché à exposer sous leur forme la plus concise tous les résultats de quelque importance qui sont définitivement acquis à l'esprit humain. Mais, tout en excluant les développements théoriques incompatibles avec la nature de notre livre, nous n'avons pas prétendu introduire dans la science un matérialisme grossier dont l'impuissance ne saurait être contestée aujourd'hui. Il n'est donc pas impossible que dans le groupement des faits, que dans l'énoncé même de quelques propositions, le lecteur trouve les traces de nos opinions et de l'esprit qui a présidé à la rédaction de l'ouvrage. Il n'en peut résulter aucun inconvénient, puisque aucun développement n'a été donné à l'appui d'une théorie pure, et que les faits ont été scrupuleusement conservés tels que nous les connaissons, sans que nous ayons jamais cherché à les altérer pour les faire cadrer avec des hypothèses.

On ne rencontrera d'ailleurs dans notre livre aucun passage de nature à porter la moindre atteinte aux lois de la morale la plus sévère. On pourra donc le mettre entre les mains des jeunes gens sans craindre qu'ils y puisent autre chose que l'amour de l'étude et

* C'est ainsi que l'attraction universelle, dont la découverte est le titre de gloire le plus éclatant du grand Newton, est traitée comme une hypothèse gratuite, que l'auteur anglais a cherché à combattre toutes les fois que l'occasion s'en est présentée.

le désir de s'associer un jour aux laborieuses recherches qui contribuent à agrandir le domaine de l'intelligence humaine.

L'ordre dans lequel nous avons rangé les diverses branches des connaissances humaines ne diffère pas essentiellement de celui que l'illustre Ampère a proposé dans sa *Philosophie des Sciences*. Seulement, nous les avons groupées d'après le rôle qu'elles jouent sous le point de vue de la constitution sociale. Entrons dans quelques éclaircissements à ce sujet.

Les sciences mathématiques pures et appliquées et les sciences physiques forment un premier groupe, où l'on ne considère les faits que sous le point de vue abstrait, ou dans leurs applications à l'homme envisagé individuellement. Telles sont : l'*arithmétique*, l'*algèbre*, la *géométrie*, le *calcul infinitésimal*, le *calcul des probabilités*, la *mécanique*, l'*astronomie*, la *météorologie*, et la *physique du globe*, la *physique générale*, la *chimie* et la *géologie*.

Les sciences naturelles et médicales constituent un second groupe, de nature analogue au premier en ce qu'elles sont exposées indépendamment de leurs applications à l'état social. Ce sont : la *botanique*, l'*anatomie* et la *physiologie de l'homme*, l'*hygiène*, la *zoologie*. Leur caractère essentiel consiste en ce qu'elles traitent d'objets de nature organique. Cependant, la géologie, qui peut, à certains égards, être considérée comme faisant partie de l'histoire naturelle, établit une sorte de transition entre les sciences du premier et celles du second groupe.

Si l'on cherche maintenant à réunir les connaissances spécialement applicables à l'existence matérielle de l'espèce humaine réunie en corps de nation, on rencontre d'abord l'*arithmétique sociale*, dont le but est de déterminer les éléments numériques d'une nature quelconque qui peuvent intéresser l'homme dans l'état de société. Viennent ensuite l'*agriculture*, le *technologie*, le *commerce* et l'*art militaire*, par lesquels les nations se nourrissent, vivent, s'enrichissent et se développent ou se défendent. Pour arriver à leur perfection idéale, les sciences de ce groupe doivent tendre à n'être qu'une application raisonnée et immédiate des sciences qui constituent les deux premiers. Les progrès que la technologie a faits depuis la fin du siècle dernier, concurremment avec la mécanique et la chimie, donnent une idée très-nette de cette tendance remarquable. Nous devons faire observer aussi que l'arithmétique sociale est aux autres sciences du même groupe ce que l'arithmétique ordinaire est aux sciences qui la suivent, considérées sous un point de vue abstrait.

Les trois groupes que nous venons d'énumérer constituent l'ensemble des connaissances relatives aux faits matériels du monde, et qu'Ampère a appelées *cosmologiques*. Mais les faits de l'ordre moral n'ont pas moins d'importance et ne doivent pas occuper moins de place dans un résumé encyclopédique.

Les sciences *noologiques* ou qui ont rapport aux faits de l'ordre moral, comme Ampère les nomme, peuvent aussi être partagées en trois groupes qui correspondent à ceux des sciences cosmologiques. Nous rangeons dans le premier la *philosophie*, la *littérature*, les *beaux-arts*. Le second comprend la *paléographie*, la *numisma-*

tique, la *chronologie* et l'*histoire*, la *philologie*, la *géographie*, la *biographie* et la *mythologie*. Le troisième groupe enfin ne renferme que l'*éducation* et la *législation*. Il peut régner quelque incertitude sur le classement des diverses branches des connaissances noologiques. Mais on nesaurait méconnaître dans le premier groupe le caractère régulateur et fondamental, et dans le dernier le caractère d'application à l'ordre social, qui existent dans les groupes correspondants des sciences cosmologiques. C'est ainsi que Joseph de Maistre a envisagé le problème général de la *législation*, la science dont nous ne parlons qu'après toutes les autres, lorsqu'il l'a posé en ces termes : « Étant données, la population, les mœurs, la religion, « la situation géographique, les relations politiques, les richesses, les « bonnes et les mauvaises qualités d'une certaine nation trouver les « lois qui lui conviennent. »

Le temps et le soin qu'exigeait la composition de notre livre ayant nécessité l'impression simultanée de plusieurs feuilles, nous avons dû réunir dans un *supplément*, placé à la fin, un nombre considérable de documents de toute espèce qu'il n'avait pas été possible d'intercaler dans le corps même du texte.

Chacun des petits traités spéciaux dont se compose le MILLION DE FAITS est terminé par une esquisse historique et bibliographique, où l'on donne des indications souvent peu connues sur des découvertes importantes, et des conseils sur les meilleurs ouvrages à étudier.

Les soins pris pour la rédaction n'ont pas fait négliger la partie matérielle de l'ouvrage. La beauté du papier, la perfection du tirage, la netteté du caractère, semblent ne rien laisser à désirer; plus, 300 gravures sur bois illustrent notre texte, tandis que le *Million of Facts* n'en renferme pas une seule.

Réduit à un seul volume très-portatif, notre AIDE-MÉMOIRE UNIVESEL équivaut matériellement à une véritable encyclopédie. Pour justifier cette assertion, il suffit de faire observer que nos lignes renferment autant de lettres que celles des volumes in-8° ordinaires. Chacune de nos 24 feuilles à 72 colonnes de 79 lignes équivaut donc à 5688 lignes ou à un demi-volume in-8° de 379 pages.

Afin de faciliter les recherches de tout genre, nous avons donné une *table analytique des matières*, une *table indicative des figures*, et un *index alphabétique* qui renvoie au corps de l'ouvrage pour environ huit mille mots, à plus de vingt mille passages différents.

Nous ne terminerons pas sans exprimer ici notre reconnaissance aux nombreux auteurs français et étrangers auxquels nous avons fait des emprunts de nature à enrichir notre livre. Nous avons cherché à nous acquitter envers eux en les nommant lorsque l'occasion s'en est présentée; et nos citations sont assez multipliées pour que l'on ne nous impute pas à mal les omissions involontaires qui ont pu nous échapper.

AVERTISSEMENT

DE LA SEPTIÈME ÉDITION.

Le succès a dépassé toutes nos espérances. Les témoignages les plus flatteurs et les plus encourageants sont venus, de toutes parts, récompenser les auteurs et les éditeurs du MILLION DE FAITS de la conscience et des soins qu'ils avaient apportés à la rédaction et à la publication de cet ouvrage. Les hommes les plus haut placés dans la science ont applaudi à la réalisation d'une idée que plusieurs d'entre eux avaient conçue de leur côté, et ils ont bien voulu considérer notre AIDE-MÉMOIRE UNIVERSEL comme digne d'être consulté par eux-mêmes dans une foule de circonstances. Mais ce qui n'a pas moins d'importance à nos yeux, c'est que notre livre a été goûté par les gens du monde et par les travailleurs de tout âge et de toute profession, aussi bien que par les juges les plus éclairés. Nous ne voulons pas d'autre preuve de ce fait que la promptitude avec laquelle ont été épuisées nos six premières éditions, tirées chacune à un nombre considérable d'exemplaires.

Nous sommes donc en droit de croire que nous avons atteint le double but que nous nous étions proposé, de n'être pas moins utiles aux gens qui savent qu'à ceux qui veulent apprendre, et que notre livre est destiné à l'un de ces grands et populaires succès qui se propagent à travers plusieurs générations et que le temps ne fait que confirmer.

Cette septième édition, tirée sur les mêmes clichés que la première, offre sur celle-ci plusieurs améliorations notables. La pagination a été modifiée de manière à offrir une continuité parfaite ; l'*Index alphabétique* a été recomposé en caractères neufs, et les renvois y ont été marqués, aussi bien que dans la *Table analytique des matières*, d'après la nouvelle pagination. On a fait disparaître quelques erreurs qui s'étaient glissées dans la première et même dans la seconde édition, de sorte que celle-ci paraît laisser peu de chose à désirer sous le rapport de la correction et de l'exactitude.

Nous accueillerons du reste avec reconnaissance les observations de tout genre que les personnes qui s'intéressent au progrès des lumières et à la diffusion des connaissances utiles voudront bien transmettre *franco* aux éditeurs, MM. Garnier frères, et nous en ferons usage au profit des éditions à venir.

TABLE INDICATIVE DES FIGURES.

N. B. Le nombre à gauche de l'explication de chaque sujet est le même que celui que porte la figure dans le livre ; les nombres à droite indiquent les numéros des colonnes.

FIN DE LA TABLE DES FIGURES.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

I. ARITHMÉTIQUE.

II. ALGÈBRE.

III. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

IV. CALCUL INFINITÉSIMAL.

VIII. MÉTÉOROLOGIE ET PHYSIQUE DU GLOBE.

IX. PHYSIQUE.

XIII. ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE DE L'HOMME.

XIV. HYGIÈNE ET MÉDECINE DES ACCIDENTS.

XV. ZOOLOGIE.

XVIII. TECHNOLOGIE.

XXIII. POÉSIE ET BEAUX-ARTS.

XXIV. PALÉOGRAPHIE.

XXV. NUMISMATIQUE.

XXVI. CHRONOLOGIE ET HISTOIRE.

XXVII. PHILOLOGIE.

XXXII. LÉGISLATION.

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

Colonnes.	Lignes en descendant.	Lignes en montant.	
28	»	11	*Après* 10 s. *ajoutez :* à diviser.
30	»	25	*Après les mots :* rang impair, *ajoutez :* augmentée de 11, de 22, de 38, etc., s'il est nécessaire, pour que la soustraction soit possible.
46	6	»	*Ajoutez :* la raison de la progression géométrique est ce que l'on appelle la *base* du *système* de logarithmes.
151	5	»	Ce solide peut — *lisez :* ce solide, dans le cas de la figure 83, peut.
163	26	»	*Après :* qu'on mène à la courbe, *ajoutez :* par les points où cette perpendiculaire la coupe.
228	»	1	*Ajoutez :* voyez aussi l'*aperçu sur le développement des méthodes en géométrie*, par M. Chasles.
302	35	»	*Après le mot* Dhavalagiri, *ajoutez :* cependant Gruithuisen et d'autres observateurs ont pensé qu'il y avait beaucoup à rabattre de ce résultat extraordinaire.
464	»	32	Voyez à ce sujet les travaux remarquables de M. M. L. et A. Bravais, insérés dans les *Annales des Sciences naturelles*, 1838.
531	»	8	*Ajoutez :* Soif. Cette sensation peut être produite par deux causes différentes : déperdition du liquide de l'économie par la transpiration, par la saignée; surexcitation de la muqueuse de l'estomac, soit pathologique, soit due à l'ingestion des aliments et surtout des substances très salées ou âcres. La soif devient plus promptement que la faim un besoin impérieux, et se supporte en général moins longtemps, toutes choses égales d'ailleurs.
355	»	35	*Après* syphilis, *ajoutez :* la morve, le charbon.
1268	»	34	*Après* 1341, Jean Ier Paléologue, *ajoutez :* détrôné en 1347, rétabli en 1355, mort en 1391.
Ibid.	»	33	*Après* 1341, Jean Cantacuzène, *ajoutez :* associé en 1341, abdique en 1355.
Ibid.	»	32	*Après* 1354, Mathieu, *ajoutez :* associé en 1354, abdique en 1356.
1276	4	»	*Intercalez* après cette ligne les deux suivantes : 1322. Charles IV, le Bel. Blanche de Bourgogne.
1272	4	»	*Après* yttrium, *ajoutez :* thorinium.

FIN DES CORRECTIONS ET ADDITIONS

Corbeil. Typ. et stér. B. Renaudet.

UN MILLION DE FAITS.

I. ARITHMÉTIQUE.

Préliminaires. — On appelle *quantité* ou *grandeur* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Les longueurs, les superficies, les volumes des corps, le temps, etc., sont des quantités.

Les propriétés des grandeurs sont l'objet des *mathématiques*.

Pour comparer entre elles des quantités de même nature, on en prend une qui sert de mesure commune à laquelle on rapporte toutes les autres, et qui porte le nom d'*unité*. Le résultat de chacune de ces comparaisons est un *nombre ; entier* si l'unité est contenue exactement une ou plusieurs fois dans la quantité qu'elle sert à évaluer; *fractionnaire* dans le cas contraire.

L'Arithmétique est la science des nombres.

§ 1. *Des divers systèmes de numération.*

Numération ordinaire. — La *numération* a pour but d'exprimer tous les nombres par peu de mots différents, ce qui constitue la *numération parlée* : et de les représenter par peu de caractères distincts, ce qui est l'objet de la *numération écrite*.

Dans notre système de numération, dix unités d'un ordre quelconque en valent une de l'ordre immédiatement supérieur : ainsi dix unités simples valent une dizaine, dix dizaines une centaine, dix centaines un mille, et ainsi de suite.

Il est à remarquer qu'à partir des *mille* on n'a plus donné des noms que de trois ordres en trois ordres, savoir : *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, *septillions*, *octillions*, *nonillions*, etc., et que l'on compte par unités, dizaines et centaines de millions, de billions, etc., comme par unités, dizaines et centaines simples.

Du reste on n'a besoin, que très-rarement, d'avoir recours à des nombres plus grands que les billions. Ainsi, en prenant pour unité l'épaisseur d'un cheveu supposée égale à la vingt-cinquième partie d'un millimètre, on trouve que le tour entier du globe terrestre serait exprimé par une seule unité de trillion.

L'usage a introduit des noms dont on aurait pu se passer, à la rigueur, dans la numération parlée. Ainsi on dit : *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*, pour exprimer successivement les neuf dizaines. L'analogie combinée avec les étymologies latines aurait exigé que l'on dît : *unante*, *duante*, *trente*..., *septante*, *octante*, *nonante*. Les trois derniers mots sont usités dans le midi de la France.

L'usage a aussi fait substituer les mots tirés du latin *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*, aux suivants : *dix-un*, *dix-deux*..., *dix-six*.

Notre système de numération écrite nous a été enseigné par les Arabes, qui l'avaient emprunté eux-mêmes à l'Inde, cet antique berceau des connaissances humaines. Ce système est fondé 1° sur l'invention des neuf caractères ou *chiffres*.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

qui représentent respectivement les neuf premiers nombres; 2° sur la convention qu'un chiffre placé immédiatement à la gauche d'un autre marque des unités dix fois plus fortes; 3° sur l'invention du caractère *zéro* 0, qui n'a par lui-même aucune valeur, mais qui sert à indiquer la place des différents ordres d'unités qui pourraient manquer, et à conserver ainsi aux autres chiffres leurs véritables valeurs de position.

La règle pour écrire un nombre énoncé consiste à écrire séparément, à partir de la gauche, chacune des tranches de trois chiffres, en remplaçant par des zéros les ordres d'unités qui viennent à manquer.

Pour énoncer un nombre écrit, il faut le partager en tranches de trois chiffres, en allant de la droite vers la gauche, la dernière de ce côté pouvant avoir moins de trois chiffres ; alors en commençant par la gauche on énoncera séparément chacune des tranches, en lui donnant le nom de l'unité principale qu'elle renferme.

Numération duodécimale. Il est clair qu'on aurait pu remplacer, par toute autre convention analogue, la convention fondamentale que *dix* unités d'un ordre quelconque en valent une de l'ordre immédiatement supérieur. C'est ainsi que l'on comptait autrefois *douze points* dans une *ligne*, *douze* lignes dans un *pouce*, *douze* pouces dans un pied. Le système *décimal* de numération n'a donc aucun caractère absolu de supériorité sur les autres. Au contraire, le système *duodécimal* aurait offert des avantages incontestables, parce que la *base* douze contenant exactement les nombres 2, 3, 4, 6, il en serait résulté beaucoup de facilité pour tous les calculs. Cependant tous les peuples civilisés paraissent avoir été unanimes sur le choix du système décimal; et l'on a dit avec raison que le nombre des doigts des mains avait été l'origine de ce système. Mais un peu d'attention suffira pour que l'on se range à l'opinion de Charles Fourier (l'auteur du *Traité d'association domestique agricole*), savoir que *nos mains sont positivement et exclusivement conformées pour la numération par douze*.

En effet, il ne suffit pas de dire : nous avons dix doigts ! Il faut observer que nous avons à chaque main *quatre* doigts composés chacun de *trois* articulations ou phalanges, et ensuite un cinquième doigt qui est *hors ligne*, doigt *opposé*, doigt pivotal, le pouce, enfin, destiné aux fonctions de *compteur* dans le calcul sur les mains. Chacune de nos mains est donc faite de telle sorte que nous pouvons y marquer très-distinctement les douze premiers nombres, ainsi que le représente la figure. Et si nous prenons l'une pour compter les unités, l'autre pourra servir absolument de la même manière pour les *douzaines*, de sorte que nous pouvons compter sur nos mains jusqu'à *douze fois douze* ou même jusqu'à *treize fois douze*, nombre que nous appelons *cent cinquante-six* dans le système décimal. La position des pouces dans les deux mains de la figure indique *dix douzaines* et *douze unités*, c'est-à-dire le nombre *cent trente-deux* du système décimal.

« La nature n'était donc pas, en cette circonstance, un mauvais guide. Ici, comme » partout ailleurs, elle a disposé les choses » pour le mieux; et si les nations ont adopté » un système de numération relativement défectueux, c'est précisément parce qu'elles » ont mal obéi aux indications de la nature; » c'est parce qu'elles ont mal usé de ses dons! » Et cela, j'ose le dire, est arrivé aux nations » d'autres fois encore, et pour des choses de » plus haute importance que le choix d'une » échelle arithmétique. » (Extrait de l'article *Arithmétique* rédigé par M. Abel Transon, dans l'Encyclopédie nouvelle de MM. P. Leroux et J. Reynaud.)

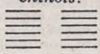
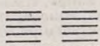
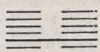
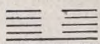
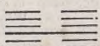
Système binaire. — Parmi les divers systèmes possibles de numération, le plus singulier est sans contredit celui auquel on peut donner le nom de *binaire*, parce qu'il n'exige que l'emploi des deux caractères 0 et 1 pour représenter tous les nombres : chaque chiffre placé à la gauche d'un autre marquant des unités deux fois plus fortes. Ainsi les nombres que nous désignons ordinairement par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.

seraient désignés respectivement par

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, etc

L'arithmétique binaire donne l'explication d'un symbole chinois portant le nom de *Je-kim* ou *Jeking (livre des mutations)*, et que l'on attribue à Fohi, le plus ancien législateur de la nation chinoise. Ce symbole est composé de 64 petites figures formées chacune de 6 lignes horizontales superposées, les unes entières, les autres brisées par le milieu. Il avait fait le désespoir des lettrés chinois et des savants européens, qui n'avaient pu parvenir à l'expliquer d'une manière satisfaisante, lorsque l'illustre Leibnitz, comparant les divers caractères du *Je-kim* à la suite des nombres écrits dans le système binaire, reconnut que cette arithmétique pouvait servir à interpréter l'énigme, et que le *Je-kim* n'était autre chose que la suite des 64 premiers nombres écrits dans le système de numération qui a pour base 2, mais intervertis de leur ordre naturel. En effet, si on représente l'unité par un trait horizontal simple ————, et le zéro par un trait brisé —— ——; si de plus on convient d'écrire les unités des divers ordres non plus de droite à gauche, mais bien de bas en haut, comme d'ailleurs les zéros placés à gauche d'un nombre n'en changent pas la valeur, on trouvera que les caractères chinois composés de 6 lignes horizontales et représentés ci-dessous peuvent être interprétés de la manière suivante.

Caractères chinois.	*Traduction dans le système binaire*	*Valeur sous forme ordinaire.*
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4

Et ainsi de suite.

Nous donnons ci-après le tableau des 64 figures du *Je-kim* de Fo-hi. Au-dessous de chacun des caractères chinois, on voit sa traduction dans le système binaire, tel que nous l'écririons, et à côté la valeur du symbole en chiffres ordinaires.

Leibnitz voyait encore dans cette énigme qu'il avait si heureusement déchiffrée, une image de la création tirée du néant par la volonté de Dieu, de même que, disait-il, tous les nombres sont engendrés, dans le système

TABLEAU DES SOIXANTE-QUATRE FIGURES

Composant le *Je-Kim* ou Livre des Mutations, attribué à l'empereur chinois Fo-hi et expliqué par Leibnitz au moyen de l'arithmétique binaire.

63	111111	0	000000	17	010001	34	100010
23	010111	58	111010	2	000010	16	010000
55	110111	59	111011	7	000111	56	111000
61	111101	47	101111	4	000100	8	001000
25	011001	38	100110	3	000011	48	110000
41	101001	37	100101	32	100000	1	000001
57	111001	39	100111	33	100001	30	011110
18	010010	45	101101	28	011100	14	001110
60	111100	15	001111	40	101000	5	000101
53	110101	43	101011	20	010100	10	001010
35	100011	49	110001	31	011111	62	111110
24	011000	6	000110	26	011010	22	010110
29	011101	46	101110	9	001001	36	100100
52	110100	11	001011	13	001101	44	101100
54	110110	27	011011	50	110010	19	010011
51	110011	12	001100	21	010101	42	101010

binaire, par le zéro et l'unité. Cette idée lui plut tellement, qu'il engagea le P. Bouvet, missionnaire en Chine, à la développer devant l'empereur régnant, pour le convertir au christianisme. Nous ne prétendons aucunement justifier cette application, de mauvais goût, de la science aux mystères religieux. Nous la citons comme document curieux de l'histoire de l'arithmétique binaire.

Le système binaire démontre, à première vue, une propriété fort remarquable des nombres, et qui consiste en ce que l'on peut faire toutes les pesées possibles qui n'exigent pas de poids fractionnaires, avec la série des poids représentés par les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc... dont chacun est double du précédent. Ainsi, avec 1, 2 et 4, on forme le poids 3 égal à 1 plus 2; 5 égal à 1 plus 4; 6 égal à 2 plus 4; 7 égal à 1 plus 2 plus 4 : et on pèse ainsi jusqu'à 7, ou 8 moins 1. De même avec tous les poids ci-dessus indiqués, jusqu'à 128, on pèserait jusqu'à 255, ou 256 diminué de 1.

Les nombres de la progression triple 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, etc., ont une propriété analogue, qui consiste en ce qu'en les ajoutant ou les retranchant d'une certaine manière, on forme tous les nombres entiers possibles. Ainsi, avec 1, 3, 9, on formera 2 égal à 3 moins 1; 4 égal à 3 plus 1; 5 égal à 9 diminué de 3 et de 1; 6 égal à 9 diminué de 3; 7 égal à 9 augmenté de 1 et diminué de 3; 8 égal à 9 diminué de 1; 10 égal à 9 augmenté de 1; 11 égal à 9 augmenté de 3 et diminué de 1; 12 égal à 9 plus 3; 13 égal à 9 plus 3 plus 1; on va donc ainsi jusqu'à 13 moitié de 26. Avec les nombres 1, 3, 9, 27, 81, 243, on irait ainsi jusqu'à 364, moitié de 728.

Systèmes positivo-négatifs. Cette propriété remarquable des nombres de la progression triple se démontre très-simplement au moyen d'un système de numération écrite, où les chiffres pourront indiquer des quantités à retrancher (ou *négatives*), aussi bien que des quantités à ajouter (ou *positives*). Ainsi, en convenant qu'un petit trait placé au-dessus d'un chiffre $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, marque que le nombre exprimé par ce chiffre avec sa valeur de position doit être retranché, on peut écrire tous les nombres du système décimal avec les 5 premiers chiffres significatifs 1, 2, 3, 4, 5 et le caractère 0. 6 serait exprimé par $1\bar{4}$ (10 moins 4) : 7 par $1\bar{3}$ (10 moins 3); 8 par $1\bar{2}$ (10 moins 2) : 9 par $1\bar{1}$ (10 moins 1). En appliquant cette considération au système de numération ternaire où chaque chiffre placé à la gauche d'un autre marque des collections 3 fois plus fortes, on arrive à écrire tous les nombres avec les caractères 1, $\bar{1}$ et 0 : et les chiffres 1 et $\bar{1}$ ne pourront avoir, dans ce système, d'autres valeurs que celles d'un des nombres de la progression triple : 1, 3, 9, 27, 81, etc.

Ainsi les nombres naturels

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

seront représentés par les signes

$1,\ 1\bar{1},\ 10,\ 11,\ 1\bar{1}\bar{1},\ 1\bar{1}0,\ 1\bar{1}1,\ 10\bar{1},\ 100,\ 101$

ce qui revient aux identités établies plus haut. — On écrira ces identités d'une manière abrégée en adoptant le signe + qui se prononce *plus*, le signe — qui se prononce *moins*, et le signe = *égale*, pour représenter l'égalité de deux quantités. Ces identités sont.

$$
\begin{array}{ll}
1 = 1 & 6 = 9 - 3 \\
2 = 3 - 1 & 7 = 9 - 3 + 1 \\
3 = 3 & 8 = 9 - 1 \\
4 = 3 + 1 & 9 = 9 \\
5 = 9 - 3 - 1 & 10 = 9 + 1
\end{array}
$$

Quelques commerçants connaissent et utilisent pour la pesée des corps cette propriété remarquable du système de progression ternaire, et par une répartition convenable des poids entre les deux plateaux d'une balance, ils parviennent à évaluer, avec le moindre nombre possible de poids différents, les masses qui peuvent être exprimées en nombres entiers.

§ 2. *Des quatre règles fondamentales de l'arithmétique.*

L'Addition est une opération qui a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul, lequel est la *somme* ou le *total* des autres.

Pour effectuer cette opération, on place les uns sous les autres les nombres à ajouter, de manière que leurs unités de même ordre se correspondent et soient dans une même colonne verticale; puis, commençant par la colonne des unités les plus simples, et passant successivement aux colonnes des ordres plus élevés, on fait la somme des unités contenues dans chaque colonne, et on pose le chiffre qui exprime cette somme au-dessous de la colonne qui l'a fournie, en ayant soin de retenir pour la colonne suivante les nombres qui indiquent des unités supérieures à celles de la colonne que l'on considère.

L'exemple ci à côté suffit pour cette règle si simple.

7856	Nombres
4972	à
3547	ajouter.
6451	
22826	Somme ou total.

Le signe + est le signe de l'addition. On posera donc 7856+4972+3547+6451=22826

La soustraction est une opération qui a pour but de trouver l'*excès*, le *reste* ou la *différence* que l'on obtient en retranchant un nombre d'un autre.

Lorsque toutes les unités du nombre à soustraire sont moindres que les unités de même ordre des nombres dont on veut soustraire, il n'y a aucune difficulté. Comme — (*moins*) est le signe de la soustraction, on aura 7 — 4 = 3, 19 — 8 = 11, 321 — 120 = 201.

L'opération se disposera ordinairement de la manière suivante :

846349	*Nombre dont on veut soustraire*
231227	*Nombre à soustraire.*
615122	*Reste, excès ou différence.*

Lorsqu'un des chiffres du nombre supérieur se trouve plus petit que le chiffre correspondant du nombre inférieur, on augmente le premier de dix unités, et on diminue de 1 le premier chiffre significatif à gauche dans le nombre supérieur, en ayant soin de regarder comme des 9 tous les zéros intermédiaires.

Exemples :	782539	730004
	247153	214538
	535386	515466

Lorsque l'on a à soustraire à la fois plusieurs nombres de la somme de plusieurs autres, on peut opérer sans faire les additions partielles, en se fondant sur ce principe évident que le reste d'une soustraction ne change pas lorsque l'on ajoute ou que l'on retranche la même quantité aux deux nombres que l'on soustrait l'un de l'autre.

L'exemple suivant fera comprendre cette manière d'opérer.

256243 84564 3252 26848	A. nombres à ajouter.
102942 3654 2308	B. nombres à retrancher.
262003	Reste.

La somme des chiffres de la première colonne à droite de B est 14, celle du chiffre de la colonne de même rang A est 17; au lieu de retrancher 14 de 17, on peut ajouter 6 à 17 et retrancher 20 du résultat, ou 2 de la colonne suivante à gauche; ce qui donne 23. On pose 3 et on ne retient rien, puisque 2 est à la fois à retenir et à retrancher. Pour la seconde colonne, au lieu de retrancher 9 de 19, on ajoute 1 à 19, ce qui donne 20, on pose 0, et on ne retient que 1 au lieu de 2, puisque l'on a ajouté 10 en trop. Pour la troisième colonne, au lieu de retrancher 18 de 18, on ajoute 2 à 18, ce qui donne 0, et on ne retient rien. A la quatrième colonne, au lieu de retrancher 7 de 19, on ajoute 3 à 19, ce qui donne 22; on pose 2 et on retient 1. A la cinquième colonne, 0 ajouté à 16 donne 6 et 1 de retenue. Enfin, à la sixième colonne, on retranche 1 de 3, reste 2.

La MULTIPLICATION est une opération qui a pour but de répéter un nombre appelé *multiplicande* autant de fois qu'il y a d'unités dans un nombre appelé *multiplicateur*; le résultat de l'opération s'appelle *produit*; ou, en termes plus généraux, de composer un nombre appelé produit avec un nombre appelé multiplicande, de la même manière qu'un troisième nombre appelé multiplicateur est composé avec l'unité.

Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit. Un produit est toujours *multiple* de chacun des facteurs.

Le produit d'un nombre quelconque de facteurs ne change pas quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les opérations. Le signe de la multiplication est $\times$ qui se prononce *multiplié par*, et qu'il ne faut pas confondre avec $+$ (*plus*). On aura donc $5 \times 7 \times 3 = 5 \times 3 \times 7 = 7 \times 5 \times 3 =$ etc.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Lorsque deux facteurs d'un produit n'ont pas plus d'un chiffre, le produit se trouve immédiatement, au moyen de la table de Pythagore, à la rencontre de la colonne verticale qui commence par l'un des facteurs, et de la colonne horizontale qui commence par l'autre facteur.

Lorsque le multiplicande seul a plusieurs chiffres, le multiplicateur n'en ayant qu'un, on ramène ce cas au précédent en faisant usage de la table de Pythagore pour les produits partiels de chacun des chiffres du multiplicande par le multiplicateur, et en reportant les retenues provenant de ces produits aux rangs qui leur conviennent.

Exemple : $986 \times 7 = 6902$. Les calculs se disposent ordinairement de la manière suivante :

986 7	et l'on dit : 7 fois 6 font 42, je pose 2 et je retiens 4; 7 fois 8 font 56 et 4
6902	de retenue font 60, je pose 0 et je retiens 6; 7 fois 9 font 63 et 6 de retenue font 69.

Le cas le plus général de la multiplication est celui où le multiplicande et le multiplicateur ont chacun plusieurs chiffres. Alors on cherche, comme on vient de le faire, chaque produit partiel du multiplicande par le multiplicateur, et on place les unités de chacun de ces produits dans la même colonne verticale que le chiffre qui a servi à le former dans le multiplicateur. L'exemple suivant montre de quelle manière les calculs doivent être disposés.

9216 789	
82944	$= 9216 \times 9$
73728	$= 9216 \times 80$
64512	$= 9216 \times 700$
7271424	$= 9216 \times 789$

Lorsqu'il y a des zéros à droite des facteurs, on effectue la multiplication sans en tenir compte et on les ajoute ensuite à la droite du produit. Ainsi, pour multiplier 375000 par 8900, on multiplie 375 par 89, et à la droite du produit 31773 des deux derniers nombres on ajoute 5 zéros, ce qui donne 3177300000 pour le véritable produit cherché.

Le cas où les facteurs renferment des zéros est suffisamment éclairci par l'exemple suivant.

```
    549087
     28006
   -------
   3294522
 4392696
1098174
-----------
15377730522
```

La DIVISION est une opération qui a pour but, étant donnés un produit appelé *dividende*, et l'un de ses facteurs appelé *diviseur*, de trouver l'autre facteur appelé *quotient*. En d'autres termes, lorsque l'on opère sur des nombres entiers, le quotient s'obtient en cherchant combien de fois le dividende contient le diviseur.

Pour indiquer la division on sépare le dividende du diviseur par 2 points (:), ou l'on écrit le dividende au-dessus du diviseur ainsi : $\frac{21}{7} = 21 : 7 = 3$.

Le quotient se trouve au moyen de la table de Pythagore lorsque le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre le dividende n'en a pas plus de deux. Ainsi, $\frac{72}{9} = 8$, $\frac{45}{5} = 9$. La division de 67 par 7 ne se fait pas exactement; on trouve au quotient 9 pour 63, et il reste 4 au dividende; ce que l'on exprime ainsi : $67 = 9 \times 7 + 4$.

Lorsque le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre le dividende en a plusieurs, la division se décompose en divisions partielles que l'on sait faire d'après le cas précédent. On trouvera ainsi que $\frac{2140}{5} = 428$. Les calculs se disposent de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|l} 2140 & 5 \\ 14 & \overline{428} \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Et l'on dit : en 21, 5 est contenu 4 fois pour 20 ; reste 1 : en 14, 5 est contenu 2 fois pour 10 et reste 4 ; en 40, 5 est contenu 8 fois et reste 0.

Le cas le plus général de la division, celui où le dividende et le diviseur ont plusieurs chiffres se résout d'une manière analogue. Pour diviser 21870 par 54, on disposera les calculs comme ci-dessous, et l'on dira :

$$\begin{array}{r|l} 21870 & 54 \\ 270 & \overline{405} \\ 0 & \end{array}$$

En 218, 54 est contenu 4 fois : 4 fois 4 font 16, de 18 reste 2, et je retiens 1 ; 4 fois 5 font 20 et 1 de retenue font 21, de 21 reste 0 ; 27 ne contient pas 54 ; je pose donc 0 au quotient, à côté du 4 ; en 270, 54 est contenu 5 fois ; 5 fois 4 font 20, 0 de 0 reste 0 et je retiens 2 ; 5 fois 5 font 25 et 2 de retenue font 27, de 27 reste 0. On a donc exactement :

$$\frac{21870}{54} = 405$$

Il peut arriver que la division ne se fasse pas exactement, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r|l} 47894599 & 8974 \\ 30245 & \overline{5337} \\ 33239 & \\ 63179 & \\ 361 & \end{array}$$

En divisant le nombre 47894599 par 8974, on trouve au quotient 5337, et pour dernier reste 361 qui ne contient plus le diviseur. On en conclut que si l'on retranchait 361 du dividende, ce qui donnerait 47894238, ce dernier nombre contiendrait le diviseur exactement 5337 fois ; ce qui revient à l'égalité :

$$47894599 = 8974 \times 5337 + 361$$

§ 3. *Des fractions ordinaires et de la divisibilité des nombres.*

Origine et propriété fondamentale des fractions. — La considération du reste 361 de l'exemple précédent conduit aux *fractions*. Car s'il s'agissait de partager le nombre 47 894 599 en 8 974 parties égales, le quotient 5 337 ne satisfait pas exactement à la question : il faut compléter ce quotient en y ajoutant une certaine partie d'unité que l'on représente par $\frac{361}{8974}$ qui s'énonce trois cent soixante et un, huit mille neuf cent soixante-quatorzièmes. Le nombre 8974, qui indique en combien de parties égales l'unité a été divisée, s'appelle le *dénominateur* ; 361, qui exprime combien l'on prend de ces parties égales, est le *numérateur* : le numérateur et le dénominateur sont les deux *termes* de la fraction.

Une fraction ne change pas de valeur lorsque l'on multiplie ou que l'on divise à la fois ses deux termes par un même nombre. Mais lorsque l'on multiplie le numérateur ou que l'on divise le dénominateur par 2, 3, 4... la fraction devient 2, 3, 4 fois plus grande ; et au contraire, la fraction devient 2, 3, 4 fois plus petite lorsque l'on divise le numérateur ou que l'on multiplie le dénominateur par 2, 3, 4.

Il est donc important, pour simplifier les fractions sans en changer la valeur, de chercher à diviser leurs deux termes par le plus grand nombre possible ; et pour cela il faut connaître les caractères de *divisibilité* des nombres.

Nombres premiers. — On appelle *nombre premier* ou *facteur premier* tout nombre qui n'est divisible exactement que par lui-même ou par l'unité. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., sont des facteurs premiers. Eratosthènes, savant géomètre qui florissait au commencement du second siècle avant l'ère chrétienne, a indiqué le premier une méthode aussi simple qu'ingénieuse pour déterminer tous les nombres premiers. Comme il excluait les nombres composés, il donnait le nom de *crible* au tableau sur lequel restaient les nombres premiers. Cette méthode consiste à écrire la suite des nombres impairs (car tous les nombres pairs sont divisibles par 2), et à effacer, comme composés, tous les nombres que l'on pourra compter, dans cette suite, de 3 en 3, de 5 en 5, de 7 en 7, de 11 en 11, de 13 en 13, de 17 en 17, et ainsi de suite. Les résultats des opérations sont représentés dans le tableau suivant, où l'on a marqué d'un trait (—) tous les nombres composés.

3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37
39	41	43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63	65	67	69	71	73
75	77	79	81	83	85	87	89	91
93	95	97	99	101	103	105	107	109
111	113	115	117	119	121	123	125	127
129	131	133	135	137	139	141	143	145
147	149	151	153	155	157	159	161	163
165	167	169	171	173	175	177	179	181
183	185	187	189	191	193	195	197	199
201	etc.							

Nous donnons ci-après une table où l'on trouve les nombres premiers qui existent de 1 à 10000.

Deux nombres sont dits *premiers entre eux* lorsqu'ils n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

Plus grand commun diviseur. — Pour trouver le *plus grand diviseur commun* à deux nombres, on peut les décomposer en leurs facteurs premiers, ce qui est facile en essayant directement la division par les nombres que fournit le crible d'Eratosthènes ; le nombre cherché est le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux nombres donnés, pris autant de fois que dans celui des deux nombres où ils entrent le moins. Ainsi, pour trouver le plus grand commun diviseur à 84 et à 360, on pose $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$, $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ et le nombre cherché est $2 \times 2 \times 3$ ou 12. La fraction $\frac{84}{360}$ peut donc se réduire à la forme $\frac{7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{30}$ laquelle est alors *irréductible*.

Pour trouver le nombre 12, on aurait pu suivre un autre procédé qui consiste à diviser 360 par 84, ce qui donne au quotient 4, et pour reste 24 ; à diviser ensuite 84 par 24, ce qui donne pour quotient 3, et pour reste 12, à diviser 24 par 12, ce qui donne le quotient exact 2. 12 est le plus grand commun diviseur entre 84 et 360

Table de tous les nombres premiers qui se trouvent entre 1 *et* 10000.

1	23	5	21	29	87	31	22	51	29	07	71	49	47	31	33	47	43	64	33
2	27	03	23	51	89	47	03	57	03	13	73	51	51	61	37	51	47	21	41
3	29	09	27	53	93	61	07	79	09	19	77	57	57	71	61	53	53	27	57
5	33	21	29	63	99	67	13	91	17	23	91	73	63	77	73	57	67	49	63
7	39	23	39	71	15	71	21	93	27	29	97	79	81	89	79	59	73	51	69
11	41	41	53	81	11	73	37	26	39	31	37	91	83	49	81	69	79	69	71
13	51	47	57	87	23	77	39	09	53	43	01	93	93	03	97	83	89	73	83
17	57	57	59	93	31	79	43	17	57	47	09	99	45	09	53	89	91	81	99
19	63	63	63	12	43	89	51	21	63	59	19	41	07	19	03	93	61	91	69
23	69	69	77	01	49	19	67	33	69	61	27	11	13	31	09	57	01	65	07
29	71	71	81	13	53	01	69	47	71	71	33	27	17	33	23	01	13	21	11
31	77	77	83	17	59	07	73	57	99	73	39	29	19	37	33	11	21	29	17
37	81	87	87	23	67	13	81	59	30	89	61	33	23	43	47	17	31	47	47
41	83	93	9	29	71	31	87	63	01	91	67	39	47	51	51	37	33	51	49
43	93	99	07	31	79	33	93	71	11	34	69	53	49	57	81	41	43	53	59
47	3	6	11	37	83	49	97	77	19	07	79	57	61	67	87	43	51	63	61
53	07	01	19	49	97	51	23	83	23	13	93	59	67	69	93	49	63	69	67
59	11	07	29	59	16	73	09	87	37	33	97	77	83	73	99	79	73	71	71
61	13	13	37	77	01	79	11	89	41	49	38	42	91	87	54	83	97	73	77
67	17	17	41	79	07	87	33	93	49	57	03	01	97	93	07	91	99	81	83
71	31	19	47	83	09	93	39	99	61	61	21	11	46	99	13	58	62	99	91
73	37	31	53	89	13	97	41	27	67	63	23	17	03	50	17	01	03	66	97
79	47	41	67	91	19	99	47	07	79	67	33	19	21	03	19	07	11	07	70
83	49	43	71	97	21	20	51	11	83	69	47	29	37	09	31	13	17	19	01
89	53	47	77	13	27	03	57	13	89	91	51	31	39	11	37	21	21	37	13
97	59	53	83	01	37	11	71	19	31	99	53	41	43	21	41	27	29	53	19
1	67	59	91	03	57	17	77	29	09	35	63	43	49	23	43	39	47	59	27
01	73	61	97	07	63	27	81	31	19	11	77	53	51	39	49	43	57	61	39
03	79	73	10	19	67	29	83	41	21	17	81	59	57	51	71	49	63	73	43
07	83	77	09	21	69	39	89	49	37	27	89	61	63	59	77	51	69	79	57
09	89	83	13	27	93	53	93	53	63	29	39	71	73	77	79	57	71	89	69
13	97	91	19	61	97	63	99	67	67	33	07	73	79	81	83	61	77	91	79
27	4	7	21	67	99	69	24	77	69	39	11	83	91	87	55	67	87	67	71
31	01	01	31	73	17	81	11	89	81	41	17	89	47	99	01	69	99	01	03
37	09	09	33	81	09	83	17	91	87	47	19	97	03	51	03	79	63	03	09
39	19	19	39	99	21	87	23	97	91	57	23	43	21	01	07	81	01	09	21
49	21	27	49	14	23	89	37	28	32	59	29	27	23	07	19	97	11	19	27
51	31	33	51	09	33	99	41	01	03	71	31	37	29	13	21	59	17	33	29
57	33	39	61	23	41	21	47	03	09	81	43	39	33	19	27	03	23	37	51
63	39	43	63	27	47	11	59	19	17	83	47	49	51	47	31	23	29	61	59
67	43	51	69	29	53	13	67	33	21	93	67	57	59	53	57	27	37	63	77
73	49	57	87	33	59	29	73	37	29	36	89	63	83	67	63	39	43	79	87
79	57	61	91	39	77	31	77	43	51	07	40	73	87	71	69	53	53	81	93
81	61	69	93	47	83	37	25	51	53	13	01	91	89	79	73	81	59	91	72
91	63	73	97	51	87	41	03	57	57	17	03	97	93	89	81	87	61	93	07
93	67	87	11	53	89	43	21	61	59	23	07	44	99	97	91	60	67	68	11
97	79	97	03	59	18	53	31	79	71	31	13	09	48	52	56	07	73	03	13
99	87	8	09	71	01	61	39	87	99	37	19	21	01	09	23	11	79	23	19
2	91	09	17	81	11	79	43	97	33	43	21	23	13	27	39	29	89	27	29
11	99	11	23	83	23	—	49	—	01	59	27	41	17	31	41	37	97	29	37

Suite de la table précédente.

43	47	**78**	**81**	87	81	41	21	79	81
47	49	17	01	89	89	51	27	91	87
53	59	23	11	**84**	93	63	39	97	91
83	61	29	17	19	99	69	41	**95**	**98**
97	73	41	23	23	**87**	71	57	11	03
73	77	53	47	29	07	99	77	21	11
07	83	67	61	31	13	**90**	81	33	17
09	89	73	67	43	19	01	83	39	29
21	91	77	71	47	31	07	93	47	33
31	**76**	79	79	61	37	11	**93**	51	39
33	03	83	91	67	41	13	11	87	51
49	07	**79**	**82**	**85**	47	29	19	**96**	57
51	21	01	09	01	53	41	23	01	59
69	39	07	19	13	61	43	37	13	71
93	43	19	21	21	79	49	41	19	83
74	49	27	31	27	83	59	43	23	87
11	69	33	33	37	**88**	67	49	29	**99**
17	73	37	37	39	03	91	71	31	01
33	81	49	43	43	07	**91**	77	43	07
51	87	51	63	63	19	03	91	49	23
57	91	63	69	73	21	09	97	61	29
59	99	93	73	81	31	27	**94**	77	31
77	**77**	**80**	87	97	37	33	03	79	41
81	03	09	91	99	39	37	13	89	49
87	17	11	93	**86**	49	51	19	97	67
89	23	17	97	09	61	57	21	**97**	73
99	27	39	**83**	23	63	61	31	19	
75	41	53	11	27	67	73	33	21	
07	53	59	17	29	87	81	37	33	
17	57	69	29	41	93	87	39	39	
23	59	81	53	47	**89**	99	61	43	
29	89	87	63	63	23	**92**	63	49	
37	93	89	69	69	29	03	67	67	
41		93	77	77	33	09	73	69	

Pour faire usage de cette table, il faut remarquer que les chiffres plus gros places entre deux petits traits horizontaux, sont les centaines des nombres dont les deux derniers chiffres à droite viennent après. Ainsi, les nombres premiers qui commencent par 2 centaines sont 211, 223, 227, 229, etc. Les nombres premiers qui commencent par 72 centaines sont 7207, 7211, 7213, 7219, 7229, 7237, 7243, 7247, etc.

Les opérations se disposent de la manière suivante :

360	84	24	12	restes successifs.
	4	3	2	quotients successifs.
30	7	2	1	

Pour obtenir les termes de la fraction $\frac{84}{360}$ réduite a sa plus simple expression, on posera au-dessous du quotient 2, le nombre 1 qui exprime que 12 se contient lui-même une fois ; puis au-dessous de 3, le produit de 2 par 1 ; au-dessous de 4, 7 qui est égal au produit de 3 par 2, augmenté de 1 ; au-dessous de 360, 30 qui est égal au produit de 4 par 7 augmenté de 2. $\frac{7}{30}$ est la fraction $\frac{84}{360}$ mise sous la forme la plus simple.

Divisibilité des nombres. Les caractères de divisibilité d'un nombre par un autre sont très-utiles pour faciliter la recherche des facteurs simples des nombres et la réduction des fractions à leur plus simple expression. Les caractères suivants sont le plus ordinairement mis à profit.

Un nombre est divisible par 3 ou par 9, lorsque la somme de ses chiffres considérés avec leur valeur absolue est elle-même divisible par 3 ou par 9.

Tout multiple de 5 est terminé par un 0 ou par un 5.

Tout nombre terminé vers la droite par 2 chiffres dont l'ensemble est divisible par 4 ou par 25, est lui-même divisible par les mêmes nombres.

Tout nombre dans lequel la dernière tranche de 3 chiffres vers la droite est divisible par 8 ou par 125, est lui-meme divisible par 8 ou par 125.

Un nombre est divisible par 11, lorsque la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est nulle ou égale à un multiple de 11.

Il est souvent utile, non-seulement de décomposer un nombre en ses facteurs premiers, mais encore de trouver tous les diviseurs composés de ce nombre.

L'exemple ci-dessous donne le tableau des opérations.

5040	1
2520	2
1260	2, 4
630	2, 8
315	2, 16
105	3, 6, 12, 24, 48
35	3, 9, 18, 36, 72, 144
7	5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720
1	7, 14, 28, 56, 112, 21, 42, 84, 168, 336, 63, 126, 152, 35, 70, 140, 280, 560, 105, 210, 420, 840, 1680, 1260, 315, 630, 2520, 5040.

Les diviseurs simples ou composés du nombre 5040, sont donc au nombre de soixante qui, écrits dans leur nombre naturel, sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180; 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 2520, 5040.

Cet exemple remarquable est tiré des écrits de Platon, Dialogue V, *de Legibus*.

Une des applications les plus utiles des principes précédents consiste dans la détermination d'un nombre qui soit le plus petit possible et qui soit divisible à la fois par plusieurs autres. Ce nombre est égal au produit de tous les facteurs différents qui entrent dans les nombres donnés, chacun de ces facteurs étant pris autant de fois que dans celui des facteurs où il entre le plus.

Ainsi *le plus petit multiple commun* des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, est 2520.

La table suivante, qui donne les plus petits diviseurs des nombres jusqu'à 5900, abrégera beaucoup les calculs relatifs à la décomposition, en leurs facteurs premiers, des nombres au-dessous de cette limite.

Cette table ne contient que les nombres dont le plus petit facteur premier surpasse 5, parce que les multiples de 2, de 3 et de 5 se recon-

Table des plus petits diviseurs des nombres jusqu'a 5900.

N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.
49	7	581	7	1001	7	1387	19	1771	7	2147	19	2497	11	2867	47	3179	11	3523	13	3887	13
77	7	583	11	1003	17	1391	13	781	13	149	7	501	41	869	19	193	31	551	53	893	17
91	7	589	19	1007	19	1393	7	793	11	159	17	507	23	873	13	197	23	553	11	899	7
119	7	611	13	1027	13	1397	11	799	7	167	11	509	13	881	43	199	7	563	7	901	47
121	11	623	7	1037	17	1403	23	807	13	171	13	513	7	891	7	211	13	569	43	913	7
133	7	629	17	1043	7	1411	17	1813	7	2173	41	2519	11	2893	11	3223	11	3577	7	3937	31
143	11	637	7	1057	7	1417	13	817	23	177	7	527	7	899	13	227	7	587	17	941	7
161	7	649	11	1067	11	1421	7	819	17	183	37	533	17	911	41	233	53	589	37	949	11
169	13	667	23	1073	29	1441	11	829	31	189	11	537	43	921	23	239	41	599	59	953	59
187	11	671	11	1079	13	1457	31	837	11	191	7	561	13	923	37	241	7	601	13	959	37
203	7	679	7	1081	23	1463	7	1841	7	2197	13	2563	11	2929	29	3247	17	3611	23	3961	17
209	11	689	13	1099	7	1469	13	843	19	201	31	567	17	933	7	263	13	619	7	971	11
217	7	697	17	1111	11	1477	7	849	43	209	47	569	7	941	17	269	7	629	19	973	29
221	13	703	19	1121	19	1501	19	853	17	219	7	573	31	947	7	277	29	641	11	977	41
247	13	707	7	1127	7	1507	11	859	11	227	17	581	29	951	13	281	17	647	7	979	23
253	11	713	23	1133	11	1513	17	1883	7	2231	23	2587	13	2959	11	3283	7	3649	41	3983	7
259	7	721	7	1139	17	1517	37	891	31	233	7	597	7	977	13	287	19	653	13	991	13
287	7	731	17	1141	7	1519	7	897	7	249	13	599	23	981	11	289	11	661	7	997	7
289	17	737	11	1147	31	1529	11	903	11	257	37	603	19	983	19	293	37	667	19	4009	19
299	13	749	7	1157	13	1537	29	909	23	261	7	611	7	987	29	311	7	679	13	031	29
301	7	763	7	1159	19	1541	23	1919	19	2263	31	2623	43	2989	7	3317	31	3683	29	4033	37
319	11	767	13	1169	7	1547	7	921	17	279	43	627	37	993	41	337	47	689	7	037	11
323	17	779	19	1177	11	1561	7	927	41	291	29	629	11	3007	31	341	13	703	7	039	7
329	7	781	11	1183	7	1573	11	937	13	299	11	639	7	013	23	349	17	707	11	043	13
341	11	791	7	1189	29	1577	19	939	7	303	7	641	19	017	7	353	7	713	47	061	31
343	7	793	13	1199	11	1589	7	1943	29	2317	7	2651	11	3029	13	3367	7	3721	61	4063	17
361	19	799	17	1207	17	1591	37	957	19	321	11	653	7	031	7	377	11	731	7	067	7
371	7	803	11	1211	7	1603	7	961	37	323	23	669	17	043	17	379	31	737	37	069	13
377	13	817	19	1219	23	1631	7	963	13	327	13	681	7	047	11	383	17	743	19	081	7
391	17	833	7	1241	17	1633	23	967	7	329	17	701	37	053	43	397	43	749	23	087	61
403	13	841	29	1243	11	1639	11	1969	11	2353	13	2717	11	3059	7	3401	19	3751	11	4097	17
407	11	847	7	1247	29	1643	31	981	7	359	7	723	7	071	37	403	41	757	13	103	11
413	7	851	23	1253	7	1649	17	991	11	363	17	737	7	073	7	409	7	763	53	109	7
427	7	869	11	1261	13	1651	13	2009	7	369	23	743	13	077	17	419	13	773	7	117	23
437	19	871	13	1267	7	1661	11	021	43	387	7	747	41	091	11	421	11	781	19	121	13
451	11	889	7	1271	31	1673	7	2023	7	2401	7	2759	31	3097	19	3427	23	3787	7	4123	7
469	7	893	19	1273	19	1679	23	033	19	407	29	761	11	101	7	431	47	791	17	141	41
473	11	899	29	1309	7	1681	41	041	13	413	19	771	17	103	29	437	7	799	29	147	11
481	13	901	17	1313	13	1687	7	047	23	419	41	773	47	107	13	439	19	809	13	151	7
493	17	913	11	1331	11	1691	19	051	7	429	7	779	7	113	11	443	11	811	37	163	23
497	7	917	7	1333	31	1703	13	2057	11	2431	11	2783	11	3127	53	3451	7	3817	11	4169	11
511	7	923	13	1337	7	1711	29	059	29	443	7	807	7	131	31	473	23	827	43	171	43
517	11	931	7	1339	13	1717	17	071	19	449	31	809	53	133	13	479	7	829	7	181	37
527	17	943	23	1343	17	1727	11	077	31	453	11	843	29	139	43	481	59	839	11	183	47
529	23	949	13	1349	19	1729	7	093	7	461	23	821	7	143	7	487	11	841	23	187	53
533	13	959	7	1351	7	1739	37	2161	11	2471	7	2827	11	3149	47	3493	7	3857	7	4189	59
539	7	961	31	1357	23	751	17	407	7	479	37	831	19	151	23	497	13	859	17	193	7
551	19	973	7	1363	29	757	7	117	29	483	13	839	17	157	7	503	31	869	53	199	13
553	7	979	11	1369	37	763	41	119	13	489	19	849	7	161	29	509	11	871	7	207	7
559	13	989	23	1379	7	769	29	123	11	491	47	863	7	173	19	521	7	883	11	213	11
N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.

Suite de la table précédente.

N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.
4223	41	4559	47	4879	7	5219	17	5551	7
237	19	571	7	883	19	221	23	561	67
247	31	573	17	891	67	239	13	567	19
249	7	577	23	897	59	243	7	579	7
267	17	579	19	901	13	249	29	587	37
4277	7	4589	13	4907	7	5251	59	5593	7
279	11	601	43	913	17	257	7	597	29
291	7	607	17	921	7	263	19	599	11
301	11	609	11	927	13	267	23	603	13
303	13	613	7	939	11	269	11	609	71
4307	59	4619	31	4949	7	5287	17	5611	31
309	31	627	7	961	11	291	11	617	41
313	19	631	11	963	7	293	67	621	7
319	7	633	41	979	13	299	7	627	17
321	29	661	59	981	17	311	47	629	13
4331	61	4667	13	4991	7	5317	13	5633	43
333	7	669	7	997	19	321	17	663	7
343	43	681	31	5017	29	327	7	671	53
351	19	687	43	027	11	329	73	677	7
361	7	693	13	029	47	339	19	681	13
4367	11	4697	7	5033	7	5341	7	5687	11
369	17	699	37	041	71	353	53	699	41
379	29	709	17	047	7	357	11	707	13
381	13	711	7	053	31	359	23	713	29
387	41	717	53	057	13	363	31	719	7
4393	23	4727	29	5063	61	5369	7	5723	59
399	53	739	7	069	37	371	41	729	17
403	7	741	11	071	11	377	19	731	11
411	11	747	47	083	13	383	7	747	7
417	7	753	7	.089	7	389	17	753	11
4427	19	4757	67	5093	11	5401	11	5759	13
429	43	763	11	111	19	411	7	761	7
433	11	769	19	117	7	423	11	767	73
439	23	771	13	123	47	429	61	771	29
453	61	777	17	129	23	447	13	773	23
4459	7	4781	7	5131	7	5453	7	5777	53
469	41	807	11	137	11	459	53	789	7
471	17	811	17	141	53	461	43	797	11
477	11	819	61	143	37	467	7	803	7
487	7	823	7	149	19	473	13	809	37
4489	67	4829	11	5159	7	5489	11	5819	11
499	11	837	7	161	13	491	17	831	7
501	7	841	47	173	7	497	23	833	19
511	13	843	29	177	31	509	7	837	13
529	7	847	37	183	71	513	37	863	11
4531	23	4849	13	5191	29	5533	11	5873	7
537	13	853	23	201	7	537	7	5887	7
541	19	859	43	203	11	539	29	5891	43
543	7	867	31	207	41	543	23	5893	71
553	29	873	11	213	13	549	31	5899	17
N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.

naissent à première vue. Les nombres sont placés dans les colonnes N, où le chiffre des mille doit être censé répété au-dessous de lui-même quand il vient à manquer. Les plus petits diviseurs sont dans les colonnes D, chacun à côté du nombre correspondant.

Les quatre règles opérées sur les fractions. —Le calcul des fractions n'offre plus maintenant aucune difficulté.

Pour combiner un nombre quelconque de fractions par voie d'addition ou de soustraction, on commencera par les réduire au plus petit dénominateur commun; puis on combinera ensemble les nouveaux numérateurs, conformément aux signes des opérations indiquées, et on donnera au résultat final le nouveau dénominateur.

Le plus petit dénominateur commun n'est autre que le plus petit multiple commun à tous les dénominateurs; et le nouveau numérateur de chaque fraction s'obtient en multipliant l'ancien numérateur par les facteurs qui sont introduits dans l'ancien dénominateur pour former le nouveau.

Les calculs peuvent se disposer de la manière suivante.

On demande le résultat des opérations indiquées dans l'expression

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}-\frac{11}{12}$$

Le dénominateur commun (minimum) sera

$$2\times2\times2\times3=24$$

Les nouveaux numérateurs seront :

Pour la 1re fraction. . . $2\times2\times2\times2=16$
Pour la seconde. . . . . $2\times3\times3\quad=18$
Pour la troisième. . . . $2\times2\times5\quad=20$

Somme. 54

Pour la quatrième. . . . 3×7. . . . .$=21$
Pour la cinquième. . . . 2×11. . . .$=22$

Somme. 43

Différence. 11

Le résultat final est donc $\frac{11}{24}$.

S'il y avait des entiers joints aux fractions, on opérerait sur eux séparément; et si la fraction à soustraire était plus grande que la fraction dont on veut soustraire, on emprunterait sur les entiers du nombre dont on veut soustraire assez d'unités pour qu'en convertissant ces unités en nombre fractionnaire, la soustraction devînt possible.

Il est évident d'ailleurs que pour mettre un nombre entier sous forme fractionnaire, il suffit de lui donner pour dénominateur le nombre par lequel on le multiplie pour former le nouveau numérateur.

La seconde définition donnée pour la multiplication des nombres entiers est la seule qui convienne à la multiplication des fractions. Cette opération se ramène à une seule et même règle, si on considère les entiers, sur lesquels on peut avoir à opérer, comme des fractions ayant l'unité pour dénominateur : et la règle consiste en ce que le produit d'un nombre quelconque de fractions s'obtient en multipliant les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.

$$\text{Ainsi}\ \frac{3}{4}\times7=\frac{3\times7}{4\times1}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$$

$$6\times\frac{5}{11}=\frac{6\times5}{1\times11}=\frac{30}{11}=2+\frac{8}{11}$$

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times2}{5\times3}=\frac{8}{15}$$

Lorsque l'on a des multiplications à opérer entre des quantités entières combinées avec des fractions par voie d'addition et de soustraction, on commence par réduire à une seule fraction ces diverses expressions fractionnaires. Exemple, soit $2-\frac{3}{4}$ à multiplier par $7+\frac{1}{3}$.

$$\text{On pose } 2-\frac{3}{4}=\frac{2\times4-3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$7+\frac{1}{3}=\frac{7\times3+1}{3}=\frac{22}{3}$$

$$\frac{5}{4}\times\frac{22}{3}=\frac{110}{12}=9+\frac{1}{6}$$

Le résultat final s'exprime de la manière abrégée que voici :

$$\left(2-\frac{3}{4}\right)\left(7+\frac{1}{3}\right)=9+\frac{1}{6}.$$

L'usage des parenthèses est indispensable pour que l'on ne confonde pas la multiplication de $2-\frac{3}{4}$ par $7+\frac{1}{3}$ avec celle de $\frac{3}{4}$ par 7

La division des fractions, moyennant les préparations préalables auxquelles nous venons de dire que les entiers doivent être soumis, n'offre pas plus de difficultés que la multiplication, car la division s'effectue en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée ; et on sait que l'on peut toujours s'arranger de manière à n'avoir à opérer que sur des fractions.

$$\text{Ainsi } \frac{4}{5}:7=\frac{4}{5}:\frac{7}{1}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{4}{35}$$

$$9:\frac{2}{11}=\frac{9}{1}:\frac{2}{11}=\frac{9}{1}\times\frac{11}{2}=\frac{99}{2}=49+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$$

$$\left(9+\frac{1}{6}\right):\left(2-\frac{3}{4}\right)=\left(9+\frac{2}{12}\right):\left(2-\frac{9}{12}\right)$$

$$=\frac{110}{12}:\frac{15}{12}=\frac{110}{12}\times\frac{12}{15}=\frac{110}{15}=\frac{22}{3}=7+\frac{1}{3}.$$

§ 4. *Des fractions décimales.*

NOTATION ET RÈGLES FONDAMENTALES. — On appelle *fractions décimales* des fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou ou de plusieurs zéros.

Ainsi $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{2957}{1000}$ sont des fractions décimales.

On peut étendre à ces fractions l'un des principes fondamentaux de la numération écrite et les écrire sous forme entière en supprimant les dénominateurs, pourvu que la place des unités soit indiquée. Ainsi le nombre $17+\frac{3}{10}$ peut s'écrire 17, 3 la virgule placée a la droite des unités séparant suffisamment les 3 dixièmes de la partie entière. De même au lieu de $125+\frac{27}{100}$, on écrira 125, 27 ; au lieu de $\frac{2957}{1000}$, on écrira 2, 957

Lorsque la partie entière vient à manquer, on la remplace par un zéro ; on remplace aussi par des zéros les différents ordres qui pourraient manquer à droite de la virgule.

On aura donc $\frac{295}{1000}=0,295$

$$\frac{38}{10000}=0,0038.$$

$$\frac{2}{100000}=0,00002.$$

Les règles pour énoncer un nombre décimal écrit et pour écrire un nombre décimal énoncé se déduisent immédiatement de celles qui ont été données pour les nombres entiers et pour les fractions ordinaires.

Il résulte de la définition et de la notation même des nombres décimaux, qu'on n'en change pas la valeur, en ajoutant ou en retranchant un nombre quelconque de zéros à leur droite ; et qu'au contraire on les multiplie ou qu'on les divise par 10, par 100, par 1000, selon que l'on avance vers la droite ou que l'on recule vers la gauche, d'un, de deux, de trois rangs, la virgule qui marque la place des unités. Les règles des quatre opérations fondamentales sur les nombres décimaux se déduisent aussi, sans difficulté, de celles qui sont relatives aux entiers et aux fractions.

L'addition et la soustraction ne diffèrent pas des mêmes opérations sur les nombres entiers.

La multiplication se fait abstraction faite de la virgule ; on sépare ensuite sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a à la fois dans les facteurs de ce produit.

Pour effectuer la division, si le dividende renferme moins de chiffres décimaux que le diviseur, on ajoute à la droite de celui-là un nombre de zéros suffisant, et, supprimant ensuite la virgule, on opère comme sur des nombres entiers. Si le dividende a plus de chiffres décimaux que le diviseur, on supprime encore la virgule, et sur la droite du quotient on sépare un nombre de chiffres décimaux égal à la différence entre les nombres de chiffres décimaux du dividende et du diviseur.

CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN DÉCIMALES. — La transformation des fractions ordinaires en décimales s'effectue de la manière suivante, comme le montre l'exemple ci à côté.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 30 & 6,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

On effectue d'abord, autant que possible, la division du numérateur 27 par le dénominateur 4, ce qui donne le quotient entier 6, à droite duquel on place la virgule. Ajoutant un zéro à côté du reste 3, on divise 30 par 4 ; d'où viennent au quotient 7 dixièmes et 2 de reste ; divisant 20 par 4, on a au quotient 5. Donc $\frac{27}{4}=6,75$.

En ajoutant toujours ainsi des zéros à droite des restes consécutifs, on pourra obtenir la valeur du quotient d'une division ou d'une expression fractionnaire, sous forme décimale, avec autant d'approximation qu'on le voudra.

Trois cas peuvent se présenter dans la réduction d'une fraction ordinaire en décimales, lorsque l'on suppose la fraction réduite à sa plus simple expression.

Si le dénominateur ne renferme pas d'autres facteurs que 2 et 5, on pourra toujours exprimer la valeur de la fraction par un nombre limité de chiffres décimaux. Exemples :

$$\frac{3}{25}=\frac{3}{5\times5}=0,12$$

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2\times2\times2\times5}=0,175.$$

Si le dénominateur ne renferme ni 2, ni 5,

Table de conversion des fractions ordinaires en decimales et réciproquement.

D.	N.	DÉC.
2	1	5000
3	1	3333
	2	6667
4	1	2500
	2	5000
	3	7500
5	1	2000
	2	4000
	3	6000
	4	8000
6	1	1667
	2	3333
	3	5000
	4	6667
	5	8333
7	1	1429
	2	2857
	3	4286
	4	5714
	5	7143
	6	8571
8	1	1250
	2	2500
	3	3750
	4	5000
	5	6250
	6	7500
	7	8750
9	1	1111
	2	2222
	3	3333
	4	4444
	5	5556
	6	6667
	7	7778
	8	8889
10	1	1000
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
10	2	2000
	3	3000
	4	4000
	5	5000
	6	6000
	7	7000
	8	8000
	9	9000
11	1	0909
	2	1818
	3	2727
	4	3636
	5	4545
	6	5455
	7	6364
	8	7273
	9	8182
	10	9091
12	1	0833
	2	1667
	3	2500
	4	3333
	5	4167
	6	5000
	7	5833
	8	6667
	9	7500
	10	8333
	11	9167
13	1	0769
	2	1538
	3	2308
	4	3077
	5	3846
	6	4615
	7	5385
	8	6154
	9	6923
	10	7692
	11	8462
	12	9231
14	1	0714
	2	1429
	3	2143
	4	2857
	5	3571
	6	4286
	7	5000
	8	5714
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
14	9	6429
	10	7143
	11	7857
	12	8571
	13	9286
15	1	0667
	2	1333
	3	2000
	4	2667
	5	3333
	6	4000
	7	4667
	8	5333
	9	6000
	10	6667
	11	7333
	12	8000
	13	8667
	14	9333
16	1	0625
	2	1250
	3	1875
	4	2500
	5	3125
	6	3750
	7	4375
	8	5000
	6	5625
	10	6250
	11	6875
	12	7500
	13	8125
	14	8750
	15	9375
17	1	0588
	2	1176
	3	1765
	4	2353
	5	2941
	6	3529
	7	4118
	8	4706
	9	5294
	10	5882
	11	6471
	12	7059
	13	7647
	14	8235
	15	8824
	16	9412
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
18	1	0556
	2	1111
	3	1667
	4	2222
	5	2778
	6	3333
	7	3889
	8	4444
	9	5000
	10	5556
	11	6111
	12	6667
	13	7222
	14	7778
	15	8333
	16	8889
	17	9444
19	1	0526
	2	1053
	3	1579
	4	2105
	5	2632
	6	3158
	7	3684
	8	4211
	9	4737
	10	5263
	11	5789
	12	6316
	13	6842
	14	7368
	15	7895
	16	8421
	17	8947
	18	9474
20	1	0500
	2	1000
	3	1500
	4	2000
	5	2500
	6	3000
	7	3500
	8	4000
	9	4500
	10	5000
	11	5500
	12	6000
	13	6500
	14	7000
	15	7500
	16	8000
	17	8500
	18	9000
	19	9500
D.	N.	DEC,

D.	N.	DÉC.
21	1	0476
	2	0952
	3	1429
	4	1905
	5	2381
	6	2857
	7	3333
	8	3810
	9	4286
	10	4762
	11	5238
	12	5714
	13	6190
	14	6667
	15	7143
	16	7619
	17	8095
	18	8571
	19	9048
	20	9524
22	1	0455
	2	0909
	3	1364
	4	1818
	5	2273
	6	2727
	7	3182
	8	3636
	9	4091
	10	4545
	11	5000
	12	5455
	12	5909
	14	6364
	15	6818
	16	7273
	17	7727
	18	8182
	19	8636
	20	9091
	21	9545
23	1	0435
	2	0870
	3	1304
	4	1739
	5	2174
	6	2609
	7	3043
	8	3478
	9	3913
	10	4348
	11	4783
	12	5217
	13	5652
	14	6087
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
23	15	6522
	16	6957
	17	7391
	18	7826
	19	8261
	20	8696
	21	9130
	22	9565
24	1	0417
	2	0833
	3	1250
	4	1667
	5	2083
	6	2500
	7	2917
	8	3333
	9	3750
	10	4167
	11	4583
	12	5000
	13	5417
	14	5833
	15	6250
	16	6667
	17	7083
	18	7500
	19	7917
	20	8333
	21	8750
	22	9167
	23	9583
25	1	0400
	3	1200
	5	2000
	7	2800
	9	3600
	11	4400
	13	5200
	15	6000
	17	6800
	19	7600
	21	8400
	23	9200
26	1	0385
	3	1154
	5	1923
	7	2692
	9	3462
	11	4231
	13	5000
	15	5769
	17	6538
D.	N.	DEC.

D.	N.	DC.
26	19	7308
	21	8077
	23	8846
	25	9615
27	1	0370
	3	1111
	5	1852
	7	2593
	9	3333
	11	4074
	13	4815
	15	5556
	17	6296
	19	7037
	21	7778
	23	8519
	25	9259
28	1	0357
	3	1071
	5	1786
	7	2500
	9	3214
	11	3929
	13	4643
	15	5357
	17	6071
	19	6786
	21	7500
	23	8214
	25	8929
	27	9643
29	1	0345
	3	1034
	5	1724
	7	2414
	9	3103
	11	3793
	13	4483
	15	5172
	17	5862
	19	6552
	21	7241
	23	7931
	25	8621
	27	9310
30	1	0333
	3	1000
	5	1667
	7	2333
D.	N.	DEC.

D.	N.	DEC.
30	9	3000
	11	3667
	13	4333
	15	5000
	17	5667
	19	6333
	21	7000
	23	7667
	25	8333
	27	9000
	29	9667
31	1	0323
	5	1613
	10	3226
	15	4839
	20	6452
	25	8065
	30	9677
32	1	0313
	5	1563
	10	3125
	15	4688
	20	6250
	25	7813
	30	9375
33	1	0303
	5	1515
	10	3030
	15	4545
	20	6061
	25	7576
	30	9091
34	1	0294
	5	1471
	10	2941
	15	4412
	20	5882
	25	7353
	30	8824
35	1	0286
	5	1429
	10	2857
	15	4286
	20	5714
	25	7143
	30	8571
D.	N.	DEC.

Suite de la table précédente.

D.	N.	DÉC.
36	1	0278
	5	1389
	10	2778
	15	4167
	20	5556
	25	6944
	30	8333
	35	9722
37	1	0270
	5	1351
	10	2703
	15	4054
	20	5405
	25	6757
	30	8108
	35	9459
38	1	0263
	5	1316
	10	2632
	15	3947
	20	5263
	25	6579
	30	7895
	35	9211
39	1	0256
	5	1282
	10	2564
	15	3846
	20	5128
	25	6410
	30	7692
	35	8974
40	1	0250
	5	1250
	10	2500
	15	3750
	20	5000
	25	6250
	30	7500
	35	8750
41	1	0244
	5	1220
	10	2439
	15	3659
	20	4878
	25	6098
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
41	30	7317
	35	8537
	40	9756
42	1	0238
	5	1190
	10	2381
	15	3571
	20	4762
	25	5952
	30	7143
	35	8333
	40	9524
43	1	0233
	5	1163
	10	2326
	15	3488
	20	4651
	25	5814
	30	6977
	35	8140
	40	9302
44	1	0227
	5	1136
	10	2273
	15	3409
	20	4545
	25	5682
	30	6818
	35	7955
	40	9091
45	1	0222
	5	1111
	10	2222
	15	3333
	20	4444
	25	5556
	30	6667
	35	7778
	40	8889
46	1	0217
	5	1087
	10	2174
	15	3261
	20	4348
	25	5435
	30	6522
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
46	35	7609
	40	8696
	45	9783
47	1	0213
	5	1064
	10	2128
	15	3191
	20	4255
	25	5319
	30	6383
	35	7447
	40	8511
	45	9574
48	1	0208
	5	1042
	10	2083
	15	3125
	20	4167
	25	5208
	30	6250
	35	7292
	40	8333
	45	9375
49	1	0204
	5	1020
	10	2041
	15	3061
	20	4042
	25	5102
	30	6122
	35	7143
	40	8163
	45	9184
50	1	0200
	5	1000
	10	2000
	15	3000
	20	4000
	25	5000
	30	6000
	35	7000
	40	8000
	45	9000
51	1	0196
52		0192
53		0189
D.	N.	DEC.

D.	N.	DÉC.
54		0185
55		0182
56		0179
57		0175
58		0172
59		0169
60		0167
61		0164
62	1	0161
63		0159
64		0156
65		0154
66		0152
67		0149
68		0147
69		0145
70		0143
71		0141
72		0139
73		0137
74		0135
75		0133
76		0132
77		0130
78		0128
79		0127
80		0125
81		0123
82		0122
83		0120
84		0119
85		0118
86		0116
87	1	0115
88		0114
89		0112
90		0111
91		0110
92		0109
93		0108
94		0106
95		0105
96		0104
97		0103
98		0102
99		0101
100		0100
D.	N.	DEC.

il n'existe aucune fraction décimale qui puisse exprimer la valeur de la fraction donnée par un nombre limité de chiffres. La fraction décimale est alors *périodique*, c'est-à-dire qu'elle se compose d'une série de chiffres qui se reproduisent périodiquement, à l'infini ; et la *période* commence immédiatement après la virgule, auquel cas elle est dite *simple*.

Exemples : $\frac{2}{3} = 0,6666....$ La période est 6.

$\frac{35}{111} = 0,315315315...$ La période est 315.

Enfin, lorsque le dénominateur renferme, outre 2 ou 5, des facteurs différents, la fraction décimale est encore périodique, mais la période ne commence plus immédiatement après la virgule, et l'expression décimale prend alors le nom de *périodique mixte*.

Exemples : $\frac{4}{15} = 0,2666...$ 6 est la période.

$\frac{13}{18} = 0,72222...$ 2 est la période.

Conversion des décimales en fractions ordinaires. — La conversion des fractions décimales en fractions ordinaires n'offre aucune difficulté dans le cas où il n'y a pas de période. On a immédiatement

$3,864 = 3 + \frac{864}{1000} = 3 + \frac{108}{125}.$

Dans le cas d'une période simple telle que $0,272727$ on a $0,272727 = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; on a encore $0,816381638163... = \frac{8163}{9999} = \frac{907}{1111}$. De même on aurait $3,2727... = 3 + \frac{3}{11}$.

Pour une fraction périodique mixte, telle que $0,1231717$, on prendrait la différence 12194 entre 12317 et 123, et on la diviserait par 99000. On aura donc $0,1231717 = \frac{12194}{99000} = \frac{6097}{49500}$.

Nous donnons ci-dessus une table que nous empruntons au *Prompt Calculateur* de M. Suret, et qui abrègera souvent les calculs pour la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales et réciproquement. Les colonnes verticales intitulées D renferment les dénominateurs, et celles qui sont désignées par N contiennent les numérateurs des fractions ordinaires ; les quatre premiers chiffres de la fraction décimale équivalente sont dans la colonne intitulée Déc. sur la même ligne horizontale que le numérateur de la fraction ordinaire qu'il s'agit de réduire.

On trouve ainsi, dans la table, que $\frac{5}{6} = 0,8333$; que $\frac{4}{7} = 0,5714$; que $\frac{21}{24} = 0,8750$

Pour les dénominateurs compris entre 25 et 31, les numérateurs ne sont plus marqués que de 2 en 2.

Ils ne le sont que de 5 en 5 pour les dénominateurs compris entre 31 et 51.

Enfin, à partir du dénominateur 51, on ne considère plus que les fractions ordinaires qui ont pour numérateur l'unité.

§ 5. *Des nombres complexes*

On appelle *nombres complexes* ceux qui sont composés d'unités de différentes valeurs. Tels sont les nombres 4 toises 5 pieds 6 pouces 3 lignes 11 points ; 2 heures 21 minutes 13 secondes 25 tierces, etc.

L'addition et la soustraction des nombres complexes s'effectuent d'après les mêmes principes que pour les nombres ordinaires ; seulement les valeurs retenues sont déterminées par la relation des différentes espèces d'unités. Exemples :

Addition.	5 toises	4 pieds	8 pouces	8 lignes.
	7	3	9	9
Somme.	13	2	5	5

On dit 8 et 9 lignes font 17 lignes, ou 5 lignes et 1 pouce de retenue ; 8 et 9 et 1 pouce font 18 pouces ou 6 pouces et 1 pied de retenue ; 4 et 3 et 1 pied font 8 pieds ou 2 pieds et 1 toise de retenue ; 5 et 7 et 1 font 13 toises.

Soustract.	13 toises	2 pieds	6 pouces	5 lignes.
	7	3	9	9
Différence	5	4	8	8

Soustraire 9 lignes de 5, cela ne se peut ; j'emprunte sur les 6 pouces 1 pouce qui vaut 12 lignes, 9 de 17 reste 8. 9 pouces de 5 ou plutôt 9 de 17 reste 8. 3 de 1 pied ou plutôt 3 de 7 reste 4. 7 de 12 reste 5.

La Multiplication d'un nombre complexe par un nombre incomplexe se fait de la manière suivante :

12 l. 2 s. 3 d. $\frac{2}{11}$ d. *Multiplicande.*
12 *Multiplicateur.*

144
1 4
3
2 $\frac{2}{11}$

Produit. 145 l. 7 s. 2 d. $\frac{2}{11}$ d.

12 fois 12 livres font 144 livres.
12 fois 2 sous font 24 sous, ou 1 livre 4 sous.
12 fois 3 deniers font 36 deniers ou 3 sous.
12 fois $\frac{2}{11}$ de denier font $\frac{24}{11}$ d ou 2 den. $\frac{2}{11}$ d.

La méthode des *parties aliquotes* conduirait au même résultat. L'exemple suivant, qui se rapporte au cas le plus général de la multiplication des nombres complexes donnera une idée de cette méthode.

Une toise de maçonnerie coûte 12 l. 2 s. 3 d $\frac{2}{11}$ d., combien coûteront 12 toises 5 pieds 8 pouces ?

On commence par calculer, d'après le cas précédent, le prix de 12 toises à raison de 12 l. 2 s. 3 d. $\frac{2}{11}$ d. la toise, puis on décompose 5 pieds en 3 pieds et en 2 pieds. 3 et 2 sont des parties aliquotes de la toise ; elles y sont contenues exactement : l'une en est la moitié, l'autre le tiers, et elles donneront au produit respectivement la moitié et le tiers du multiplicande.

Pour la partie du produit qui correspond à 8 pouces, on observe que 8 pouces forment le tiers de 2 pieds, ou de 24 pouces, et on prend le tiers du produit partiel 4 l. 0 s. 9 d. $\frac{2}{33}$ d. obtenu en multipliant le multiplicande par 2 pieds.

On voit ci-dessous les détails de l'opération :

		Multiplicande....	12 l.	2 s.	3 d.	$\frac{2}{11}$ d.	
		Multiplicateur...	12 t.	5 p.	8 p.		
Prix de 12 t., 5 pieds, 8 p.	Prix de 12 toises.	à raison de 12 liv.	144 l.				
		à raison de 2 s.	1 l.	4 s.			
		à raison de 3 d.	0	3			
		à raison de $\frac{2}{11}$ d.	0	0	2 d.	$\frac{2}{11}$ d.	
	Prix de 5 pieds.	pour 3 p. ou $\frac{1}{2}$ toise.	6	1	1	$\frac{13}{22}$	
		pour 2 p. ou $\frac{1}{3}$ toise.	4	0	9	$\frac{2}{33}$	
	Prix de 8 p. ou $\frac{1}{3}$ de 24 pouces.		1	6	11	$\frac{2}{99}$	
		Total...	156 l.	15 s.	11 d.	$\frac{169}{198}$ d.	

La Division des nombres complexes exige quelque attention pour déterminer la nature des unités du quotient, et pour réduire chaque reste de l'opération en unités de l'ordre immédiatement inférieur.

Exemple : On a donné 4783 l. 3 s. 9 d. pour paiement de 87 toises d'ouvrage, quel est le prix de la toise ?

Le quotient sera évidemment une somme d'argent exprimée en livres, sous et deniers.

On voit à côté le tableau des opérations :

4783 liv. 3 s. 9 d.	87
433	54 liv. 19 s. 7 d.
85	
3 s.	
85 liv. = 1700	
1703 s.	
833	
50	
9 d.	
50 s. = 600	
609 d.	
000	

Lorsque le dividende et le diviseur sont tous les deux des nombres complexes, on réduit le diviseur à la plus petite espèce d'unité qu'il renferme, et on multiplie le dividende par le dénominateur du diviseur.

Exemple : 57 toises 5 pieds 5 pouces d'ouvrages ont été payés 854 l. 17 s. 11 d ; à combien revient la toise ?

On réduira le premier nombre en pouces, ce qui donnera $\frac{4169}{72}$ toise pour nouveau diviseur. On multipliera 854 l. 17 s. 11 d. par 72, ce qui donnera 61 552 l. 10 s. par 4 169 ; le quotient sera 14 l. 15 s. 3 d. $\frac{1713}{4169}$ d.

Tous les cas de la division des nombres complexes peuvent se ramener à la division des fractions, en convertissant les nombres complexes sur lesquels on doit opérer en nombres fractionnaires de leur plus petite espèce d'unité. Mais, d'après les exemples précédents, on voit que cette manière d'opérer, si elle est la plus générale, n'est pas toujours la plus simple.

§ 6. *Preuves des opérations arithmétiques.*

ADDITION ET SOUSTRACTION. — La preuve la plus ordinairement usitée de l'addition consiste à recommencer de haut en bas les sommes partielles des diverses colonnes verticales, si l'on a opéré de bas en haut ou réciproquement. Mais la même erreur pouvant être commise dans les deux sens, cette preuve n'offre pas de garantie suffisante.

En ajoutant au reste d'une soustraction le nombre soustrait, on doit retrouver le nombre dont on a soustrait. L'addition donne donc la preuve de la soustraction.

Le *Dictionnaire de Mathématiques* de M. de Montferrier renferme la traduction inédite d'un fragment curieux du célèbre arithméticien et médecin arabe *Avicenne* (*aboualy Ebn-syna*). Ce fragment donne pour l'addition et la soustraction des preuves fondées sur les propriétés du nombre 9, savoir :

Pour l'addition, faites les sommes des chiffres de chacun des nombres à ajouter, et les sommes des chiffres de ces sommes elles-mêmes, jusqu'à ce que vous parveniez à des nombres moindres que 9 ; ajoutez tous ces nombres moindres que 9, et faites encore la somme des chiffres du total ; vous devrez obtenir le même résultat qu'en faisant la somme des chiffres du résultat de l'addition, et en poursuivant l'opération jusqu'à ce que vous soyez encore parvenu à un nombre moindre que 9.

Pour la soustraction, la somme des nombres correspondant au plus petit nombre et au reste, doit reproduire le nombre qui correspond à celui dont on soustrait.

On doit à un illustre géomètre, M. Cauchy, qui n'a pas dédaigné de s'occuper des principes les plus élémentaires des mathématiques, de nouveaux procédés aussi simples qu'élégants pour les preuves de l'addition et de la soustraction.

Les exemples suivants montrent quels sont ces procédés.

ADDITION AVEC LA PREUVE.

Nombres donnés.	320,4268	25	*Nombres auxiliaires.*
	16,202	11	
	403	7	
	20,0401	7	
Somme...	759,6689	50	*Somme.*

SOUSTRACTION AVEC LA PREUVE.

Nombres donnés.	196,589	38	*Nombres auxiliaires*
	42,37	16	
Différence...	154,219	22	*Différence.*

A la suite de chacun des nombres donnés ou calculés (la somme ou la différence), on a écrit le nombre auquel il se réduit quand on regarde tous ses chiffres comme exprimant des unités simples. Ainsi la somme des chiffres de 320,4268 est 25 ; celle des chiffres de 16,202 est 11 ; et ainsi de suite. La somme des chiffres de 759,6689 est 50, précisément comme la somme des nombres 25, 11, 7 et 7 écrite à la droite de ceux que l'on avait à ajouter. La somme des chiffres de 154, 219 est 22, précisément comme la différence des nombres 38 et 16 qui expriment les sommes des chiffres des nombres 196, 589 et 42, 37.

Pour étendre cette preuve au cas où il y a des reports à effectuer d'une colonne verticale à l'autre, il suffit d'écrire ces reports et d'en tenir compte, comme on le voit dans l'exemple suivant :

ADDITION AVEC LA PREUVE.

Nombres donnés.	198,57	30
	203,48	17
	317,34	18
	172,19	20
Reports....	121,2	6
Somme....	891,58	91

Ici la somme 31 des chiffres que renferme le nombre 891,58 étant augmentée de 6 dizaines, c'est-à-dire d'autant de dizaines qu'il y a d'unités dans les chiffres du report, doit reproduire et reproduit en effet le nombre 91, c'est-à-dire la somme totale des chiffres que renferment les reports et les nombres donnés.

MULTIPLICATION ET DIVISION. — La preuve de la multiplication peut se faire par la division : en divisant le produit par l'un des deux facteurs, on doit retrouver l'autre facteur.

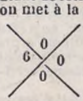
Réciproquement, la preuve de la division peut se faire par la multiplication. En multipliant le diviseur par le quotient, on doit retrouver le nombre que l'on obtient en retranchant du dividende donné le dernier reste obtenu.

Mais ces deux preuves, quoique offrant toute garantie contre les chances d'erreur, sont rarement employées parce qu'elles exigent de trop longs calculs. On emploie plus ordinairement les preuves par 9 ou par 11. Exemple : on a trouvé 4 995 012 pour le produit de 5748 par 869. On demande si ce produit est exact.

On fait la somme des chiffres de ce produit avec leur valeur absolue, et on en retranche 9 autant de fois que possible, ce qui donne 3 que l'on met à la partie supérieure d'une croix disposée comme ci-dessous.

On fait la même opération sur le multiplicande, ce qui donne 6, que l'on pose à gauche de la croix, et sur le multiplicateur, ce qui donne un 5, que l'on place à droite. Le produit de 6 par 5 est 30, d'où, retranchant 9 autant de fois que possible, reste 3, comme en haut de la croix, ce qui rend probable l'exactitude de l'opération primitive.

Pour vérifier la même opération par 11, on prendra dans le produit la différence entre la somme des chiffres de rang impair et celles des chiffres de rang pair, en en retranchant 11 autant de fois que possible ; ici on trouve 0 que l'on met à la partie supérieure de la croix.



Faisant la même opération sur le multiplicande, on trouve 6 ; on trouve 0 pour le multiplicateur. Le produit de 6 par 0 étant 0, on en conclut que l'opération est bonne.

Le savant académicien auquel nous devons une méthode si originale pour faire la preuve de l'addition et de la soustraction, a donné aussi pour la multiplication un procédé remarquable au moyen duquel la preuve devient extrêmement facile.

Supposons que l'on veuille multiplier 6,46 par 12,3. On formera d'abord les sommes partielles des produits du même ordre, en faisant glisser au-dessus du multiplicande le multiplicateur renversé ; et chaque fois on écrira le dernier chiffre de la somme partielle obtenue au-dessous du chiffre 2, qui représente les unités simples du multiplicateur, comme on le voit ici :

Multiplicateur renversé.	3,2 1	3,2 1	3,2 1
Multiplicande.	6,4 6	6,4 6	6,4 6
	1 8,	2 4,	3 2.

Dans le premier produit partiel on multiplie 3 par 6 qui se trouve au-dessous, ce qui donne 18 millièmes.

Le second produit partiel, 24 centièmes, s'obtient en ajoutant le produit de 3 par 4 au produit de 2 par 6.

Le troisième, 32, s'obtient en faisant la somme des trois produits 1×6, 2×4, 3×6.

Le quatrième 16, est égal à 1×4 augmenté de 2×6.

Le cinquième est 1×6 ou 6.

Lorsque toutes les sommes partielles seront formées, on les ajoutera pour obtenir le produit cherché, après avoir vérifié leur exactitude, en calculant de deux manières différentes un autre produit dont les deux facteurs seront la somme des chiffres du multiplicande et la somme des chiffres du multiplicateur. L'opération tout entière peut être disposée comme il suit:

MULTIPLICATION AVEC LA PREUVE.

Multiplicateur renversé.	3,21	6
Multiplicande.........	6.46	16
	13 21	7
	66 248	26
Produit....	79,458	96

Ici la somme des chiffres du multiplicande est 16; la somme des chiffres du multiplicateur, 6: et le produit de ces deux sommes, ou le nombre 96, doit résulter de l'addition des sommes partielles 18, 24, 32, 16 et 6, dans le cas où les derniers chiffres de celles-ci seraient considérés comme représentant les unités simples. Or, c'est effectivement ce qui arrive, puisque, dans le cas dont il s'agit, les sommes partielles 18, 24, 32, 16 et 6 renfermeraient 7 dixaines et 26 unités. Donc, dans l'opération effectuée, ces sommes doivent être considérées comme exactes. Quant à l'addition des sommes partielles, elle peut être à son tour immédiatement vérifiée, et pour obtenir sa preuve, il suffira d'observer que la somme faite du nombre 26 et du nombre 7, considéré comme représentant, non plus des dixaines, mais des unités simples, et précisément la somme totale 33 des divers chiffres du produit obtenu 79,458.

En suivant la méthode précédente, on n'aura jamais à s'inquiéter de la place que devra occuper la virgule décimale, puisque, en vertu des règles établies, les unités de même ordre du multiplicande et du produit se trouveront toujours placées dans la même colonne verticale.

Il sera commode, pour opérer ainsi, d'écrire le multiplicateur renversé sur une bande de papier mobile, que l'on fera glisser au-dessus du multiplicande, de manière à amener successivement le dernier chiffre de celui-là au-dessus de chacun des chiffres de celui-ci.

§ 7. *De l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines.*

Définitions et notations. — On appelle *puissance* d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Ainsi 3, 9, 27, 81, 243, sont la première, la seconde, la troisième, la quatrième, la cinquième puissance de 3, ou la puissance du premier, du second, du troisième *degré*, etc., de 3. Les mêmes puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32.

On appelle *racine* le nombre qui, multiplié plusieurs fois par lui-même, reproduit une quantité donnée. Ainsi, 3 est la racine seconde de 9, la racine troisième de 27, la racine quatrième de 81, la racine cinquième de 243, etc., ou la racine du second *degré* de 9, du troisième degré de 27, etc.

On appelle ordinairement *carré* la seconde et *cube* la troisième puissance; *racine carrée* et *racine cubique* la racine seconde et la racine troisième d'une quantité.

L'élévation à une puissance quelconque n'offre d'autre difficulté que celle qui peut résulter de la longueur des opérations. Elle se fait d'après les principes donnés plus haut pour la multiplication des nombres entiers, fractionnaires ou décimaux.

Les six premières puissances des dix premiers nombres sont renfermées dans la petite table suivante, toutes les puissances de 1 étant égales à 1.

1re	2e	3e	4e	5e	6e
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000

Les puissances des quantités s'indiquent en mettant à droite et un peu au-dessus de cette quantité, renfermée entre parenthèses, s'il est nécessaire, un petit chiffre qui indique le *degré* de la puissance, ou le nombre de facteurs égaux qui constituent cette puissance. Ainsi les expressions

$$307^2,\ \left(\frac{21}{34}\right)^3,\ \left(1+\frac{2}{3}\right)^6$$

indiquent respectivement le carré de 307, le cube de $\frac{21}{34}$ et la sixième puissance de $1+\frac{2}{3}$ ou de $\frac{5}{3}$.

Les racines sont indiquées par le signe *radical* $\sqrt{\quad}$, dans l'ouverture duquel on place le degré ou *indice* de la racine à extraire; on supprime ordinairement le 2 quand il s'agit de racine carrée. Les expressions

$$\sqrt{17},\quad \sqrt[3]{\frac{101}{103}},\quad \sqrt[8]{\left(24+\frac{7}{11}\right)}$$

représentent donc respectivement la racine carrée de 17, la racine cubique de $\frac{101}{103}$ et la racine huitième de $24+\frac{7}{11}$ ou de $\frac{271}{11}$.

Extraction de la racine carrée. — Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier 21 372 129, on le partage en tranches de deux chiffres à partir de la droite vers la gauche, la dernière tranche de ce côté pouvant n'en contenir qu'un. Le premier chiffre 4 de la racine s'obtient immédiatement, parce qu'il est la racine du plus grand carré 16 contenu dans 21. On retranche 16 de 21, et à côté du reste 5, on abaisse la tranche de deux chiffres 37 à droite de 21. Séparant le chiffre 7, on divise 53 par le double 8 du premier chiffre trouvé à la racine ; le quotient 6 indique le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on le place à côté de 8.

Carré donné.

21.37.21.29	4623 *Racine carrée cherchée.*	
53.7		
212.1	$86 \times 6 = 516$	*Opérations d'essai.*
2772.9	$922 \times 2 = 1844$	
00	$9243 \times 3 = 27729$	

au-dessous de la racine, et on multiplie 86 par 6 ; le produit 516 pouvant se retrancher du reste 537, 6 est le second chiffre de la racine. On abaisse la tranche suivante 21 à côté de la différence 21 que l'on trouve entre 537 et 516 ; et on divise 212 par le double 92 de la partie 46 déjà trouvée à la racine. Le quotient 2 sera le troisième chiffre cherché ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer on le place à côté de 92 et on multiplie 922 par 2, ce qui donne 1844, nombre moindre que 2121 ; à côté de 277, différence entre ces deux derniers nombres, on abaisse la tranche 29 ; on divise 2772 par 924, double du nombre 462 déjà obtenu à la racine ; le quotient 3 étant placé à droite de 924, on trouve que le produit de 9243 par 3 donne 27729. Le dernier reste est donc nul, et 4623 est exactement la racine carrée de 21 372 129, ainsi qu'on le vérifie *à posteriori* en élevant cette racine au carré.

Dans le cas où l'un des produits partiels 86×6, 922×2, 9243×3 aurait été plus grand que le nombre dont il doit être retranché, on aurait diminué successivement d'une unité le chiffre essayé 6, 2 ou 3, jusqu'à ce que la soustraction fût devenue possible.

Si, au lieu du nombre 21 372 129, on avait eu 21 372 243, il serait resté 114, et le nombre 4623 n'aurait exprimé qu'à *une unité près* la racine du carré proposé, lequel n'est pas un carré parfait.

Lorsque l'on veut extraire la racine carrée d'une fraction ordinaire, on commence par rendre son dénominateur un carré parfait, s'il ne l'est déjà ; ce qui se fait en multipliant les deux termes de la fraction par le produit des facteurs qui manquent à ce dénominateur pour être un carré. On extrait alors à une unité près la racine carrée du nouveau numérateur, et on la divise par la racine du nouveau dénominateur. Ainsi :

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}. \text{ (Résultat exact.)}$$

$$\sqrt{\frac{11}{25}} = \frac{\sqrt{11}}{5} = \frac{3}{5} \text{ (à } \tfrac{1}{5} \text{ d'unité près).}$$

$$\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7}{3\cdot 4}} = \sqrt{\frac{7\times 3}{3^2\times 2^2}} = \frac{\sqrt{21}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (à } \tfrac{1}{6} \text{ d'unité près).}$$

$$\sqrt{\frac{8}{11}} = \sqrt{\frac{8\times 11}{11^2}} = \frac{\sqrt{88}}{11} = \frac{9}{11} \text{ (à } \tfrac{1}{11} \text{ d'unité près).}$$

Pour extraire la racine carrée d'un nombr décimal, on commence par ajouter à droite de ce nombre assez de zéros pour que les chiffres décimaux soient en nombre pair double du nombre des chiffres décimaux que l'on veut avoir à la racine. Puis, faisant abstraction de la virgule, on extrait la racine du nombre ainsi obtenu, et on sépare sur la droite de cette racine, autant de chiffres décimaux qu'elle doit en avoir.

On trouvera ainsi que 5,87 est à moins de $\frac{1}{100}$ près la racine carrée de 34,5 ou de 34,5000.

Lorsqu'un nombre entier ou fractionnaire irréductible n'est pas un carré parfait, il est impossible d'obtenir exactement sa racine ; mais en le convertissant en fraction d'une espèce déterminée, et notamment en décimales, on peut approcher autant qu'on le veut de la valeur de cette racine.

Par exemple, pour obtenir $\sqrt{7}$ à moins de $\frac{1}{5}$ près, on posera

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7\times 5^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{175}}{5} = \frac{13}{5} = 2+\frac{3}{5}.$$

La racine de 2 à moins de $\frac{1}{1000}$ près s'obtient en extrayant à une unité près la racine de 2000000 et en séparant 3 chiffres décimaux sur la droite de cette racine, ce qui donne

$$\sqrt{2} = 1{,}414.$$

Les racines des nombres entiers et des fractions irréductibles qui ne sont pas des carrés parfaits ne pouvant pas être exprimées exactement par un nombre limité de chiffres, sont appelées *incommensurables* ou *irrationnelles du second degré.*

Extraction de la racine cubique. — Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier 401 947 272, on le partage en tranches de 3 chiffres de droite à gauche, la dernière de ce côté pouvant n'avoir que 2 ou même qu'un seul chiffre. Le plus grand cube contenu dans la dernière tranche à gauche 401 étant 343, 7 est le premier chiffre de la racine.

401.947.272	738
589.47	
129.302.72	$14700 = 70^2 \times 3$ (1ᵉʳ *diviseur*).
00	$639 = (70\times 3+3)\times 3$
	$15339 \times 3 = 46017$
	$15.98700 = 730^2 \times 3$ (2ᵉ *diviseur*).
	$17584 = (730\times 3+8)\times 8$
	$1616284 \times 8 = 12930272$

La différence entre 343 et 401 est 58, nombre à côté duquel on abaisse la tranche 947. Laissant les 2 derniers chiffres à droite de

NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	RACINES CARRÉES.	RACINES CUBIQUES	NOMBRES.	CARRÉS.	CUBES.	RACINES CARRÉES.	RACINES CUBIQUES
1	1	1	1,000	1,000	51	26 01	132 651	7,141	3,708
2	4	8	1,414	1,260	52	27 04	140 608	7,211	3,733
3	9	27	1,732	1,442	53	28 09	148 877	7,280	3,756
4	16	64	2,000	1,587	54	29 16	157 464	7,348	3,780
5	25	125	2,236	1,710	55	30 25	166 375	7,416	3,803
6	36	216	2,449	1,817	56	31 36	175 616	7,483	3,826
7	49	343	2,646	1,913	57	32 49	185 193	7,550	3,849
8	64	512	2,828	2,000	58	33 64	195 112	7,616	3,871
9	81	729	3,000	2,080	59	34 81	205 379	7,681	3,893
10	1 00	1 000	3,162	2,154	60	36 00	216 000	7,746	3,915
11	1 21	1 331	3,317	2,224	61	37 21	226 981	7,810	3,936
12	1 44	1 728	3,464	2,289	62	38 44	238 328	7,874	3,958
13	1 69	2 197	3,606	2,351	63	39 69	250 047	7,937	3,979
14	1 96	2 744	3,742	2,410	64	40 96	262 144	8,000	4,000
15	2 25	3 375	3,873	2,466	65	42 25	274 625	8,062	4,021
16	2 56	4 096	4,000	2,520	66	43 56	287 496	8,124	4,041
17	2 89	4 913	4,123	2,571	67	44 89	300 763	8,185	4,062
18	3 24	5 832	4,243	2,621	68	46 24	314 432	8,246	4,082
19	3 61	6 859	4,359	2,668	69	47 61	328 509	8,307	4,102
20	4 00	8 000	4,472	2,714	70	49 00	343 000	8,367	4,121
21	4 41	9 261	4,583	2,759	71	50 41	357 911	8,426	4,141
22	4 84	10 648	4,690	2,802	72	51 84	373 248	8,485	4,160
23	5 29	12 167	4,796	2,844	73	53 29	389 017	8,544	4,179
24	5 76	13 824	4,899	2,885	74	54 76	405 224	8,602	4,198
25	6 25	15 625	5,000	2,924	75	56 25	421 875	8,660	4,217
26	6 76	17 576	5,099	2,962	76	57 76	438 976	8,718	4,236
27	7 29	19 683	5,196	3,000	77	59 29	456 533	8,775	4,254
28	7 84	21 952	5,292	3,037	78	60 84	474 552	8,832	4,273
29	8 41	24 389	5,385	3,072	79	62 41	493 039	8,888	4,291
30	9 00	27 000	5,477	3,107	80	64 00	512 000	8,944	4,309
31	9 61	29 791	5,568	3,141	81	65 61	531 441	9,000	4,327
32	10 24	32 768	5,657	3,175	82	67 24	551 368	9,055	4,344
33	10 89	35 937	5,745	3,208	83	68 89	571 787	9,110	4,362
34	11 56	39 304	5,831	3,240	84	70 56	592 704	9,165	4,380
35	12 25	42 875	5,916	3,271	85	72 25	614 125	9,220	4,397
36	12 96	46 656	6,000	3,302	86	73 96	636 056	9,274	4,414
37	13 69	50 653	6,083	3,332	87	75 69	658 503	9,327	4,431
38	14 44	54 872	6,164	3,362	88	77 44	681 472	9,381	4,448
39	15 21	59 319	6,245	3,391	89	79 21	704 969	9,434	4,465
40	16 00	64 000	6,325	3,420	90	81 00	729 000	9,487	4,481
41	16 81	68 921	6,403	3,448	91	82 81	753 571	9,539	4,498
42	17 64	74 088	6,481	3,476	92	84 64	778 688	9,592	4,514
43	18 49	79 507	6,557	3,503	93	86 49	804 357	9,644	4,531
44	19 36	85 184	6,633	3,530	94	88 36	830 584	9,695	4,547
45	20 25	91 125	6,708	3,557	95	90 25	857 375	9,747	4,563
46	21 16	97 336	6,782	3,583	96	92 16	884 736	9,798	4,579
47	22 09	103 823	6,856	3,609	97	94 09	912 673	9,849	4,595
48	23 04	110 592	6,928	3,634	98	96 04	941 192	9,899	4,610
49	24 01	117 649	7,000	3,659	99	98 01	970 299	9,950	4,626
50	25 00	125 000	7,071	3,684	100	10000	1000000	10,000	4,642

cette tranche, on cherche combien de fois 589 contient le triple carré de 7 ou 147 : le quotient 3 sera le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer il faut aux 147 centaines qui résultent du triple de 70, ajouter les 639 que l'on obtient en multipliant le triple de 70, augmenté de 3 ou 213 par 3. La somme 15339 étant multipliée par 3 donne un produit 46017, qui peut être retranché de 58947, ce qui montre que le chiffre 3 de la racine est exact. A côté de la différence 12930 on abaisse la tranche suivante 272 et on divise de même 129302 par le triple carré de 73 ou par 15 987. Le quotient 8 est le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer on ajoutera au nombre 1598700 triple carré de 730, 17534 qui est égal au produit du triple de 730 augmenté de 8 par 8. La somme 1616234 étant multipliée par 8, le produit 12 930 272 sera précisément égal au second reste, de sorte que le reste final est nul et que 401 947 272 est le cube exact de 738, comme on peut s'en assurer *à posteriori* par la multiplication.

Si l'une des soustractions partielles n'avait pas été possible, on aurait diminué successivement d'une unité les chiffres essayés 3 ou 8, jusqu'à ce que la somme du triple produit du carré de la partie déjà trouvée à la racine, considérée comme exprimant des dixaines par les unités du triple de cette partie par le carré des unités et du cube des unités donnât un nombre qui ne fût pas trop fort.

Si, au lieu du nombre 401 947 272, on avait eu 401 959 397, le troisième reste aurait été de 12125, et 738 n'aurait exprimé qu'à moins d'une unité près la racine cubique du nombre proposé, qui n'est pas un cube parfait.

La racine cubique d'une fraction s'obtient en extrayant séparément la racine cubique de chacun des deux termes. Si le dénominateur n'est pas un cube parfait, on le rend tel en multipliant les deux termes de la fraction par un facteur convenable.

Ainsi

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5},$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{20}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2 \times 5^2}{2^2 \times 5 \times 2 \times 5^2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{150}}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ à } \frac{1}{10} \text{ d'unité près.}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt[3]{4 \times 7^2}}{7} = \frac{\sqrt[3]{196}}{7} = \frac{5}{7} \text{ à}$$

moins de $\frac{1}{7}$ d'unité près.

Les racines cubiques des nombres entiers et des fractions irréductibles qui ne sont pas des cubes parfaits, ne peuvent être exprimées exactement par un nombre limité de chiffres : ce sont des *irrationnelles du troisième degré*.

On peut approcher autant qu'on le veut de la véritable valeur d'une racine cubique incommensurable. Si l'évaluation doit être faite sous forme de fraction ordinaire d'un dénominateur déterminé, il suffit de multiplier le nombre dont on veut avoir la racine, par le cube de ce dénominateur, d'extraire à une unité près la racine cubique du produit obtenu, et de diviser cette racine par le dénominateur donné.

Il suit de là que pour évaluer une racine cubique avec une certaine approximation en décimales, il faut ajouter à droite du nombre dont on doit extraire la racine, assez de zéros pour que le compte des chiffres décimaux devienne, dans ce nombre, triple du compte des chiffres qu'on veut avoir à la racine.

Exemples : pour avoir $\sqrt[3]{5}$ à $\frac{1}{1000}$ d'unité près, on extrait à une unité près la racine cubique de 5 000 000 000, et sur la droite du nombre obtenu 1709, on sépare trois chiffres décimaux, ce qui donne 1,709. Le nombre le plus approché est 1,710, parce que le cube de 1710 étant 5 000 211 000 diffère moins de 5 000 000 000 que le cube de 1709 qui est 4 991 443 829.

Nous ne pouvons mieux terminer ce qui est relatif aux puissances qu'en donnant une table qui, pour tous les nombres naturels de 1 à 100, renferme :

1° le carré; 2° le cube; 3° la racine carrée à $\frac{1}{1000}$ d'unité près; 4° la racine cubique avec la même approximation.

Nous ne donnons aucun détail ici sur l'extraction des racines d'un degré supérieur au troisième. Nous nous contenterons de dire que l'on peut ramener à des extractions successives de racines carrées, l'extraction des racines quatrièmes, huitièmes, seizièmes, etc.; à des extractions successives de racines cubiques l'extraction des racines neuvièmes, vingt-septièmes, etc.; enfin à des extractions successives de racines carrées et cubiques celles des racines dont les degrés sont 6, 12, 24, 48, etc., ou 6, 18, 54, 162, etc. En un mot, avec des extractions de racines carrées et cubiques, on pourra trouver toute racine dont l'indice n'aura pas d'autres facteurs premiers que 2 et 3.

Ainsi pour avoir $\sqrt[6]{782757789696}$, on extraira d'abord la racine carrée du nombre donné, et on trouvera 884736 ; puis la racine cubique de ce dernier nombre, ce qui donnera

$$96 = \sqrt[6]{782757789696}.$$

§ 8. *Des rapports, des proportions et des progressions.*

Rapports par différence et par quotient. — Il y a deux manières de composer les quantités. On cherche soit de combien l'une surpasse l'autre, ce qui donne le *rapport* ou la *raison arithmétique* ou *par différence* ; soit combien l'une contient l'autre, ce qui donne le *rapport* ou la *raison géométrique* ou *par quotient*.

Il existe la plus grande analogie entre les résultats que l'on obtient par la considération de ces deux espèces de rapports : toutes les propriétés qui, pour le premier, comportent des *additions*, des *soustractions*, se changent, pour le second, en propriétés qui comportent des *multiplications* ou des *divisions*. S'agit il pour le premier de *multiplications* et de *divisions ?* on trouvera, pour le second, des *élévations aux puissances* et des *extractions de racines*.

Pour mieux faire ressortir ces résultats sur lesquels est fondée l'admirable découverte des logarithmes, nous mettrons chacune des propriétés relatives aux rapports par différence, en regard de son analogue relative aux rapports par quotient.

Dans tout rapport, la première des deux quantités que l'on considère, porte le nom d'*antécédent*, et la seconde le nom de *conséquent ;* toutes deux sont les *termes* du rapport

Lorsque deux rapports sont égaux, les quatre quantités qu'ils renferment, constituent ce que l'on appelle une *proportion.*

PROPRIÉTÉS COMPARÉES DES ÉQUIDIFFÉRENCES ET DES ÉQUIQUOTIENTS.

La *proportion* est dite *par différence* ou *arithmétique*, lorsqu'il s'agit d'un rapport de ce genre.

On lui donne encore le nom d'*équidifférence.*

Les quatre termes d'une équidifférence s'écrivent à la suite les uns des autres, en séparant seulement par un point (.) chaque antécédent de son conséquent; et par deux points (:) les deux rapports.

On écrira donc :

7 . 2 : 11 . 6 équidifférence qui revient à $7-2=11-6$.

La *proportion* est dite *par quotient* ou *géométrique*, lorsqu'il s'agit d'un rapport de ce genre.

On lui donne encore le nom d'*équiquotient.*

Les quatre termes d'une proportion par quotient s'écrivent à la suite les uns des autres en séparant seulement par deux points (:) chaque antécédent de son conséquent, et par quatre points (: :) les deux rapports.

On écrira donc

21 : 3 : : 14 : 2

équiquotient qui revient a $\frac{21}{3}=\frac{14}{2}$.

Le premier et le dernier termes d'une proportion s'appellent les *extrêmes;* le second et le troisième sont les *moyens.*

Dans toute équidifférence

7 . 2 : 11 .6,

la *somme* $7+6$ des extrêmes 7 et 6, est égale à la *somme* $2+11$ des moyens 2 et 11.

On obtient donc facilement un quelconque des quatre termes d'une équidifférence lorsque l'on connaît les trois autres. Il suffit pour cela de faire la *somme* des moyens si c'est un extrême qui manque, et de *retrancher* de cette somme l'extrême connu. On ferait la *somme* des extrêmes et on en *retrancherait* le moyen connu, si c'était l'autre moyen que l'on voulait déterminer.

Réciproquement, toutes les fois que quatre quantités sont telles que la *somme* de deux d'entre elles soit égale à la *somme* de deux autres, ces quatre quantités forment une équidifférence dont les deux premières quantités occupent les moyens ou les extrêmes, et les deux autres les extrêmes ou les moyens.

On peut donc faire subir à toute proportion par différence tous les changements qui ne sont pas de nature à altérer l'égalité entre la *somme* des extrêmes et celle des moyens.

L'équidifférence

7 . 2 : 11 . 6

donnera lieu aux sept autres équidifférences suivantes :

7 . 11 : 2 . 6
6 . 11 : 2 . 7
6 . 2 : 11 . 7
2 . 6 : 7 . 11
2 . 7 : 6 . 11
11 . 7 : 6 . 2
11 . 6 : 7 . 2

Dans toute proportion par quotient

21 : 3 : : 14 : 2,

le *produit* 21×2 des extrêmes 21 et 2 est égal au *produit* 3×14 des moyens 3 et 14.

On détermine donc sans peine un quelconque des quatre termes d'une proportion géométrique, lorsque l'on connaît les trois autres. Il suffit pour cela de faire le *produit* des moyens si c'est un extrême qui manque, et de *diviser* ce produit par l'extrême connu. On ferait le *produit* des extrêmes et on le *diviserait* par le moyen connu, si c'était l'autre moyen que l'on voulait déterminer.

Réciproquement, toutes les fois que quatre quantités sont telles que le *produit* de deux d'entre elles soit égal au *produit* de deux autres, ces quatre quantités forment un équiquotient dont les deux premières quantités occupent les moyens ou les extrêmes, et les deux autres les extrêmes ou les moyens.

On peut donc faire subir à toute proportion par quotient tous les changements qui ne sont pas de nature à altérer l'égalité entre le *produit* des extrêmes et celui des moyens.

L'équiquotient

21 : 3 : : 14 : 2

donnera lieu aux sept autres équiquotients suivants :

21 : 14 : : 3 : 2
2 : 14 : : 3 : 21
2 : 3 : : 14 : 21
3 : 2 : : 21 : 14
3 : 21 : : 2 : 14
14 : 21 : : 2 : 3
14 : 2 : : 21 : 3

Lorsque dans une proportion par différence ou par quotient les deux moyens sont égaux, la proportion est dite *continue.*

La valeur du terme moyen est dite *moyenne arithmétique* entre celle des deux termes extrêmes, s'il s'agit d'une équidifférence.

La moyenne arithmétique entre deux quantités est donc égale à leur *somme divisée* par 2.

Ainsi dans l'équidifférence continue.

9 . 17 . 17 . 25

on a $17=\frac{9+25}{2}=\frac{34}{2}$

Cette équidifférence continue s'écrit ordinairement ainsi :

La valeur du terme moyen est dite *moyenne géométrique* entre celle des deux termes extrêmes, s'il s'agit d'un équiquotient.

La moyenne géométrique entre deux quantités est donc égale à la *racine carrée* de leur *produit.*

Ainsi dans la proportion géométrique continue

5 : 30 : : 30 : 180

on a $30=\sqrt{5\times 180}=\sqrt{900}$

Cet équiquotient continu s'écrit ordinairement ainsi

$\div 9 \cdot 17 \cdot 25$

Quand on a plusieurs équidifférences telles que

$$7 \cdot 2 : 11 \cdot 6$$
$$3 \cdot 5 : 10 \cdot 12$$
$$9 \cdot 15 : 8 \cdot 14$$

On obtient encore une équidifférence en *ajoutant* toutes celles-ci terme à terme. Ainsi

$$7+3+9 \cdot 2+5+15 : 11+10+8 \cdot 6+12+14$$

ou $19 \cdot 22 : 29 \cdot 32$

Lorsque l'on *multiplie* tous les termes d'une équidifférence par un même nombre, les produits forment encore une équidifférence.

Ainsi de $7 \cdot 2 : 11 \cdot 6$
on déduit $7 \times 8 \cdot 2 \times 8 : 11 \times 8 \cdot 6 \times 8$
ou $56 \cdot 16 : 88 \cdot 48$.

$\div\div 5 : 30 : 180$

Quand on a plusieurs équiquotients tels que

$$21 : 3 :: 14 : 2$$
$$11 : 22 :: 4 : 8$$
$$5 : 25 :: 2 : 10$$

On obtient encore un équiquotient en *multipliant* tous les précédents terme à terme. Ainsi :

$$21 \times 11 \times 5 : 3 \times 22 \times 25 :: 14 \times 4 \times 2 : 2 \times 8 \times 10$$

ou

$$1155 : 1650 :: 112 : 160.$$

Lorsque l'on *élève* tous les termes d'un équiquotient à *une* même *puissance*, les quatre termes résultants forment encore un équiquotient. Ainsi de $21 : 3 :: 14 : 2$ on déduit :

$$21^3 : 3^3 :: 14^3 : 2^3 \text{ ou } 9261 : 27 :: 2744 : 8.$$

PROPRIÉTÉS EXCLUSIVES AUX ÉQUIQUOTIENTS.

De toute proportion par quotient telle que

$$21 : 3 :: 14 : 2$$

on peut déduire la proportion suivante

21 plus ou moins un certain nombre de fois 3 *est à* 3, *comme* 14 plus ou moins le même nombre de fois 2 *est à* 2. Ce qui s'exprime ainsi d'une manière abrégée :

$$21 \pm n \times 3 : 3 :: 14 \pm n \times 2 : 2$$

(n est le nombre de fois que l'on ajoute chaque conséquent à son antécédent ou qu'on le retranche.)

De cette propriété fondamentale on peut en déduire une foule d'autres, en opérant sur les sept proportions auxquelles donne lieu la proportion $21 : 3 :: 14 : 2$ par de simples changements dans l'ordre des termes. Les modifications les plus souvent usitées sont les suivantes :

$$21 \pm 3 : 3 :: 14 \pm 2 : 2$$

et $21 \pm 14 : 3 \pm 2 :: 14 : 2.$

DES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE ET PAR QUOTIENT.

On appelle *progression par différence* une suite de termes tels que le rapport *par différence* de deux termes consécutifs quelconques soit constant.

Telle est la suite 22, 19, 16, 13, 10... qui s'écrit ainsi :

$$\div 22 \cdot 19 \cdot 16 \cdot 13 \cdot 10...$$

et que l'on énonce : 22 est à 19 comme 19 est à 16 comme 16 est à 13 comme 13 est à 10, etc.

La progression précédente est décroissante, et a pour *raison* 3. Au contraire la progression

$$\div 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 ...$$

qui a encore pour raison 3 est croissante.

Un terme quelconque d'une progression par différence est égal au premier terme *augmenté* ou *diminué* d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on considère, suivant que la progression est croissante ou décroissante.

Ainsi $19 = 22 - 3$, $16 = 22 - 3 \times 2$, $13 = 22 - 3 \times 3$, et $4 = 1 + 3$, $7 = 1 + 3 \times 2$, $10 = 1 + 3 \times 3$.

La *somme* de deux termes également distants des extrêmes est égale à la somme des extrêmes dans une progression par différence.

Ainsi $22 + 10 = 19 + 13 = 16 + 16 = 32$.

La *somme* des termes d'une progression par *différence* est égale à la *moitié* du résultat que l'on obtient en *multipliant la somme* des extrêmes par le nombre des termes de la progression. Ainsi :

$$22+19+16+13+10=\left(\frac{22+10}{2}\right)\times 5 = 80.$$

Pour insérer entre deux termes donnés des *moyens équidifférents* ou *arithmétiques*,

On appelle *progression géométrique* ou *par quotient* une suite de termes tels que le rapport par *quotient* de deux termes consécutifs quelconques soit constant. Telle est la suite 48, 24, 12, 6, etc., qui s'écrit ainsi :

$$\div\div 48 : 24 : 12 : 6 : 3$$

et que l'on énonce : 48 est à 24 comme 24 est à 12 comme 12 est à 6, etc.

La progression précédente est décroissante et a pour *raison* $\frac{1}{2}$. Au contraire, la progression

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 :$$

qui a pour raison 2 est croissante.

Un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier terme *multiplié* par la raison élevée à une puissance, dont le degré est marqué par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère.

Ainsi $24 = 48 \times \frac{1}{2}$, $12 = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $6 = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ et $6 = 3 \times 2$, $12 = 3 \times 2^2$, $24 = 3 \times 2^3$, $48 = 3 \times 2^4$.

Le *produit* de deux termes également distants des extrêmes est égal au *produit* des extrêmes dans une progression par quotient.

Ainsi $48 \times 3 = 24 \times 6 = 12 \times 12 = 144$.

Le *produit* des termes d'une progression par quotient est égal à la *racine carrée* du résultat que l'on obtient en *élevant* le *produit* des extrêmes à une *puissance* marquée par le nombre des termes de la progression.

Ainsi $3 \times 6 \times 12 \times 24 \times 48 = \sqrt{3^5 \times 48^5} = 248832$.

Pour insérer entre deux termes donnés des *moyens proportionnels* ou *géométriques*, c'est-à-dire des termes formant avec les premiers une progression par différence, dont ceux-ci occuperaient les extrêmes, il faut *retrancher* le plus petit nombre du plus grand, et *diviser* le *reste* par le nombre des moyens à insérer, augmenté lui-même de l'unité. Le *quotient* sera la raison de la progression ascendante ou descendante.

Ainsi pour insérer 8 moyens arithmétiques entre 4 et 11, on retranche 4 de 11, le reste 7 divisé par 9 donne la raison cherchée ; la progression est donc

$$\div 4 \,.\, 4+\tfrac{7}{9} \,.\, 5+\tfrac{5}{9} \,.\, 6+\tfrac{3}{9} \,.\, 7+\tfrac{1}{9} \,.\, 7+\tfrac{8}{9} \,.\, 8+\tfrac{6}{9} \,.\, 9+\tfrac{4}{9} \,.\, 10+\tfrac{2}{9} \,.\, 11$$

c'est-à-dire des termes formant avec les premiers une progression par quotient dont ceux-ci occuperaient les extrêmes, il faut *diviser* le premier par le dernier, et *extraire*, du *reste* une *racine* d'un degré égal au nombre des moyens à insérer augmenté lui-même de l'unité. Cette *racine* sera la raison de la progression.

Ainsi pour insérer 9 moyens proportionnels entre 2 et 2048, on divise 2048 par 2 ; et comme le quotient 1024 est la dixième puissance de 2, on en conclut que la raison de la progression est 2 ; de sorte que cette progression est

$$\div\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.$$

Quelques résultats curieux obtenus par les progressions. — Les progressions arithmétiques et géométriques conduisent à la solution de quelques problèmes intéressants.

Le savant historien des mathématiques, Montucla, raconte que, vers la fin du siècle dernier, un pari fut fait entre deux personnes de la manière suivante : 100 cailloux furent rangés en ligne droite à des intervalles égaux d'une toise chacun ; et un panier fut placé dans le prolongement de la même ligne à une toise du premier caillou. L'une des deux personnes paria qu'elle mettrait, à aller de la grille du château du Luxembourg à la grille du château de Meudon, et à revenir, moins de temps que l'autre à ramasser tous les cailloux et à les porter un à un dans le panier. Cette dernière personne, ne pouvant se persuader que la chose fût possible, risqua une somme assez forte qu'elle perdit.

— On le conçoit facilement en faisant, d'après les règles precédentes, la somme des 100 termes de la progression arithmétique, dont le premier terme est 1 et la raison 1 ce qui donne 10 100.

Or, il y a tout au plus 5050 toises du Luxembourg à Meudon, ce qui fait à peine 10100 toises pour aller et revenir. L'individu qui ramassait les pierres n'avait donc pas l'avantage d'une distance moins longue à parcourir, et il était obligé de se baisser et de se relever cent fois de suite, ce qui devait beaucoup augmenter sa fatigue. Aussi n'en était-il qu'à la quatre-vingt-cinquième pierre, ou autrement n'avait-il parcouru que 7310 toises lorsque l'autre parieur revint de Meudon.

La *moyenne* entre plusieurs quantités étant la *somme de ces quantités divisées par leur nombre*, il est clair que la distance moyenne à franchir pour réunir les cent cailloux dans le panier était de 101 toises, dont moitié en allant et moitié en revenant.

Il est facile maintenant de saisir l'analogie entre la question précédente et la détermination des distances moyennes qu'il faut parcourir pour approvisionner une route de matériaux tels que les tas de pavés, de sable et de pierres cassées destinés à son entretien. Le prix de transport de ces matériaux est toujours déterminé *à priori* par un calcul de distance moyenne, qui est quelquefois assez compliqué.

L'histoire de l'invention du jeu des échecs donne un exemple curieux de la somme des termes d'une progression géométrique croissante. Sessa, fils de Daher, imagina, dit-on, ce jeu, où le roi, quoique la pièce la plus importante, ne peut pas faire un pas sans le secours de ses sujets, les pions, dans le but de rappeler à Schéram, l'un des rois de l'Inde, les principes de justice et d'équité d'après lesquels il devait gouverner ses sujets. Schéram, enchanté d'une leçon donnée d'une manière si ingénieuse, permit à Sessa de désigner la récompense qui lui conviendrait. Sessa demanda un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la soixante-quatrième case de l'échiquier. Le prince s'indignait presque de la modicité du prix qui lui était demandé; mais quelle fut sa surprise lorsque, tout calcul fait, on lui annonça que le nombre de grains de blé serait de

18 446 774 073 709 551 615.

Le célèbre géomètre Wallis fait observer que cette quantité de blé formerait une pyramide de 9 milles anglais de longueur, de largeur et de hauteur. On peut dire encore qu'il aurait fallu huit fois la superficie de la terre supposée entièrement ensemencée de blé pour donner en une année de quoi satisfaire au désir du modeste Brahmine. Le grain produit par la récolte couvrirait au moins toute la superficie de la France à la hauteur d'un mètre.

Pour trouver la somme des termes d'une progression géométrique croissante, il faut multiplier le premier terme par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes diminué de l'unité, puis diviser le produit par la raison diminuée de l'unité. Dans l'exemple précédent, le premier terme est 1, la raison 2 et le nombre des termes 64. On élève donc 2 à la soixante-quatrième puissance et on diminue d'une unité, ce qui donne le résultat précédent.

Une aventure analogue à la précédente est citée quelquefois. Un maquignon offre un très-beau cheval pour le prix du vingt-quatrième clou des fers de l'animal, en supposant que le premier vaille un centime, le second clou deux centimes, le troisième quatre, et ainsi de suite toujours en doublant. On trouve que le prix du cheval, à cette condition, monterait à la somme exorbitante de 83 886 francs 8 centimes.

La somme des termes d'une progression géométrique décroissante s'obtient comme dans le cas de la progression croissante, si ce n'est que la raison étant moindre que l'unité, on fait la soustraction en sens inverse.

Lors même qu'une progression géométrique décroissante est prolongée à l'infini, la somme de ses termes est une quantité finie, parfaitement déterminée que l'on obtient en divisant le premier terme par la différence entre l'unité et la raison.

Cette règle sert à résoudre très-simplement un paradoxe proposé par Zénon, le chef de la secte des Stoïciens.

Achille marche dix fois plus vite qu'une tortue qui a un stade d'avance sur lui : il est impossible qu'il l'atteigne, disait Zénon. Car pendant qu'Achille fera un stade, la tortue en fera $\frac{1}{10}$; et pendant qu'il fera ce dixième, la tortue avancera de $\frac{1}{100}$ qu'elle aura encore d'avance, et ainsi de suite jusqu'à l'infini ; donc il s'écoulera un nombre infini d'instants avant que le héros ait atteint le reptile.

Le sophisme de ce raisonnement consiste en ce que l'on y suppose égaux les intervalles de temps pendant lesquels Achille parcourt successivement le premier stade et ensuite le dixième, le centième, le millième de stade.... Si cette égalité avait lieu, Achille n'atteindrait réellement pas la tortue. Mais en réalité, Achille n'emploie à parcourir $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\dots$ de stade, que la dixième, que la centième, que la millième partie du temps qu'il a mis à parcourir le stade entier. En désignant donc par 1 ce dernier espace de temps, les autres temps seront représentés par les nombres $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\dots$ et le temps total sera égal à la somme des termes de la progression géométrique décroissante $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, c'est-à-dire à $1 + \frac{1}{9}$.

§ 9. *Des logarithmes.*

Utilité des logarithmes. — La manière dont nous avons mis en regard les propriétés des proportions et des progressions par différence et par quotient, a fait ressortir l'analogie frappante qui existe entre les résultats déduits des définitions des deux espèces de rapports. En poussant cette analogie jusqu'à ses dernières conséquences, on arrive à la connaissance des *logarithmes* au moyen desquels les multiplications sont ramenées à des additions, les divisions à des soustractions, les élévations aux puissances à des multiplications, et les extractions de racines à des divisions. Et cependant on remarque avec peine que cette admirable découverte, faite il y a plus de deux siècles, par le baron écossais *Néper* (ou *Napier*) ne se trouve point encore suffisamment naturalisée en France.

« On a pu, » dit le savant M. de Prony, « jusqu'à la fin du siècle dernier, trouver une faible excuse à cette lacune de l'enseignement du calcul élémentaire, dans la constitution de notre ancien système métrique, fondé, en général, sur des divisions soit duodécimales, soit rapportées aux multiples et sous-multiples de 12, ce qui offrait quelque embarras pour l'emploi immédiat des tables de logarithmes ; mais le nouveau système métrique français a totalement fait disparaître ces difficultés, et se prête, même beaucoup mieux, au calcul logarithmique que le système métrique anglais. »

M. de Prony, dans le but de populariser l'usage des logarithmes, a rédigé une instruction élémentaire à laquelle on ne peut reprocher que trop de longueur dans certains développements. Celle que nous allons donner ici ne renfermera que les détails strictement nécessaires.

Origine et propriétés des logarithmes. — Si on compare deux progressions, l'une arithmétique, dont le premier terme soit zéro, l'autre géométrique, dont le premier terme soit l'unité, telle que :

$$\div 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . \text{etc.}$$
$$\dot{\div}\; 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : \text{etc.}$$

les termes de la progression arithmétique sont appelés les logarithmes des termes de même rang dans la progression géométrique.

Si on ajoute les termes 6 et 12 de la progression arithmétique, et que l'on multiplie l'un par l'autre les termes 4 et 16, qui, dans la progression géométrique, correspondent respectivement à 6 et à 12, la *somme* 18 et le *produit* 64 se correspondent dans les deux progressions.

Donc le logarithme d'un *produit* est égal à la *somme* des logarithmes des facteurs.

Le logarithme d'un *quotient* est égal à la *différence* entre les logarithmes du dividende et du diviseur.

Le logarithme d'une *puissance* quelconque d'un nombre est égal au *produit* du logarithme du nombre par le degré de la puissance.

Le logarithme d'une *racine* quelconque d'un nombre est égal au *quotient* du logarithme du nombre par le degré de la racine à extraire.

Le système de logarithmes que l'on emploie ordinairement consiste dans l'ensemble des deux progressions.

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .$$
$$\dot{\div}\; 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \quad 1000000 .$$

La seconde peut se mettre sous la forme

$$\dot{\div}\; 1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 :$$

Table des logarithmes. — Pour que les propriétés des logarithmes soient applicables à tous les nombres, il suffit de concevoir que l'on ait inséré entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., un très-grand nombre de moyens géométriques, de sorte que, parmi ces termes intercalaires qui différeront très-peu les uns des autres, il y en ait deux qui comprennent le nombre 2 ; deux autres qui comprennent le nombre 3 ; deux le nombre 4, etc. Si l'on a inséré entre les termes consécutifs de la progression arithmétique, les mêmes nombres de moyens équidifférents, ceux de ces termes intercalaires qui correspondront aux nombres les plus rapprochés de 2, de 3, de 4, dans la progression géométrique, pourront être considérés comme les logarithmes de 2, de 3, de 4, et jouiront des propriétés précédemment énoncées.

Pour parvenir à insérer ainsi un grand nombre de moyens géométriques entre deux quantités données, on peut imaginer que ce nombre soit pris égal à une puissance de 2 diminuée de l'unité, telle que 7, 15, 31, 63, car alors on aura à extraire une racine d'un degré marqué par une puissance exacte de 2, telle que 8, 16, 32, 64, et on sait que l'opération n'exige que des extractions successives de racines carrées. (Col. 38).

Quoi qu'il en soit des procédés employés pour calculer les logarithmes des nombres, on conçoit de quelle utilité peut être une table qui renferme, à côté des nombres entiers consécutifs, leurs logarithmes avec une approximation suffisante. Déduisons les caractères principaux de cette table des deux progressions fondamentales qui se correspondent.

D'abord les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000,.. ou entre 1 et 10^1, entre 10^1 et 10^2, entre 10^2 et 10^3,... sont respectivement compris entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc... Or si l'on appelle *caractéristique* la partie entière d'un logarithme, il s'ensuit que :

1° La caractéristique du logarithme d'un nombre est moindre d'une unité que le compte des chiffres de la partie entière de ce nombre.

2° La caractéristique du logarithme d'un nombre change seule quand on déplace dans ce nombre la virgule qui sépare les entiers des chiffres décimaux. La partie décimale du logarithme ne change pas.

Ainsi Log. 13 = Log. 1300 — Log. 100
= Log. 1300 — 2.

Log. 1245 = Log. 1,245 + Log. 1000 =
Log. 1,245 + 3.

On connaît donc, *à priori*, d'après ces principes, la caractéristique ou partie entière du logarithme de tout nombre plus grand que l'unité.

Pour déterminer les caractéristiques des logarithmes des nombres moindres que l'unité, il suffit d'imaginer que les progressions primitives ont été prolongées en avant vers la gauche, suivant la même loi. Or, comme dans la première, chaque terme est égal à celui qui le suit vers la droite, diminué d'une unité, et que dans la seconde chaque terme est égal à celui qui le suit vers la droite divisé par 10, on écrira :

$$\div \quad . \quad . \; 4 \; . \; \bar{3} \; . \; \bar{2} \; . \; \bar{1} \; . \; 0 \; . \; 1 \; . \; 2$$

$$\div\!\!\cdot \quad \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 :$$

Les caractères $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$... dans lesquels le signe — (moins) est placé au-dessus des nombres, indiquent que ces nombres sont *négatifs*, qu'ils doivent être soustraits au lieu d'être ajoutés.

Si donc le logarithme de 2 est 0,30103, celui de 20 sera 1,30103, celui de 200 sera 2, 30103; celui de 0,2 sera $\bar{1}$,30103, celui de 0,02 sera $\bar{2}$,30103, etc...

Puisque l'on connait toujours *à priori* la caractéristique positive ou negative d'un nombre quelconque plus grand ou plus petit que l'unité, il est inutile de mettre dans les tables les caractéristiques des logarithmes. Cependant les petites tables de Lalande donnent les logarithmes des nombres de 1 à 10 000 avec leurs caractéristiques. Mais dans la plupart des calculs il faut supprimer par la pensée ces caractéristiques et donner ensuite au résultat la caractéristique convenable.

Les tables les plus étendues qui aient encore été publiées sont dues à Callet; elles vont jusqu'à 108000, et renferment les logarithmes, sans caractéristique, avec 8 décimales pour les nombres moindres que 1200, et avec 7 pour tous les autres nombres entiers jusqu'à 108000.

Il résulte des principes précédents que l'on pourrait supprimer tous les logarithmes des nombres compris entre 1 et 1000, et ne donner que ceux des nombres compris entre 1000 et 10000, dans les tables qui vont jusqu'à 10000 qu'on pourrait de même supprimer les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10000 dans les tables qui s'étendent jusqu'à 100 000. C'est ce que Borda a fait pour les tables logarithmiques qu'il a jointes à ses *tables trigonométriques décimales*.

Usage de notre petite table. — Les bornes de notre livre ne nous permettaient pas d'y insérer une table donnant les logarithmes de tous les nombres entiers consécutifs depuis 1 jusqu'à 10 000 : mais la table que nous publions suffira dans beaucoup de cas où l'on n'a pas besoin d'une très-grande approximation dans les calculs. (Col. 187).

Pour trouver la partie décimale du logarithme correspondant à un nombre donné compris entre 1000 et 10 000, il suffira de chercher les deux premiers chiffres à gauche de ce nombre, dans la première colonne verticale à gauche de la table, intitulée *nombres* ; et de suivre la ligne horizontale commençant par ces deux chiffres, jusqu'à la rencontre de la colonne verticale commençant par les deux chiffres qui viennent immédiatement après les premiers. La caractéristique est d'ailleurs toujours connue *à priori*.

Ainsi pour avoir le logarithme de 8575, on cherche dans la première colonne à gauche de la troisième page le nombre 85; on suit la ligne horizontale qui commence par ce nombre jusqu'à ce que l'on arrive à la colonne verticale en haut de laquelle est placé 75; à la rencontre des deux on trouve 93323.

On a donc Log. 8575 = 3, 93323.

On aurait de même

	Log.	9700 = 3, 98677
Et par conséquent	Log.	97 = 1, 98677.
Puis	Log.	7000 = 3, 84510.
Et par suite	Log.	7 = 0, 84510.

On voit donc que la table donne aussi les logarithmes des nombres compris entre 1 et 1000.

Mais cette table ne renferme que les logarithmes des nombres de 5 en 5 unités. S'il s'agissait d'un nombre qui ne fût pas un multiple exact de 5, on prendrait dans la table le logarithme du nombre qui en différerait le moins, en plus ou en moins.

Ainsi au lieu de log. 5848, on prendra log. 5850 = 3, 76716.

Au lieu de log. 122, on prendra log. 120 = 2,07918.

Réciproquement, s'il faut chercher dans la table à quel nombre correspond un logarithme connu, on choisit, dans l'une des colonnes destinées aux logarithmes, le nombre qui approche le plus du logarithme donné ; on suit la ligne horizontale de ce logarithme jusqu'à la première colonne verticale à gauche ; les deux chiffres que l'on y rencontre sont les deux premiers chiffres à gauche du nombre cherché; les deux chiffres suivants sont en tête de la colonne verticale où se trouve le logarithme donné.

Ainsi étant donné le logarithme

3, 65849

on trouve que 65849 est sur la ligne horizontale qui commence par 45 et dans la colonne verticale en tête de laquelle est 55. On aura donc

3, 65849 = Log. 4555.

On aurait de même

1, 37299 = Log. 23,60

0, 86255 = Log. 7,285.

et enfin

$\bar{3}$, 23895 = Log. 0,001735.

Sachant trouver les logarithmes des nombres et les nombres qui correspondent à des logarithmes donnés, on peut effectuer avec notre table toutes les opérations pour lesquelles l'usage des logarithmes est utile. Seulement les logarithmes des quantités moindres que l'unité exigent quelques remarques préliminaires.

Calcul des quantités négatives. — D'abord le logarithme d'une fraction proprement dite peut se présenter sous forme entièrement négative ; car le logarithme du dénominateur devant être retranché du logarithme du numérateur, qui est plus petit, on effectuera la soustraction en sens inverse et on donnera au reste le signe —

Ainsi $\text{Log.}\frac{5}{15} = \text{Log. } 5 - \text{Log. } 15$

Or $\text{Log. } 15 = 1,17609$

$\text{Log. } 5 = 0,69897$

$\text{Log } \frac{5}{15} = -0,47712.$

Mais ce même logarithme peut être disposé de manière que la caractéristique seule soit négative. Il suffit pour cela d'ajouter et de retrancher un nombre entier plus grand que le logarithme négatif. Ici on aura en ajoutant et en retranchant l'unité.

$\text{Log. } \frac{5}{15} = -1 + (1,00000 - 0,47712) = \bar{1},52288.$

Réciproquement un logarithme à caractéristique négative peut être transformé en un logarithme entièrement négatif. Ainsi :

$\bar{3},23895 = -(3,00000 - 0,23895) = -2,76105.$

Ensuite pour effectuer les diverses opérations de l'arithmétique sur les quantités négatives, il faut suivre les règles suivantes.

L'addition se fait sans aucun changement des signes + et —, de sorte que les quantités négatives doivent réellement être soustraites lorsqu'on les ajoute. Pour soustraire une quantité positive ou négative, il faut l'ajouter avec un signe contraire à celui qu'elle a. Ainsi, pour retrancher — 2,76105 de 4,00000, on ajoutera + 2,76105, et le résultat sera 6,76105.

Pour retrancher $\bar{3},23895$ du même nombre 4,00000, il faut ajouter + 3 à 4, ce qui donne 7,00000 et retrancher la partie 0,23895, et le résultat final est encore 6,76105, comme on devait s'y attendre. Puisque $\bar{3},23895 = -2,76105$.

La multiplication de quantités affectées des signes + et — donne lieu à 4 cas différents, Savoir :

+ à multiplier par +, le signe du produit est +.
+. . . . . . . par —, le signe du produit est —.
—. . . . , . . par +, le signe du produit est —.
—. . . . . . . par —, le signe du produit est +.

Ce qui se résume ainsi : Le produit de deux termes affectés du même signe a le signe + ; le produit de deux termes affectés du signe contraire a le signe —.

Lorsque l'on doit ajouter et retrancher à la fois plusieurs logarithmes, il est très-facile de ramener l'opération à une simple addition. Il suffit, pour cela, de remplacer par leurs *compléments arithmétiques* les logarithmes à soustraire.

Le complément arithmétique d'un logarithme est un second logarithme qui, ajouté au premier, donne une somme égale à zéro. D'où l'on voit que la soustraction du logarithme primitif peut réellement être ramenée à l'addition de son complément.

La règle générale pour écrire facilement, à vue, le complément arithmétique d'un logarithme, est la suivante :

1° Ajoutez — 1 à la caractéristique, après en avoir changé le signe, c'est-à-dire en la prenant négativement, si elle est positive, ou positivement, si elle est négative.

2° Retranchez successivement de 9 tous les chiffres à droite de la virgule, excepté le dernier chiffre significatif que vous retrancherez de 10.

Premier exemple. Soit le logarithme 4,76543.

La caractéristique changée de signe est $\bar{4}$, et en ajoutant $\bar{1}$, on a $\bar{5}$; écrivons à droite de $\bar{5}$ l'excès de 9 sur chacun des quatre premiers chiffres à droite de la virgule, et de 10 sur le cinquième chiffre à droite, nous aurons :

Compl. $4,76543 = \bar{5},23457$.

Second exemple : Soit le logarithme donné $\bar{3},64330$.

La caractéristique $\bar{3}$ prise avec un signe contraire est 3 ; ajoutant — 1, on a 2 ; les trois premiers chiffres à droite de la virgule doivent seuls être soustraits de 9, et le quatrième, qui est le dernier chiffre significatif, doit être retranché de 10 ; le zéro reste. On a donc :

Compl. $\bar{3},64330 = 2,35670$.

Troisième exemple : Le logarithme donné est $\bar{1},28010$.

La caractéristique changée de signe est 1, ajoutant $\bar{1}$ on a zéro ; donc,

Compl. $\bar{1},28010 = 0,71990$.

Applications numériques. — Ces préliminaires posés, passons à l'application des logarithmes aux diverses opérations de l'arithmétique. Soit proposé de trouver la valeur numérique approchée de l'expression

$$x = \frac{125,52 \times 3420 \times 52344}{312,57 \times 7220,1 \times 80724}$$

on aura évidemment

Log. x = la somme des logarithmes des facteurs qui entrent au numérateur, diminuée de la somme des logarithmes des facteurs qui entrent au dénominateur, ou, ce qui est plus simple, augmentée de la somme des compléments de ces derniers logarithmes. Or, dans notre petite table, on trouvera les valeurs approchées suivantes

	Log.	125,50	$= 2,09864$
	Log.	3420,00	$= 3,53403$
	Log.	523500,00	$= 4,71892$
Compl.	Log.	312,50	$= \bar{3},50515$
Compl.	Log.	7220,00	$= \bar{4},14146$
Compl.	Log.	80700,00	$= \bar{5},09313$
	Somme....		$\bar{1},09133 =$

log. 0,1235.

En faisant le calcul plus exactement à l'aide de tables de logarithmes plus étendues, on aurait trouvé 0,123375 pour la valeur de x.

La différence n'est donc que de 0,000125 sur 0,123375 ou de $\frac{1}{987}$ du résultat exact..

— On demande d'élever le nombre 22,8 à la neuvième puissance.

On a log. 22,8 = 1,35793

multipliant par 9, on a

$$12,22137 = \text{log. } 1665 \times 10^9.$$

Le nombre cherché est donc approximativement 1 665 000 000 000.

— Quelle est la huitième puissance de 0,005225 ?

On a log. $0,005225 = \bar{3},71809$

multipliant par 8 et observant que, d'une part, la partie décimale, qui est positive, donnera une retenue entière égale à + 5, et que, d'autre part, le produit de $\bar{3}$ par 8 est — 24, on aura $\overline{19},74472 = \text{log. } \frac{5,555}{10^{19}}$.

Le nombre cherché est donc approximativement 0,000 000 000 000 000 000 5555.

— Soit proposé de trouver la racine carrée de 13,8237.

On a dans notre petite table log. 13,80 = 1,13987.

Prenant la moitié, il vient 0,56994 = log. 3,715.

En opérant exactement, on aurait trouvé $\sqrt{13,8237} = 3,718023$. Nous avons donc obtenu le résultat à $\frac{3}{3718}$ ou à $\frac{1}{1239}$ près du résultat véritable.

— On voit avec quelle merveilleuse facilité l'emploi des logarithmes conduit à des résultats que l'on n'obtiendrait que beaucoup plus péniblement par les méthodes ordinaires.

Quoique les tables que nous publions ici puissent suffire dans un très-grand nombre de cas, nous devons donner sur la disposition et sur l'usage des autres tables de logarithmes les plus usitées les développements qui permettront au lecteur d'y avoir recours lorsque la nature des calculs qu'il aura à faire l'exigera, sans qu'il soit obligé pour cela de se livrer à l'étude pénible des instructions, en général très-prolixes, qui accompagnent ces tables.

Usage des tables de Lalande. — En 1760, La Caille et Lalande publièrent pour la première fois de petites tables logarithmiques, à peu près semblables à celles que Lalande seul se chargea de revoir, et qui furent stéréotypées par Firmin Didot, en 1802. Ces tables ne renferment que cinq décimales; et Lalande invoquant ses cinquante ans d'expérience, affirme que la plupart des calculs n'exigent pas une plus grande approximation. Il n'en a jamais employé d'autres pour les calculs de plusieurs centaines d'éclipses. C'est donc bien à tort que l'on a réimprimé ce volume en donnant sept décimales. On a augmenté inutilement le format, et on a laissé des erreurs se glisser dans la nouvelle publication. Aussi les éditeurs n'ont-ils pas imité Lalande, qui offrait 100 fr. et même 1000 fr. pour chaque faute qu'on découvrirait dans ses tables.

Nous donnons ici pour spécimen du livre de Lalande, la page qui renferme les logarithmes des nombres compris entre 990 et 1080, placés à côté de chacun de ces nombres

Spécimen des tables de Lalande qui donnent les logarithmes des nombres de 1 *à* 10000.

NOMBRES	0.16′ 30″ LOGARITHMES.	D.	NOMBRES	0.17′ 0″ LOGARITHMES.	D.	NOMBRES	0.17′ 30″ LOGARITHMES.	D.
990	2,99564	43	1020	3,00860	43	1050	3,02119	41
991	2,99607	44	1021	3,00903	42	1051	3,02160	42
992	2,99651	44	1022	3,00945	43	1052	3,02202	41
993	2,99695	44	1023	3,00988	42	1053	3,02243	41
994	2,99739	43	1024	3,01030	42	1054	3,02284	41
995	2,99782	44	1025	3,01072	43	1055	3,02325	41
996	2,99826	44	1026	3,01115	42	1056	3,02366	41
997	2,99870	43	1027	3,01157	42	1057	3,02407	42
998	2,99913	44	1028	3,01199	43	1058	3,02449	41
999	2,99957	43	1029	3,01242	42	1059	3,02490	41
1000	3,00000	43	1030	3,01284	42	1060	3,02531	41
1001	3,00043	44	1031	3,01326	42	1061	3,02572	40
1002	3,00087	43	1032	3,01368	42	1062	3,02612	41
1003	3,00130	43	1033	3,01410	42	1063	3,02653	41
1004	3,00173	44	1034	3,01452	42	1064	3,02694	41
1005	3,00217	43	1035	3,01494	42	1065	3,02735	41
1006	3,00260	43	1036	3,01536	42	1066	3.02776	40
1007	3,00303	43	1037	3,01578	42	1067	3,02816	41
1008	3,00346	43	1038	3,01620	42	1068	3,02857	41
1009	3,00389	43	1039	3,01662	41	1069	3,02898	40
1010	3,00432	43	1040	3,01703	42	1070	3,02938	41
1011	3,00475	43	1041	3,01745	42	1071	3,02979	40
1012	3,00518	43	1042	3,01787	41	1072	3,03019	41
1013	3,00561	43	1043	3,01828	42	1073	3,03060	40
1014	3,00604	43	1044	3,01870	42	1074	3,03100	41
1015	3,00647	42	1045	3,01912	41	1075	3,03141	40
1016	3,00689	43	1046	3,01953	42	1076	3,03181	41
1017	3,00732	43	1047	3,01995	41	1077	3,03222	40
1018	3,00775	42	1048	3,02036	42	1078	3,03262	40
1019	3,00817	43	1049	3,02078	41	1079	3,03302	40
1020	3,00860		1050	3,02119		1080	3,03342	

Nous avons déjà dit que la caractéristique est complétement inutile, puisqu'il faut la changer dès que l'on considère des nombres plus grands que 10000 ou plus petits que l'unité. On aurait pu aussi supprimer la première *chiliade* (ce qui est compris entre 1 et 1000), la recherche du logarithme d'un nombre et du nombre correspondant à un logarithme donné n'exigeant que les neuf chiliades suivantes.

Ces deux opérations se font donc immédialement pour tout nombre de quatre chiffres significatifs. On trouve ainsi que les logarithmes de 1008, 10,42, de 995000 sont respectivement 3, 00346, 1, 01787 et 5, 99782. Et réciproquement 0,991, 104,7 et 10740000 sont les nombres qui correspondent respectivement aux logarithmes $\bar{1}$, 99607, 2, 01995, et 7, 03100.

On voit à la droite de la colonne des logarithmes une colonne ayant en tête la lettre D, c'est-à-dire *différences*, et contenant des nombres dont chacun correspond à l'intervalle qui sépare deux logarithmes consécutifs, et donne l'excès de l'inférieur sur le supérieur. Voyons l'usage de cette colonne.

1° Lorsque l'on veut trouver le logarithme d'un nombre de cinq chiffres significatifs tel que 27548, on cherche d'abord la partie décimale du logarithme du nombre 2754 formé par les quatre premiers chiffres; cette partie décimale est 43996; et on y ajoute le produit de la différence 16 qui se trouve entre le logarithme 43996 et 44012 logarithme suivant, par le dernier chiffre 8 du nombre 27548; seulement ce produit est considéré comme représentant des unités décimales du sixième ordre. Les calculs se disposent ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Log. } 2754 &= 43996 \\ 16 \times 8 &= 128 \\ &\overline{4,440088} = \text{Log. } 27548 \end{aligned}$$

Comme on ne doit prendre que cinq chiffres décimaux, on considérera 4, 44009 comme le logarithme cherché. En supprimant le dernier chiffre, qui est plus grand que 5, on augmente de 1 l'avant-dernier.

2° Réciproquement, s'il s'agit de trouver les cinq premiers chiffres significatifs du nombre correspondant à un logarithme donné tel que 58943 (abstraction faite de la caractéristique), on cherche dans la table le logarithme 58939, immédiatement plus petit, qui correspond au nombre 3885. Ce nombre formera les quatre premiers chiffres cherchés. Pour avoir le cinquième, on prend la différence 4 entre le logarithme donné 58943 et 58939, et on la divise par la différence 11 qui existe entre les logarithmes des nombres consécutifs 3885 et 3886. Le quotient le plus approché à une unité près donne le cinquième chiffre cherché. Or comme le quotient exact est ici 3,64, le quotient entier le plus approché est 4, et les cinq premiers chiffres significatifs du nombre cherché sont 38854.

M. de Prony, dans son *Instruction élémentaire et pratique,* que nous avons déjà eu occasion de citer, a donné une petite table auxiliaire fort utile à employer concurremment avec les tables de Lalande, et que l'on trouvera ci-après. En voici l'usage.

La bande horizontale supérieure renferme toutes les différences comprises dans les colonnes D du livre de Lalande, différence dont la plus petite est 4 et la plus grande 44.

La bande verticale située à l'origine et à gauche du tableau renferme les cinquièmes chiffres significatifs donnés ou cherchés des nombres dont on cherche ou dont on a les logarithmes.

Veut-on avoir la *partie proportionnelle* 13 que l'on doit ajouter à 43996 pour former le logarithme de 27548 ? on suivra la tranche horizontale qui commence par le chiffre 8, jusqu'à la rencontre de la colonne verticale qui commence par 16, différence tabulaire correspondant au logarithme 43996 : le nombre 13 est dans la case d'intersection de ces deux colonnes.

Réciproquement, pour avoir le cinquième chiffre 4, du nombre 38854 dont on a le logarithme 58943, on descend la colonne verticale qui commence par 11, différence tabulaire correspondant à 58939, jusqu'à ce que l'on y rencontre 4, différence entre 58943 et 58939, logarithme tabulaire qui approche le plus, en moins, du logarithme donné; le nombre 4, qui se trouve dans la première colonne à gauche, sur la même tranche horizontale que la différence 4, est le cinquième chiffre cherché.

Table auxiliaire de celles de Lalande, par M. de Prony.

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
3	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
4	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7
5	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
6	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	8	9	10	10
7	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	11	11	12
8	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10	11	12	13	14
9	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	14	15

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9
7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12
9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15
11	11	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18
13	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20	20	21
14	15	16	17	18	18	19	20	21	22	22	23	24
16	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	
3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1
6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	2
9	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	13	13	3
12	13	13	14	14	14	15	15	16	16	16	17	17	4
16	16	17	17	18	18	19	19	20	20	21	21	22	5
19	19	20	20	21	22	22	23	23	24	25	25	26	6
22	22	23	24	25	25	26	27	27	28	29	29	30	7
25	26	26	27	28	29	30	30	31	32	33	34	34	8
28	29	30	31	32	32	33	34	35	36	37	38	39	9

Usage des tables de Callet. — Les tables de Callet sont nécessaires pour les calculs qui exigent beaucoup de précision. Nous ne donnerons pas ici un spécimen qui ne pourrait cadrer avec le format de notre livre, et nous supposerons que l'on a sous les yeux ces tables, ou du moins la partie de l'ouvrage de Callet qui renferme seulement les logarithmes des nombres de 1 à 108000.

Les cinq premières pages au haut desquelles on lit *Chiliade I*, contiennent, dans des colonnes dont les sommets sont occupés par la lettre N, les nombres depuis 1 jusqu'à 1200. A droite de chacun des nombres naturels renfermés dans ces colonnes, on trouve, dans les colonnes intitulées *Log.* les logarithmes de ces nombres avec 8 décimales, et sans caractéristique. Mais cette chiliade est implicitement comprise dans les chiliades suivantes, et pourrait être supprimée sans inconvénient majeur.

A partir de la sixième page et jusqu'à la fin de la table on voit, à la gauche de chaque page, deux colonnes contenues entre deux doubles filets, au haut desquelles se trouvent les indices *Od. 2d*; *Od. 3d*, etc... Il ne faut faire aucune attention à ces colonnes et les considérer comme inutiles pour les calculs de l'arithmétique.

La colonne intitulée N contient, à partir de cette sixième page, les nombres depuis 1020 jusqu'à 10799. Il faut observer que ces nombres sont écrits, avec tous leurs chiffres, de cinq en cinq seulement, et que, dans les intervalles, on n'a placé que les deux derniers chiffres de chaque nombre; mais ces deux derniers chiffres sont toujours censés précédés, à gauche, des deux premiers chiffres du nombre complètement écrit, qui se trouve au-dessus, depuis 1020 jusqu'à 9999, et des trois premiers chiffres de ce nombre supérieur depuis 10000 jusqu'à 10799.

Ainsi, par exemple, 3943 se trouve au-dessous du nombre 3940, indiqué seulement par ses deux derniers chiffres 43, à gauche desquels il faut supposer placés les chiffres 39 du nombre supérieur 3940. Le nombre 10467 se trouve, au-dessous du nombre 10465, indiqué seulement par ses deux derniers chiffres 67, à gauche desquels il faut supposer placés les chiffres 104 du nombre supérieur 10465.

Voici maintenant comment les tables de logarithmes indiquent tous les nombres supérieurs à ceux qui sont contenus dans la colonne N ; cette indication s'étendant jusqu'à 107999.

On voit sur chaque page, à droite de la colonne N, dix colonnes au haut desquelles sont les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; (un double filet sépare la colonne 4 de la colonne 5, pour faciliter la recherche des nombres dans l'aire de la page), et la réunion d'un de ces chiffres avec les quatre ou les cinq chiffres de la colonne N, donne tous les nombres des 5 chiffres depuis 10200 jusqu'à 99999, et tous les nombres de six chiffres depuis 100 000 jusqu'à 107999.

Voyons quelle est la correspondance entre les nombres naturels de la table et leurs logarithmes.

Ceux-ci, passé la cinquième page, sont exprimés avec sept décimales, dont les quatre dernières occupent les aires des pages et dont les trois premières sont isolées dans la partie gauche de la colonne O placée à droite de la colonne N. Les quatre dernières décimales sont dans la colonne verticale en tête de laquelle est le dernier chiffre significatif du nombre supposé moindre que 108000 dont on cherche le logarithme, et sur la même ligne horizontale que les quatre ou cinq premiers chiffres de ce nombre (supposé écrit complètement dans la colonne N.) Les tables de Callet sont très-bien disposées pour distinguer à vue, sans risque d'erreur, les groupes de quatre chiffres qui, dans l'aire d'une page, doivent faire suite à un groupe de trois ou quatre chiffres placé dans la colonne O. Prenons, par exemple, dans la colonne O de la page 7, le groupe de trois chiffres 044; pour connaître tous les groupes des 4 chiffres avec lesquels il peut être lié, on remarquera, sur la ligne O où il est placé et à la suite de plusieurs cases blanches, une première case remplie par les chiffres 0299; le groupe de ces chiffres est le premier qui doit s'unir à 044 pour former un premier ensemble des sept chiffres 0440299, partie décimale du logarithme de 11067. La fin de la ligne contenant deux autres groupes de quatre chiffres 0692 et 1084, les deux lignes suivantes et les deux premiers groupes 9315, 9707 de la ligne qui vient après ces deux-là, offrent tous les groupes de quatre chiffres qui doivent être mis à la suite de 044, de sorte que 044 est le commencement de la partie décimale des logarithmes des vingt-cinq nombres entiers consécutifs compris entre 11067 et 11091 inclusivement. Mais la ligne sur laquelle se trouvent les deux derniers groupes 9315, 9707 est brisée après 9707, et cette brisure a pour objet d'indiquer à vue le premier groupe 0099 qui doit être placé à la droite du groupe 045. A ce dernier devront être joints tous les groupes de quatre chiffres qui suivent 0099 jusqu'à la nouvelle brisure qui sépare 9876 de 0267, ce dernier groupe étant le premier de ceux qui appartiennent à 046, et ainsi de suite.

Il peut arriver d'ailleurs que le passage entre deux assemblages de quatre chiffres n'offre aucune brisure apparente ; cela a lieu quand la brisure aurait lieu à la fin de la ligne horizontale, ou au passage de cette ligne à la suivante. Tel est le cas, sur la page 6, lorsque l'on passe de 0309638 partie décimale du logarithme de 10739 à 0310043, partie décimale du logarithme de 10740.

Les tables de Callet s'étendent de 1 à 108000; si l'on voulait les pousser jusqu'à 1 000 000, il faudrait ajouter 892 000 autres nombres, et alors le volume des tables deviendrait fort incommode. Mais on peut facilement étendre les tables de Callet à tous les nombres du premier million, au moyen de petites tables auxiliaires, qu'on voit à droite des aires des pages, et qui portent en tête l'indication *diff.* (différences). Les nombres qui commencent chacune de ces petites tables sont les différences entre les logarithmes successifs compris dans les aires des pages, et au-dessous de ces différences on voit leurs neuf multiples simples, qui donnent les *parties proportionnelles* dont nous avons déjà parlé à propos des tables de Lalande.

S'agit-il, par exemple, de trouver le logarithme de 426782? On prendra d'abord le logarithme de 426780, qui d'après les règles précédentes, est égal à 5,6302041. Ensuite, pour corriger l'erreur due à l'omission du chiffre 2, on n'aura qu'à ajouter à ce logarithme les 20 unités du septième ordre décimal qui, dans la colonne *diff.*, sont en regard du chiffre 2, au-dessous de 102, différence entre les logarithmes de 42678 et 42679.

L'opération inverse, où il s'agit de trouver le nombre plus grand que 108000 et correspondant à un logarithme donné, n'offre pas plus de difficulté.

Soit, par exemple, le logarithme donné $\bar{2}$,0401037, faisant abstraction de la caractéristique, on trouve que le plus petit logarithme qui s'en rapproche le plus est 040878 dont la différence avec 0401037 est de 159, et qui correspond au nombre 10967. Or, dans la table des parties proportionnelles, 159 correspond au chiffre 4; le nombre cherché a donc 109647 pour chiffres significatifs, et le nombre correspondant au logarithme $\bar{2}$,0401037 est 0.0109674.

Canons logarithmiques de M. Wronski. — Nous ne pouvons terminer ce qui a rapport aux logarithmes sans faire mention des *canons de logarithmes*, encore fort peu connus, que l'on doit à M. Wronski. Ce géomètre s'est proposé de réduire à un très-petit format les tables de logarithmes les plus étendues et d'en diminuer le prix et le volume de manière à en répandre l'usage dans toutes les classes de la société. Son canon logarithmique nº 4, qui sert à obtenir avec 7 décimales les logarithmes des 100000 premiers nombres, comme les tables de Borda, n'occupe que $\frac{1}{65}$ de la superficie des chiffres de ces tables; en employant des chiffres de même grandeur, la réduction aurait été portée à $\frac{1}{78}$; et avec quelques autres simplifications possibles, elle aurait été jusqu'à $\frac{1}{91}$. Elle serait trouvée encore beaucoup plus forte si on comptait les marges qui se répètent inutilement à chaque page des tables ordinaires et qui contribuent à augmenter leur volume.

Le canon nº 1 *bis*, que nous empruntons à M. Wronski, n'offre pas un moindre avantage, pour la diminution du volume, sur les petites tables logarithmiques de Lalande, quoiqu'il renferme, comme celles-ci, les logarithmes à cinq décimales de tous les nombres entiers jusqu'à 10 000. Expliquons l'usage de ce canon.

On remarquera d'abord qu'il est partagé : 1° en tranches horizontales désignées par les lettres A, B, C, D, E, dont deux, C et D, portent des numéros qui correspondent à autant de

Canon de logarithmes de M. Hoëné Wronski.

CANON				0000	4139	7918	1394	4613	7609	0412	3045	5527	7875		
LOGARITHM.				0103	4242	8021	1497	4716	7712	0515	3148	5630	7978		A
*N*º 1 *bis.*				0206	4345	8124	1600	4819	7815	0618	3251	5733	8081		
AUTORE H. W.				9897	4036	7815	1291	4510	7506	0309	2942	5424	7772		
10	20	40	50	10. 0	11. 0	12. 0	13. 1	14. 1	15. 1	16. 2	17. 2	18. 2	19. 2	1 0.5	
				20. 3	22. 3	24. 3	26. 4	28. 4	30. 4	32. 5	34. 5	36. 5	38. 5	2 1	B
20	40	80	100	40. 6	44. 6	48. 6	52. 7	56. 7	60. 7	64. 8	68. 8	72. 8	76. 8	4 2	
				50. 6	55. 7	60. 7	65. 8	70. 8	75. 8	80. 9	85. 9	90. 9	95. 9	5 2.5	
0.1	0.2	0.4	0.5	0432	0393	0361	0333	0309	0289	0271	0255	0241	0228	0.9	
0.2	0.4	0.8	1.0	0860	0783	0718	0663	0616	0575	0540	0508	0480	0455	0.8	
0·3	0.6	1.2	1.5	1284	1169	1073	0991	0924	0860	0807	0760	0718	0681	0.7	C 1
0.4	0.8	1.6	2.0	1703	1551	1424	1316	1223	1143	1072	1010	0955	0905	0.6	
0.5	1.0	2.0	2.5	2119	1931	1773	1639	1524	1424	1336	1259	1190	1128	0.5	
0.6	1.2	2.4	3.0	2531	2307	2119	1960	1822	1703	1599	1506	1424	1351	0.4	
0.7	1.4	2.8	3.5	2938	2680	2462	2278	2119	1981	1860	1752	1657	1572	0.3	
0.8	1.6	3.2	4.0	3342	3049	2803	2594	2413	2257	2119	1997	1889	1792	0.2	C 2
0.9	1.8	3.6	4.5	3743	3416	3141	2907	2706	2531	2377	2240	2119	2010	0.1	
1.0	2.0	4.0	5.0	4139	3779	3476	3219	2996	2803	2633	2482	2348	2228	0.0	
.01	.02	.04	.05	043	039	036	033	031	029	027	025	024	023	022	
.02	.04	.08	.10	086	079	072	067	062	058	054	051	048	046	043	D 1
.03	.06	12	.15	130	118	108	100	093	087	081	076	072	068	065	
.04	.08	.16	.20	173	157	144	133	124	115	108	102	096	091	087	
.05	.10	.20	.25	216	197	180	166	155	144	135	127	120	114	108	D 2
.06	.12	.24	.30	259	236	216	200	185	173	162	153	144	137	130	
.07	.14	.28	.35	302	275	252	233	216	202	189	178	168	160	152	
.08	.16	.32	.40	346	314	288	266	247	231	216	204	192	182	173	D 3
.09	.18	.36	.45	389	354	324	300	278	260	244	229	217	205	195	
				04,23	03,20	03,17	02,14	02,12	02,11	02,10	01,08	01,08	01,07	1,6	
				08,27	07,23	06,19	05,17	04,14	04,13	03,11	03,10	03,09	02,08	2,7	
				12,31	10,26	08,22	07,19	06,16	05,14	05,13	04,11	04,10	03,09	3,8	E
				16,35	13,29	11,25	09.21	08,18	07,16	06,14	06,13	05,11	04,10	4,9	
				20,39	16,33	14,28	12,24	10,21	09,18	08,16	07,14	06,13	06,11	5,10	
I,	II,	III,	IV,	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	

subdivisions ; 2° en quinze colonnes verticales numérotées, les quatre premières à gauche en chiffres romains I, II, III, IV, et les onze à droite en chiffres arabes (1), (2), (3), etc. On trouvera donc facilement les nombres désignés par la lettre de la tranche horizontale, par le rang de la ligne qu'ils y occupent, et par le chiffre de la colonne verticale où ils sont placés.

Or, les nombres naturels de 1 à 10000 sont contenus entièrement dans l'espèce d'équerre formée par la tranche horizontale B et par le système des colonnes verticales I, II, III, IV ; mais ils y sont répartis par portions ou parties intégrantes, qui, étant rangées les unes sous les autres, de manière que les points qui y sont attachés se trouvent dans une même colonne verticale, donnent par addition le nombre qu'elles composent. Ces portions intégrantes sont généralement au nombre de trois : 1° les *portions initiales*, qui se trouvent dans les colonnes numérotées de (0) à (9) de la branche horizontale B de l'équerre, où elles occupent la partie à gauche de chacune de ces colonnes, et où on les reconnaît au point qui leur est attaché; 2° les *portions moyennes*, qui sont dans la partie de la branche verticale de l'équerre ou des colonnes I, II, III, IV, correspondant aux lettres C1, C2; 3° les *portions finales*, qui se trouvent dans la partie de la même tranche verticale de l'équerre, correspondant aux tranches D 1, D 2, D 3.

S'agit-il de former le nombre 2372 d'après notre canon ? Séparant les deux chiffres à droite, on voit que 23 est compris entre les nombres 20 et 40 (tranche horizontale B, colonne verticale II) ; et on cherchera le nombre qui approche le plus de 23 dans la seconde ligne horizontale de la tranche B. Ce nombre plus approché est 22. Comme la portion initiale 22 occupe la *seconde ligne horizontale* dans la tranche B de l'équerre, on cherche la portion moyenne dans la *seconde colonne verticale*, marquée II de la branche verticale de l'équerre. Cette portion moyenne la plus approchée est 1 . 6 qui, alignée à l'aide du point au-dessous de 22 . donne 23 . 6.

La portion finale . 12 doit être cherchée dans la même colonne verticale que la moyenne.

Il y a donc lieu d'observer que la correspondance entre les limites des portions initiales placées dans la branche horizontale B, et le rang des colonnes verticales des portions moyennes et finales, est indiquée par le petit rectangle placé à l'angle de l'équerre, et qui résulte de l'intersection de la tranche horizontale B, avec les colonnes verticales I, II, III, IV.

Dans cette formation d'un nombre naturel, il faut toujours, pour arriver à l'épuisement de toutes ses parties intégrantes, prendre dans le canon les portions qui, sans les surpasser, approchent le plus de ces diverses parties intégrantes.

Les exemples que nous allons donner ci-dessous éclairciront complètement ce qui précède

1er Exemple. *Former le nombre* 2372.

Portion initiale	=	22.	(2e ligne de la tranche B et col. (1))
..... moyenne	=	1.6	(3e ligne de la tranche C 2 et col. II)
..... finale	=	.12	(3e ligne de la tranche D 2 et col. II)
Somme....		2372 = nombre proposé.	

2e Exemple. *Former le nombre* 753.

Portion initiale	=	75.	(4e ligne de la tranche B et col (5))
..... moyenne	=	0.0	(comme superflue, elle n'y est pas,)
..... finale	=	0.30	(3e ligne de la tranche D 2 et col. IV)
Somme....		7530 = nombre proposé.	

3e Exemple. *Former le nombre* 4975.

Portion initiale	=	48.	(3e ligne de la tranche B et col. (2))
..... moyenne	=	1.6	(4e ligne de la tranche C 1 et col. III)
	=	.12	(3e ligne de la tranche D 1 et col. III)
..... finales	=	.28	(1re ligne de la tranche D 3 et col. III)
	=	.20	(2e ligne de la tranche D 2 et col. III)
Somme....		497500 = nombre proposé.	

Pour compléter ce qui a rapport à la formation des nombres, quelques observations sont nécessaires.

D'abord, si un nombre ne s'étendait pas jusqu'aux portions finales des canons, il suffirait de le former avec les portions initiales et les portions moyennes, en considérant les portions finales comme zéro. Par exemple, le nombre 202 se trouve formé par la simple réunion de la portion initiale 20, et de la portion moyenne 0.2. Il est également manifeste que si un nombre proposé ne s'étendait même pas jusqu'aux portions moyennes des canons, la portion initiale suffirait pour la formation de ces nombres, en considérant les portions moyennes et finales comme nulles. C'est ainsi que l'on trouve directement dans le canon parmi les portions initiales, les nombres 17, 22, 64.

Ensuite, comme les portions initiales pour la formation d'un nombre peuvent être prises dans deux lignes différentes de la tranche horizontale B, on choisira celle de ces lignes qui donne lieu au mode de formation le plus prompt. Ainsi, pour des portions initiales comprises entre 50 et 80, les multiples de 4 sont formées plus tôt en commençant par la troisième que par la quatrième ligne horizontale de la tranche B.

Indiquons maintenant la place qu'occupent dans le canon les diverses parties intégrantes des logarithmes, portions qui correspondent à celles des nombres auxquels appartiennent ces logarithmes, et qui, en les rangeant également les unes sous les autres, de manière que leurs dernières figures décimales se trouvent dans une même colonne verticale, servent, dans leur réunion par addition, à former les logarithmes dont il est question.

D'abord, les premières décimales des logarithmes se trouvent dans la tranche horizontale B, à droite de la portion initiale dont elles sont séparées par des traits verticaux. Ainsi, 3 est à côté et à droite de 22, dans la colonne (1), deuxième ligne de B, 8 est à droite et à côté de 75, 6 est à droite et à côté de 48

Pour compléter la portion initiale d'un logarithme, on mettra à droite de ce premier chiffre les quatre chiffres qui, dans la tranche horizontale A, sont dans la même colonne verticale que la portion initiale du nombre, et occupent le même rang que cette portion initiale dans la tranche B. Ainsi, aux portions initiales 22, 75 et 48 correspondent respectivement les portions initiales logarithmiques 34242, 87506, 68124.

Les portions moyennes logarithmiques se trouvent à la rencontre de la colonne verticale où est placée la portion initiale du nombre, avec la ligne horizontale où se trouve la portion moyenne du même nombre. Ainsi, la portion initiale d'un nombre étant 22, et la portion moyenne 1.6, la portion moyenne du logarithme est 3049; les portions initiale et moyenne d'un nombre étant respectivement 48. et 1.6, la portion moyenne du logarithme est 1424.

Lorsque la portion moyenne du nombre est nulle, la portion moyenne du logarithme est nulle aussi.

La portion finale d'un logarithme se compose de deux parties : l'une placée dans l'une des tranches D1, D2, D3, immédiatement à droite du nombre qui est à l'intersection de la colonne verticale où se trouve la portion initiale du nombre avec la ligne horizontale où se trouve la portion finale du même nombre, auquel correspond le logarithme. Ainsi, pour le nombre 2372, dont la portion initiale est 22.0 et la portion finale 0.12, la portion finale du logarithme est 216, placé à droite et à côté de 236.

Lorsque la portion moyenne du nombre dont on cherche le logarithme est nulle, la première partie de la portion finale du logarithme est placée précisément à la rencontre des deux colonnes qui viennent d'être désignées. Par exemple, 173 est la portion finale du logarithme de 750, nombre que nous avons vu se décomposer en 75. portion initiale, 0.0 portion moyenne et 0.30 portion finale.

Pour avoir le résultat d'interpolation qui doit compléter la portion finale du logarithme, il faut d'abord observer que dans la tranche horizontale E, et dans chacune des colonnes verticales (0), (1), (2), etc., on trouve deux séries de nombres de deux chiffres chacune, qui, pris dans leur ordre de haut en bas, et en passant d'un rang vertical au suivant, expriment la différence entre chacune des portions finales du même rang horizontal, dans la même colonne verticale, et la portion finale placée à droite. Ainsi, dans la colonne (3), les nombres 02, 05, 07, 09, 12, 14, 17, etc., expriment respectivement les différences entre les parties finales 033 et 031 ; 067 et 062 ; 100 et 093 ; 132 et 124 ; 166 et 155; 200 et 185 ; 233 et 216, etc.

Il faut observer ensuite que la partie de la colonne (10), qui est comprise dans la tranche horizontale C1 et C2 donne les nombres décroissants 0.9, 0.8, 0.7, etc., qui sont les *compléments des indices des moyennes*, c'est-à-dire des indices 0.1, 0.2, 0.3, qui, dans la colonne verticale I, marquent le rang vertical des portions moyennes des tranches C. La portion de la même colonne verticale I, qui est comprise dans les tranches C, contient de même les *indices des finales* .01, .02, .03, etc.

Cela posé, la règle pratique pour l'interpolation destinée à compléter la portion finale d'un logarithme, est la suivante : Multipliez l'indice de la portion finale par le complément de l'indice de la portion moyenne ; considérez le produit comme offrant dans ses chiffres, pris isolément, autant d'indices pour le rang des différences placées dans la tranche E et dans la colonne verticale de la portion finale ; réunissez, par addition, les différences qui correspondent à ces indices, en les rangeant les unes sous les autres dans l'ordre décimal, où se trouvent les indices eux-mêmes.

Ainsi, le nombre 2372 ayant 22, 1.6 et .12 pour portions initiale, moyenne et finale, l'indice de la finale est 6; le complément de l'indice de la moyenne est 2; le produit de 6 par 2 est 12. Le premier chiffre 1 du produit indique qu'il faut prendre la *première* différence 03, placée à la fois dans la colonne de la finale et dans la tranche E ; et le chiffre 2 qui vient ensuite dans le produit, indique qu'il faut à 03 ajouter la *seconde* différence 07, placée au-dessous de 03, en la considérant comme dix fois plus petite. Le résultat de l'interpolation est donc 03.7, ou en s'en tenant aux chiffres du cinquième ordre décimal 4

Le tableau détaillé des opérations relatives à deux nombres éclaircira tout ce qui précède.

1er Exemple. *Former le logarithme du nombre* 2372.

	Nombre.	Logarithme.
Port. initiales. =	22	34242
.... moyennes. =	1.6	3049
.... finales. =	.12	216
Interpolation....................		4
Sommes.	2372,	37511

Interpolation.	
Ind. des fin. =	6
Compl. ind. des moy. =	2
Produit....	12
Différ.	
Pour 1.....	03.
Pour 0.2...	0.7
	3.7

2e Exemple. *Former le logarithme du nombre* 4975.

	Nombre.	Logarithme.
Port. initiales. =	48.	68124
. . moyennes. =	1.6	1424
.... finales. =	.12	100
	.28	23.3
	.20	1.6
Interpolation........................		6.7
Sommes..	497500,	69679.

Interpolation.

Compl. ind. des moy. = 6.

$$\text{Ind. des fin.} = \begin{cases} 3 \times 6 = 18 \\ 7 \times 6 = 42 \\ 5 \times 6 = 30 \end{cases} \text{Produits partiels.}$$

Produit total.	2.250
Différ.	
Pour 2....	06.
Pour 0.2..	0.6
Pour 0.05.	0.14
Somme..	6.74

Table des logarithmes des nombres premiers jusqu'à 1979.

NOMBRES.	LOGARITHMES.	NOMBRES.	LOGARITHMES.	NOMBRES.	LOGARITHMES.	NOMBRES.	LOGARITHMES.	NOMBRES.	LOGARITHMES.	NOMBRES.	LOGARITHMES.
1	0000000	229	3598355	541	7331973	863	9360108	1223	0874265	1583	1994809
2	3010300	233	3673559	547	7379873	877	9429996	1229	0895519	1597	2033049
3	4771213	239	3783979	557	7458552	881	9449759	1231	0902581	1601	2043913
5	6989700	241	3820170	563	7505084	883	9459607	1237	0923691	1607	2060159
7	8450980	251	3996737	569	7551123	887	9479236	1249	0965624	1609	2065560
11	0413927	257	4099331	571	7566361	907	9576073	1259	1000257	1613	2076344
13	1139434	263	4199557	577	7611758	911	9595184	1277	1061909	1619	2092468
17	2304489	269	4297523	587	7686381	919	9633155	1279	1068705	1621	2097830
19	2787536	271	4329693	593	7730547	929	9680157	1283	1082267	1627	2113876
23	3617278	277	4424798	599	7774268	937	9717396	1289	1102529	1637	2140487
29	4623980	281	4487063	601	7788745	941	9735896	1291	1109262	1657	2193225
31	4913617	283	4517864	607	7831887	947	9763500	1297	1129400	1663	2208922
37	5682017	293	4668676	613	7874605	953	9790929	1301	1142773	1667	2219356
41	6127839	307	4871384	617	7902852	967	9854265	1303	1149444	1669	2224563
43	6334685	311	4927604	619	7916906	971	9872192	1307	1162756	1693	2286570
47	6720979	313	4955443	631	8000294	977	9898946	1319	1202448	1697	2296818
53	7242759	317	5010593	641	8068580	983	9925535	1321	1209028	1699	2301934
59	7708520	331	5198280	643	8082110	991	9960737	1327	1228709	1709	2327421
61	7853298	337	5276299	647	8109043	997	9986952	1361	1338581	1721	2357809
67	8260748	347	5403295	653	8149132	1009	0038912	1367	1357685	1723	2362853
71	8512583	349	5428254	659	8188854	1013	0056094	1373	1376705	1733	2387986
73	8633229	353	5477747	661	8202015	1019	0081742	1381	1401937	1741	2407938
79	8976271	359	5550944	673	8280151	1021	0090257	1399	1458177	1747	2422929
83	9190781	367	5646661	677	8305887	1031	0132587	1409	1489110	1753	2437819
89	9493900	373	5717088	683	8344207	1033	0141003	1423	1532049	1759	2452658
97	9867717	379	5786392	691	8394780	1039	0166155	1427	1544240	1777	2496874
101	0043214	383	5831988	701	8457180	1049	0207755	1429	1550322	1783	2511513
103	0128372	389	5899496	709	8506462	1051	0216027	1433	1562462	1787	2521246
107	0293838	397	5987905	719	8567289	1061	0257154	1439	1580608	1789	2526103
109	0374265	401	6031444	727	8615344	1063	0265333	1447	1604685	1801	2555137
113	0530784	409	6117233	733	8651040	1069	0289777	1451	1616674	1811	2579185
127	1038037	419	6222140	739	8686444	1087	0362295	1453	1622656	1823	2607867
131	1172713	421	6242821	743	8709888	1091	0378248	1459	1640553	1831	2626883
137	1367206	431	6344773	751	8756399	1093	0386202	1471	1676127	1847	2664669
139	1430148	433	6364879	757	8790959	1097	0402066	1481	1705550	1861	2697464
149	1731863	439	6424645	761	8813847	1103	0425755	1483	1711412	1867	2711443
151	1789769	443	6464037	769	8859263	1109	0449315	1487	1723110	1871	2720738
157	1958997	449	6522463	773	8881795	1117	0480532	1489	1728947	1873	2725378
163	2121876	457	6599162	787	8959747	1123	0503798	1493	1740598	1877	2734643
167	2227165	461	6637009	797	9014583	1129	0526939	1499	1758016	1879	2739268
173	2380461	463	6655810	809	9079485	1151	0610753	1511	1792645	1889	2762320
179	2528530	467	6693169	811	9090209	1153	0618293	1523	1826999	1901	2789821
181	2576786	479	6803355	821	9143431	1163	0655797	1531	1849752	1907	2803507
191	2810334	487	6875290	823	9153998	1171	0685569	1543	1883659	1913	2817150
193	2855573	491	6910815	827	9175055	1181	0722499	1549	1900514	1931	2857823
197	2944662	499	6981005	829	9185545	1187	0744507	1553	1911715	1933	2862318
199	2988531	503	7015680	839	9237620	1193	0766404	1559	1928461	1949	2898118
211	3242825	509	7067178	853	9309490	1201	0795430	1567	1950690	1951	2902573
223	3483049	521	7168377	857	9329808	1213	0838608	1571	1961762	1973	2951271
227	3560259	523	7185017	859	9339932	1217	0852906	1579	1983821	1979	2964458

On voit donc qu'à l'aide des canons de M. Wronski, il est facile de trouver les logarithmes de tous les nombres compris dans les limites ordinaires des tables, et c'est assurément un résultat très-remarquable. Mais nous pensons que, malgré leur simplicité, les calculs nécessaires pour déterminer le logarithme d'un nombre et le nombre d'un logarithme, au moyen de ces canons, paraîtront trop longs pour qu'on ne préfère pas toujours l'usage des tables de logarithmes ordinaires.

Usage de la table des logarithmes des nombres premiers. — Pour suppléer autant que pouvait le permettre l'étendue de notre livre, aux tables de logarithmes dont nous venons de donner la description, nous avons inséré ici une table qui renferme les sept premières décimales des logarithmes de tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1979. On pourra donc, au moyen de cette table, obtenir le logarithme de tout nombre décomposable en facteurs premiers moindres que 1979; et la table des plus petits diviseurs des nombres (voyez colonne 17) sera utile pour opérer cette décomposition sur des nombres moindres que 5900. C'est ainsi que l'on trouvera :

$$\text{Log. } 5723 = \text{Log } 59 + \text{Log. } 97.$$
$$\text{Log. } 8903 = \text{Log } 17 + 2 \text{ Log. } 23.$$

§ 10. *Faits divers relatifs à l'arithmétique.*

Solution des problèmes Les règles des quatre opérations fondamentales appliquées aux entiers, aux fractions ordinaires et décimales et aux nombres complexes, suffisent pour résoudre la plupart des problèmes d'arithmétique.

Il serait difficile de donner autre chose que des indications générales sur la manière de résoudre les questions proposées. A défaut de règle précise à ce sujet, disons qu'il faut commencer par bien se pénétrer de l'énoncé de la question; examiner les opérations que l'on aurait à faire pour vérifier le nombre que l'on cherche, si ce nombre était déjà trouvé; enfin, déduire de ces opérations d'autres opérations plus simples jusqu'à ce que l'on parvienne à ramener la détermination du nombre inconnu à l'une ou à plusieurs des opérations fondamentales que l'on sait effectuer.

La considération des rapports et des proportions par quotient joue un grand rôle dans la plupart des questions d'arithmétique. Comme on cherche alors à déterminer le quatrième terme d'une proportion dont les trois autres sont connus, on dit que le calcul de ce quatrième terme dépend d'une *règle de trois*.

La règle de trois est *simple* lorsque l'on n'a besoin que d'une seule proportion; *composée* lorsqu'on en emploie plusieurs; *directe* lorsque deux nombres de même nature, dans la proportion, varient dans le même sens que les deux nombres correspondants; *inverse* dans le cas contraire.

Les *règles d'intérêt*, *d'escompte*, *de société*, *d'alliage*, *de change*, etc, peuvent se déduire des propriétés des proportions; ces applications particulières dépendent de l'Arithmétique sociale. C'est à cette même partie de notre livre que nous renvoyons pour tous les détails relatifs aux anciennes et aux nouvelles mesures, et à la conversion des unes dans les autres (Col. 622, 626, 793.)

Détails historiques. — L'origine de l'arithmétique se perd dans la nuit des temps. Mais quoique notre système de numération écrite fût usité dans l'Inde dès la plus haute antiquité, il n'est vulgaire chez nous que depuis la fin du dixième siècle. C'est notre compatriote Gerbert, élu pape en 999, sous le nom de Silvestre II, qui a peut-être le plus contribué à répandre la pratique de l'*Abacus*. Voir à ce sujet les beaux travaux de M. Chasles.

Il serait inconcevable que les Grecs et les Romains, possédant un vocabulaire de numération parlée tout à fait approprié au système décimal n'eussent pas possédé un système de numération écrite analogue à celui des Indous. Aussi M. Chasles a-t-il reconnu dans un passage fort obscur des écrits de Boëce, célèbre philosophe du cinquième siècle, les traces de ce système, qui s'était peut-être conservé dans l'école pythagoricienne. Si Archimède, dans son traité de l'*Arénaire*, a employé une notation différente de la nôtre, c'est qu'elle était plus appropriée au but qu'il se proposait. On n'en peut donc pas conclure qu'il ait ignoré la valeur de position des chiffres.

Il paraît, cependant, qu'au moins l'arithmétique vulgaire fut toujours chez les anciens fort différente de ce qu'elle est aujourd'hui. On n'y trouve presque aucune trace des opérations dont les modernes composent la plus grande partie de la leur; et il est probable que ces opérations se faisaient presque à force de tête.

L'invention des fractions décimales qui paraît découler si naturellement de notre système de numération écrite, est assez récente. M. Libri l'attribue aux Vénitions dans le quatorzième siècle. M. Biot regarde Neper comme l'inventeur de la notation actuelle de ces fractions, au commencement du dix-septième siècle; il signale néanmoins la priorité apparente de Pitiscus qui publia sa *Trigonométrie* dans ce système en 1612, tandis que le *Canon mirificus* de Neper ne parut qu'en 1614.

Malgré la perfection des procédés actuellement usités pour effectuer les opérations de l'arithmétique, on peut conclure de divers exemples donnés précédemment, ou dans la suite de notre livre, que le progrès est encore possible dans cette voie; et que, surtout pour les calculs spéciaux d'une même nature, on imaginera sans doute, dans plus d'une circonstance, des procédés plus expéditifs où moins sujets à erreur que les règles vulgaires.

Bibliographie arithmétique. — Il n'existe pas aujourd'hui de traité vraiment complet d'arithmétique; mais nous avons, dans notre langue, un grand nombre de livres élémentaires qui peuvent être suivis ou consultés avec fruit. Nous citerons les arithmétiques de Bezout, de Bourdon, de Boillot, de Cirode, de Lacroix, de Mauduit, de Reynaud. Celle de Mauduit renferme des indications historiques et des procédés de calcul intéressants. Celle de M. Lacroix se distingue par sa simplicité et son peu de volume.

Les problèmes d'arithmétique de M. Saigey fournissent de bons exercices de calcul.

C'est dans les collections académiques et dans les journaux scientifiques que l'on trouvera les documents les plus curieux et les plus utiles sur l'histoire, sur la philosophie et sur les progrès de l'arithmétique depuis le commencement du siècle dernier. Nous citerons surtout les admirables leçons de Lagrange et de Laplace à l'ancienne école normale; elles sont dans le recueil des cours professés à cette école, et elles ont été réimprimées à part dans le *Journal de l'École polytechnique*, dont elles occupent le septième et le huitième cahiers.

II. ALGÈBRE.

§ 1. *Notations et nature des opérations de l'algèbre.*

L'Algèbre est une science qui a pour but d'abréger et de généraliser la résolution des questions relatives aux quantités en général.

Les éléments dont on fait usage en algèbre sont :

1° Les lettres de l'alphabet qui servent à désigner les nombres sur lesquels on doit raisonner. — On représente ordinairement les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet, *a, b, c*... ou A, B, C..., et les inconnues par les dernières lettres *x, y, z, t, u, v*. — Des quantités analogues sont souvent désignées par les mêmes lettres avec un ou plusieurs accents. Ainsi : a', a'' a''', a'''', (*a prime, a seconde, a tierce, a quarte*) sont des quantités analogues à a; x', x'', x''', x'''' sont des quantités analogues à x. — On emploie encore souvent dans le même but les *indices* 1, 2, 3..., comme dans x_1, x_2, x_3 que l'on énonce *x indice* 1, *x indice* 2, *x indice* 3, etc.

2° Les signes abrégés des quatre premières opérations de l'arithmétique, savoir :

$+$ pour l'addition $a + b$ (*a plus b*).
$-$ pour la soustraction $a - b$ (*a moins b*).
$\times$ pour la multiplication $a \times b$ (*a multiplié par b*).

On peut encore écrire $a.b$ ou simplement ab, sans interposer de signe entre les lettres. Mais l'interposition de signe est toujours nécessaire pour les nombres, afin qu'on ne confonde pas par exemple le produit 2×4 de 2 par 4 ou 8, avec le nombre 24 qui est trois fois plus grand.

Pour la division $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ (*a divisé par b*, ou *a sur b*). La seconde notation est la plus usitée.

3° Le *coefficient*, signe que l'on emploie pour exprimer qu'un nombre représenté par une lettre doit être ajouté à lui-même plusieurs fois. Ainsi on écrit $5\,a$ au lieu de $a + a + a + a + a$.

4° L'*exposant* ou degré de la puissance à laquelle une quantité se trouve élevée. Ainsi on pose $a^5 = aaaaa$.

Le signe *radical* $\sqrt{}$ indiquant le degré d'une racine à extraire : ainsi $\sqrt[7]{a^3\,b^2\,c}$ représente la racine septième de la quantité $a^3\,b^2\,c$.

6° Le signe d'égalité, $a = b$ (*a égale b*).

7° Le signe d'inégalité $>$ qui tourne sa pointe vers la quantité la plus petite. Ainsi $a > b$ se prononce *a plus grand que b*, et $a < b$, *a plus petit que b*.

Pour sentir tout l'avantage des signes algébriques, il suffit de les appliquer à la solution de quelques questions simples : on voit alors combien ils abrègent et généralisent tous les raisonnements que l'on serait obligé de faire explicitement pour arriver à la détermination des inconnues, si l'on n'employait pas ces signes. L'exemple que nous donnons ci-dessous est emprunté à l'algèbre de M. Lacroix.

PROBLÈME.

Partager un nombre donné en trois parties telles, que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit un nombre donné, et que l'excès de la plus grande sur la moyenne soit un autre nombre donné.

SOLUTION

Avec le langage ordinaire.	*Avec l'écriture algébrique.*
	Soit le nombre à partager désigné par . . . . a, L'excès de la partie moyenne sur la plus petite par . . . . b, L'excès de la plus grande sur la moyenne par . . . . c, La plus petite étant . . . . x,
La moyenne partie sera la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite.	La moyenne sera $x + b$.
La plus grande partie sera la moyenne, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne.	La plus grande $x + b + c$.
Les trois parties réunies forment le nombre proposé. Donc la plus petite partie, plus la plus petite partie, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus encore la plus petite partie, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne, égalent le nombre à partager.	Donc $x + x + b + x + b + c = a$
Donc trois fois la plus petite partie, plus deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus encore l'excès de la plus grande sur la moyenne égalent le nombre à partager.	$3x + 2b + c = a$.
Donc trois fois la plus petite partie égalent le nombre à partager moins deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, et moins encore l'excès de la plus grande sur la moyenne.	$3x = a - 2b - c$.
Donc enfin la plus petite partie égale le tiers de ce qui reste après qu'on a ôté du nombre à partager deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, encore l'excès de la plus grande sur la moyenne	$x = \frac{a - 2b - c}{3}$

Dans cet exemple on a eu à considérer plusieurs *équations*, ou assemblages de quantités égales, séparées par le signe d'égalité et renfermant des inconnues. On a dû aussi effectuer plusieurs des opérations fondamentales telles que l'addition, la soustraction, etc., pour arriver à la détermination de l'inconnue. Il est donc nécessaire de savoir d'abord les quatre règles pour les quantités algébriques) on passera ensuite à ce qui concerne les équations.

§ 2. *Les quatre règles opérées sur les quantités algébriques.*

L'ADDITION ALGÉBRIQUE se fait en écrivant les unes à la suite des autres, avec leurs signes, toutes les quantites à ajouter. On appelle *termes semblables* ceux qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants et qui ne diffèrent que par les coefficients. On a soin de les *réduire* en opérant convenablement sur leurs coefficients.

Un *monome* est une quantité composée d'un seul terme; un *polynome* en contient un nombre quelconque; on donne le nom de *binome*, de *trinome*, de *quadrinome*, etc., aux polynomes qui renferment deux, trois, quatre termes.

La SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE se fait en écrivant à côté de la quantité dont on veut soustraire tous les termes de la quantité à soustraire avec des signes contraires à ceux qu'ils ont.

1er exemple. L'addition des monomes $3a$, $5b$, $2c$ donne $3a+5b+2c$.

2e exemple. L'addition des monomes $4a^2b^3, 2a^2b^3, 7a^2b^3$ donne pour somme $13a^2b^3$.

3e exemple. L'addition des polynomes $3a^2-4ab$, $2a^2-3ab+b^2$, $2ab-5b^2$ donne, en réduisant les termes semblables, $5a^2-5ab-4b^2$.

4e exemple. Le reste que l'on obtient en retranchant $4b$ de $5a$ est $5a-4b$.

5e exemple. Le reste que l'on obtient en retranchant $2b-3c$ de $4a$ est $4a-2b+3c$.

L'opération s'indique ainsi :

$$4a-(2b-3c)=4a-2b+3c.$$

La parenthèse qui entoure $2b-3c$ indique que c'est sur cette quantité entière que l'on opère la soustraction.

6e exemple. Le reste que l'on obtient en retranchant

$5a^2-4ab+3bc-b^2$ de $8a^2-2ab$ est

$8a^2-2ab-5a^2+4ab-3bc+b^2$,

ou, réduction faite des termes semblables,

$$3a^2+2ab-3bc+b^2.$$

MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE. Celle des monomes est la plus simple; elle se compose de quatre règles distinctes, savoir :

1° La règle des signes. Le produit de deux monomes affectés du même signe, a le signe $+$; le produit de deux monomes affectés de signes contraires a le signe $-$.

2° La règle des coefficients. Le coefficient du produit est égal au produit des coefficients des facteurs.

3° La règle des exposants. L'exposant d'une lettre dans le produit est égal à la somme des exposants de cette lettre dans les facteurs. Toute lettre qui n'a pas d'exposant est censée avoir l'exposant égal à l'unité.

4° La règle des lettres. Toute lettre qui n'entre que dans l'un des facteurs entre dans le produit avec le même exposant.

On trouvera ainsi que

$$8a^2bc^2\times 7abd^2= 56a^3b^2c^3d^2,$$

que $-21a^3b^2dc\times 8abc^3=-168a^4b^3c^4d$,

et que $-4abc \quad \times -7df= \quad 28abcdf.$

Pour multiplier deux polynomes l'un par l'autre, il faut multiplier successivement tous les termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, en suivant, pour les produits partiels, les quatre règles données pour la multiplication des monomes; après quoi on fait la réduction des termes semblables, s'il y a lieu.

Il est bon de préparer les deux facteurs de telle sorte que tous leurs termes soient rangés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la même lettre; alors le premier et le dernier terme du produit sont toujours irréductibles.

On dispose l'opération comme dans l'exemple ci-dessous, où les deux facteurs ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a, se trouvent en même temps ordonnés par rapport aux puissances croissantes de b.

Multiplicande.	$4a^3$	$-5a^2b$	$-8ab^2$	$+2b^3$.		
Multiplicateur.	$2a^2$	$-3ab$	$-4b^2$.			
1er *produit partiel.*	$8a^5$	$-10a^4b$	$-16a^3b^2$	$+4a^2b^3$.		
2e *produit partiel.*		$-12a^4b$	$+15a^3b^2$	$+24a^2b^3$	$-6ab^4$.	
3e *produit partiel.*			$-16a^3b^2$	$+20a^2b^3$	$+32ab^4$	$-8b^5$.
Produit total.	$8a^5$	$-22a^4b$	$-17a^3b^2$	$+48a^2b^3$	$+26ab^4$	$-8b^5$.

DIVISION ALGÉBRIQUE. Pour les monomes il y a quatre règles analogues à celles de la multiplication :

1° Le signe du quotient est $+$ si le dividende et le diviseur ont le même signe; il est $-$ s'ils ont des signes différents.

2° Le coefficient du quotient s'obtient en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur.

3° L'exposant d'une lettre au quotient s'obtient en retranchant l'exposant de cette lettre dans le diviseur, de l'exposant de cette même lettre dans le dividende.

4° Toutes les lettres qui sont au dividende sans se trouver dans le diviseur, entrent en numérateur au quotient; et toutes les lettres qui se trouvent au diviseur sans entrer dans le dividende, doivent être mises en dénominateur au quotient. On trouve d'après ces règles

$$\frac{48a^3b^3c^2d}{12ab^2c}=4a^2bcd$$

$$\frac{-150a^5b^8cd}{30a^3b^5d^2}=-5a^2b^3c\kern-0.1em d$$

$$\frac{-12a^4b^2cd}{-8a^2bc^2}=\frac{3a^2bd}{2c}$$

Dans ce dernier exemple, l'exposant 2 de la lettre c au diviseur surpassant d'une unité l'exposant 1 de la même lettre c au dividende, si l'on avait opéré suivant la règle des exposants on aurait pu écrire c au numérateur avec l'exposant -1, et on aurait eu pour quotient,

$$\frac{3}{2}a^2bc^{-1}d.$$

En général on a $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

Cette notation des exposants négatifs est très-commode en beaucoup de cas.

On a aussi, d'après la règle des exposants,

$$\frac{a^m}{a^m}=a^0=1.$$

La division de deux polynomes l'un par l'autre se fait en les ordonnant par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la même lettre; en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient; en retranchant du dividende le produit du diviseur par ce premier terme ainsi obtenu; en divisant de nouveau le premier terme du reste, par le premier terme du diviseur, ce qui fournit le second terme du quotient; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un reste nul, ou dont le premier terme ne soit pas divisible par le premier terme du diviseur.

Nous donnons ci-après le tableau des calculs d'une division algébrique qui se fait exactement

$$\begin{array}{rrrrr|l}
10a^4 & -48a^3b & +51a^2b^2 & +4ab^3 & -15b^4 & -5a^2+4ab+3b^2 \\
\cline{6-6}
-10a^4 & +8a^3b & +6a^2b^2 & & & -2a^2+8ab-5b^2 \\
\cline{1-3}
 & -40a^3b & +57a^2b^2 & +4ab^3 & -15b^4 & \\
 & +40a^3b & -32a^2b^2 & -24ab^3 & & \\
\cline{2-5}
 & & 25a^2b^2 & -20ab^3 & -15b^4 & \\
 & & -25a^2b^2 & +20ab^3 & +15b^4 & \\
\cline{2-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

On peut développer le quotient en *série* d'un nombre indéfini de termes, lorsque l'opération ne se termine pas exactement.

On trouvera ainsi :

$$\frac{x}{x-a}=1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}+\text{etc.}$$

ou en employant la notation des exposants négatifs,

$$\frac{x}{x-a}=1+ax^{-1}+a^2x^{-2}+a^3x^{-3}+a^4x^{-4}+\text{etc.}$$

§ 3. *Résolution des équations du premier degré.*

Notions préliminaires sur les équations en général. — *Résoudre* des équations, c'est en tirer les valeurs des inconnues. La résolution des équations, en général, est le problème le plus élevé de l'algèbre.

Une égalité se réduit à une *identité*, lorsque les deux *nombres* séparés par le signe d'égalité sont égaux indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux lettres qui y entrent. Telles sont les égalités

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Toute équation doit devenir une identité lorsque l'on y substitue, à la place des inconnues, leur véritable valeur.

Une équation est *numérique*, lorsqu'il n'y a que les valeurs des inconnues qui soient représentées par des lettres : elle est *littérale* ou *algébrique* lorsqu'il y entre des lettres qui représentent des quantités connues.

Avant de résoudre les équations, il faut leur faire subir des transformations de diverse nature dont voici les plus simples :

1° On peut faire passer un terme quelconque d'un membre dans un autre en le changeant seulement de signe.

2° On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par un même nombre.

Par conséquent, on chassera les dénominateurs d'une équation, en réduisant tous les termes au plus petit dénominateur commun, et en supprimant ensuite ce dénominateur.

On simplifiera aussi une équation en divisant tous les termes par leur plus grand commun diviseur.

Lorsqu'une équation a été ainsi simplifiée, on évalue son *degré* d'après la somme la plus forte des exposants des inconnues dans un même terme.

L'équation $5x-3y=4z+1$ est du *premier degré* parce que dans aucun terme la somme des exposants des inconnues x, y, z ne surpasse 1.

L'équation $ax^3-21x^2zy+ab\,z^2=by^3$ est du *quatrième degré*, parce que dans le second terme la somme des exposants des inconnues est $2+1+1$. Cette équation est de plus *homogène*, c'est-à-dire que la somme des exposants des lettres connues ou inconnues qui entrent dans tous les termes est constante et égale à 4.

Lorsqu'une équation renferme plusieurs inconnues, elle peut être vérifiée d'une infinité de manières différentes; elle admet un nombre infini de *solutions*. En effet en donnant des valeurs arbitraires quelconques à toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, la valeur de cette dernière se déduit de l'équation.

Il faut, en général, autant d'équations que d'inconnues pour que le système de ces inconnues soit complétement déterminé.

Lorsque le nombre des équations surpasse de m le nombre des inconnues, on ne peut trouver de solution au système d'équations proposé, qu'autant que l'on peut satisfaire à m équations de condition entre les nombres et les constantes qui entrent dans ce système.

Résolution de l'équation du premier degré a une seule inconnue. — D'après les transformations précédentes, toute équation du premier degré à une seule inconnue peut se ramener à la forme

$$ax = b$$

a et b étant des quantités constantes. De là on tire

$$x = \frac{b}{a}$$

Cette valeur de x est ce que l'on appelle une *mule ;* elle représente les opérations à faire obtenir l'inconnue que l'on cherche.

Résolution générale des équations du premier degré a plusieurs inconnues. — Le système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut toujours se ramener à la forme

$$ax + by = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour résoudre ce système, il y a plusieurs méthodes :

1° Par *comparaison.* On tire de chacune des deux équations la valeur de la même inconnue, x par exemple, comme si y était connue; et on égale les deux valeurs de x, ce qui fournit une équation qui ne renferme plus que y. On obtient alors y. On peut de même avoir x.

2° Par *substitution.* On substitue dans la seconde équation la valeur de x par exemple, tirée de la première; et on a encore une équation unique en y.

3° Par *soustraction.* On multiplie les deux membres de la première équation par a', les deux membres de la seconde par a, a et a', étant pris avec leurs signes, et on retranche la seconde des équations ainsi obtenues de la première ; x disparaît, on a une équation en y.

Cette opération, par laquelle on fait disparaître une ou plusieurs inconnues d'un système d'équations proposées, s'appelle *élimination.*

Quel que soit le procédé d'élimination suivi, les valeurs de x et de y, tirées de l'ensemble des équations (1) et (2), sont

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Pour résoudre les trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\} \quad (3)$$

au moyen d'une des trois méthodes précédemment exposées, on éliminera l'une des inconnues entre la première et la seconde; puis entre la seconde et la troisième; on aura alors deux équations à deux inconnues entre lesquelles on éliminera encore une des inconnues, et il viendra une équation finale du premier degré ne renfermant plus qu'une inconnue. De la détermination de celle-ci on remontera facilement à la détermination des autres, par voie de substitutions successives.

Quelle que soit la méthode d'élimination suivie pour le système des équations (3), on obtiendra pour les inconnues les valeurs

$$x = \frac{N}{D},\ y = \frac{N'}{D},\ z = \frac{N''}{D},$$

dans lesquelles on a :

$$D = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$
$$N = db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''$$
$$N' = ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''$$
$$N'' = ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''.$$

On voit que pour une équation à une seule inconnue, le nombre des termes du numérateur et du dénominateur de l'inconnue est de 1.

Ce nombre est de 2 ou de 1×2, pour deux équations à deux inconnues.

Il est de 6 ou de $1 \times 2 \times 3$ pour trois équations à trois inconnues.

Il serait de 24 ou de $1 \times 2 \times 3 \times 4$ pour quatre équations à quatre inconnues; de 120 ou de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ pour cinq équations à cinq inconnues, et ainsi de suite.

La loi de formation des numérateurs et des dénominateurs des inconnues est aussi belle que simple.

Pour deux inconnues, prenez les coefficients a et b des inconnues, et formez les permutations ab, ba, que vous séparerez par le signe —, en mettant un accent à la dernière lettre de chacune des permutations, vous aurez le dénominateur $ab' - ba'$. Le numérateur de chacune des inconnues x et y s'obtient en substituant la quantité constante c, à la place du coefficient de l'inconnue qu'il s'agit de déterminer, et en laissant les accents à leur place. Pour x, on substitue c à la place de a dans ab', et c' à la place de a' dans ba', ce qui donne $cb' - bc'$.

Dans le cas de trois équations à trois inconnues, on introduit successivement la lettre c à droite, au milieu et à gauche de chacune des permutations ab et ba, ce qui en donne six nouvelles; on place les trois secondes après les trois premières, en les séparant alternativement par les signes — et +; on met enfin un accent à la seconde lettre et deux à la troisième. C'est ainsi qu'est formé le dénominateur **D.** Le numérateur de chacune des inconnues s'obtient en substituant, dans le dénominateur, la quantité constante au coefficient de cette inconnue, et en laissant les accents à leur place.

Cette loi de formation est générale.

§ 4. *Des équations du second degré.*

Résolution de l'équation binome. — L'équation la plus simple du second degré à une seule inconnue est celle qui ne renferme pas la première puissance de l'inconnue. Elle peut se mettre sous la forme $ax^2 = b$;

d'où $\quad x^2 = \dfrac{b}{a}$

et $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}} \quad (1)$

On met le double signe $\pm$, (*plus* ou *moins*), parce que le carré $\dfrac{b}{a}$ peut provenir d'une racine négative $-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$, tout aussi bien que d'une quantité positive $+\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Résolution de l'équation complète. — Une équation complète de second degré peut se ramener à la forme

$$x^2 + px + q = o$$

p et q étant des quantités connues, entières ou fractionnaires, positives ou négatives.

Les deux *racines*, les deux valeurs de l'inconnue se mettent sous la forme

$$x=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right),$$

uo encore

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ldots(2)$$

qu'il est facile d'énoncer en langage ordinaire.

Si l'on voulait ne conserver que des coefficients entiers dans l'équation primitive, on la mettrait sous la forme

$$ax^2+bx+c=o$$

et les racines seraient de la forme plus générale

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (3)$$

La solution des équations du second degré conduit à la considération des quantités *imaginaires*, qui n'ont qu'une existence symbolique et qui diffèrent essentiellement des quantités *réelles*. En effet, si, dans les valeurs (1), (2) et (3), les quantités $\frac{b}{a}$, $\frac{p^2}{4}-q$ et b^2-4ac sont négatives, aucune valeur réelle positive ou négative, mise à la place de x dans les équations primitives ne saurait y satisfaire.

Toute racine imaginaire d'une équation du second degré peut se mettre sous la forme

$$a\pm b\sqrt{-1},$$

dans laquelle a et b sont des quantités réelles.

Racine carrée des quantités littérales. — La solution des équations du second degré exige que l'on sache extraire les racines carrées des quantités algébriques.

Pour extraire la racine carrée d'un monome, il faut extraire la racine carrée du coefficient numérique, et diviser par 2 l'exposant de chacune des lettres de ce monome.

Lorsque l'opération ne peut se faire complètement, on a *un radical du second degré*.

Deux radicaux sont dits *semblables* lorsqu'ils ne diffèrent que par les quantités qui multiplient le radical. Tels sont $5\sqrt{2ab}$ et $3(c+d)\sqrt{2ab}$.

Pour combiner, par voie d'addition ou de soustraction, des radicaux samblables, il suffit de faire ces opérations sur les multiplicateurs des radicaux, et de donner au résultat le radical commun.

Pour obtenir le produit ou le quotient de deux radicaux du second degré, on fait le produit ou le quotient des quantités placées sous le signe $\sqrt{}$, et on le couvre du même signe.

Pour faire sortir du radical les facteurs qui sont des carrés parfaits, il suffit de placer les racines de ces carrés comme facteurs en avant du radical.

Pour faire entrer un facteur sous le radical, il faut élever ce facteur au carré.

Le procédé d'extraction de la racine carrée d'un polynome se déduit de la loi de formation du carré, savoir que le carré d'un polynome d'un nombre quelconque de termes se compose du carré du premier terme, du double produit du premier terme par le second, du carré du second, des doubles produits de chacun des deux premiers termes par le troisième, du carré du troisième, des doubles produits de chacun des trois premiers par le quatrième, du carré du quatrième, et ainsi de suite.

Il s'ensuit que, pour extraire la racine carrée d'un polynome, il faut l'ordonner par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la même lettre; extraire la racine du premier terme, ce qui donne le premier terme de la racine; supprimer le premier terme du polynome, et diviser le premier terme du reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donne le second terme de la racine; retrancher du reste le double produit du premier terme de la racine par le second et le carré du second; diviser le premier terme du second reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donne le troisième terme de cette racine; retrancher du second reste les doubles produits du premier et du second termes par le troisième et le carré du troisième terme; diviser le premier terme de ce troisième reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donne le quatrième terme de cette racine, et ainsi de suite.

L'extraction de la racine d'un polynome qui n'est pas un carré parfait, conduit, comme la division, à des séries d'un nombre indéfini de termes. Ainsi, en employant la notation des exposants négatifs, l'extraction de la racine du binome b^2-4ac, qui ne peut jamais être un carré parfait, donne la série

$$b-2acb^{-1}-2a^2c^2b^{-3}$$
$$-4a^3c^3b^{-5}-\text{etc.}$$

Lorsque l'on a à extraire la racine d'une expression de la forme $a+\sqrt{b}$, le résultat s'obtient au moyen de la formule

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$$
$$\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

qui donne lieu à une simplification notable si a^2-b est un carré parfait.

Équations du second degré a plusieurs inconnues. Considérons seulement le système de deux équations à deux inconnues.

Si l'une d'elles est du premier degré, on en tire la valeur d'une des inconnues, et, en substituant cette valeur dans l'autre équation, celle-ci devient du second degré à une seule inconnue. On peut donc la résoudre facilement.

Si une des équations est du premier degré par rapport à l'une des inconnues seulement, on en tire la valeur de cette inconnue, que l'on substitue dans l'autre équation; on a alors une équation du troisième degré.

Enfin, l'élimination d'une des inconnues entre deux équations complètes du second degré à deux inconnues conduit à une équation du quatrième degré.

§ 5. *Diverses applications des notations algebriques.*

L'emploi des signes et des notations algébriques facilite considérablement la découverte des propriétés des nombres. Il suffit aussi d appliquer ces signes et ces notations aux faits que nous avons énoncés en arithmétique relativement à la divisibilité, aux fractions décimales, aux proportions, aux progressions et aux logarithmes, pour généraliser ces faits et voir en quoi ils sont applicables aux systèmes de numération différents du système décimal.

Fractions continues. — On appelle ainsi toute expression de la forme

$$a+\cfrac{B}{b+\cfrac{C}{c+\cfrac{D}{d+\text{etc.}}}}$$

Mais on ne considère ordinairement que les fractions continues dans lesquelles les numérateurs B, C, D, sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

a, b, c, d, sont les *quotients incomplets*.

Milord Brouncker est le premier qui ait imaginé les fractions continues; mais les propriétés et les avantages de ces expressions ont été découvertes principalement par Huygens.

Pour réduire une fraction ordinaire telle que $\frac{1103}{887}$ en fraction continue, on suit le procédé usité pour la recherche du plus grand commun diviseur entre les deux termes; les quotients successifs sont 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, et la fraction continue s'écrit ainsi :

$$\frac{1103}{887}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Quand on veut revenir de la fraction continue à la fraction qui a servi à la former, on prend les quantités consécutives

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9}},\ \text{etc.},$$

ou en réduisant,

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{46}{37},\ \text{etc.}$$

Ces nouvelles fractions sont appelées *réduites*.

Lorsqu'on connaît deux réduites consécutives, $\frac{M}{N}$ et $\frac{P}{Q}$, la réduite suivante $\frac{R}{S}$ correspondant au *quotient incomplet* r, s'obtient au moyen de la formule.

$$\frac{R}{S}=\frac{Pr+M}{Qr+N}$$

La véritable valeur d'une fraction continue est toujours comprise entre deux réduites consécutives, lesquelles sont alternativement, à partir de la première, plus petites et plus grandes que cette valeur.

Les réduites sont toutes irréductibles.

La différence entre deux réduites consécutives a pour numérateur l'unité et pour dénominateur le produit des dénominateurs de ces réduites. L'erreur commise en prenant une réduite quelconque pour la valeur de la fraction est donc moindre que cette expression de la différence.

Une réduite $\frac{P}{Q}$ exprime la valeur de la fraction continue plus exactement que toute fraction dont le dénominateur est moindre que Q.

Pour la construction de son *automate planétaire*, Huygens avait à établir les roues d'engrenages dans des dimensions déterminées par les éléments du système solaire, et dont les rapports étaient exprimés par de très-grands nombres, afin de ne pas multiplier prodigieusement le nombre des dents, il chercha à simplifier ces rapports. Les fractions continues le conduisirent à ce résultat, et les propriétés des réduites lui apprenaient la valeur de l'approximation qu'il obtenait.

Toute fraction continue périodique simple ou mixte exprime l'une des racines d'une équation du second degré.

Evariste Galois, jeune géomètre du plus grand mérite, qu'une fin tragique et prématurée a enlevé à la science en 1833, n'étant encore qu'élève de mathématiques, avait trouvé, en 1829, quelques propositions fort élégantes à ce sujet. Il a démontré que si l'une des racines d'une équation du second degré est une fraction continue immédiatement périodique, on obtiendra l'autre racine de cette équation, en divisant l'unité négative par la fraction continue périodique renversée. De sorte que les valeurs,

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$$

et

$$x=-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\dots}}}}}}$$

sont nécessairement racine d'une même équation du second degré, qui est effectivement

$$3x^2-8x-7=0$$

Galois a démontré en outre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'une des racines soit plus grande que l'unité, et que l'autre soit comprise entre 0 et -1; et que réciproquement il en est toujours ainsi lorsque les deux racines sont comprises entre de telles limites.

Enfin, Galois a prouvé que toute équation du second degré de la forme

$$ax^2-bx-a=0$$

a ses racines non-seulement également périodiques, mais encore symétriques; de telle sorte que les dénominateurs également distants des extrêmes sont égaux entre eux.

Euler, Lagrange, l'un des Bernouilli, M. Wronski ont beaucoup cultivé la théorie des fractions continues.

Fractions de Lambert. Lambert, l'un des géomètres les plus distingués du siècle dernier, petit-fils d'un des Français expatriés après la révocation de l'édit de Nantes, a proposé le premier une espèce de fractions peu connues, et qui ont l'avantage singulier de former des suites plus *convergentes* qu'aucune série géométrique; c'est-à-dire qu'aucune suite de termes décroissant, suivant une progression géométrique, n'approche plus d'une certaine valeur déterminée, pour le même nombre de termes.

Lagrange s'est aussi occupé de ces fractions qu'il a rattachées aux fractions continues, dans le 5e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique.*

Pour en donner une idée, prenons la fraction $\frac{887}{1103}$. Divisons 1103 par 887, ce qui donne pour quotient 1, et pour reste 216; puis 1103 par 216, ce qui donne pour quotient 5, et pour reste 23; et ainsi de suite en prenant toujours le même dividende 1103, et pour diviseurs les restes consécutifs; les quotients successifs seront

1, 5, 47, 50, 367, 551, 1103.

et les restes

216, 23, 22, 3, 2, 1.

On posera alors

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5.47} - \frac{1}{5.47.50}$$
$$+ \frac{1}{5.47.50.367} - \frac{1}{5.47.50.367.551}$$
$$+ \frac{1}{5.47.50.367.551.1103}.$$

En faisant la même opération sur la fraction,

$$\frac{141592653589793238462643}{1000000000000000000000000}$$

qui, ajoutée au nombre entier 3, exprime le rapport π de la circonférence au diamètre (voy. la Géométrie col. 121), nous aurons

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \text{etc.}$$

Ici les divisions ont été faites *en dedans* ou *en dehors*, suivant qu'il a été nécessaire pour que chaque reste soit moindre que la moitié du précédent.

Les deux premiers termes donnent le rapport d'Archimède $\frac{22}{7}$; les trois premiers donnent le rapport d'Adrien Métius $\frac{355}{113}$.

Progressions par différence et par quotient. Soient a et A les premiers termes de deux progressions, l'une par différence, et l'autre par quotient; n et N les derniers termes, qui en ont $m-1$ avant eux; r et R la différence et le quotient constants; s et S les sommes des termes des deux progressions; P le produit de tous les termes de la progression géométrique, on aura les formules

$$r = \frac{n-a}{m-1}, \quad R = \sqrt[m-1]{\frac{N}{A}}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+n)\,m, \quad P = \sqrt{A^m N^m}$$

$$S = \frac{NR - A}{R-1} = \frac{A(R^m - 1)}{R-1},$$

On reconnaît encore, à l'inspection de ces formules, l'analogie déjà signalée entre les opérations relatives aux deux espèces de progression. (Voy. Arithmétique, col. 38, 41 et 42.)

Les 2 équations relatives aux progressions par différence servent à déterminer 2 des 5 quantités a, n, m, r, s lorsque l'on connaît les 3 autres ce qui donne lieu à 10 problèmes différents. Les 3 équations relatives aux progressions par quotient donnent lieu à 20 problèmes différents lorsque l'on veut déterminer 3 des 6 quantités A, N, m, R, S, P connaissant les 3 autres.

Exponentielles et logarithmes. — Parmi ces problèmes, ceux où m est inconnu conduisent à des équations de la forme $a^x = b$, auxquelles on donne le nom d'*exponentielles*. a et b sont des quantités connues.

Pour résoudre l'équation $a^x = b$, on forme les puissances successives de a; on trouve que b est compris entre a^n et a^{n+1}.

En posant $\frac{b}{a^n} = c$, on opère de la même manière sur l'équation $c^{x'} = a$, et on trouve a compris entre $c^{n'}$ et $c^{n'+1}$.

En continuant de la même manière, on aura x sous forme de fraction continue, savoir :

$$x = n + \cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{1}{n''' + \text{, etc.}}}}$$

Si on suppose que dans l'équation

$$a^x = y$$

a conservant la même valeur, on cherche toutes les valeurs de x qui correspondent à toutes les valeurs possibles de y, les premières ne seront autres que les logarithmes des secondes.

a est la base du système de logarithmes. Pour passer d'un système de logarithmes calculé dans la base a, aux logarithmes de la base b, il faut multiplier les premiers par un nombre constant M, qu'on appelle *module*, et qui n'est autre chose que le quotient de l'unité par le logarithme de la nouvelle base b calculée dans le système dont la base est a.

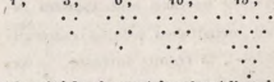
Nombres polygones. — Si on considère la plus simple des progressions arithmétiques, savoir :

÷ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. . . .

et qu'on prenne les sommes du premier, des deux, des trois, des quatre... premiers termes, on aura la suite

1, 3, 6, 10, 15... qu'on appelle *triangulaires* ou *trigones* parce qu'on peut toujours ranger en triangles autant de points qu'ils contiennent d'unités, comme on le voit ci-dessous.

1, 3, 6, 10, 15, etc.



et le *côté* de chaque triangle est l'un des nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, 4, etc.

Les nombres trigones sont représentés par la formule

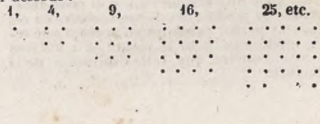
$$\tfrac{1}{2}(n^2 + n) \text{ ou } \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1).$$

En prenant la progression arithmétique.

÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . etc., dont la raison est 2, on en déduira de même les sommes 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, etc.

qui forment les nombres *quadrangulaires* ou *carrés*, dénomination justifiée par les figures ci-dessous :

1, 4, 9, 16, 25, etc.



La formule des carrés est n^2.
La progression arithmétique

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . \text{etc.},$$

dont la différence est 3, donnera, pour la somme d'un, de deux, de trois termes les nombres

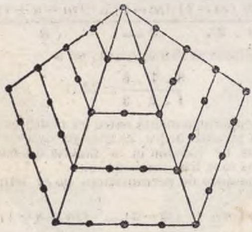
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.,

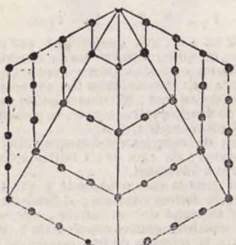
qui portent le nom de *pentagones*, et qui sont compris dans la formule $\frac{1}{2}(3n^2 - n)$ ou $\frac{1}{2}n(3n-1)$

On trouvera de la même manière les nombres *hexagones*, *heptagones*, *octogones*, etc.

Pour représenter par des points les polygones d'un nombre quelconque de côtés, on commence par tracer un polygone régulier qui ait le nombre de côtés demandé; ce nombre reste constant pour une même suite de nombres polygones et il est égal à la différence de la progression arithmétique qui est l'origine de la suite, augmentée de 2. On tire ensuite d'un des sommets du polygone des droites indéfinies à tous les autres sommets; on prend sur ces droites des longueurs égales à un certain nombre de fois leurs parties comprises entre l'origine commune et les divers sommets du premier polygone; on joint par de nouvelles droites parallèles aux côtés de ce polygone les points où le compas s'est arrêté, et on porte sur ces droites des parties égales aux côtés de ce même polygone.

Les deux figures suivantes représentent les constructions exécutées pour les nombres pentagones et hexagones.





La formule générale des nombres polygones de l'ordre m, pour le côté n est

$$\frac{(m-2)\,n^2 - (m-4)\,n}{2}$$

Pour reconnaître si un nombre est polygone de l'ordre m, il suffit de le multiplier par le nombre $8(m-2)$ et d'ajouter au produit le carré $(m-4)^2$. si la somme est un carré parfait a^2, le nombre proposé est un polygone de l'espèce déterminée.

Dans ce cas, le côté n auquel correspond le polygone, s'obtiendra par la formule

$$n = \frac{a + m - 4}{2(m-2)}$$

Nombres figurés. — Quelques auteurs confondent à tort les nombres *polygones*, dont il vient d'être question, et qui dérivent de progressions arithmétiques différentes, avec les nombres *figurés* dont chaque série dérive de la même progression arithmétique.

Ainsi, en ajoutant les termes de la première progression

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 \ldots.$$

on a la suite

1, 3, 6, 10, 15, 21, etc.

En ajoutant les termes de celle-ci, on a la suite

1, 4, 10, 20, 35, 56, etc.

qui forme les *nombres pyramidaux*. En continuant de la même manière, on tire de la première progression les *nombres figurés du premier ordre*.

Les nombres figurés du second ordre dérivent pareillement de la seconde progression

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 \ldots.$$

et sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64.....
1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, etc.

Les nombres figurés de l'ordre m dérivent de la progression par différence

$$\div 1 . 1+m . 1+2m . 1+3m . 1+4m .$$

La somme des nombres pyramidaux de l'ordre $m-2$ s'obtiendra par la formule

$$\frac{n^3(m-2) + 3n^2 - n(m-5)}{6}$$

Si $m - 2 = 1$, elle devient $\dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$

ou $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$

Si $m - 2 = 2$, elle devient $\dfrac{2n^3 + 3n + n}{6}$

ou $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$

Triangle arithmétique de Pascal. — Cette figure, due au génie de notre Pascal, jouit de propriétés remarquables.

On voit que les cases de la première bande horizontale ne contiennent que l'unité. Dans chacune des bandes suivantes, le nombre d'une case quelconque est égal à la somme des deux nombres contenus dans la case voisine à gauche, et dans la case immédiatement supérieure à celle-ci.

Le premier nombre de chaque bande est l'unité, et l'origine de chaque bande recule d'une case vers la droite.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1

La première propriété du triangle arithmétique est de donner, dans ses bandes horizontales, les nombres figurés du premier ordre.

La seconde bande contient les nombres naturels; la troisième, les nombres triangulaires; la quatrième, les nombres pyramidaux, et ainsi de suite.

On retrouve les mêmes nombres dans les bandes parallèles à la diagonale ou à l'hypothénuse du triangle.

Binome de Newton. — Mais la propriété la plus remarquable consiste en ce que les bandes verticales renferment les coefficients des différents termes d'une puissance quelconque d'un binome $x + a$.

La bande verticale qui a le nombre naturel 1, correspond à la première puissance. Les coefficients sont 1 et 1.

La bande où est le nombre naturel 2, correspond à la seconde puissance. Les coefficients sont 1, 2, et 1.

Pour la troisième puissance, on trouve de même les coefficients 1, 3, 3, 1 ; pour la quatrième, 1, 4, 6, 4, 1, etc.

On pourra donc former une puissance quelconque du binome $x + a$, au moyen du triangle arithmétique, si l'on connaît la manière dont les lettres x et a entrent dans cette puissance.

Or la somme des exposants de ces lettres, dans chaque terme, est constante et égale au degré de la puissance, depuis le premier terme qui ne renferme que x, jusqu'au dernier qui ne renferme que a ; les exposants de x vont en décroissant d'une unité, et ceux de a en croissant d'autant.

On aura donc

$$(x+a)^1 = x + a$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

plus généralement

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\,2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\;\;3\ldots\;\;n} a^n x^{m-n} + \ldots + ma^{m-1}x + a^m.$$

Cette belle formule est due à Newton, qui l'a trouvée par induction; elle porte son nom.

Des combinaisons. — On appelle ainsi tous les produits différents que l'on peut former avec m lettres prises n à n.

On distingue les *combinaisons* des *permutations* en ce que plusieurs de ces dernières sont composées entièrement des mêmes lettres écrites seulement dans un ordre différent.

Ainsi les quatre lettres a, b, c, d, prises deux à deux, donnent les six combinaisons

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

et les douze permutations

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc,$$

Le triangle arithmétique peut servir à déterminer le nombre des combinaisons de m lettres n à n. S'il s'agit, par exemple, de trouver ce nombre pour *huit* lettres prises *trois* à *trois*, on descendra dans la bande verticale qui correspond au nombre naturel 8, jusqu'à la rencontre de la *quatrième* tranche horizontale, et on trouvera 56 pour le nombre cherché.

La formule du binome conduit au même résultat. Car le coefficient du terme qui en a n avant lui exprime précisément le nombre de combinaisons de m lettres prises n à n. Or ce coefficient est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\;\;3\ldots\;\;n}$$

en y faisant $m=8$ et $n=3$, on a

$$\frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3} = 56\,.$$

Ces rapprochements entre les nombres figurés du premier ordre, le triangle de Pascal, le binome de Newton et la théorie des combinaisons sont très-remarquables.

Le nombre de permutations de m lettres n à n est

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

et le nombre de permutations de n lettres n à n est

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(n-1)\,n.$$

Si donc on a un mot quelconque, par exemple AMOR, et qu'on veuille savoir combien de mots différents on peut former avec ses quatre lettres, ce qui donne toutes les anagrammes possibles de ce mot, on trouve qu'ils sont au nombre de vingt-quatre, savoir, le produit des nombres consécutifs 1, 2, 3, 4.

Un mot de cinq lettres donnerait lieu à 120 permutations; un mot de six lettres à 720, de sept lettres à 5040, etc.

Mais si dans le mot proposé il y avait une ou plusieurs lettres répétées, il faudrait diviser, pour chacune de ces lettres, par le produit des nombres entiers consécutifs 1, 2, 3,... n, n étant le nombre de fois qu'elle est répétée. Ainsi le mot *Léopoldus*, où les lettres l et o entrent deux fois, n'est susceptible que de 90720 anagrammes différents au lieu de 362880 qui s'y trouveraient si aucune lettre n'était répétée; le premier de ces nombres est égal au second divisé par 2 et encore par 2.

Le mot *studiosus* où l'u est répété deux fois et l's trois fois n'est susceptible que de

$$\frac{362880}{1\,.\,2\times 1\,.\,2\,.\,3}$$

ou de 30240 permutations différentes.

On cite encore dans le même genre le vers latin

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo.

composé par le P. Bauhuys, jésuite de Louvain. Ce vers est célèbre par le grand nombre de permutations dont il est susceptible, sans que les lois de la prosodie soient enfreintes.

Erycius Putaneus a pris la peine de faire en 48 pages une énumération de ces permutations, en s'arrêtant à la 1022^{e}, nombre des étoiles alors connues, et en faisant remarquer que la Vierge avait plus de vertus que l'on ne compte d'étoiles au ciel.

Le P. Prestet étendit à 3276 le nombre des arrangements possibles du vers.

Mais Jacques Bernouilli, dans son *Ars conjectandi*, a prouvé que, même en retranchant les vers spondaïques, mais en admettant ceux qui n'ont pas de césure, on arrive à 3312 permutations.

On cite encore ce vers de Thomas Lansius

Mars, mors, sors, lis, vis, Styx, pus, nox, fex, mala, crux, fraus.

Il n'est pas difficile de trouver qu'en conservant le mot *mala* à l'antépénultième place pour se conformer à la mesure, le vers est susceptible de 39 916 800 arrangements différents.

De simples combinaisons de carreaux partagés en deux triangles de couleurs différentes, donnent lieu aux effets les plus agréables, dont les architectes peuvent tirer parti pour le carrelage des édifices publics et particuliers.

1

2

On voit d'abord (fig. 1, 2, 3, 4) que, suivant la situation qu'un seul carreau peut prendre, il forme quatre dessins différents, qui néanmoins peuvent se réduire à deux, puisque le premier et le troisième, le second et le quatrième ne diffèrent qu'en ce que les parties claires et ombrées sont transposées mutuellement.

De la combinaison de deux carreaux, il résultera soixante-quatre arrangements différents ; car sur chacun des quatre côtés des carreaux représentés dans les figures 1, 2, 3, et 4, on peut placer un autre carreau dans quatre positions ; on a donc en tout 4 × 4 × 4 ou soixante-quatre arrangements.

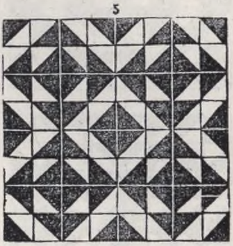
Mais de ces soixante-quatre, il y en a encore une moitié qui ne fait que répéter l'autre dans le même sens, ce qui les réduit à trente-deux ; on les réduirait à dix si on n'avait pas égard à la situation.

On pourrait semblablement combiner trois, quatre, cinq carreaux les uns avec les autres ; on trouverait que trois carreaux peuvent former entre eux 128 dessins ; que quatre en forment 256, etc.

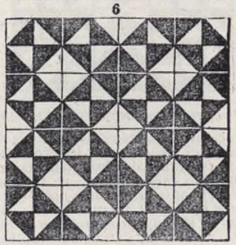
Nous donnons ici quelques-uns des compartiments les plus remarquables qui naissent d'un si petit nombre d'éléments.

On peut consulter à ce sujet les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1704, et le traité in-4° publié en 1722 par le P. Douat.

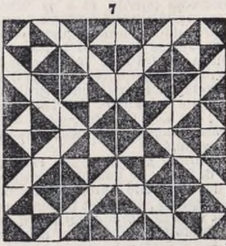
5



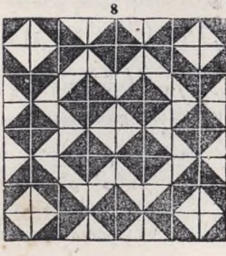
6



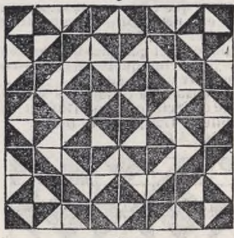
7



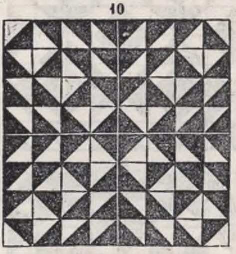
8



9



10



§ 6. *Propriétés générales des nombres.*

Les anciens philosophes avaient fait des recherches assez étendues sur les propriétés des nombres. On trouve des fragments curieux de ces recherches dans Euclide, et surtout dans Diophante. Depuis ce dernier jusqu'au temps de Viète et de Bachet, les mathématiciens continuèrent de s'occuper des nombres, mais sans beaucoup de succès, s'attachant plutôt à des rapprochements puérils et à de prétendues propriétés mystérieuses, qu'à des études solides et approfondies. Fermat, qui suivit de près Viète et Bachet, se fraya des routes nouvelles dans cette voie. On a de lui un grand nombre de belles propositions, mais qu'il a presque toutes laissées sans démonstration. Il a fallu le génie des Euler, des Lagrange, des Legendre, des Cauchy, etc., pour arriver à des démonstrations rigoureuses de ces théorèmes intéressants.

Des nombres premiers. — Pour trouver combien de fois x un nombre premier a est facteur dans la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à n, ou ce qui revient au même, quelle est la plus grande puissance de a qui divise le produit $1 . 2 . 3 .... n$, on prendra la formule

$$x = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^3}\right) + \text{etc.....}$$

où

$$\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right),\ \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^2}\right),\ \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^3}\right),....$$

représentent les plus grands entiers contenus dans les fractions

$$\frac{n}{a},\ \frac{n}{a^2},\ \frac{n}{a^3},....$$

la suite étant prolongée tant que le numérateur n est plus grand que le dénominateur.

Ainsi, pour savoir combien de fois le facteur 7 se trouve dans le produit des nombres naturels de 1 à 10000, on prendra

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\tfrac{10000}{7}\right) &= 1428 \\ \mathrm{E}\left(\tfrac{1428}{7}\right) &= 204 \\ \mathrm{E}\left(\tfrac{204}{7}\right) &= 29 \\ \mathrm{E}\left(\tfrac{29}{7}\right) &= 4 \\ \textit{Somme.} \quad & \overline{1665} \end{aligned}$$

Donc le produit dont il s'agit est divisible par 7 élevé à la seize cent soixante-cinquième puissance.

Tout nombre premier, excepté 2 et 5, est compris dans la formule

$$6x \pm 1$$

mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que cette formule donne d'autres nombres en même temps que les nombres premiers.

En faisant $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ etc. la formule avec le signe $+$ donnera les nombres

1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, etc.

et avec le signe $-$

1, 5, 11, 17. 23, 29, 35, 41, etc.

25 dans la première série et 35 dans la seconde ne sont pas des nombres premiers.

Il n'existe aucune formule algébrique propre à n'exprimer que des nombres premiers.

Il est néanmoins quelques formules remarquables par la multitude des nombres premiers qu'elles comprennent. Telles sont : la formule

$$x^2 + x + 17$$

dont les 17 premiers termes sont des nombres premiers ; la formule

$$2x^2 + 29$$

dont les 29 premiers termes le sont ; la formule

$$x^2 + x + 41$$

dont les quarante premiers termes le sont aussi.

C'est-à-dire que si l'on fait dans ces formules successivement $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...$ les nombres qui en résultent, et qui sont, pour la première, 17, 19, 23, 29, etc.; pour la seconde, 29, 31, 37, 47, etc.; pour la troisième, 41, 43, 47, 53, 61, 71,... etc., sont des nombres premiers jusqu'aux limites indiquées.

Fermat avait annoncé (sans dire qu'il en eût la démonstration) que la formule $2^x + 1$ donnait toujours des nombres premiers pourvu qu'on prît pour x un terme de la progression double 1, 2, 4, 8, 16... Mais Euler a trouvé que cette formule était en défaut pour $x = 32$, car il en résulte le nombre 4 294 967 297 divisible par 641 et qui donne pour quotient 6 700 417.

Quoique la suite des nombres premiers soit extrêmement irrégulière, on peut cependant trouver avec une précision très-satisfaisante combien il y a de ces nombres depuis 1 jusqu'à une limite donnée x. La formule qui sert à résoudre cette question est

$$y = \frac{x}{2{,}302585 . \mathrm{Log}x - 1{,}08366}$$

En effet, si on compare le résultat tiré de cette formule avec l'énumération immédiate faite dans la table que nous avons donnée pour les nombres premiers de 1 à 10 000 (voyez ARITHMÉTIQUE, col. 13, 14 et 15) on trouve 1230 des deux manières.

Legendre, auquel est due cette belle formule, l'a vérifiée au moyen des tables de Véga qui renferment les nombres premiers jusqu'à 400 000. En donnant à x cette valeur, on trouve $y = 33\,854$: le compte direct, dans les tables de Véga, donne 33 861.

Le *Cribrum arithmeticum* de M. Ladislas Chernac, qui s'étend jusqu'à 1 000 000, a fourni à Legendre une nouvelle vérification ; car on trouve dans cette table 78 493 nombres premiers, et la formule en indique 78 543. Le résultat fourni par celle-ci n'est donc erroné que de 50 unités sur 78493 ou de $\frac{1}{1570}$ environ.

Des nombres parfaits. — On appelle ainsi ceux qui sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes. Tel est 6, qui est égal à la somme de ses parties aliquotes 1, 2, 3. Tel est encore $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Pour trouver des nombres parfaits, il faut prendre la progression double
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, etc.,
et examiner ceux de ces termes qui, diminués d'une unité, sont des nombres premiers. Ceux qui jouissent de cette propriété sont 2, 4, 8, 32, 128, 8192; car diminués d'une unité ils donnent 1, 3, 7, 31, 127, 8191. On multipliera chacun de ces derniers nombres par celui de la progression géométrique qui précède celui dont il dérive, par exemple 3 par 2, 7 par 4, 31 par 16; et on aura 6, 28, 496, 8128, 33550336 qui seront des nombres parfaits.

Tous les nombres parfaits sont terminés par 6 ou 28.

Euclide a démontré (Eléments, liv. 9, prop. 36) que si $2^n - 1$ est un nombre premier, $2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait. On aura donc encore dans la série des nombres parfaits, outre ceux qui viennent d'être cités, les suivants :

$$2^{16}(2^{17} - 1) = 8589869056$$
$$2^{18}(2^{19} - 1) = 137438691328$$
$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2305843008139952128$$

$2^{31} - 1$, qu'Euler assure être premier, est le plus grand nombre premier connu jusqu'ici, et par conséquent $2^{30}(2^{31} - 1)$ est le plus grand nombre parfait connu.

Des nombres amiables. — On appelle *amiables* entre eux deux nombres tels que les parties aliquotes de chacun d'eux forment une somme égale à l'autre. Tels sont 220 et 284 ; car 220 est égale à la somme des parties aliquotes de 284, savoir 1, 2, 4, 71, 142 ; et réciproquement 284 est égal à la somme des parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, du premier 220.

On trouvera des nombres amiables par la méthode suivante. Ecrivez, comme on le voit ci-dessous, les termes de la progression géométrique double, en commençant par 2; triplez chacun de ces termes, et écrivez les produits sous les nombres qui ont servi à les former; ces termes triples diminués d'une unité formeront une nouvelle suite 5, 11, 23, etc., que l'on placera au-dessus de la première. Enfin on aura les termes de la suite inférieure 71, 287, etc.; en multipliant chacun des termes de la suite 6, 12, 24, etc., par son précédent et diminuant le produit de l'unité

5	11	23	47	95	191	283
2	4	8	16	32	64	128
6	12	24	48	96	192	384
	71	287	1151	4607	18431	73727

Prenez un nombre de la suite inférieure, par exemple 71, dont le nombre correspondant de la suite supérieure savoir 11, et celui qui précède ce dernier savoir 5, soient, ainsi que 71, des nombres premiers; multipliez 5 par 11 et le produit 55 par 4 terme correspondant de la progression géométrique : le produit 220 sera l'un des deux nombres cherchés. Le second se trouvera en multipliant 71 par 4, ce qui donnera 284.

De même avec 1151, 47 et 23, qui sont des nombres premiers, on trouverait deux autres nombres amiables 17296 et 18416 ; mais 4607 n'en donnerait pas, parce que des 2 autres nombres correspondants, 95 et 47, 95 n'est pas premier. Il en est de même de 18431. Mais 73727 donne avec 383 et 191 deux nouveaux nombres amiables 9 363 584 et 9 437 056. En employant les symboles algébriques, les suites précédentes deviennent

$$2 . 3-1,\ 2^2 . 3-1,\ \ 2^3 . 3-1,\ \ 2^4 . 3-1, \text{ etc.}$$
$$2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad \text{etc.}$$
$$2 . 3,\quad 2^2 . 3,\quad 2^3 . 3,\quad 2^4 . 3, \text{ etc.}$$
$$2^3 . 3^2-1, 2^5 . 3^2-1, 2^4 . 3^2-1, \text{ etc.}$$

Si $2^{2n-1} . 3^2-1$, $2^n . 3-1$ et $2^{n-1} . 3-1$ sont des nombres premiers, les nombres
$(2^{n-1} . 3-1)(2^n . 3-1)\,2^n$ et $(2^{2n-1} . 3^2-1)\,2^n$
seront amiables entre eux.

On ne connaît que ces trois couples de nombres amiables. Ils ont été donnés par Schooten, dans ses *Exercitationes mathematicæ, sect.* 9. Le terme d'*amiable* lui est dû, quoique Descartes, Rudolff et d'autres aient, avant lui, traité de ces nombres.

Des triangles rectangles en nombres.—Trois nombres tels que le carré du plus grand équivaut à la somme des carrés des deux autres, sont ce que l'on appelle un *triangle rectangle*. On peut donner pour exemples simples les nombres 3, 4, 5

$$\text{car } 5^2 = 3^2 + 4^2$$

et 5, 12, 13, car

$$13^2 = 5^2 + 12^2.$$

On peut trouver tant de triangles rectangles que l'on voudra par les formules suivantes.

a étant arbitraire, prenez

$$2a + 1 \text{ et } 2a\,(a + 1)$$

pour les deux petits nombres,

et $$2a^2 + 2a + 1$$

pour le grand. Car

$$4\,a^2\,(a+1)^2 + (2\,a+1)^2 = (2\,a^2+2\,a+1)^2$$

Ou encore, a et b étant arbitraires, les deux petits nombres seront $2ab$ et a^2-b^2, et le grand sera $a^2 + b^2$. Car

$$(a^2-b^2)^2 + 4\,a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$$

La formule dont les Pythagoriciens se servaient peut s'écrire ainsi :

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

Platon déterminait les triangles rectangles en nombres à l'aide d'une méthode qui peut être exprimée par l'équation

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$$

On peut encore employer la formule $(4a^2+8a+3)^2+(4a+4)^2=(4a^2+8a+5)^2$ le plus grand côté $4a^2+8a+3$ et l'*hypothénuse* $4a^2+8a+5$ ne diffèrent que de deux unités.

FAITS CURIEUX RELATIFS AUX PUISSANCES DES NOMBRES. — Fermat a démontré que l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne saurait être égale à un carré.

On lui doit aussi cette proposition importante qu'il est impossible de diviser aucune puissance au-dessus du carré en deux parties qui soient des puissances de même espèce. La somme de deux cubes ne peut donc être un cube exact; ni la somme de deux quatrièmes puissances une quatrième puissance, etc.

Ce théorème de Fermat est le seul qui ne soit pas aujourd'hui complétement démontré. Euler et Legendre ont trouvé les démonstrations pour les puissances 3 et 5; celle qui est relative à la puissance 4 n'est pas difficile. M. Lejeune-Dirichlet en avait donné une particulière pour la puissance 14; M. Lamé est parvenu à prouver la proposition pour la puissance 7. D'ailleurs, une fois établie pour une certaine puissance, la proposition l'est aussi pour toutes les puissances multiples : elle l'est donc aujourd'hui pour toutes les puissances 3, 6, 9, 12, 15; 4, 8, 12, 16; 5, 10, 15, 20, 25 ; 7, 14, 21, 28, etc.

La somme de deux bi-carrés ne peut être un carré.

La somme d'un bi-carré et du double d'un autre bi-carré ne peut non plus être un carré.

La somme ou la différence de deux cubes ne peut être double d'un cube.

Aucun nombre triangulaire, excepté 1, n'est égal à un cube ni à un bi-carré.

Un nombre quelconque peut être formé par l'addition de trois nombres triangulaires ; il peut être formé également par l'addition de quatre carrés, par celle de cinq nombres pentagones, par celle de six hexagones, et ainsi de suite à l'infini.

Pour compléter le sens de cet énoncé, il faut dire que 0 peut entrer une ou plusieurs fois dans la composition des nombres que l'on considère; car 0 fait partie de toutes les suites des nombres polygones.

Cette belle proposition est encore due à l'illustre Fermat.

DES CARRÉS MAGIQUES. — Emmanuel Moscopule, Grec du Bas-Empire, qui vivait au quatorzième ou au quinzième siècle, est le premier auteur dont on possède un écrit sur ce sujet.

On appelle carré magique un carré divisé en cellules égales dans lesquelles on inscrit les termes d'une progression arithmétique de telle sorte que la somme de chaque bande soit verticale, soit horizontale, et de chacune des diagonales soit toujours la même.

Il est probable que cette invention tire son origine de la superstition. Agrippa en fait mention au sujet des talismans. M. de la Loubère en a trouvé la connaissance répandue dans l'Inde, et surtout à Surate, ce qui rend assez probable qu'elle nous vient de ce pays aussi bien que notre système de numération.

Il y a deux sortes de carrés magiques dont le degré de difficulté est bien différent. Les uns sont les carrés impairs, dont la racine est impaire, comme 9, 25, 49, etc. : ce sont les plus faciles à ranger. Parmi les carrés pairs, on distingue les pairement et impairement pairs, suivant que leur racine est divisible par 4, ou seulement par 2. La méthode qui sert aux uns est différente de celle qu'exigent les autres.

Nous donnerons pour seul exemple la règle trouvée pour les carrés magiques impairs par Poignand, chanoine de Bruxelles, et perfectionnée par l'académicien de la Hire.

Soit, par exemple, un carré de racine impaire comme 5 ; ayant construit ce carré, vous placerez dans le premier rang horizontal d'en haut les cinq premiers nombres de la progression dans l'ordre que vous voudrez : prenons 1, 3, 5, 2, 4; choisissez ensuite un nombre premier avec cette racine 5, et qui, diminué de l'unité, ne la mesure point non plus : nous supposerons 3; c'est pourquoi vous prendrez le troisième chiffre de cette suite, d'où vous compterez pour remplir la seconde bande horizontale 5, 2, 4, 1, 3: puis vous recommencerez encore par le troisième, après et y compris 5, c'est-à-dire par 4, ce qui donnera, pour la troisième bande, 4, 1, 3, 5, 2. Vous aurez, en suivant le même procédé, la suite des nombres 3, 5, 2, 4, 1, dont vous remplirez la quatrième bande; et ainsi en continuant et reprenant toujours du troisième chiffre, y compris le précédent, jusqu'à ce que tout le carré soit rempli comme l'on voit ici.

Ce carré sera un des composants du carré cherché et sera magique, car la somme de chaque bande, soit horizontale, soit verticale, soit diagonale, est la même, puisque les cinq nombres de la progression sont dans chacune sans répétition.

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

Faites présentement un deuxième carré géométrique de 25 cases, dans la première bande duquel vous inscrirez les multiples de la racine 5, en commençant par zéro, savoir 0, 5, 10, 15, 20, et dans l'ordre qu'il vous plaira, par exemple celui-ci 5, 0, 15, 10, 20; vous finirez de remplir le carré suivant le même principe que ci-dessus, en ayant néanmoins attention de ne pas prendre le même quantième pour recommencer continuellement.

5	0	15	10	20
10	20	5	0	15
0	15	10	20	5
20	5	0	15	10
15	10	20	5	0

On a pris, par exemple, pour le premier carré, le troisième chiffre; il faudra prendre ici le quatrième, et l'on aura le carré des multiples formé comme on le voit ici. C'est le second composant du carré magique cherché, et il est lui-même magique, puisque la somme de chaque bande et de chaque diagonale est la même.

Maintenant, pour avoir le carré magique cherché, il n'y a qu'à inscrire dans un troisième carré de 25 cellules, la somme des nombres qui se trouvent dans les cellules correspondantes des deux précédents, par exemple $5+1$ ou 6 dans la première à gauche et en haut du carré cherché; $0+3$ ou 3 dans la deuxième, etc. : vous aurez, par ce procédé, le carré de 25 cases ci-joint, qui sera nécessairement magique.

6	3	20	12	24
15	22	9	1	18
4	16	13	25	7
23	10	2	19	11
17	14	21	8	5

On peut, par ce moyen, faire tomber tel nombre qu'on voudra dans telle case qu'on voudra, par exemple 1, dans la case centrale : il n'y a qu'à remplir la bande du milieu par la suite des nombres, en sorte que 1 soit au milieu, comme on le voit ici, et on continuera de remplir le carré suivant le principe ci-dessus, en recommençant par la bande la plus haute quand on aura rempli la plus basse.

2	1	3	4	5
3	4	5	2	1
5	2	1	3	4
1	3	4	5	2
4	5	2	1	3

Pour former le second carré, on placera zéro au centre, comme on voit ci à côté, et on le remplira de la même manière et avec l'attention de ne pas prendre, pour recommencer les bandes, le même quantième que pour le premier.

20	5	10	0	15
0	15	20	5	10
5	10	0	15	20
15	20	5	10	0
10	0	15	20	5

Enfin l'on additionnera, dans un troisième carré, les cases semblables, et l'on aura le carré ci-joint, où 1 occupera nécessairement le centre.

22	6	13	4	20
3	19	25	7	11
10	12	1	18	24
16	23	9	15	2
24	5	17	21	8

§ 7. *Analyse indéterminée du premier degré.*

Lorsqu'un problème conduit à moins d'équations que d'inconnues, il admet une infinité de solutions algébriques; néanmoins la nature de la question peut exiger que les valeurs des inconnues soient des nombres entiers et positifs. L'analyse indéterminée a pour but de trouver les solutions qui satisfont à cette condition.

Nous ne considérons ici que le cas le plus ordinaire de l'analyse indéterminée du premier degré.

Une équation du premier degré à deux inconnues peut toujours être ramenée à la forme

$$ax + by = c$$

a, b, c étant des nombres entiers positifs ou négatifs qui n'ont pas de diviseur commun.

Pour que cette équation puisse admettre des solutions entières, il faut que a et b soient premiers entre eux.

Supposons que l'on réduise $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et représentons par $\frac{p}{q}$ l'avant-dernière réduite.

D'après les propriétés connues des fractions continues, on aura

$$ap - bq = \pm 1$$

Selon que la réduite $\frac{p}{q}$ est de rang pair ou impair.

De là on tire

$$apc - bqc = \pm c$$

On satisfera donc à l'équation donnée dans le premier cas en posant

$$x = pc,\ y = -qc$$

et dans le second cas, en posant

$$x = -pc,\ y = qc.$$

Or, quand on connaît une solution entière ($x = x'$, $y = y'$), de l'équation

$$ax + by = c$$

on peut en déduire toutes les autres au moyen des formules

$$x = x' \pm bt$$
$$y = y' \mp at$$

dans lesquelles t est un nombre entier quelconque.

Parmi les systèmes de valeurs données par ces formules, on pourra choisir celles qui sont positives.

§ 8. *Puissances et racines des quantités algébriques et numériques*

Pour obtenir la racine $m^{\text{ème}}$ d'un monome, il faut extraire la racine $m^{\text{ème}}$ du coefficient numérique et diviser l'exposant de chaque lettre par m.

$$\text{Ainsi } \sqrt[3]{64a^3b^6} = 4\,ab^2.$$

Cette règle, appliquée dans sa plus grande généralité, conduit à la notation des exposants fractionnaires positifs et même négatifs, imaginés par Descartes, et l'une des plus expressives de l'algèbre.

$$\text{Ainsi } \sqrt[5]{32a^4\,b^6c} = 2a^{\frac{4}{5}}\,b^{\frac{6}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}.$$

Généralement

$$\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \sqrt[n]{a^p\;b^{-q}} = a^{\frac{p}{n}}\,b^{-\frac{q}{n}}.$$

Les règles des opérations à effectuer sur les exposants fractionnaires positifs et négatifs sont les mêmes que pour les exposants entiers.

Le produit, le quotient, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines des radicaux d'un degré quelconque ne sauraient donc offrir aucune difficulté.

L'extraction des racines des polynomes est fondée sur la formule du binome de Newton.

Pour extraire la racine $m^{\text{ème}}$ d'un polynome P, ordonnez-le par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une lettre. Prenez la racine $m^{\text{ème}}$ du premier terme, vous aurez le premier terme de la racine. Divisez le deuxième terme de P par m fois la $(m-1)^{\text{ème}}$ puissance du premier terme de la racine, vous aurez le deuxième terme de cette racine. Retranchez de P la $m^{\text{ème}}$ puissance de la somme des deux termes trouvés, et divisez le premier terme du reste R par m fois la $(m^{\text{ème}}-1)$ puissance du premier terme de la racine, vous aurez le troisième terme ; et ainsi de suite.

Lorsque le polynome proposé est une puissance $m^{\text{ème}}$ exacte, ces opérations conduisent à un reste nul.

L'extraction des racines des nombres est d'ailleurs fondée aussi sur la composition des deux premiers termes $x^m + mx^{m-1}\,a$ de la $m^{\text{ème}}$ puissance du binome, et se réduit à des procédés analogues à ceux qui ont été développés dans l'ARITHMÉTIQUE (c. 33 et 34), pour les racines carrées et cubiques.

La formule du binome de Newton est vraie pour des exposants fractionnaires positifs ou négatifs, aussi bien que pour un exposant entier et positif, et elle peut être employée avec un grand avantage à la détermination des racines des nombres.

Veut-on, par exemple, avoir la racine carrée de 101. On prend le carré 100 le plus approché possible de 101 et on pose $101 = 100 + 1$, d'où

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = (100+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, si dans la formule du binome, on fait $m=\frac{1}{2}$, on trouve

$$(x+a)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^2} + \frac{a^3}{16x^3} - \frac{5a^4}{128x^4} + \frac{35a^5}{1280x^5} - \text{etc.}\right)$$

Ici l'on a $x=100$, d'où $x^{\frac{1}{2}} = 10$, et $\frac{a}{x}=0{,}01$ donc

$$\sqrt{101} = 10\left(1 + \frac{0{,}01}{2} - \frac{(0{,}01)^2}{8} + \frac{(0{,}01)^3}{16} - \frac{5\,(0{,}01)^4}{128} + \text{etc.}\right)$$

Si on veut avoir cette racine à 0,0001 près, il suffit de prendre les trois premiers termes du développement; car le quatrième terme $\frac{0{,}000001}{16}$ multiplié par le coefficient 10 ne produit que 0,000000625, et les suivants sont encore moindres.

En effectuant les calculs, on trouve

$$\sqrt{101} = 10{,}0499.$$

§ 9. *Du plus grand commun diviseur algébrique.*

Pour obtenir le plus grand commun diviseur de plusieurs monomes, on cherche le plus grand commun diviseur des coefficients numériques, et on écrit à la suite de ce nombre chaque lettre commune à tous les monomes, en lui donnant le plus petit exposant dont elle est affectée dans ces monomes.

Ainsi le plus grand commun diviseur des quantités $432a^4b^2x^2$, $270a^2b^3x^2$, $90a^3\,bx^3$ est $18a^2bx^2$.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes et qui ne renferment qu'une seule lettre x, on commence par chercher le plus grand diviseur monome commun à tous leurs termes, et on supprime ce facteur dans les deux polynomes.

Soient A et B les deux polynomes ainsi simplifiés; on suppose que le degré de B ne surpasse pas celui de A et qu'ils sont tous deux ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x.

On divise successivement A par B, B par le premier reste, celui-ci par le second et ainsi de suite.

Pour rendre entiers les coefficients numériques des divers termes des quotients successifs, on multiplie chaque dividende partiel par un nombre tel que le coefficient du premier terme de ce dividende contienne exactement le premier terme du diviseur correspondant.

On supprime dans les restes successifs les facteurs monomes, s'il s'en trouve.

En continuant ainsi on parvient toujours à un reste indépendant de x. Si ce reste est nul, le dernier diviseur employé est le plus grand commun diviseur demandé. Si le reste n'est pas nul, les polynomes A et B n'ont pas de facteur commun.

En appliquant cette règle aux polynomes

$$3x^5 - 10x^3 + 15x + 8, \text{ et}$$
$$x^6 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6,$$
on trouvera $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ pour plus grand commun diviseur.

Soient maintenant deux polynomes M et N, qui contiennent deux lettres x et y, et qui n'ont plus de facteurs monomes.

On les ordonne d'abord par rapport aux puissances décroissantes d'une des deux lettres, de x par exemple : les coefficients de x peuvent être des polynomes. Mais ils ne contiennent qu'une seule lettre y.

Soit a le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de x dans M, b celui des coefficients des puissances de x dans N, et d le plus grand commun diviseur de a et de b. a, b, d, sont faciles à trouver d'après les règles précédentes. En divisant M par a, N par b on obtiendra les quotients entiers A et B et on aura

$$M = a \times A, \ N = b \times B.$$

Il suffira de déterminer le plus grand commun diviseur D des polynomes A et B qui n'ont plus de facteurs indépendants de x. On obtiendra le plus grand commun diviseur des polynomes M et N en multipliant D par d.

On appliquera aux polynomes A et B ce qui a été dit relativement à deux polynomes qui ne contiennent qu'une seule lettre, en ayant soin de remarquer qu'au lieu de coefficients et de facteurs numériques, on peut introduire et supprimer des facteurs algébriques qui peuvent être des polynomes en y.

On s'élèvera de la même manière au cas où les polynomes renferment 3, 4, 5, 6 lettres et ainsi de suite.

§ 10. *Propriétés principales des fonctions dérivées.*

Lorsque, dans le polynome,
$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + rx^2 + sx + t$$
que l'on peut désigner, pour abréger, par $f(x)$ (*fonction de* x), on remplace x par $x + h$ et que l'on ordonne le résultat, développé suivant la formule du binome, par rapport aux puissances croissantes de h, on obtient

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x)$$
$$+ \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + h^m,$$

$f(x)$ est le polynome donné.

$f'(x), f''(x), f'''(x)$ sont les *fonctions dérivées successives* ou simplement les *dérivées successives* de ce polynome.

Leurs valeurs sont :

$$f'(x) = mx^{m-1} + a(m-1)x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ 2rx + s$$
$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$
$$+ a(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots + 2r.$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + \text{etc.}$$
....
$$f^{(m)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.$$

Chacune d'elles dérive donc de la précédente au moyen d'une loi constante.

La dérivée du premier ordre $f'(x)$ d'une fonction entière d'une variable exprime la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable.

Si on fait croître x par degrés insensibles entre deux limites a et b, la fonction $f(x)$ ira en croissant tant que la dérivée $f'(x)$ conservera une valeur positive; et quand la dérivée sera négative, la fonction ira en décroissant.

On en conclut que la dérivée $f'(x)$ est nulle pour toute la valeur a de x qui correspond à un *maximum* ou à un *minimum* de $f(x)$. Dans le cas du maximum le résultat de la substitution de a à la place de x dans $f''(x)$ est négatif; ce résultat est positif dans le cas du minimum.

En général, si la première des dérivées successives qui n'est pas réduite à zéro par la substitution de x à la place de a est de rang pair, $f(x)$ est un maximum ou un minimum pour cette même valeur $x = a$, suivant que cette dérivée est négative ou positive. — Si la première dérivée non annulée par l'hypothèse $x = a$, était de rang impair, il n'y aurait ni maximum ni minimum.

§ 11. *Élimination. Équation aux différences.*

Éliminer des inconnues, c'est déduire d'un système d'équations qui renferment ces inconnues avec plusieurs autres, un autre système d'équations qui ne les contiennent plus. (Col. 73).

Lorsqu'il y a autant d'équations que d'inconnues, l'élimination de toutes les inconnues moins une conduit généralement à une *équation finale* à une seule inconnue, équation dont le degré est tout au plus égal au produit des degrés des équations composantes.

Considérons seulement le cas de deux équations à deux inconnues.

Si l'une des équations ne contient une des inconnues x, qu'au premier ou au second degré, on résoudra cette équation par rapport à x, en y considérant y comme une quantité connue, et on substituera la valeur de x en fonction de y dans l'autre équation. On parviendra ainsi à une équation qui ne contiendra plus que y. La résolution de cette dernière équation fera connaître les valeurs de y, et on obtiendra les valeurs correspondantes de x, en substituant successivement chaque valeur de y dans celle de x qui est exprimée en fonction de y.

Généralement, si l'on a deux équations numériques de degrés quelconques entre deux inconnues, pour obtenir les valeurs de y qui conviennent aux équations proposées, on cherche le plus grand commun diviseur entre ces deux équations ; on égale séparément à zéro le reste indépendant de x, auquel on parvient, ainsi que chacun des facteurs en y que l'on a supprimés dans le cours du calcul, et l'on résout séparément chacune de ces équations.

Parmi les valeurs que l'on obtiendra ainsi, il pourra se trouver des valeurs étrangères qui devront être rejetées. Mais les détails relatifs à la séparation de ces deux espèces de valeurs nous entraîneraient trop loin.

Les procédés de l'élimination sont employés utilement pour le calcul d'une équation dont toutes les racines sont la différence entre chacune des racines d'une équation proposée et toutes les autres.

Cette équation, qui porte le nom d'*équation aux différences*, s'obtient en éliminant a entre les deux équations.

$$f(x) = o \text{ et}$$

$$f'(x) + \frac{y}{1.2} f''(x) + \frac{y^2}{1.2.3.} f'''(x) + \ldots \text{ etc.} = o.$$

Si l'équation proposée est du degré m, l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$; elle ne contient que des puissances paires de y, et si on y remplace y^2 par z elle prend le nom d'*équation aux carrés des différences.*

Pour obtenir une quantité moindre que la plus petite différence entre les racines d'une équation donnée, il suffit de chercher la racine carrée de la limite inférieure des racines positives de l'équation aux carrés des différences.

Lorsque l'équation aux carrés des différences n'a que des variations de signes, l'équation proposée a toutes ses racines réelles; lorsque la première a des permanences, la seconde a des racines imaginaires; et le nombre des couples de racines imaginaires de la proposée ne peut surpasser le nombre des permanences dans l'équation aux carrés des différences.

§ 12. *Propriétés générales des équations de tous les degrés.*

RACINES DES ÉQUATIONS. — Toute équation du degré m à une seule inconnue peut être ramenée à la forme.

$$(1) \quad x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + rx^2 + sx + t = o.$$

$a, b, \ldots r, s, t$ étant des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Si en substituant l'une après l'autre, dans le premier membre de cette équation, deux valeurs réelles et finies pour x, $x = A$ et $x = B$ on obtient deux résultats de signes contraires, l'équation aura au moins une racine réelle comprise entre A et B.

Toute équation de degré impair admet au moins une racine réelle de signe contraire au signe de son dernier terme; et toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Lorsque les termes de l'équation (1) ont tous le même signe, cette équation n'a pas de racine positive.

Lorsqu'une équation est complète, et que ses termes sont alternativement positifs et négatifs, elle n'a pas de racine négative.

Quand une équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue, toutes les racines ont deux à deux la même valeur numérique avec des signes contraires, et réciproquement.

DÉCOMPOSITION DES ÉQUATIONS EN FACTEURS. — Si A est une racine de l'équation, le premier membre de cette équation est divisible par le binome $x - A$, et réciproquement.

Plus généralement, le reste de la division du polynome qui forme le premier nombre de l'équation, par le binome $x - A$, est égal à la valeur que prend ce polynome quand on y remplace x par A.

Toute équation du degré m admet m racines réelles ou imaginaires, et ne peut en admettre davantage; ou, en d'autres termes, le premier membre de l'équation ci-dessus est décomposable d'une seule manière en m facteurs binomes du premier degré, tels que

$$x - A, x - B, \text{ etc.}$$

Toute équation de degré pair, dans laquelle les coefficients sont des quantités réelles, peut toujours être décomposée en m facteurs réels du second degré; et cela de $\frac{m(m-1)}{1.2}$ manières différentes.

Le nombre des diviseurs du troisième degré est $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$

Le nombre des diviseurs du degré n est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}$$

et le nombre total de tous les diviseurs sera

$$2^m - 1.$$

Dans toute équation ramenée à la forme (1), le coefficient du second terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des racines.

Le coefficient du troisième terme est la somme des produits deux à deux des racines.

Le coefficient du quatrième terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des produits trois à trois des racines; et ainsi de suite.

Enfin, le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair, est égal au produit de toutes les racines.

TRANSFORMATION DES RACINES DES ÉQUATIONS. — On peut, sans connaître les racines d'une équation, leur faire subir diverses transformations qui rendent souvent leur détermination plus facile.

Pour augmenter d'une même quantité h toutes les racines de l'équation (1) on remplacera x par $y - h$, et toutes les racines de la transformée en y excèderont de h les racines de la proposée.

Cette transformation sert à faire disparaître le second terme d'une équation. Il suffit pour cela de remplacer x par $y - \frac{a}{m}$.

Pour transformer l'équation (1) en une autre dont toutes les racines soient égales à celles de la proposée prises avec des signes contraires, remplacez x par $-y$.

La transformation par multiplication des racines s'opère en posant $x = \frac{y}{h}$.

La transformée, en multipliant tout par h^m sera

$$y^m + ahx^{m-1} + bh^2 x^{m-2} + \ldots + sh^{m-1} x + th^m = o$$

En prenant pour h le plus petit nombre possible qui rende entiers tous les coefficiens de la transformée, celle-ci jouira de la propriété de n'avoir plus que des nombres entiers pour racines commensurables.

RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES. — On dit qu'il y a une *permanence* lorsque deux termes voisins dans une équation ont le même signe; dans le cas contraire, il y a une *variation.*

Dans toute équation le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations de signes; et le nombre des racines négatives ne peut surpasser le nombre des variations de la transformée que l'on obtient en changeant x en $-x$.

Dans une équation complète, le nombre des racines négatives est tout au plus égal au nombre des permanences.

Dans une équation complète qui a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.

Toutes les fois qu'il manque un terme entre deux termes de même signe, l'équation a au moins deux racines imaginaires.

Limites des racines. — K étant le plus grand coefficient de l'équation (1), K + 1 et — (K + 1) sont respectivement les limites supérieures des racines positives et négatives de cette équation.

Mais on peut souvent avoir des limites plus rapprochées. N étant la valeur absolue du plus grand des coefficients négatifs, N + 1 sera une limite supérieure des racines positives.

Lorsque le premier terme négatif $-\mathrm{K}x^{m-n}$ est séparé du premier terme x^m de l'équation par $n-1$ termes positifs, $1+\sqrt[n]{\mathrm{N}}$ sera une limite encore plus rapprochée des racines positives; N désigne toujours le plus grand des coefficients négatifs.

La limite supérieure des valeurs absolues des racines négatives s'obtient en changeant x en $-x$ dans l'équation proposée, et en prenant, dans la transformée, la limite supérieure des racines positives.

Pour limite inférieure des racines positives, on prend la valeur absolue du plus grand coefficient de signe contraire au dernier terme, et on la divise par la somme de ce coefficient et du dernier terme.

La limite inférieure des racines négatives n'est autre que la limite inférieure des racines positives de la transformée que l'on obtient en remplaçant x par $-x$ dans la proposée.

Lorsque deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines réelles de cette équation; et lorsque deux nombres donnent deux résultats de même signe, ils ne comprennent aucune racine ou ils en comprennent un nombre pair.

Théorème de Sturm. Soit $\mathrm{V}=o$ une équation d'un degré quelconque dont toutes les racines sont inégales, et soit V' la fonction dérivée de V; qu'on opère comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre V et V', avec cette seule différence que l'on changera les signes de tous les restes à mesure qu'ils serviront de diviseurs; soient V'', V''',..... ces restes consécutifs dont les signes ont été changés, et qui sont poussés jusqu'à un reste numérique $\mathrm{V}^{(r)}$, on aura la proposition suivante :

Lorsque l'on substitue à la place de x, dans la suite des fonctions V, V', V'', V'''...$\mathrm{V}^{(r)}$, deux nombres quelconques a et b positifs ou négatifs, si a est plus petit que b le nombre de racines réelles de l'équation $\mathrm{V}=o$ comprises entre a et b est égal à l'excès du nombre des variations contenues dans la suite des signes des fonctions V, V', V'', V'''......$\mathrm{V}^{(r)}$ pour $x=a$ sur le nombre des variations de leurs signes pour $x=b$.

§ 13. *Résolution des équations numériques d'un degré quelconque à une seule inconnue.*

Recherches des racines commensurables égales ou inégales. Commencez par ramener l'équation à la forme (1).

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+sx+t=o$$

en multipliant les racines par une quantité h telle que tous les coefficients deviennent des nombres entiers, a, b, c, etc. Les racines commensurables ne pourront être que des nombres entiers.

Prenez les limites supérieures des racines positives et négatives de l'équation.

Ecrivez sur une même ligne horizontale tous les diviseurs du dernier terme, compris entre ces limites, par ordre de grandeur, et tant avec le signe + qu'avec le signe —.

Ecrivez au-dessous les quotients du dernier terme par chacun de ces diviseurs, en y ajoutant avec son signe le coefficient du terme en x, et en négligeant tous les quotients qui ne sont pas des nombres entiers.

La troisième ligne est formée des quotients des nombres de la ligne précédente par les diviseurs correspondants, quotients auxquels on ajoute le coefficient du terme en x^2 en négligeant toujours ceux qui ne sont pas entiers.

Continuez de la même manière jusqu'à ce que vous ayez épuisé tous les termes de l'équation, jusques et y compris le second.

Ceux des diviseurs qui auront fourni des quotients égaux à — 1 à la dernière ligne d'opération, seront les racines réelles commensurables, et seront les seules.

On ne soumet pas ordinairement à ces opérations les diviseurs + 1 et — 1 parce qu'il est plus simple de chercher directement s'ils vérifient l'équation proposée.

On limite aussi les opérations en ne cherchant les racines entières que parmi les diviseurs du dernier terme, qui, augmentés de 1, divisent le résultat de la substitution de — 1 à la place de x dans le premier membre de l'équation proposée, et qui, diminués de 1, divisent le résultat de la substitution de + 1 à la place de x.

Lorsque l'on a trouvé diverses racines commensurables x', x'', x'''... on divise le premier membre de l'équation par le produit des facteurs $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$... qui correspondent à ces racines. Le quotient égalé à zéro détermine toutes les autres racines.

Or, si la proposée a des racines commensurables égales, la nouvelle équation admettra encore des racines commensurables. Pour les déterminer, il suffira d'essayer la substitution directe de x', x'', x'''.. On peut encore substituer chacune des racines dans les dérivées successives du premier membre de l'équation proposée; le degré de multiplicité de la racine est marqué par le rang de la première dérivée qui ne devient pas nulle pour cette substitution.

Recherches des racines incommensurables égales. Lorsque le premier membre de l'équation a été divisé par le produit des facteurs binomes qui correspondent aux racines égales ou inégales, le quotient égalé à zéro donne une nouvelle équation $f(x)=o$, dont toutes les racines réelles sont incommensurables.

Mais cette équation peut avoir des racines incommensurables égales.

Pour les trouver, on cherche successivement les plus grands communs diviseurs D, entre $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$, D' entre D et sa dérivée, D'' entre D' et sa dérivée.

En continuant ces calculs, on parvient toujours à un polynome qui est *premier* avec sa dérivée. Supposons que D'' soit ce polynome. On divisera chacune des fonctions $f(x)$, D, D',... par la suivante, ce qui donnera les quotients successifs Q, Q', Q''...

On divisera de même chacun de ces quotients successifs par le suivant, et le dernier Q'' par D'', ce qui donnera de nouvelles fonctions de x

$$q,\ q',\ q'',$$

On posera alors les équations

$$q=o,\ q'=o,\ q''=o,\ D''=o$$

chacune d'elles n'aura que des racines inégales.

La première donnera toutes les racines simples de la proposée $f(x)=o$; la seconde donnera toutes les racines doubles; la troisième les racines triples, et ainsi de suite.

Une équation du troisième degré, dont les coefficients sont commensurables et qui n'a pas de racines commensurables, a toutes ses racines inégales.

Une équation du quatrième degré, dont les coefficients sont commensurables, ne peut avoir de racines incommensurables égales qu'autant qu'elle a deux racines doubles; dans ce cas, on peut ramener l'équation proposée à une équation du second degré, en extrayant la racine carrée du premier membre.

Recherche des racines incommensurables inégales par la méthode de M. Sturm.— Soit $V=o$ l'équation proposée qui ne contient plus que des racines incommensurables inégales. Soit V', la fonction dérivée de V, et soient $-V'', -V'''...-V^{(r)}$, les restes consécutifs que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre V et V', entre V' et V'', et ainsi de suite, $V^{(r)}$ étant un nombre. Désignons par (x) l'ensemble de toutes les fonctions V, V', $V''...V^{(r)}$, et par (a) l'ensemble des résultats que l'on obtient en substituant a à la place de x.

On donnera successivement à x les valeurs 0, 10, 100, 1000, et on notera les excès des nombres de variations de signes contenues dans chacune des suites (10), (100), (1000), sur les nombres des variations de signes de la suite précédente : ces excès seront respectivement égaux aux nombres de racines positives comprises entre 0 et 1, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc.

S'il y a des racines entre 1 et 10, on déterminera la partie entière de chacune en substituant les nombres 1, 2, 3, jusqu'à 10; s'il y a des racines entre 10 et 100, le chiffre des dixaines de chacune se connaîtra par la substitution des nombres 10, 20, 30, jusqu'à 100, et ainsi de suite. Semblablement encore pour les racines moindres que 1, on connaîtra le chiffre décimal de l'ordre le plus rapproché de la virgule, en substituant les nombres de 0,1 à 1, ou bien de 0,01 à 0,1, etc.

En procédant de cette manière, on obtient le chiffre de l'ordre le plus élevé contenu dans chaque racine. Pour obtenir celui de l'ordre immédiatement inférieur, par exemple le chiffre des dixaines lorsqu'on a trouvé des racines comprises entre 300 et 400, on change x en $300+x'$, ce qui fournit une nouvelle série (x') dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer les nombres 0, 10, 20, pour reconnaître ceux qui comprennent des racines. Si on a trouvé 5 pour le chiffre des dixaines, on remplacera x' par $50+x''$ dans la série (x'), et on aura une série (x''), où il n'y aura plus qu'à substituer les nombres 0, 1, 2, 3..... pour savoir quel est le chiffre des unités.

On peut continuer ces calculs pour connaître successivement les dixièmes, les centièmes, etc., et on arrive, par cette voie, à calculer les racines avec autant d'approximation que l'on veut.

Le principe de M. Sturm [illegible]t servir aussi à obtenir les rac[illegible]e de fraction continue. Après avoir reconnu qu'il y a des racines entre deux nombres positifs entiers consécutifs a et $a+1$, on fera $x=a+\frac{1}{x'}$ dans la suite (x), ce qui donnera une nouvelle suite (x'), au moyen de laquelle on trouvera les parties entières des valeurs de x' qui sont plus grandes que l'unité. Soit b l'une de ces parties entières, on posera $x'=b+\frac{1}{x''}$ dans la suite (x'), ce qui donnera une nouvelle suite (x''), qui servira à calculer les parties entières des valeurs de x''. On continuera de cette manière aussi loin qu'on le jugera convenable. Pour la facilité du calcul, on pourra, dans chaque fonction des suites (x'), (x''),... réduire tous les termes au même dénominateur et ne plus tenir aucun compte de ce dénominateur, pourvu qu'il soit positif.

Nous n'avons pas parlé des racines négatives parce qu'on les obtient en changeant x en $-x$.

Méthode de Newton.—Lorsque l'on a obtenu une première valeur approchée d'une racine d'une équation, la méthode de Newton conduit souvent très-rapidement à une approximation considérable.

Si l'on a, par exemple, la première valeur approchée a pour l'equation $f(x)=0$, à 0,1 près, on calcule $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ à 0,01 près, et on ajoute cette valeur à celle de a ce qui donne une seconde approximation a'.

On calcule $-\frac{f(a')}{f'(a')}$ à 0,0001 près, et on ajoute le résultat à a', ce qui donne une seconde approximation a'', et ainsi de suite.

Mais la méthode de Newton n'est pas infaillible, car les résultats qu'elle donne, au lieu d'être toujours plus approchés de la valeur réelle de la racine, vont quelquefois en s'en éloignant.

Méthode de Lagrange. — Cherchez la limite inférieure l des racines positives de l'équation aux carrés des différences des racines de la proposée. Prenez un nombre rationnel d, le plus rapproché possible et inférieur à $\sqrt{l}$: si d est moindre que l'unité, faites dans l'équation proposée $x=dx'$, et substituez dans la transformée les nombres 0, 1, 2, 3, 4. Les résultats de la substitution de deux nombres entiers consécutifs a et $a+1$ qui seront de signes contraires, correspondront à une seule valeur de x', comprise entre ces nombres entiers.

Posez $x=a+\frac{1}{y}$, vous aurez une transformée en y, qui n'aura qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité. Substituez 2, 3, 4.... à la place de y, jusqu'à ce que vous parveniez à un nombre qui donne un résultat positif, et le nombre entier immédiatement inférieur sera la partie entière de y.

Connaissant cette partie entière b, on pose $y=b+\frac{1}{z}$, ce qui donne une seconde transformée en z, sur laquelle on opère comme sur la précédente.

En continuant ainsi, on obtient x sous la forme d'une fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$$

que l'on peut pousser aussi loin et qui donne autant d'approximation que l'on veut.

§ 14. *Résolution des équations algébriques de degré supérieur au second.*

Les géomètres sont parvenus à trouver des formules qui expriment par un nombre limité d'opérations les valeurs algébriques des racines des équations du troisième et du quatrième degré à une seule inconnue; mais, à partir du troisième degré, ces expressions ne peuvent plus être considérées que comme des symboles curieux, qui ne sont d'aucune utilité pour la détermination des valeurs réelles des inconnues. Tous les efforts des géomètres les plus habiles sont venus échouer contre les équations algébriques de degré supérieur au quatrième. Il est même prouvé aujourd'hui qu'il est impossible d'exprimer algébriquement les racines de ces équations par un nombre limité d'opérations effectuées sur les coefficients. On ne considère pas comme une solution du problème les belles séries que Lagrange a données pour les valeurs des racines, parce que ces séries sont généralement divergentes, et contiennent un nombre infini de termes.

Abaissement des équations. — Il y a néanmoins certaines classes d'équations algébriques dont le degré peut être abaissé, par suite de circonstances particulières, et dont la résolution peut ainsi être ramenée à celle d'une équation d'un degré inférieur.

En général, l'abaissement a lieu lorsqu'on obtient entre les inconnues d'un problème possible plus d'équations qu'il ne renferme d'inconnues, ce à quoi l'on parvient souvent en considérant le problème proposé sous plusieurs faces; on trouve alors entre une même inconnue deux équations finales qui devant s'accorder entre elles, ont un diviseur commun, duquel on tire la solution la plus simple dont le problème soit susceptible.

Le cas où une équation a des racines égales peut être regardé comme l'un des cas d'abaissement les plus remarquables. (Col. 102).

Equations réciproques. — On appelle ainsi toute équation qui ne change pas lorsque l'on y remplace x par $\frac{1}{x}$.

Pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit, si le terme du milieu ne manque pas, que les coefficients également distants des extrêmes soient égaux; et si le terme du milieu manque, que les coefficients également distants des extrêmes soient égaux, avec des signes contraires.

La seconde de ces équations admet les racines $+1$ et -1; et la suppression du facteur du second degré correspondant à ces racines, doit conduire à une équation de la même forme que la première.

Pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients à égale distance des extrêmes soient égaux, ou qu'ils aient deux à deux la même valeur numérique avec des signes contraires.

La première de ces équations a pour racine -1, et la suppression du facteur correspondant $x+1$ mène à une équation réciproque de degré pair, dans laquelle le terme du milieu ne manque pas. La seconde de ces équations admet la racine $+1$; et en supprimant le facteur $x-1$, on obtient une équation réciproque de degré pair, ayant encore le terme du milieu.

Il reste donc à considérer l'équation réciproque de degré pair, dont le terme du milieu ne manque pas, et qui n'a plus pour racine ni $+1$, ni -1.

Cette équation, de degré $2n$ peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+A\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\ldots\\ +F\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+G\left(x+\frac{1}{x}\right)+H\end{array}\right\}=0$$

Or si l'on pose $x+\frac{1}{x}=z$, on aura

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z \text{ etc.},$$

et en substituant ces valeurs de x en z, on arrivera à une équation de degré n.

Equations binomes. — On appelle ainsi toute équation de la forme $x^m \pm A=0$. En posant $x=ay$, on transformera cette équation en $y^m \pm 1=0$.

Si m est un nombre impair $2n+1$ et que l'on prenne le signe inférieur, on aura à considérer l'équation

$$y^{2n+1}-1=0;$$

cette équation admet une racine égale à 1, et en la divisant par le facteur $y-1$ correspondant à cette racine, on obtient l'équation réciproque de degré pair

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+\ldots+y^2+y+1=0$$

qui n'a que des racines imaginaires, mais qui peut être abaissée à une équation du degré n, en posant $y+\frac{1}{y}=z$.

Si l'on avait pris le signe supérieur, on aurait eu l'équation

$$y^{2n+1}+1=0$$

dont les racines ne diffèrent que par le signe de celles de la première équation.

Supposons maintenant m pair et égal à $2n$. L'équation primitive devient, en considérant d'abord le signe inférieur,

$$y^{2n}-1=0.$$

Celle-ci admet les racines $+1$ et -1; en divisant par y^2-1, on obtient l'équation réciproque de degré pair

$$y^{2n-2}+y^{2n-4}+y^{2n-6}+\ldots+y^4+y^2+1=0$$

dont toutes les racines sont imaginaires, et qui peut être ramenée à une équation de degré moitié moindre.

Enfin l'équation

$$y^{2n}+1=0$$

n'admet que des racines imaginaires. Elle peut se ramener à la résolution des équations

$$y^n-1=0,\quad y^n+1=0.$$

Equations trinomes. — Pour résoudre une équation trinome de la forme

$$x^{2m}+px^m+q=0$$

on pose $x^m=y$, d'où

$$y^2+py+q=0.$$

Si a et b sont les deux racines de cette dernière, les valeurs de x dépendent des deux équations binomes

$$x^m = a, \quad x^m = b.$$

§ 15. *Faits divers relatifs à l'algèbre.*

Solution des problèmes. — Elle se compose de deux parties, savoir : 1° la mise en équations du problème proposé ; 2° la résolution des équations auxquelles on est parvenu.

La première partie n'est soumise à aucune règle bien fixe. Tantôt l'énoncé du problème fournit sur-le-champ les équations, tantôt on est obligé de démêler dans l'énoncé des conditions qui sont de nature à les former; tantôt enfin ce ne sont pas les conditions elles-mêmes de l'énoncé qu'il faut traduire algébriquement, mais bien des conditions que l'on peut regarder comme des conséquences des premières. M. Lacroix a donné à ce sujet le précepte suivant, dont l'application bien entendue conduit toujours aux équations : « Regardez le pro- » blème comme résolu, et indiquez, à l'aide » des signes algébriques sur les quantités con- » nues, représentées, soit par des nombres, soit » par des lettres, et sur les inconnues toujours » représentées par des lettres, les mêmes rai- » sonnements et les mêmes opérations qu'il » faudrait effectuer pour vérifier les valeurs » des inconnues, si ces valeurs étaient don- » nées. »

La seconde partie de la résolution des problèmes, c'est-à-dire la résolution des équations auxquelles on est parvenu, est exposée dans les paragraphes précédents

Il est important de remarquer que les diverses méthodes données pour la résolution des équations, peuvent conduire à des valeurs négatives pour les inconnues. Ces valeurs satisfont toujours bien aux équations, mais elles peuvent ne pas convenir au problème tel qu'il a été posé.

Dans les problèmes du premier degré toute valeur négative trouvée pour l'inconnue indique un vice dans le sens des conditions de l'énoncé, ou au moins dans l'une des équations qui en est la traduction algébrique. Cette valeur, abstraction faite de son signe, peut être regardée comme la réponse à un problème dont l'énoncé ne diffère de celui du problème proposé, qu'en ce que certaines quantités, d'additives qu'elles étaient, sont devenues soustractives, et réciproquement.

Lorsque le vice existe dans une équation, non pas dans l'énoncé du problème, les solutions négatives redressent le point de vue sous lequel on a envisagé les conditions de ce problème.

Détails historiques. — L'origine de l'algèbre est récente comparativement à celle de l'arithmétique. Diophante d'Alexandrie, qui vivait probablement vers le milieu du quatrième siècle de notre ère, est l'auteur du plus ancien traité d'algèbre qui nous soit parvenu. Ce traité se composait de treize livres, dont six seulement sont conservés. On n'y trouve pas une exposition des principes élémentaires de la science, mais bien une collection de questions difficiles sur les carrés et les cubes, ainsi que plusieurs propriétés des nombres.

Les problèmes de Diophante supposent la résolution des équations déterminées du premier et du second degré, et des connaissances étendues sur l'analyse indéterminée. Pour donner une idée du genre des questions les plus simples dont Diophante s'est occupé, nous citerons ici son épitaphe qui se trouve dans l'Anthologie grecque. « Diophante passa » dans l'enfance le sixième du temps qu'il vé- » cut, et un douzième dans l'adolescence ; en- » suite il se maria et demeura dans cette » union le septième de sa vie, augmenté de » cinq ans, avant d'avoir un fils, auquel il sur- » vécut de quatre ans, et qui n'atteignit que la » moitié de l'âge où son père est parvenu. » Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut ?» Une simple équation du premier degré donne quatre-vingt-quatre ans pour la durée de la vie de ce géomètre.

Il ne faut pas croire, du reste, que l'on trouve rien, dans Diophante qui ressemble au mécanisme des opérations algébriques telles que nous les effectuons. Il représente l'inconnue par l'abréviation ος, finale du mot grec αριθμος (nombre), par lequel il la désigne. Mais il n'emploie ni les lettres de l'alphabet ni les signes élémentaires, excepté toutefois le signe de la soustraction, qui est un ψ renversé et un peu tronqué.

C'est à Léonard de Pise (Fibonacci) que les chrétiens d'Occident doivent la connaissance de l'algèbre mais non pas celle de l'arithmétique vulgaire, comme on l'avait prétendu à tort.

L'algèbre occupe le quinzième et dernier chapitre de son *abacus*, composé en 1202, et a été publiée récemment par M. Libri, dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie.*

Fibonacci avait emprunté la plupart de ses connaissances algébriques aux Arabes qui les avaient eux-mêmes puisées, très-probablement, dans les livres grecs, et surtout dans Diophante.

Il est possible, cependant, que les Arabes aient aussi fait quelques emprunts à l'Inde, où l'algèbre était cultivée très-anciennement. Deux monuments de l'algèbre indienne ont été publiés en anglais il y a environ trente-cinq ans. Bhascara Acharya, auteur de l'un des deux traités, vivait au douzième siècle; et Brahmegupta, auteur de l'autre, vivait au septième siècle de l'ère chrétienne. On doit avouer que si ces ouvrages eussent été apportés en Europe soixante ou quatre-vingts ans plus tôt, ils eussent pu hâter les progrès de l'analyse algébrique, même du vivant d'Euler. Brahmegupta cite souvent Aryabhatta, dont malheureusement les écrits sont perdus, et qui paraît n'avoir pas été postérieur à Diophante.

Quoi qu'il en soit, le nom même de l'algèbre est dû aux Arabes, qui avaient nommé cette science *él-djaber él-mogabelah*, c'est-à-dire la science des *restaurations* ou des *rétablissements*, des proportions et des solutions.

Ce nom était fondé sur la règle en vertu de laquelle on opérait le passage ou le *rétablissement* d'une quantité qui était négative et qui devenait positive étant transportée ou *rétablie* dans l'autre membre de l'équation. En chirurgie, au moyen âge, le mot algèbre signifiait l'art de restaurer, de rétablir les membres démis ou fractures; et dans les langues espagnole et portugaise *algebrista* signifie encore chirurgien.

Après Léonard de Pise, Lucas de Burgo rôme Cardan, Scipion Ferrari et Tartag tous Italiens, firent faire de grands progrès science de l'algèbre.

Christophe Rudolph, algébriste allemand, fit paraître, en 1522, un ouvrage où l'on voit pour la première fois les signes $+$, $-$ et $\sqrt{}$.

L'Allemand Stifel, dans son *Arithmetica integra* publiée à Nuremberg en 1544, Peletier en 1558, et Butéon vers la même époque tous deux Français, ont représenté les inconnues par les lettres A, B, C, ... et leurs puissances au moyen de signes ou *exposants*; mais ces exposants ne sont pas des chiffres, ce sont seulement des signes analogues.

La notation actuelle des exposants est encore beaucoup plus ancienne. On la trouve dans un ouvrage mis au jour en 1520, et réimprimé en 1538, intitulé : *L'Arismèthique nouvellement composée par maistre Estienne de la Roche dict Villefranche, natif de Lyon.* L'auteur y représente les puissances 2e, 3e, 4e, etc., d'un nombre, de 12, par exemple, ainsi: 12^2, 12^3, 12^4, etc. En outre, il applique les mêmes *exposants* à l'expression des racines en se servant du signe R au lieu de $\sqrt{}$. Ainsi il écrit : $R^2\,12$, $R^3\,12$, $R^4\,12$, etc. Cette arithmétique comprend la *règle de la chose*, c'est-à-dire l'algèbre.

C'est donc le plus ancien traité d'algèbre imprimé en France, et, circonstance remarquable à cause de l'époque, ce traité est écrit en français.

L'auteur y cite un autre ouvrage sur l'algèbre, antérieur à 1520, et de maître Nicolas Chuquet.

Record, géomètre anglais, a imaginé, en 1552, le signe =.

Adrianus Romanus (Van Rœmen), de Louvain, s'est servi de lettres en 1597, non pas seulement comme désignation abrégée des quantités sur lesquelles il avait à raisonner, ainsi que tant d'autres l'avaient fait avant lui, mais dans la pensée philosophique de créer une science mathématique universelle embrassant, sous la forme de symboles abstraits et généraux, les quantités de toute nature.

Mais tout en approchant le plus de la conception de Viète, Romanus est encore séparé, par une distance immense, de notre illustre compatriote, que l'on peut regarder à bon droit comme le créateur de l'algèbre moderne. Né à Fontenay-le-Comte, en 1540, mort en 1600, François Viète imagina de représenter par des symboles les calculs effectués, non plus sur des nombres, mais sur des lettres. C'est lui qui a créé les expressions et formules algébriques, et cet art des transformations qui épargne à l'esprit humain de si longs et de si pénibles raisonnements. Aussi donna-t-il à son algèbre le nom de *spécieuse*, parce que tout y est représenté par des symboles. On doit encore à Viète une foule de travaux importants sur la résolution générale des équations, sur l'application de l'algèbre à la géométrie, etc.

Ougthred, né en 1573, est le premier qui se soit servi du signe de la multiplication ×.

Albert Gérard, en Flandre, et Harriot, en Angleterre, s'illustrèrent au commencement du dix-septième siècle par d'importantes découvertes. C'est à ce dernier que l'on doit les signes d'inégalité > et <.

Descartes, Fermat, Wallis, Galilée, Neper, Kepler, Huygens, Newton, Leibnitz, les Bernouilli, Moivre, Stirling, Côtes, Lambert, Waring, Maclaurin, Euler, d'Alembert, Condorcet, Lagrange, Vandermonde, Legendre, Laplace, et bien d'autres encore ont illustré le dix-septième et le dix-huitième siècle. La majeure partie des détails précédents est empruntée aux travaux remarquables de M. Chasles sur les origines de l'algèbre. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, t. XII, XIII et XIV.)

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES. — Les ouvrages d'algèbre élémentaire les plus usités dans l'enseignement sont ceux de Bezout, de Bourdon, d'Euler, de Lacroix, de Lefebure de Fourcy, de Lhuilier, de Mayer et Choquet, de Reynaud.

La nouvelle méthode que M. Sturm a introduite dans la résolution numérique des équations est exposée maintenant dans les plus récentes éditions des livres de MM. Bourdon, Lefebure de Fourcy, Mayer et Choquet, Reynaud, etc.

L'algèbre de M. Lacroix nous paraît très-propre à donner des idées saines sur les principes et les opérations élémentaires : elle est, comme tous les ouvrages du même auteur, remarquable par la clarté et l'élégance de la rédaction. Le livre d'Euler, enrichi des notes de Lagrange, sera toujours à bon droit considéré comme un chef-d'œuvre. L'analyse indéterminée y occupe une place considérable; mais malheureusement il n'est plus à la hauteur de la science pour la résolution des équations déterminées. L'algèbre de M. Lhuilier renferme beaucoup de problèmes curieux.

Les problèmes et exercices de calculs algébriques par M. Ritt sont utiles aux étudiants.

Nous renverrons encore aux collections académiques et aux journaux scientifiques les lecteurs qui voudraient se mettre au courant des travaux dont l'ensemble constitue la science algébrique dans son état actuel.

III. GÉOMÉTRIE.

§ 1. *Les Principes.*

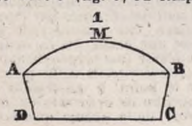
La GÉOMÉTRIE est une science qui a pour but la mesure de l'étendue.

L'*étendue* a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur ou profondeur.

La *ligne* est une longueur sans largeur. On appelle *points* les extrémités d'une ligne, ou la portion infiniment petite de l'étendue sur laquelle deux lignes se coupent.

La *ligne droite* (fig. 1) ou simplement la *droite* AB est le plus court chemin d'un point à un autre. Deux points A et B suffisent pour déterminer une ligne droite.

1



On trace les lignes droites sur le papier avec la *règle*. On s'assure qu'une règle est droite, en la regardant en raccourci, par le bout, avec un seul œil. La moindre déviation devient alors sensible.

Dans la charpenterie et la menuiserie, on marque les lignes droites avec une ficelle tendue et enduite de craie, que l'on pince verticalement, et qu'on laisse ensuite retomber brusquement sur la pièce de bois; la trace blanche de la craie y reste marquée.

Une *ligne brisée* BCDA est composée de lignes droites.

Une ligne AMB, qui n'est ni droite ni brisée, est une *ligne courbe*.

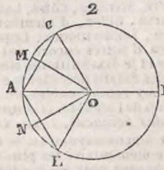
Surface est ce qui a longueur et largeur sans hauteur ou épaisseur.

Le *plan* est la plus simple de toutes les surfaces; ce qui le caractérise, c'est que l'on peut y appliquer une ligne droite dans tous les sens.

Toute surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes, est une *surface courbe*.

La plus simple des lignes courbes planes est la *circonférence* (fig. 2), dont tous les points

2



sont également distants d'un point intérieur O appelé *centre*.

On appelle *rayon* toute droite OA, menée du centre O à un point quelconque A de la circonférence; et *diamètre* toute droite AB qui, passant par le centre, est terminée de part et d'autre à la circonférence.

Tous les rayons sont égaux entre eux. Tous les diamètres sont aussi égaux entre eux et doubles du rayon.

Il ne faut pas confondre la *circonférence*, qui est une ligne, avec le *cercle*, qui est une surface, une portion de plan entourée par cette ligne.

On appelle *arc* une portion quelconque AMC de la circonférence. La droite AC est la *corde* de l'arc.

L'espace AMC, compris entre l'arc et la corde, s'appelle *segment*.

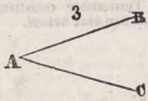
L'espace AOC, compris entre l'arc et deux rayons, s'appelle *secteur*.

Le *compas* est l'instrument dont on se sert pour décrire les arcs de circonférence, et pour mesurer les longueurs sur le papier.

Solide ou *corps* est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue.

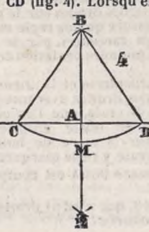
On appelle *angle* BAC (fig. 3) l'écartement

3



mutuel de deux droites AB, AC qui se coupent, l'espace indéfini compris entre ces droites, qui sont les *côtés* de l'angle. Le point de rencontre A est le *sommet*.

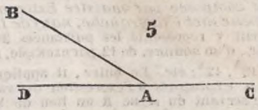
Une ligne droite AB est *perpendiculaire* à une seconde CD (fig. 4). Lorsqu'elle ne penche



pas sur celle-ci, d'un côté plus que de l'autre. lorsque les deux angles adjacents BAC, BAD, qu'elle forme avec la seconde, sont égaux.

Chacun de ces angles porte le nom d'*angle droit*. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Toute ligne droite AB (fig. 5), qui en rencontre

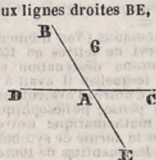


contre une autre CD, fait avec celle-ci deux angles adjacents BAC, BAD, dont la somme est égale à deux droits.

Le plus petit BAD de ces deux angles adjacents est dit *aigu;* le plus grand BAC est *obtus*.

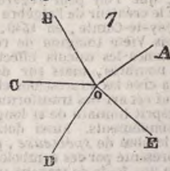
Ces deux angles sont dits *suppléments* l'un de l'autre. Le supplément d'un angle est donc la différence entre deux angles droits et cet angle.

Quand deux lignes droites BE, CD (fig. 6) se



coupent, les angles opposés au sommet BAD, CAE ou BAC, DAE sont égaux.

La somme (fig. 7) de tous les angles AOB,



BOC, COD, DOE, EOA que les droites OA, OB, OC, OD, OE font autour d'un même point, est égale à quatre angles droits.

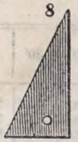
Pour élever par un point donné A (fig. 4), une perpendiculaire sur une droite CD, on prend avec le compas les distances égales AC, AD; des points D et C comme centres, avec des rayons égaux et suffisamment grands, on décrit des arcs de cercle qui se coupent en B, et la droite AB est déterminée.

S'il s'agissait d'abaisser du point B une perpendiculaire sur la droite CD, on décrirait du point B, comme centre, avec une ouverture de compas suffisante, un arc CMD, qui couperait la droite donnée en C et en D; puis des points C et D comme centres, avec une autre ouverture de compas suffisante, on tracerait deux arcs qui se couperaient en E; la droite BE serait la perpendiculaire demandée.

BC et BD sont des *obliques* par rapport à la perpendiculaire. Une construction analogue sert à diviser une droite CD en deux parties égales, ou à élever une perpendiculaire sur le milieu de cette droite. Il suffit pour cela de déterminer le point E au-dessous de CD, par l'intersection de deux arcs de cercle de rayons égaux, de la même manière que le point B a été déterminé au-dessus. La droite BE se trouve perpendiculaire au milieu de CD.

On trace ordinairement les perpendiculaires avec l'*équerre* (fig. 8).

8



On appelle *figure plane* une portion de plan terminée par des lignes: *figure rectiligne* ou *polygone* lorsque toutes les lignes sont droites. Ces lignes forment le contour ou *périmètre* du polygone.

Le plus simple de tous les polygones est le *triangle*, qui a trois côtés. On appelle *quadrilatère* le polygone de quatre, *pentagone* celui de cinq, *hexagone* celui de six, etc.

Le triangle *équilatéral* est celui qui a ses trois côtés égaux. Dans le triangle *isoscèle*, deux côtés seulement sont égaux. Enfin, dans le triangle *scalène*, il y a inégalité entre les trois côtés.

Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. L'*hypothénuse* est le côté opposé à l'angle droit. La fig. 8 est un triangle rectangle.

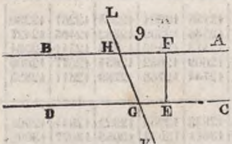
Il y a dans un triangle six éléments : trois côtés et trois angles. Un triangle est déterminé lorsque trois de ces six éléments sont connus pourvu que, parmi les trois, on compte au moins un côté.

Pour le triangle rectangle, il suffit de connaître deux éléments qui diffèrent de l'angle droit, mais toujours au moins un côté.

Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux angles droits.

Plus généralement, la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone qui n'a pas d'angles rentrants, est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés moins deux. Elle est donc de quatre angles droits pour le quadrilatère, de six pour le pentagone, de huit pour l'hexagone et ainsi de suite.

Deux droites AB, CD sont dites *parallèles* (fig. 9), lorsqu'étant situées sur un même plan,



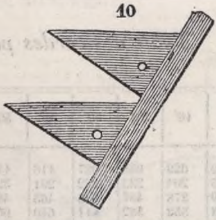
elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre.

Deux parallèles rencontrées par une *sécante* GH font avec celle-ci deux angles *intérieurs d'un même côté* BHG, HGD, dont la somme est égale à deux angles droits. Les angles *alternes-internes* BHG, HGE sont égaux, ainsi que les angles *internes-externes* LHB, LGD, et les angles *alternes-externes* LHB, EGK.

On se sert d'une équerre mobile, appuyée contre une règle fixe (fig. 10), pour tracer des lignes parallèles.

On emploie encore à cet usage le T des dessinateurs ou le *trusquin* des menuisiers.

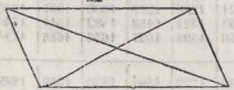
10



Deux parallèles sont partout également distantes.

Un quadrilatère (fig, 11) qui a les côtés op-

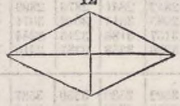
11



posés parallèles, prend le nom de *parallélogramme*. Dans cette figure, les angles et les côtés opposés sont égaux.

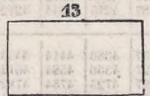
On appelle *losange* (fig. 12) le parallélogramme qui a les quatre côtés égaux.

12



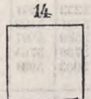
Le *rectangle* (fig. 13) est le parallélogramme qui a les angles droits.

13



Le *carré* (fig. 14) est le rectangle qui a les côtés égaux ou la losange qui a les angles droits.

14



On appelle *diagonale* toute droite qui joint dans un polygone les sommets de deux angles non-adjacents.

Dans tout parallélogramme, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales. Dans la losange, elles se coupent à angle droit. Dans le rectangle, elles sont égales.

On appelle *trapèze* (fig. 15) un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles.

15

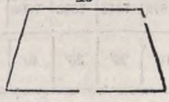


Table des cordes pour un rayon egal à **10 000.**

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.	D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.
0	000	029	058	087	116	145	29	45	7654	7680	7707	7734	7761	7788	27
1	175	204	233	262	291	320		46	7815	7841	7868	7895	7922	7948	
2	349	378	407	436	465	494		47	7975	8002	8028	8055	8082	8108	
3	523	553	582	611	640	669		48	8135	8161	8188	8214	8241	8267	
4	698	727	756	785	814	843		49	8294	8320	8347	8373	8400	8426	
5	872	901	931	960	989	1018		50	8452	8479	8505	8532	8558	8584	26
6	1047	1076	1105	1134	1163	1192		51	8610	8636	8663	8689	8715	8741	
7	1221	1250	1279	1308	1337	1366		52	8767	8794	8820	8846	8872	8898	
8	1395	1424	1453	1482	1511	1540		53	8924	8950	8976	9002	9028	9054	
9	1569	1598	1627	1656	1685	1714		54	9080	9106	9132	9157	9183	9209	
10	1743	1772	1801	1830	1859	1888		55	9235	9261	9287	9312	9338	9364	
11	1917	1946	1975	2004	2033	2062		56	9389	9415	9441	9466	9492	9518	
12	2091	2120	2148	2177	2206	2235		57	9543	9569	9594	9620	9645	9671	
13	2264	2293	2322	2351	2380	2409		58	9696	9722	9747	9772	9798	9823	
14	2437	2466	2495	2524	2553	2582		59	9848	9874	9899	9924	9949	9975	25
15	2611	2639	2668	2697	2726	2755		60	10000	10025	10050	10075	10101	10126	
16	2783	2812	2841	2870	2899	2927		61	10151	10176	10201	10226	10251	10276	
17	2956	2985	3014	3042	3071	3100		62	10301	10326	10351	10375	10400	10425	
18	3129	3157	3186	3215	3244	3272		63	10450	10475	10500	10524	10549	10574	
19	3301	3330	3358	3387	3416	3444		64	10598	10623	10648	10672	10697	10721	
20	3473	3502	3530	3559	3587	3616		65	10746	10771	10795	10819	10844	10868	
21	3645	3673	3702	3730	3759	3788		66	10893	10917	10941	10966	10990	11014	24
22	3816	3845	3873	3902	3930	3959		67	11039	11063	11087	11111	11136	11160	
23	3987	4016	4044	4073	4101	4130		68	11184	11208	11232	11256	11280	11304	
24	4158	4187	4215	4244	4272	4300	28	69	11328	11352	11376	11400	11424	11448	
25	4329	4357	4386	4414	4443	4471		70	11472	11495	11519	11543	11567	11590	
26	4499	4527	4556	4584	4612	4641		71	11614	11638	11661	11685	11709	11732	
27	4669	4697	4725	4754	4782	4810		72	11756	11779	11803	11826	11850	11873	
28	4838	4867	4895	4923	4951	4979		73	11896	11920	11943	11966	11990	12013	
29	5008	5036	5064	5092	5120	5148		74	12036	12060	12083	12106	12129	12152	23
30	5176	5204	5233	5261	5289	5317		75	12175	12198	12221	12244	12267	12290	
31	5345	5373	5401	5429	5457	5485		76	12313	12336	12359	12382	12405	12427	
32	5513	5541	5569	5597	5625	5652		77	12450	12473	12496	12518	12541	12564	
33	5680	5708	5736	5764	5792	5820		78	12586	12609	12632	12654	12677	12699	
34	5847	5875	5903	5931	5959	5986		79	12721	12744	12766	12789	12811	12833	22
35	6014	6042	6070	6097	6125	6153		80	12856	12878	12900	12922	12944	12966	
36	6180	6208	6236	6264	6291	6319		81	12989	13011	13033	13055	13077	13099	
37	6346	6374	6401	6429	6456	6484		82	13121	13143	13165	13187	13209	13231	
38	6511	6539	6566	6594	6621	6649		83	13252	13274	13296	13318	13339	13361	
39	6676	6704	6731	6759	6786	6813	27	84	13383	13404	13426	13447	13469	13490	21
40	6840	6868	6895	6922	6949	6977		85	13512	13533	13555	13576	13597	13619	
41	7004	7031	7059	7086	7113	7140		86	13640	13661	13682	13704	13725	13746	
42	7167	7195	7222	7249	7276	7303		87	13767	13788	13809	13830	13851	13872	
43	7330	7357	7384	7411	7438	7465		88	13893	13914	13935	13956	13977	13997	
44	7492	7519	7546	7573	7600	7627		89	14018	14039	14060	14080	14101	14121	
D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.	D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.

§ 2. *Du cercle et de ses rapports de position avec diverses lignes droites.*

Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.

Le diamètre est la plus grande de toutes les cordes.

Une ligne droite ne peut couper une circonférence en plus de deux points.

A des arcs égaux, dans le même cercle, correspondent des cordes égales et réciproquement.

Le rayon OM (fig. 2), perpendiculaire à une corde AC, divise cette corde et l'arc soustendu AMC, en deux parties égales.

Par trois points donnés C, A, E non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence. Il suffit pour cela d'élever les perpendiculaires indéfinies MO, NO sur les milieux des droites AC, AE. Le point de rencontre de ces perpendiculaires donne le centre O ; les distances OC, OA, OE sont égales.

Une droite est dite *tangente* à une courbe lorsqu'elle n'a qu'un point de commun avec celle-ci.

Toute droite qui coupe la circonférence porte le nom de *sécante*.

Toute perpendiculaire à l'extrémité du rayon est tangente à la circonférence. (Col. 134).

Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.

Dans un cercle, il y a entre l'angle au centre et l'arc intercepté par ses côtés une liaison telle que l'un augmentant ou diminuant, l'autre augmente ou diminue dans la même proportion.

On peut donc prendre l'arc pour *mesure* de l'angle

Pour faciliter les évaluations numériques de cette mesure, on divise la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés* : chaque degré en 60 *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces* et ainsi de suite.

Un angle droit vaut donc 90°.

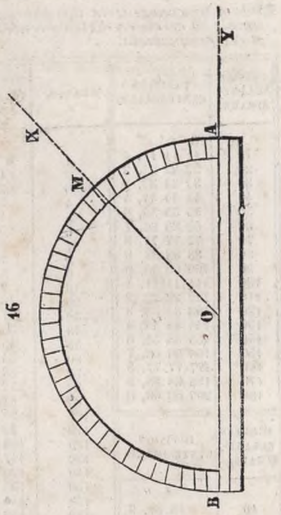
La circonférence entière vaut 1296000 secondes.

Un angle de 36° 21' 17" (prononcez 36 degrés, 21 minutes, 17 secondes) qui équivaut à 130877 secondes, est donc les $\frac{130877}{1296000}$ de quatre angles droits, ou les $\frac{130877}{324000}$ ou les $\frac{2}{5}$, ou enfin avec une approximation suffisante les $\frac{19}{47}$ environ d'un angle droit.

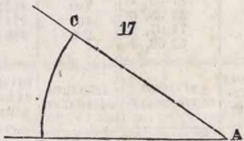
Pour mesurer ou pour construire les angles sur le papier, on se sert d'un instrument appelé *rapporteur* (fig. 16), qui n'est autre chose qu'un demi-cercle en cuivre ou mieux en corne, divisé en 90 parties égales. On applique le centre **O** sur le sommet et la *ligne de foi* OA sur l'un des côtés de l'angle à mesurer; la direction de l'autre côté OX, indique le nombre de degrés de l'angle.

Mais lorsque l'on veut opérer avec plus de précision, il faut avoir recours à la table que nous donnons ici, et qui comprend les cordes de tous les angles de dix en dix minutes pour tous les degrés du quart de cercle. Ainsi pour construire sur le papier l'angle A (fig. 17), qui est donné en degrés et minutes, on décrit du centre A, avec un rayon AB, le plus grand possible et divisé en parties égales, un arc indéfini; puis du point B, comme centre, avec un rayon égal à la valeur de la corde donnée par la table, on décrit un autre arc qui coupe le premier en C ; BAC est l'angle demandé.

Il sera commode de prendre AB égal à 100,



16



17

à 200, à 300, etc... millimètres; alors les valeurs des cordes données par la table, prises simples, ou doubles, ou triples, etc... expriment en centièmes de millimètre les longueurs du rayon BC.

La valeur 11232 de la corde d'un angle de 68° 20' se trouve, dans cette table, à la rencontre de la ligne horizontale qui commence par 68 et de la colonne verticale en tête de laquelle est placé le nombre 20'. Les parties proportionnelles des différences dans les colonnes DIFF., servent à obtenir les valeurs des cordes pour des angles compris entre ceux de la table.

Il est d'ailleurs inutile d'étendre la table des cordes au-delà du quart de cercle, car tout angle plus grand que 90° a pour *supplément* un angle moindre que 90° ; et après avoir construit le supplément, on n'a qu'à prolonger un côté pour avoir l'angle lui-même.

On a proposé aussi pour la circonférence une division en 400 parties égales appelées *grades*, chaque quart de circonférence valait 100 grades, chaque grade 100 minutes, chaque minute 100 secondes et ainsi de suite. Cette division centésimale offre des avantages incontestables pour le calcul numérique, puisque l'on peut écrire sous forme décimale les nombres qui en résultent. Ex. 67 grades 75 minutes 37 secondes et $\frac{5}{10}$ peuvent s'écrire ainsi:

Table pour convertir la division sexagésimale du cercle en division centésimale et réciproquement.

DEGRÉS SEXAGESIMAUX.	DIVISION CENTÉSIMALE.
	G. ′ ″
10	11 11 11, 1
20	22 22 22, 2
30	33 33 33, 3
40	44 44 44, 4
50	55 55 55, 6
60	66 66 66, 7
70	77 77 77, 8
80	88 88 88, 9
90	100 00 00, 0
100	111 11 11, 1
110	122 22 22, 2
120	133 33 33, 3
130	144 44 44, 4
140	155 55 55, 6
150	166 66 66, 7
160	177 77 77, 8
170	188 88 88, 9
180	200 00 00, 0

MINUTES SEXAGESIMALES.	DIVISION CENTESIMALE.
	′ ″
10	18 51, 9
20	37 03, 7
30	55 55, 6
40	74 07, 4
50	92 59, 3

SECONDES SEXAGESIMALES.	DIVISION CENTESIMALE.
	″
10	30, 9
20	61, 7
30	92, 6
40	1′23, 5
50	1 54, 3

MINUTES DECIMALES.	DIVISION SEXAGESIMALE
	′ ″
1	0 32, 4
2	1 04, 8
3	1 37, 2
4	2 09, 6
5	2 42, 0
6	3 14, 4
7	3 46, 8
8	4 19, 2
9	4 51, 6
10	5 24, 0
20	10 48, 0
30	16 12, 0
40	21 36, 0
50	27 00, 0
60	32 24, 0
70	37 48, 0
80	43 12, 0
90	48 36, 0
100	54 00, 0

GRADES.	DIVISION SEXAGESIMALE.
1	0°.54
2	1.48
3	2.42
4	3.36
5	4.30
6	5.24
7	6.18
8	7.12
9	8.06
10	9.00
20	18.00
30	27.00
40	36.00
50	45.00
60	54.00
70	63.00
80	72.00
90	81.00
100	90.00
110	99.00
120	108.00
130	117.00
140	126.00
150	135.00
160	144.00
170	153.00
180	162.00
190	171.00
200	180.00

SECONDES DECIMALES.	DIVISION SEXAGESIMALE.
1	0″,324
2	0,648
3	0,972
4	1,296
5	1,620
6	1,944
7	2,268
8	2,592
9	2,916
10	3,240
20	6,480
30	9,720
40	12,960
50	16,200
60	19,440
70	22,680
80	25,920
90	29,160
100	32,400

67$^{gr.}$, 75375. Néanmoins la division sexagésimale est encore la plus usitée, et c'est de celle-ci qu[illegible]ge. Nous donnons, du reste, une [illegible]era très-utile pour convertir les angles [illegible]xprimés par des divisions sexagésimales [illegible] divisions centésimales et réciproquement.

On appelle *inscrit* l'angle dont le sommet est sur la circonférence.

L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses cotés.

Il en est de même de l'angle formé par une tangente et une corde.

15

Tous les angles ABC, AB′C, AB″C (fig. 18) inscrits dans un même *segment* ABC sont donc égaux : et tout angle inscrit dans la demi-circonférence est droit.

Pour mener une tangente à une circonférence par un point extérieur, il suffit donc de tirer une droite de ce point à l'un des points où la circonférence donnée est coupée par une autre circonférence décrite sur la distance du point donné au centre de la première, comme diamètre. (Col. 134).

L'angle formé par deux sécantes a pour mesure la somme ou la différence des arcs interceptés par ces deux sécantes, suivant que le sommet est dans l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

§ 3. *Superficies des figures planes.*

On appelle *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire abaissée d'un des sommets sur le côté opposé pris pour *base*. Le *pied* de la hauteur peut tomber en dedans ou en dehors du triangle.

La hauteur d'un parallélogramme est la perpendiculaire qui mesure la distance de deux côtés parallèles.

La hauteur d'un trapèze est aussi la distance des deux côtés parallèles.

On appelle *aire* ou *superficie* l'étendue de la surface plane occupée par une figure.

L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.

L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de la base par la hauteur.

L'aire du trapèze est égale à la moitié du produit de la hauteur par la somme des bases parallèles.

Par ces expressions, on entend que si l'on multiplie l'un par l'autre les nombres qui représentent les rapports de la base et de la moitié de la hauteur d'un triangle, par exemple, à une certaine unité linéaire, le produit représentera le rapport de l'aire du triangle au carré qui a pour côté cette unité linéaire.

On appelle *polygone régulier* un polygone dont tous les angles et tous les côtés sont égaux entre eux.

Tout polygone régulier peut être *inscrit* dans le cercle et peut lui être *circonscrit*, c'est-à-dire que ses sommets peuvent toujours être posés sur une même circonférence, ou ses côtés être placés tangentiellement à une autre circonférence.

Un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cer[illegible]

Le c[illegible] considéré comme un po[illegible] [illegible]e infinité de côtés. Il a [illegible] moitié du produit de la c[illegible] [illegible] rayon.

Mais c[illegible] [illegible]tenir la circonférence lorsque l'on a[illegible] ? Au moyen d'un rapport numérique [illegible] simple qui consiste à prendre les $\frac{22}{7}$ ou les $\frac{355}{113}$ du rayon.

Le rapport $\frac{22}{7}$ a été donné par Archimède. Il est exact à moins de 0,01 près.

Le rapport $\frac{355}{113}$ est dû à Adrien Métius. Il est facile à retenir, car on l'obtient en écrivant deux fois de suite chacun des trois premiers nombres impairs 113355, et en séparant les six chiffres ainsi obtenus en deux tranches égales, dont l'une, celle de droite, forme le numérateur, et l'autre, celle de gauche, le dénominateur. Le rapport $\frac{355}{113}$ est exact à moins de 0,000001 près.

Écrit avec sept décimales, le rapport de la circonférence au diamètre est 3,1415927.

Il est aujourd'hui bien prouvé que ce rapport ne peut être exprimé exactement par aucun nombre; mais on peut approcher autant que l'on veut de sa véritable valeur. Ludolph Van Ceulen l'a calculé avec 34, Lagny avec 128 décimales; enfin l'approximation a été poussée jusqu'à la 155e décimale, dans un manuscrit de la bibliothèque Ratclif à Oxford. Les sept décimales que nous avons données suffisent presque toujours dans la pratique.

La grande chimère de la *quadrature du cercle* consisterait à trouver, par des constructions géométriques, la longueur de la circonférence dont on a le rayon, ou, ce qui revient au même, le côté du carré équivalent au cercle dont le rayon est connu. Ce problème est impossible, et il n'y a que des fous et des ignorants qui s'obstinent à en chercher la solution.

Le secteur circulaire A M C O (figure 2) a pour mesure la moitié du produit de l'arc AMC par le rayon.

L'aire de ce secteur est à l'aire du cercle comme l'arc A M C est à la circonférence entière.

Le segment circulaire A M C a pour mesure la différence entre le secteur A M C O et le triangle A O C.

On exprime par le symbole abrégé π le rapport de la circonférence au diamètre. On a donc, en désignant le rayon par r :

Circonférence $= 2\pi r$

Aire du cercle $= \pi r^2$

De même, en désignant par b la base, et par h la hauteur des diverses figures que nous avons eu occasion de considérer, on a les expressions abrégées :

Aire du triangle $= \frac{1}{2} bh$

Aire du parallélogramme $= bh$.

Aire du trapèze $= \frac{1}{2}(b+b')\,h$.

(b' est la base parallèle à b.)

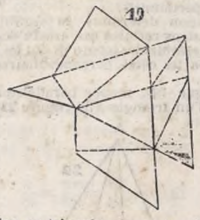
Aire du polygone régulier circonscrit

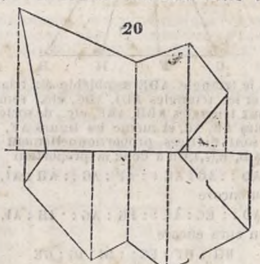
$= \frac{1}{2}\,anr.$

a est le côté, n le nombre des côtés, et r le rayon du cercle inscrit.

Toute figure plane rectiligne pouvant être décomposée en triangles, on obtiendra l'a[ire] d'une figure quelconque de ce genre, en fa[i]sant la somme des aires des triangles dans lesquels elle a été divisée.

Au lieu de la décomposition en triangles, représentée figure 19, on préfère souvent la décomposition en triangles ou en trapèzes, dont la figure 20 donnera une idée. Alors l'aire





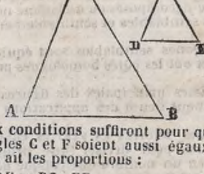
de la figure plane est composée de la somme et de la différence d'un certain nombre d'éléments triangulaires en trapézoïdaux.

§ 4. *Figures semblables, lignes proportionnelles et rapports des figures.*

Similitude des figures. — Deux triangles sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun. Les côtés opposés aux angles égaux, dans les deux triangles, sont appelés *homologues*.

La propriété fondamentale des triangles semblables, c'est d'avoir les côtés homologues proportionnels. Si donc les deux triangles A B C, D E F (figure 21) ont les angles A = D, B = E,

21



ces deux conditions suffiront pour que les autres angles C et F soient aussi égaux, et pour que l'on ait les proportions :

AB : DE :: BC : EF
AB : DE :: AC : DF
AC : DF :: BC : EF

La troisième est une conséquence des deux premières.

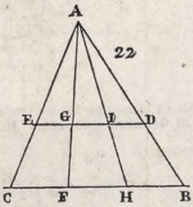
Réciproquement deux triangles qui ont les côtés proportionnels sont équiangles, et par conséquent semblables.

Il suffit même, pour la similitude, que deux triangles aient un angle égal compris entre côtés proportionnels.

La position détermine la similitude des triangles dans certains cas, ainsi : deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés parallèles ou les côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Une ligne DE, menée parallèlement à la base BC d'un triangle ABC (figure 22), déter-

22



mine le triangle ADE semblable au triangle ABC, et les triangles ADI, ADG, etc., semblables aux triangles ABH, ABF, etc., de sorte que les côtés AB, AC, et même les lignes AF, AH, etc., sont divisées proportionnellement aux points D, E,G,I. On a donc la proportion

AB : AD : : AC : AE : : AF : AG : : AH : AI, etc.

ou encore

BD : AD : : EC : AE : : FG : AG : : IH : AI, etc

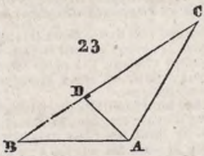
On aura encore

BH : HF : FC : : DI : IG : GE

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si la ligne DE divise en parties proportionnelles les côtés AB, AC d'un triangle, elle est parallèle à la base BC.

Toute ligne AD (figure 23), qui divise l'angle

23



A d'un triangle en deux parties égales, divise le côté BC opposé à l'angle A, en deux segments BD, DC proportionnels aux côtés AB, AC, de sorte qu'on a BD : DC : : AB : AC.

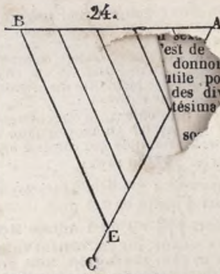
Deux polygones sont dits semblables lorsqu'ils peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

Deux polygones semblables sont équiangles entre eux, et ont les côtés homologues proportionnels.

Ces propriétés principales des figures semblables donnent lieu à des applications journalières.

Division des droites en parties égales. — Ainsi d'abord pour diviser une droite AB (figure 24) en un nombre quelconque de parties égales, en 5 par exemple, on tirera du point A, une droite indéfinie quelconque AC,

24.

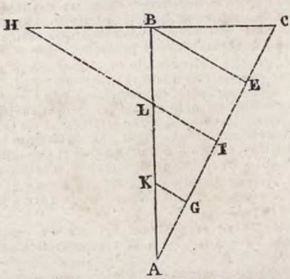


sur laquelle on portera cinq fois une longueur arbitraire AD, de A en E. On joindra les points E et B, puis par les points de division entre A et E, on tirera des parallèles à BE ; ces parallèles diviseront AB en cinq parties égales.

Ce procédé ne donne des résultats exacts qu'autant que l'angle BAC est de 60° environ, et que les parallèles à BE sont menées avec le plus grand soin. Le tracé suivant est exempt de tout inconvénient et peut être employé aussi bien sur le terrain que sur le papier.

Par une des extrémités de la droite AB (figure 24 *bis*) qu'il s'agit de diviser en *trois*

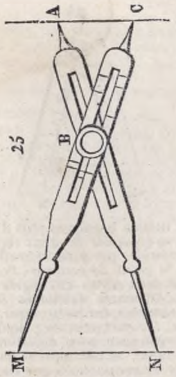
24 *bis*.



parties égales, par exemple, tirez une droite quelconque AC, sur laquelle vous porterez *quatre* fois la longueur arbitraire AG. Joignez les extrémités C et B, et prenez sur le prolongement de CB, BH égale à CB ; tirez enfin IH qui coupe AB en L ; BL sera le tiers de AB.

Le compas de réduction (figure 25), se compose de deux doubles branches dont la longueur varie suivant la position du bouton B autour duquel elles tournent. Elles sont graduées de telle sorte qu'en plaçant convenablement le bouton, la distance AC sera à volonté la moitié, le tiers, le quart, etc., de la distance MN. M. de Prony a adapté au compas de réduction une échelle graduée en millimètres, qui permet de prendre un rapport quelconque entre les deux ouvertures AC, MN. Si ce rapport est celui de n à m, par exemple, la distance x à laquelle le centre de rotation doit être placé du centre de l'instrument, dont la longueur totale est $2a$, a pour expression

$$x = \frac{m-n}{m+n}\,a = \frac{1-\dfrac{n}{m}}{1+\dfrac{n}{m}}\,a.$$



M. de Prony au mémoire duquel nous renvoyons (*Annales des Ponts-et-Chaussées*, t. 1, de 1835, p. 81), a donné une table qui facilite beaucoup la détermination des diverses valeurs de x, qui correspondent à des échelles quelconques dont le rapport est $\frac{n}{m}$. Le cas le plus simple et le plus commode est celui où la longueur totale du compas est d'un double décimètre, parce que a exprimé en millimètres vaut alors 100. La petite table ci-jointe donne alors les valeurs de x qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{n}{m}$ comprises entre 1 et 0,01

Par exemple, s'il s'agit de compléter avec la carte de Cassini qui est à l'échelle de $\frac{1}{86400} = n$ une feuille de la nouvelle carte de France à l'échelle de $\frac{1}{80000} = m$, on prend

$$\frac{n}{m} = \frac{800}{864} = \frac{100}{108} = 0{,}93$$

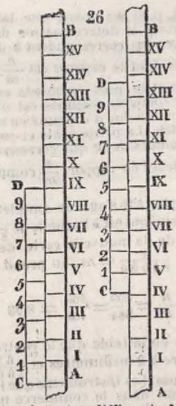
et il résulte de la table que le centre de rotation doit être à 3 millimètres et $\frac{63}{100}$ du milieu du compas. Les instruments que l'on trouve ordinairement dans le commerce ne peuvent être employés d'une manière aussi utile.

Table pour l'usage du compas de réduction de M. de Prony.

VALEURS de $\frac{n}{m}$.	VALEURS de x.	VALEURS de $\frac{n}{m}$.	VALEURS de x	VALEURS de $\frac{n}{m}$.	VALEURS de x.	VALEURS de $\frac{n}{m}$.	VALEURS de x.
1,00	0,00	0,75	14,29	0,50	33,33	0,24	61,29
0,99	0,50	0,74	14,94	0,49	34,23	0,23	62,60
0,98	1,01	0,73	15,61	0,48	35,14	0,22	63,93
0,97	1,52	0,72	16,28	0,47	36,05	0,21	65,29
0,96	2,04	0,71	16,96	0,46	36,99	0,20	66,67
0,95	2,56	0,70	17,65	0,45	37,93	0,19	68,07
0,94	3,09	0,69	18,34	0,44	38,89	0,18	69,49
0,93	3,63	0,68	19,05	0,43	39,86	0,17	70,94
0,92	4,17	0,67	19,76	0,42	40,85	0,16	72,41
0,91	4,71	0,66	20,48	0,41	41,84	0,15	73,91
0,90	5,26	0,65	21,21	0,40	42,86	0,14	75,44
0,89	5,82	0,64	21,95	0,39	43,88	0,13	76,99
0,88	6,38	0,63	22,70	0,38	44,93	0,12	78,57
0,87	6,95	0,62	23,46	0,37	45,99	0,11	80,18
0,86	7,53	0,61	24,22	0,36	47,06	0,10	81,82
0,85	8,11	0,60	25,00	0,35	48,15	0,09	83,49
0,84	8,70	0,59	25,79	0,34	49,25	0,08	85,19
0,83	9,29	0,58	26,58	0,33	50,38	0,07	86,92
0,82	9,89	0,57	27,39	0,32	51,52	0,06	88,68
0,81	10,50	0,56	28,21	0,31	52,67	0,05	90,48
0,80	11,11	0,55	29,03	0,30	53,85	0,04	92,31
0,79	11,73	0,54	29,87	0,29	55,04	0,03	94,17
0,78	12,36	0,53	30,72	0,28	56,25	0,02	96,08
0,77	12,99	0,52	31,58	0,27	57,48	0,01	98,02
0,76	13,64	0,51	32,45	0,26	58,73	0,00	100,00
				0,25	60,00		

VERNIER OU NONIUS. — Mais comment prendre facilement des dixièmes, des centièmes de millimètre ? Comment, en un mot, mesurer les lignes avec la précision qu'exigent beaucoup d'opérations délicates dans les arts et dans les sciences ? Avec le *Vernier*, instrument aussi simple qu'ingénieux qui porte le nom de son inventeur.

Soit une règle AB (figure 26) divisée, à partir du point A, en parties égales, déjà très-petites, en millimètres, par exemple, et marquées en chiffres romains I, II, III, etc. Si l'on veut évaluer une portion quelconque de la longueur de cette règle avec une approximation marquée par des *dixièmes* de millimètre, on prendra une règle CD d'une longueur égale à *neuf* millimètres et on la divisera en *dix* parties égales, ce qui est facile. La partie à gauche de la figure représente ces divisions marquées en chiffres arabes 1, 2, 3

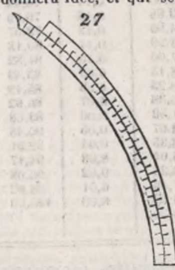


4, etc., et qui toutes diffèrent des divisions comprises sur AB entre A et la division IX. Maintenant si la règle CD a son extrémité C appliquée en un certain point de la grande règle, au-delà de la division IV, comme on le voit sur la partie à droite de la figure, le nombre de dixièmes dont l'origine C est avancée au-delà de la division IV, est exprimée par le rang de la division de la réglette CD qui se trouve dans le prolongement d'une des divisions de la règle AB. Ici c'est la troisième, de sorte que l'origine de la réglette est à 4 millimètres et $\frac{3}{10}$ au-delà du point A

Cette réglette CD est ce que l'on appelle le *vernier*.

On peut adapter à des instruments de précision des verniers qui donnent facilement $\frac{1}{50}$ et même $\frac{1}{100}$ de millimètre. Mais il faut faire usage d'un verre grossissant pour la lecture des divisions.

On a aussi des verniers circulaires dont la figure 27 donnera idée, et qui servent à évaluer les angles au centre ou les arcs correspondants à moins de 10 secondes sexagésimales. Sur certains cercles destinés à la haute astronomie, on évalue même les angles à $\frac{1}{2}$ seconde près.



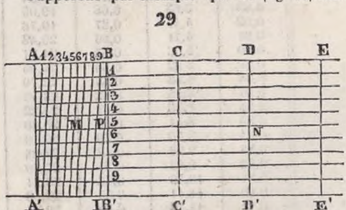
Le compas de proportion, instrument dont l'invention a été disputée à Galilée par Balthasar Capra, un de ses élèves (figure 28), est fondé sur le même principe que le compas de réduction, mais a beaucoup plus d'usages que celui-ci. Il se compose de deux règles d'égale longueur, réunies par une charnière dont le centre est le point de concours des bords intérieurs des deux règles. Ces règles portent des divisions différentes intitulées *les parties égales, les cordes, les polygones, les plans, les solides, les métaux*, etc., dont la destination est expliquée avec détail dans divers traités spéciaux, et notamment dans *l'usage du compas de proportion*, par Ozanam, édition revue par Garnier.

Pour parler seulement de l'échelle des parties égales, il est facile de voir qu'elle sert à diviser une longueur donnée en parties proportionnelles à des nombres donnés.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver une ligne dont la longueur soit à une longueur donnée comme 3 est à 10. On ouvrira le compas jusqu'à ce que la distance des deux points marqués 10, sur les parties égales, soit égale à la longueur donnée, ce dont on s'assurera à l'aide d'un compas ordinaire; la distance des deux points marquée 3 sera alors égale à la longueur cherchée.

Échelles. — La construction des *échelles*, si utiles dans toutes les opérations graphiques, telles que le tracé des plans et des cartes, les dessins d'architecture et de machines, etc., est encore fondée sur les propriétés des triangles semblables.

Supposons par exemple que AB (fig. 29) soit



l'unité adoptée pour un dessin, et qu'il s'agisse d'évaluer les différentes longueurs mesurées sur ce dessin à $\frac{1}{100}$ d'unité près.

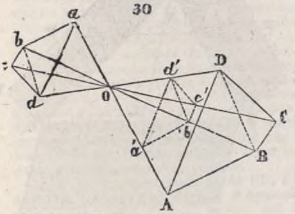
Sur la ligne AB prolongée, on prendra les longueurs BC, CD, DE, etc., égales à AB ; puis ayant élevé aux points A, B, C, D, E, etc., des perpendiculaires indéfinies à AE, on comptera sur l'une d'elles, sur BB', par exemple, 10 parties égales, de longueur arbitraire, dont les extrémités sont marquées aux points de division 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, B'. Par ces points de division, on mène des parallèles à AE. Enfin, après avoir divisé aussi AB et A'B' en 10 parties égales, on tire des lignes obliques de la première division de AB, au point A'; de la seconde division de AB à la première de A'B', et ainsi de suite. On voit alors que dans le triangle B1B', la parallèle à la base qui correspond à la division 1, vaut $\frac{1}{10}$ de 1B', ou $\frac{1}{100}$ de AB ; que les parallèles suivantes valent successivement $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, etc.

Pour mesurer à cette échelle ainsi construite une longueur prise au compas, on la porte sur l'une des parallèles à AE, de manière que les deux points du compas coïncident sensiblement avec deux points de division N et M, par exemple. On voit alors que cette longueur se compose : 1° de N6 ou de 2 unités ; 2° de MP ou des $\frac{3}{10}$ d'unité ; 3° de P6 ou de $\frac{6}{100}$, de sorte que l'expression numérique de la longueur est 2,36.

Centres de similitude. — La considération des polygones semblables donne les moyens de copier une figure quelconque en la réduisant dans un rapport déterminé.

Soit, par exemple, le polygone ABCD (fig. 30),

30



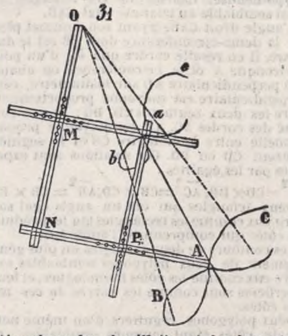
dont il s'agit de réduire toutes les dimensions aux $\frac{2}{3}$. On prendra un point quelconque O dans le plan de ce polygone, et on tirera les droites OA, OB, OC, OD, sur les prolongements desquelles on prendra les parties O*a*, O*b*, O*c*, O*d* respectivement égales aux $\frac{2}{3}$ des premières. Le polygone *abcd* sera semblable au polygone ABCD. Le point O est ce que l'on appelle un *centre de similitude interne* par rapport aux deux polygones ainsi placés. Si les sommets du plus petit avaient été placés sur les lignes OA, OB, OC, OD, en *a'*, *b'*, *c'*, *d'* au lieu de l'être sur les prolongements de ces lignes, O aurait été un *centre de similitude externe.*

Pantographe. — Ce procédé exige uniquement que les droites OA et O*a*, OB et O*b*, etc., conservent entre elles un rapport constant. Le *pantographe* ou *singe* est un instrument fondé sur ce principe et à l'aide duquel on peut immédiatement copier, d'une manière continue, une figure quelconque, en réduisant toutes les dimensions de cette figure dans un rapport donné.

MNP*a* (fig. 31) est un parallélogramme composé de quatre règles qui tournent autour d'articulations ou de chevillettes placées aux quatre sommets. Un crayon est placé en *a* et une pointe est fixée en A, sur le prolongement de la règle NP, et de telle manière que la droite A*a* prolongée passe par le point O que l'on maintient fixe. En suivant avec la pointe A tous les contours d'une figure quelconque ABC, le crayon reproduira une figure absolument semblable *abc*. Le rapport des dimensions de ces figures est celui de OA à O*a* ou de OM à ON.

Les règles ON, *a*P portent donc des trous numérotés d'avance, pour que l'on puisse à vo-

31



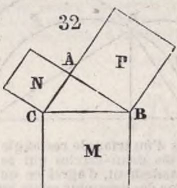
lonté y placer les chevillettes et dessiner ainsi à une échelle déterminée.

M. Ernst, habile fabricant d'instruments de mathématiques, établit ses pantographes avec des échelles à Vernier, et par ce perfectionnement tout à fait analogue à celui que M. de Prony a apporté au compas de réduction, le pantographe acquiert une précision remarquable.

Rapports des figures. — La similitude des triangles conduit à la démonstration d'une proposition que l'on peut regarder comme fondamentale, dans la géométrie, et dont la découverte est due à Pythagore. Elle consiste en ce que :

Dans tout triangle rectangle (fig. 32), le carré

32



M, fait sur l'hypothénuse CB, est égal à la somme des carrés N et P faits sur les deux autres côtés.

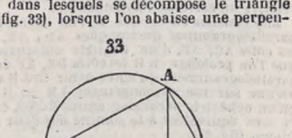
On exprime ce résultat de la manière suivante :

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

ou algébriquement, $a^2 = b^2 + c^2$

Cette proposition est une conséquence de la similitude de deux triangles rectangles ADB ADC, dans lesquels se décompose le triangle CAB (fig. 33), lorsque l'on abaisse une perpen-

33



diculaire AD du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse. Chacun de ces triangles est aussi semblable au triangle total CAB.

L'angle droit CAB, ayant son sommet placé sur la demi-circonférence dont CB est le diamètre, il en résulte encore que si, d'un point quelconque A de la circonférence on abaisse une perpendiculaire AD sur le diamètre, cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segments CD, DB ; et que chacune des cordes AC, AB est moyenne proportionnelle entre le diamètre CB et le segment adjacent CD ou BD. Ces relations sont exprimées par les égalités :

$$\overline{AD}^2 = CD \times DB, \overline{AC}^2 = CB \times CD, \overline{AB}^2 = CB \times BD.$$

Deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les rectangles (ou les produits) des côtés qui comprennent l'angle égal.

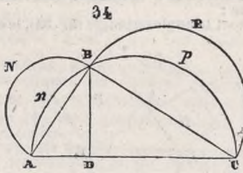
Les contours de deux triangles ou plus généralement de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues, et leurs superficies sont comme les carrés de ces mêmes côtés.

Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés étant toujours semblables, ces rapports existent pour eux ; ces rapports existent aussi lorsque l'on considère les rayons des cercles inscrits ou circonscrits au lieu des côtés homologues.

Deux cercles quelconques sont des polygones réguliers d'une infinité de côtés et par conséquent semblables. Donc les circonférences sont entre elles comme les rayons, et les cercles comme les carrés des mêmes rayons.

Cette proposition combinée avec celle du carré de l'hypothénuse, conduit à la quadrature des *lunules d'Hippocrate* de Chio, célèbres dans l'antiquité. En construisant (fig. 34)

34



sur les côtés d'un triangle rectangle pris pour diamètre trois demi-cercles qui se coupent, on verra facilement, d'après ce qui précède, que la somme des deux plus petits est égale au plus grand, ou, en retranchant les segments communs, que la somme des lunules n et p est égale au triangle rectangle ABC ; et l'une et l'autre seront égales en superficie au triangle ABD, ou au triangle CBD, lorsque le triangle ABD est isocèle en même temps que rectangle.

Les lunules d'Hippocrate nous offrent le plus ancien exemple connu de l'assimilation exacte d'un espace curviligne à une figure rectiligne.

On doit au frère du célèbre Clairaut une généralisation remarquable de la proposition relative au carré de l'hypothénuse.

Elle consiste en ce que si l'on décrit deux parallélogrammes quelconques AD, AK, sur les côtés AC, AB, d'un triangle obliquangle ; que l'on prolonge en H les côtés DE, KF de ces parallélogrammes ; qu'après avoir tiré HA, on prenne sur son prolongement LM = HA et qu'on achève le parallélogramme BCNO, celui-ci sera équivalent à la somme des deux premiers. (fig. 35).

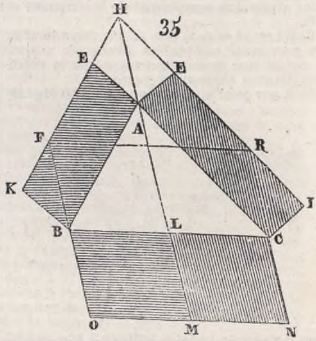
Les parties de deux cordes qui se coupent dans un cercle sont réciproquement proportionnelles, ou autrement le rectangle des deux segments de l'une est égal au rectangle des deux segments de l'autre.

Si, d'un même point pris hors d'un cercle, on mène deux sécantes terminées à leur second point de rencontre avec le cercle, les sécantes entières seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures ; et le produit de chacune d'elles par son segment extérieur sera égal au carré de la tangente mené du même point à la circonférence.

Dans tout parallélogramme la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

Dans tout quadrilatère inscrit le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.

35



§ 5. *Tracé des figures et solution des problèmes.*

On trouve dans ce qui précède tous les éléments nécessaires à la solution des principaux problèmes et au tracé des figures de géométrie les plus usitées. Cependant quelques tracés exigent des développements particuliers, et il est nécessaire de résumer ici l'ordre logique dans lequel ils doivent être présentés successivement.

I. Diviser une droite en deux parties égales ? (Voy. colonnes 112 et 124.)

II. Par un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite ? (Voy. col. 112.)

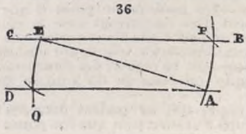
III. D'un point donné hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite ? (Voy. col. 112.)

IV. En un point d'une droite donnée, faire un angle égal à un angle donné ? (voy. col. 118.)

V. Diviser un angle ou un arc en deux parties égales ? Il suffit d'abaisser du sommet de l'angle une perpendiculaire sur la corde qui soustend l'arc compris entre les côtés de cet angle, et décrit du sommet comme centre. (Voy. col. 112.)

VI. Par un point donné A mener une parallèle à une droite donnée BC (fig. 36) ? — Du point

36



A, comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez l'arc indéfini EO; du point E, comme centre, et du même rayon, décrivez l'arc AF, prenez ED égal à AF, et tirez AD qui sera la parallèle demandée.

Telle est la construction par la règle et le compas. Il y en a une autre plus usuelle donnée par l'équerre. (Voy. col. 114.)

VIII. Deux angles d'un triangle étant donnés, drouver le troisième? — Il suffit d'ajouter les qeux angles l'un à côté de l'autre, de manière uue leurs sommets coïncident, et qu'ils aient dn côté commun; en retranchant cette somme de deux angles droits, on a l'angle demandé. (Voy. col. 112 et 113.)

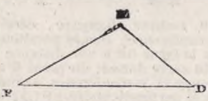
VII. Étant donnés deux côtés d'un triangle et l'angle qu'ils comprennent, décrire le triangle? (Voy. col, 113.) Il suffit de prendre sur les deux côtés de l'angle donné des quantités égales aux côtés donnés.

IX. Étant donnés un côté et deux angles d'un triangle, décrire le triangle? — Si les deux angles sont adjacents au côté donné, la construction se présente d'elle-même. Si l'un des angles est opposé à ce côté, commencez par trouver le troisième angle par le problème VII; alors vous retombez dans le premier cas (voy. col. 113), et le sommet du triangle est déterminé par l'intersection de deux droites.

X. Décrire un triangle dont on connaît les trois côtés? (voy. col. 113) Le problème n'est possible qu'autant que la somme de deux côtés est toujours plus grande que le troisième. Le sommet du triangle est déterminé par l'intersection de deux arcs de cercle dont les sommets et les rayons sont connus.

XI. Étant donnés deux côtés DE, EF, d'un triangle (fig. 37) et l'angle D opposé à l'un d'eux, décrire le triangle? (Voy. col. 113.)

37



Prenez DE sur l'un des côtés de l'angle donné, et du point E, comme centre, décrivez avec un rayon égal à EF un arc de cercle que coupe l'autre côté de l'angle, le triangle EDF sera déterminé.

Le problème n'est possible qu'autant que EF n'est pas plus petit que la perpendiculaire abaissée du point E sur DF. Lorsque EF est plus grand que cette perpendiculaire et moindre que l'autre côté DE, le problème admet deux solutions DEF, DEG. (fig. 38.)

38

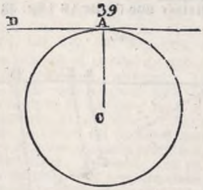
XII. Les côtés adjacents d'un parallélogramme étant donnés avec l'angle qu'ils comprennent, décrire le parallélogramme? (Voy. col. 114.)

Il suffit de mener par chacune des extrémités des côtés qui comprennent l'angle donné une parallèle à l'autre.

XIII. Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné? (Voy. col. 117.)

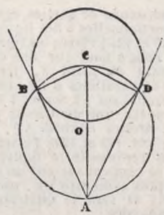
XIV. Par un point donné A sur la circonférence (fig. 39) ou hors de la circonférence

39



(fig. 40) mener une tangente AB à cette cir-

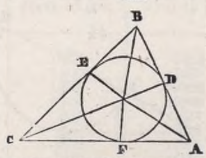
40



conférence? (Voy. col. 120.) — Dans le second cas, le problème admet deux solutions AB, AD.

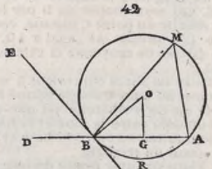
XV. Inscrire un cercle dans un triangle donné ABC? (fig. 41.) — Les trois lignes, qui divisent en 2 parties égales chacun des 3 angles du triangle, concourent en un même point O, qui est le centre du cercle inscrit; le rayon de ce cercle est la distance du point O à chacun des trois côtés du triangle.

41



XVI. Sur une droite donnée AB (fig. 42), décrire un segment *capable* d'un angle donné ABF, c'est-à-dire un segment tel que tous les angles qui y sont inscrits soient égaux à l'angle donné? (Voy. col. 120.) Par le milieu de AB élevez une perpendiculaire indéfinie GO que rencontre en O la perpendiculaire BO levée a

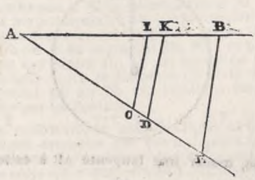
42



BF en B. OB sera le rayon et O le centre de la circonférence dans laquelle AMB sera le segment demandé.

XVII. Diviser une droite AB (fig. 43) en un

43



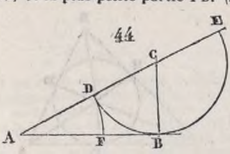
nombre quelconque de parties égales, ou en parties proportionnelles à des lignes données? (Voy. col. 123 et 124.) Placez les lignes données AC, CD, DE bout à bout sur une droite quelconque partant du point A, tirez EB, puis menez DK, CI parallèles à EB. Les points de division cherchés sur AB seront I et K.

XVIII. Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données AD, AC et AK? (fig. 43) (voy. col. 123 et 124). Portez ces lignes, telles que les représente la figure, sur deux droites qui se coupent suivant un angle quelconque, et après avoir tiré DK, menez CI parallèle à DK; AI sera la quatrième proportionnelle demandée.

XIX. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données DB et DC? (fig. 33.) Décrivez une demi-circonférence sur CB comme diamètre; la perpendiculaire DA sera la moyenne proportionnelle demandée. (Voy. col. 131.)

XX. Diviser la droite donnée AB en *moyenne et extrême raison*, c'est-à-dire en deux parties AF, FB, telles que la plus grande AF soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB, et la plus petite partie FB? (fig. 44.)

44



A l'extrémité B de AB élevez BC perpendiculaire à AB et égale à la moitié de cette ligne; tirez AC, qui sera coupée en D par la circonférence décrite du point C comme centre avec le rayon CB; prenez AF égal à AD, la droite AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point F.

XXI. Faire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné?

Le côté du carré cherché est une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme ou entre la base et la moitié de la hauteur du triangle.

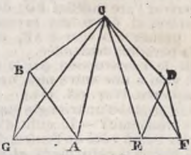
XXII. Faire sur une droite donnée un rectangle équivalent à un autre rectangle donné?

La hauteur du rectangle cherché est une quatrième proportionnelle à la droite donnée, à la base et à la hauteur du rectangle donné.

XXIII. Transformer un polygone ABCDE (fig. 45), en un triangle équivalent?

Par le point D, menez DF parallèle à la diagonale CE, le triangle CEF sera équivalent au

45



triangle CED, et le pentagone ABCDE sera transformé en un quadrilatère ABCF. Menez de même par le point B une parallèle BG à la diagonale AC; les deux triangles ABC, AGC seront équivalents, et le quadrilatère ABCF sera remplacé par le triangle équivalent GCF.

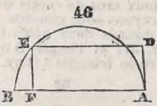
XXIV. Faire un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés ?.

Construisez un triangle rectangle dont les deux petits côtés soient les côtés des deux carrés donnés, l'hypothénuse sera le côté du carré équivalent à la somme de ces deux carrés.

Construisez un autre triangle rectangle dont l'hypothénuse soit le côté du plus grand carré et dont un des côtés de l'angle droit soit le côté du plus petit carré, l'autre côté de l'angle droit du triangle sera le côté du carré équivalent à la différence des deux carrés donnés. (Voy. col. 130.)

XXV. Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés adjacents fassent une somme donnée AB? (Fig. 46.)

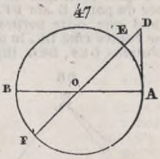
46



Sur AB comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; menez parallèlement au diamètre la ligne DE à une distance AD égale au côté du carré donné; du point E où la parallèle coupe la circonférence, abaissez sur le diamètre la perpendiculaire EF; AF et FB seront les côtés du rectangle cherché. (Voy. col. 131.)

XXVI. Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les côtés adjacents aient entre eux la différence donnée AB? (Fig. 47.)

47



Sur la ligne donnée AB, comme diamètre, décrivez une circonférence; à l'extrémité du diamètre, menez la tangente AD égale au côté du carré donné; par le point D et le centre O, tirez la sécante DEF (DE et DF seront les deux côtés du rectangle demandé. (Voy. col. 132.)

XXVII. Inscrire un carré dans une circonférence donnée? (Fig. 48.)

Menez deux diamètres AC, BD à angle droit dans le cercle, et joignez leurs extrémités, vous aurez le carré demandé ABCD.

XXVIII. Inscrire un hexagone régulier et un

48

triangle équilatéral dans une circonférence donnée?

Le côté AB (fig. 49) de l'hexagone régulier

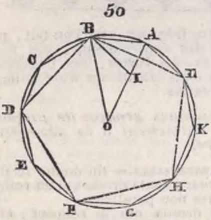
49

inscrit, ABCDEF est égal au rayon OA; et le triangle équilatéral ACE s'obtient en joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone.

XXIX. Inscrire dans un cercle donné un décagone, un pentagone et un pentédecagone réguliers?

Le côté AB (fig. 50) du décagone régulier

50

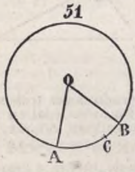


inscrit, ABCDEFGHKL est égal au plus grand segment OI du rayon OA divisé en moyenne et extrême raison. (Voy. le problème XX.)

Le pentagone BDFHL s'obtient en joignant de deux en deux les sommets du décagone.

Enfin, l'arc CB (fig. 51) soustendu par le

51



côté du pentédécagone régulier inscrit (polygone de quinze côtés), est égal à la différence entre l'arc AB qui soustend le rayon, et l'arc AC qui soustend le côté du décagone régulier.

Comme on peut toujours diviser un arc en 2, 4, 8, 16, 32, etc., parties égales, on voit que l'on sait inscrire rigoureusement, par ce qui précède, les polygones réguliers dont les nombres de côtés sont exprimés par les quatre suites.

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, etc.
4, 8, 16. 32, 64, 128, 256, 512, etc.
5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, etc.
15, 30, 60, 120, 240, 480, 960, 1920, etc.

Jusqu'aux premières années de notre siècle, on avait cru que ces polygones réguliers étaient les seuls qui pussent être décrits à l'aide de la règle et du compas; mais M. Gaus, illustre géomètre et physicien allemand, a prouvé que la chose est possible pour tous les nombres de côtés qui sont premiers, et qui, diminués de l'unité, donnent une puissance exacte de 2. On peut donc inscrire dans le cercle, à l'aide de la règle et du compas, les polygones de 17, de 257, etc., côtés et tous ceux qui en dérivent, parce que

$$17 - 1 = 2^4$$
$$257 - 1 = 2^8$$

Du reste, dès que le nombre de côtés devient un peu considérable et que les figures sur lesquelles on opère ne sont pas trop grandes, il est avantageux d'avoir recours aux méthodes de tâtonnements graphiques. On peut même en donner qui conduisent à une approximation suffisante dans la plupart des cas de la pratique, pour des polygones dont les nombres de côtés ne sont pas compris dans les suites précédentes.

Ainsi, le côté de l'heptagone regulier inscrit (polygone de sept côtés) est à moins d'un millième près égal à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit.

La petite table suivante sera fort utile pour construire divers polygones réguliers dans différents cas.

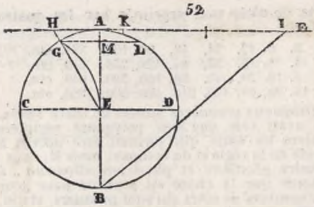
NOMBRE des côtés du polygone.	VALEUR du côté, le rayon du cercle circonscrit étant 10 000.	VALEUR du rayon du cercle circonscrit le côté étant 10 000.
3	17320	5773
4	14142	7071
5	11756	8506
6	10000	10000
7	8678	11524
8	7654	13066
9	6840	14619
10	6180	16180
11	5635	17747
12	5176	19319
13	4784	20901
14	4450	22470
15	4158	24049

Quadrature approchée du cercle. — On donne aussi une solution graphique très-approchée du problème de la rectification de la circonférence qui revient à celui de la quadrature du cercle.

Soient menés d'abord (fig. 52) deux diamètres à angle droit AB, CD, et soit AE perpendiculaire à BA. On prend l'arc CG de 60 degrés, c'est-à-dire la distance CG égale au rayon; on tire FGH, et on porte le rayon trois fois de H en I; BI est à environ 6 cent millièmes près la longueur de la demi-circonférence qui a pour rayon FA.

Polygones étoilés. — Du tracé des polygones

52

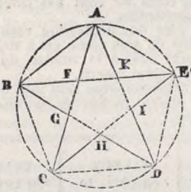


réguliers convexes on déduit celui des *polygones réguliers étoilés*, qui ont le même nombre de côtés que les premiers, mais qui ont aussi des angles rentrants.

Les polygones étoilés peuvent être construits *par réduction*, en joignant de deux en deux, de trois en trois, de quatre en quatre, etc., les sommets d'un polygone régulier; ou *par extension* en prolongeant les côtés de celui-ci et en déterminant leurs intersections de deux en deux, de trois en trois, de quatre en quatre, etc.

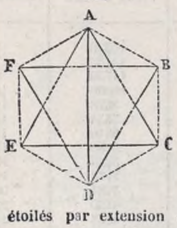
La figure 53 montre un polygone étoilé par

53



réduction du pentagone; et la figure 54 deux

54



polygones étoilés par extension de l'hexagone.

Le nombre des polygones étoilés qui peuvent être déduits d'un polygone ordinaire impair, est la moitié du nombre de côtés de ce polygone diminué de 3; et le nombre des polygones étoilés qui peuvent être déduits d'un polygone ordinaire pair; est la moitié du nombre de côtés de ce polygone diminué de 4.

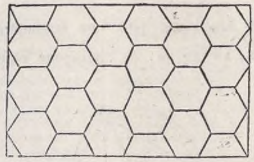
Ainsi le triangle et le carré ne donnent pas de polygones étoilés; le pentagone et l'hexagone n'en donnent qu'un; l'heptagone et l'octogone n'en donnent que deux, etc.

Les polygones réguliers tant convexes qu'étoilés sont souvent employés dans les arts mécaniques et dans les ornements architectoniques. Les figures 55, 56, 57 et 58 montrent l'u-

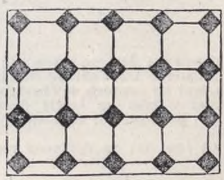
55

56

57



58



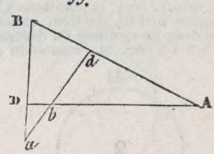
sage le plus fréquent que l'on fait, pour le carrelage des appartements, des triangles équilatéraux, des carrés, des hexagones réguliers, et d'un assemblage d'octogones reguliers et de carrés.

§ 6. *De quelques groupes de propositions qui se rattachent à la géométrie élémentaire.*

Des transversales. — On donne le nom de *transversale* à toute droite qui en coupe plusieurs autres non parallèles.

Si trois droites qui se coupent, AB, AD, BD (fig. 59) sont rencontrées par une transver-

59.



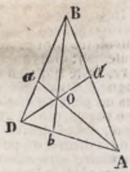
sale $d\,b\,a$, les produits des trois segments alternes, Ab, Bd, Da, sera égal au produit des trois autres segments aB, bD, dA, et l'on aura

$$Ab \times Bd \times Da = aB \times bD \times dA.$$

Si l'on a soin de mettre à l'intersection de la transversale avec chacune des droites données une lettre semblable à celle qui occupe le sommet de l'angle formé par les deux autres, la relation précédente offre, quant aux lettres, une symetrie remarquable qui permet de la retenir facilement.

Si trois droites AB, AD, BD (fig. 60) se coupent, et que par un point intérieur O, et par

60

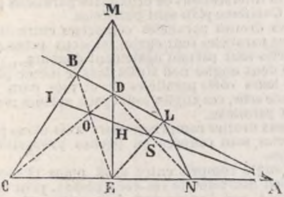


les sommets A, B, D, on mène les lignes A a, Bb, Dd, qui déterminent sur les premières droites les six segments Ab, bD, Da, aB, Bd, dA, les produits des segments séparés seront égaux, et l'on aura

$$Ab \times Bd \times Da = aB \times bD \times dA.$$

Des harmoniques. — Soient A et M (fig. 61),

61



les sommets de deux angles CAB, CME dont les côtés se coupent aux points D, B, C, E. Si on tire les diagonales BE, DC, dans le quadrilatère BDEC, et que l'on trace la droite AOI on aura la relation

$$CM \times BI = MB \times CI.$$

On dit alors que la droite MC est divisée *harmoniquement* aux points B et I.

Les distances CM, CB, CI du point C aux points M, B, I sont donc telles que l'on a la proportion.

$$CM : CI :: CM - CB : CB - CI$$

qui prend le nom de *proportion harmonique continue.*

Plus généralement quatre quantités a, b, c, d, sont en *proportion harmonique*, lorsque la première est à la quatrième comme la différence entre la première et la seconde est à la différence entre la troisième et la quatrième, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$a : d :: a - b : c - d$$

Une suite de quantités sont en *progression harmonique*, lorsque trois quelconques d'entre elles prises consécutivement forment une proportion harmonique continue.

La droite ME est divisée elle-même harmoniquement aux points D et H, et il en serait de même de toute droite menée par le même point.

Les droites menées par le point M forment ce que l'on nomme un *faisceau harmonique*, dont le point M est le *pôle*, et la ligne AI *la polaire.*

Si l'on considère deux droites quelconques ME, MN du faisceau harmonique, le point de concours S des diagonales LE, DN se trouve sur la polaire AI

Applications des propositions précédentes. — Dans les dessins d'architecture, dans le tracé des cartes, etc., on a souvent besoin de mener par un point donné une droite qui concoure avec deux autres droites, et il peut arriver que le point de rencontre soit situé hors du cadre de l'*épure*, c'est-à-dire hors de la feuille sur laquelle on opère. Les propriétés des figures précédentes permettent de lever cette difficulté.

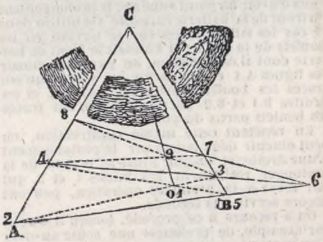
Soient LB, NC, deux droites entre lesquelles est placé le point O par lequel on doit mener une droite qui concoure avec les deux premières.

Par ce point O menons deux droites quelconques CD, EB telles que les droites ED, CB qui joignent leurs extrémités d'un même côté, concourent en un point M placé dans l'intérieur du cadre, ce qui est toujours possible. Par le point M tirons une droite quelconque MLN, et joignons DN et LE; le point de rencontre S de ces deux dernières détermine avec le point O la droite cherchée AI.

Lorsque le point donné N est extérieur aux droites données BC, DE, on mène par ce point une droite quelconque CA, puis une seconde droite quelconque BA qui rencontre la première en A, point compris dans les limites de l'épure. On tire BE et DC qui se coupent en O, puis OA; on joint DN qui coupe OA en S, on tire ES qui vient couper BA en un point L; enfin on tire NL, qui est la droite demandée.

Ces constructions ne sont pas moins utiles sur le terrain que sur le papier. Supposons, par exemple que CA et CB (fig. 62) soient les

62

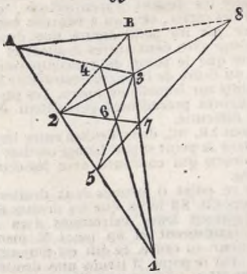


directions de deux allées qui concourent au centre C du *rond-point* d'un parc; et qu'il s'agisse d'en ouvrir une nouvelle dont la direction soit assujettie à passer par un point donné O. Pour tracer la direction de cette allée au travers d'un massif d'arbres qui empêchent d'apercevoir le point c du point O et *vice versâ*, il faudra recourir à la construction du premier cas ci-dessus. On aura, à cet effet, 9 *jalons* à planter. Afin d'éviter les redites, nous avons numéroté sur la figure les points où ils doivent être placés, dans l'ordre que nécessite la construction. Les jalons 1 et 9 détermineront la direction cherchée.

On peut se proposer de trouver un point sur le prolongement d'une droite inaccessible; on a recours pour cela à la construction du second cas ci-dessus.

Soit AB (fig. 63) la droite inaccessible, déterminée seulement par deux points visibles A et B. Faisons planter dans la campagne un jalon quelconque 1; puis sur les directions A.1 et B.1, marquons par des jalons les points 2 et 3, choisis arbitrairement, mais de manière

63



cependant que la droite déterminée par ces deux points rencontre le prolongement de AB dans les limites assignées à l'opération. Puis, faisons planter successivement : le jalon 4, à l'intersection des droites B.2 et A.3; le jalon 5 en un point quelconque de A.1; le jalon 6 à l'intersection des droites 5.3 et 1.4 ; le jalon 7 à l'intersection des droites 1.3 et 2.7 ; enfin le jalon 8 à l'intersection des droites 2.3 et 5.7. Le point déterminé par le jalon 8 sera le point cherché; car, d'après la construction, la droite 4.1 est la polaire et le point 8 est le pôle du faisceau harmonique A.8,2.8,5.8.

Cette construction trouve son application dans l'attaque des places fortes, lorsqu'on veut établir une batterie qui prenne en flanc l'une des batteries de la place. Il est indispensable alors d'avoir un point situé sur le prolongement du front de la batterie ennemie. On utilise dans ce cas les sillons tracés sur le terrain par les boulets de la place ; si AB était le front de batterie dont il est question, on pourrait choisir les lignes A.1 et A.3 parmi les sillons qu'ont tracés les boulets partis du point A, et les droites B.1 et B.2. parmi ceux qu'ont tracés les boulets partis du point B.

En répétant cette même construction, on peut obtenir deux points sur le prolongement d'une droite, et obtenir ainsi le moyen de la prolonger réellement. Les jalons 1 et 2, qui ont servi à la première opération, peuvent encore servir à la seconde.

On a recours à ce procédé, lorsqu'il s'agit, par exemple, de prolonger une route au-delà d'un obstacle momentané, tel qu'une habitation à démolir, un bois à percer, etc., et que l'on a intérêt à ne point différer les travaux.

§ 7. *Des lignes et des plans considérés dans l'espace.*

Deux droites qui se coupent, ou deux droites parallèles, ou enfin trois points non en ligne droite déterminent la position d'un plan.

Un plan peut donc être considéré comme engendré par une droite quelconque assujettie à s'appuyer constamment sur deux autres droites qui se coupent.

On réalise ce mode de génération du plan dans l'opération du moulage des tuiles plates, des briques et des carreaux, dans le sciage des bois de charpente, dans la taille des pierres, et enfin dans beaucoup d'arts mécaniques.

L'intersection de deux plans est une ligne droite.

Si une droite est perpendiculaire à deux droites qui se croisent à son *pied* dans un plan; elle est perpendiculaire à toutes les autres droites qui, passant par son pied, sont tracées dans le plan, et elle est dite alors perpendiculaire au plan lui-même.

Les obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire sont égales ; et, de deux obliques inégalement éloignées du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.

Si l'on a dans un plan un angle droit dont un des côtés passe par le pied d'une perpendiculaire à ce plan, toute droite qui joindra le sommet de l'angle droit à un point quelconque de la perpendiculaire sera elle-même perpendiculaire à l'autre côté de l'angle droit.

Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute droite parallèle à la première sera elle-même perpendiculaire au plan.

Si une droite est parallèle à une autre droite tracée dans un plan, elle sera aussi parallèle à ce plan, c'est-à-dire qu'elle ne pourra le rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre.

Deux plans perpendiculaires à la même droite sont parallèles entre eux.

Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan sont parallèles.

Les droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales, et deux plans parallèles sont partout également distants.

Si deux angles non situés dans le même plan ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles sont égaux et leurs plans sont parallèles.

Deux droites comprises entre trois plans parallèles sont coupées en parties proportionnelles.

L'angle compris entre deux plans (l'inclinaison mutuelle de ces deux plans), peut être mesuré par l'angle que font entre elles les deux perpendiculaires menées dans chacun de ces deux plans en un même point de l'intersection commune. On donne à cet angle le nom de *dièdre*.

Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à un autre plan, est lui-même perpendiculaire à cet autre, c'est-à-dire qu'il forme avec lui un angle dièdre droit.

L'intersection commune de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à celui-ci.

On appelle *angle solide* ou *angle polyèdre* la portion de l'espace comprise entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point.

Dans tout *trièdre* ou angle solide à trois faces, la somme des angles de deux quelconques de ces faces est plus grande que le troisième angle.

La somme des angles plans qui forment un angle solide est toujours moindre que quatre angles droits.

Si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux chacun à chacun, les plans dans lesquels sont les angles égaux seront également inclinés entre eux.

De ce que deux trièdres sont ainsi égaux dans toutes leurs parties (faces et angles dièdres), il ne s'ensuit pas néanmoins qu'ils puissent être superposés l'un à l'autre : il faut encore que ces parties soient disposées dans le même ordre. Si cette dernière condition n'est pas remplie, les deux trièdres sont *symétriques* l'un de l'autre. On en aura une idée très-nette en se figurant ce que l'un d'eux est par rapport à son image réfléchie dans un miroir.

§ 8. *Des solides terminés par des faces planes ou courbes.*

POLYÈDRES. — On appelle *polyèdre* tout solide terminé par des plans ou des faces planes.

Ces plans sont nécessairement terminés eux-mêmes par des lignes droites qu'on appelle *côtés* ou *arêtes* du polyèdre.

On appelle *tétraèdre* le solide qui a quatre faces et qui est le plus simple des polyèdres; *hexaèdre* celui qui en a six; *octaèdre* celui qui en a huit; *dodécaèdre* celui qui en a douze; *icosaèdre* celui qui en a vingt, etc.

On appelle *polyèdre régulier* celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles solides sont égaux entre eux.

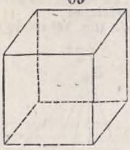
Il n'y a que cinq polyèdres réguliers qui sont :

1° Le tétraèdre régulier dont toutes les faces sont des triangles (fig. 64);

64

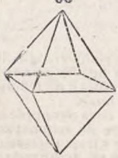
2° L'hexaèdre régulier ou *cube*, dont les faces sont des carrés (fig. 65);

65



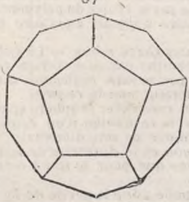
3° L'octaèdre régulier dont les faces sont des triangles (fig. 66);

66



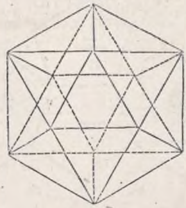
4° Le dodécaèdre régulier dont les faces sont des pentagones (fig. 67);

67



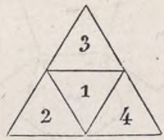
5° L'icosaèdre régulier dont les faces sont des triangles (fig. 68).

68



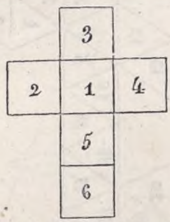
Les figures 69, 70, 71, 72, 73 représentent respectivement les *développements* des surfaces extérieures des polyèdres réguliers dans l'ordre où ils viennent d'être énumérés; c'est-à-dire que si l'on construit en carton mince ou en papier

69



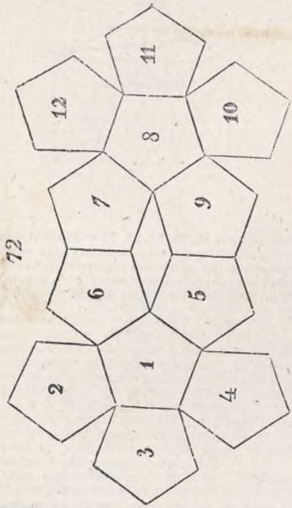
fort des panneaux semblables à ces figures, et qu'on assemble les divers polygones dont ils se composent dans l'ordre indiqué par les chiffres, on formera des solides creux qui représenteront les polyèdres réguliers.

70

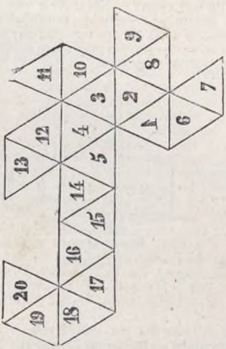


Le *prisme* est un solide compris sous sieurs plans en forme de parallélogrammes, pelés *pans*, terminés de part et d'autre

71



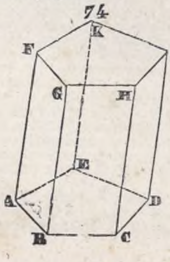
72



73

deux plans polygones égaux et parallèles qui sont les *bases* (fig. 74).

74



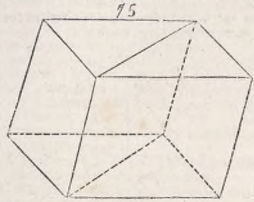
La hauteur du prisme est la perpendiculaire qui mesure la distance des deux bases.

Le prisme est *droit* lorsque les arêtes latérales des pans sont perpendiculaires au plan de la base ; dans tout autre cas il est *oblique*.

Un prisme est *triangulaire, quadrangulaire pentagonal, hexagonal*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc.

Le prisme qui a pour base un parallélogramme, a toutes ses faces parallélogrammiques ; il s'appelle *parallélipipède* (fig. 75).

75

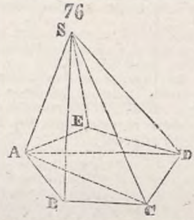


Le parallélipipède est *rectangle* lorsque toutes ses faces sont des rectangles.

Le cube (fig. 65) est un cas particulier du parallélipipède rectangle.

La *pyramide* (fig. 76) est le solide compris

76



entre plusieurs plans triangulaires partant d'un même point S appelé *sommet*, et terminés aux différents côtés d'un même plan polygonal ABCDE appelé *base*.

La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, prolongé s'il est nécessaire.

La pyramide est *triangulaire, quadrangulaire*, etc., selon que la base est un triangle un quadrilatère, etc.

Une pyramide est *régulière*, lorsque la base est un polygone régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base passe par le centre du polygone. Cette perpendiculaire s'appelle alors *axe* de la pyramide.

Les trois corps ronds. — La *sphère* est un solide terminé par une surface courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé *centre*.

On peut considérer la sphère comme engendrée par la révolution d'un demi-cercle qui tourne autour de son diamètre.

Le *rayon* et le *diamètre* de la sphère sont les mêmes que pour le demi-cercle générateur.

On appelle *zône* la partie de la surface de la sphère comprise entre deux plans parallèles qui en sont les *bases*.

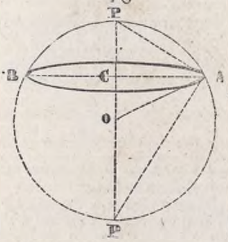
Un des plans peut être tangent à la sphère alors la zône n'a qu'une base, et porte le nom de *calotte sphérique*.

Segment sphérique est la portion du solide de la sphère comprise entre deux plans parallèles qui en sont les *bases* (fig. 77).

77

Un de ces plans peut être tangent à la sphère, et alors le segment sphérique n'a qu'une base (fig. 78).

78



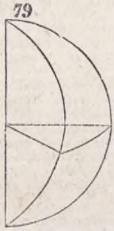
La portion de surface courbe qui entoure un segment sphérique est une zône ou une calotte.

La *hauteur* d'une zône ou d'un segment est la distance des deux plans parallèles qui sont les bases.

Fuseau est la portion de la surface sphérique comprise entre deux positions quelconques du demi-cercle générateur.

On appelle *coin sphérique* ou *onglet sphérique* la partie du solide de la sphère comprise entre deux positions quelconques du demi-cercle générateur, et à laquelle le fuseau sert de base (fig. 79).

79

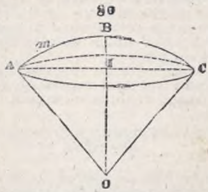


Tandis qu'un demi-cercle, tournant autour de son diamètre, engendre la sphère, tout secteur circulaire AOB (fig. 80) engendre un solide ABCO qu'on appelle *secteur sphérique*.

Le *cylindre droit* (fig. 81) est le solide produit par la révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés qui est l'*axe* ou la *hauteur* du cylindre.

Dans ce mouvement les deux côtés perpendiculaires à l'axe décrivent des plans circulaires égaux qui sont les *bases* du cylindre, et

80



le côté parallèle décrit la *surface convexe*

On peut encore considérer le cylindre comme un prisme droit, dont les bases seraient des

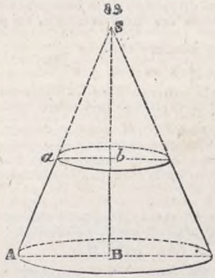
81

polygones d'un nombre infini de côtés ou des cercles.

Le *cylindre oblique* est un prisme oblique dont les bases sont des cercles.

On appelle *cône droit* (fig. 83) le solide produit

83



par la révolution d'un triangle rectangle SBA autour d'un des côtés de l'angle droit SB.

Dans ce mouvement, le côté mobile BA de l'angle droit décrit un plan circulaire qu'on appelle la *base du cône*, et l'hypothénuse SA en décrit la *surface convexe*.

Le point S s'appelle le *sommet du cône*, SB l'*axe* ou la *hauteur*, et SA le *côté* ou l'*apothème*.

On peut encore considérer le cône comme une pyramide dont la base serait un cercle ou polygone d'une infinité de côtés, et dont le sommet se trouverait sur la perpendiculaire élevée par le centre de la base.

Le *cône oblique* est une pyramide oblique dont la base est un cercle.

si l'on retranche, par une section parallele à la base, une partie de ce cône, le solide qui reste au-dessous du plan coupant prend le nom de *cône tronqué* ou *tronc de cône*; ce solide peut être considéré comme engendré par la révolution d'un trapèze rectangulaire ABba autour du côté Bb perpendiculaire aux bases.

Le côté immobile Bb s'appelle l'*axe* ou la *hauteur* du tronc, les cercles *ab* et AB en sont les *bases*, et Aa en est le *côté*.

§ 9. *Evaluation des surfaces et des volumes des corps.*

Le volume d'un parallélipipède ou en général d'un prisme quelconque est équivalent au produit de sa base par sa hauteur; ou, en d'autres termes, si l'on multiplie le rapport de la base à l'unité superficielle ou au carré qui a pour côté l'unité de longueur, par le rapport de la hauteur à cette unité linéaire, le produit exprimera le rapport du solide que l'on considère à l'unité du volume, ou au cube qui a pour côté l'unité de longueur.

Algébriquement cette expression est Bh.

Le volume d'une pyramide quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

En termes algébriques, cette mesure s'exprime ainsi $\frac{1}{3}Bh$.

Le volume d'un tronc de pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de trois surfaces qui sont la base supérieure, la base inférieure et une moyenne proportionnelle géométrique entre ces deux bases.

Algébriquement, cette mesure est

$$\frac{1}{3}h\,(B+\sqrt{Bb}+b).$$

Un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le tiers du produit de sa base par la somme des distances des trois sommets au plan de cette base.

Ou d'une manière abrégée

$$\frac{1}{3}B\,(h+h'+h'').$$

La surface convexe d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de la base par la hauteur, ou à $2\pi rh$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre et égal à 3,1415927.

Le volume d'un cylindre est égal au produit de l'aire de la base par la hauteur, ou à $\pi r^2 h$.

La surface convexe d'un cône est égale à la moitié du produit de la circonférence de la base par le côté, ou à πrl.

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur, ou à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La surface convexe d'un tronc de cône est égale à la moitié du produit du côté par la somme des circonférences des bases, ou à $\pi l\,(r+r')$.

Le volume d'un tronc de cône est égal au tiers du produit de la hauteur par la somme de trois surfaces, qui sont la base supérieure, la base inférieure et une moyenne proportionnelle géométrique entre ces deux bases.

Algébriquement $\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+Rr+r^2)$.

Les résultats relatifs au cylindre, au cône et au tronc de cône, se déduisent de ceux qui sont relatifs à un prisme droit, à une pyramide régulière et à un tronc régulier de pyramide, dans lesquels le nombre des côtés des bases serait infini.

La surface de la sphère est égale au produit du diamètre par la circonférence du cercle générateur, ou à quatre fois la surface de ce cercle, autrement dit à $4\pi r^2=\pi d^2$.

Le volume de la sphère est égal au produit de la surface de la sphère par le tiers du rayon, ou à $\frac{4}{3}\pi r^3$ ou à $\frac{1}{6}\pi d^3$.

La surface d'une zône sphérique quelconque est égale au produit de sa hauteur par la circonférence du cercle générateur de la sphère, ou à $2\pi rh$.

Tout secteur sphérique a pour mesure la zône qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon, ou $\frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Tout segment de sphère compris entre deux plans parallèles a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus le volume de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre, ou autrement

$$\frac{1}{2}\pi h\,(R^2+r^2)+\frac{1}{6}\pi h^3$$
$$=\frac{1}{6}\pi h\,(3R^2+3r^2+h^2)$$

si l'une des bases est nulle, cette expression devient $\frac{1}{6}\pi h\,(3R^2+h^2)$.

Tout polyèdre peut être décomposé en pyramides dont les sommets partent d'un même point placé à l'intérieur de ce polyèdre, et dont les bases sont les différentes faces du polyèdre. Il est donc facile d'évaluer le volume d'un polyèdre quelconque.

Si l'on prend pour sommet commun de toutes les pyramides l'un des sommets du polyèdre lui-même, la base de chacune de ces pyramides sera une des faces du polyèdre; on en obtiendra l'aire immédiatement, et la hauteur se mesurera en posant cette face sur un plan horizontal, et en prenant la distance du sommet commun à ce plan.

Lorsque l'on considère un rectangle dont la hauteur est le diamètre du cercle générateur de la sphère et dont les bases égales au rayon sont tangentes au cercle, pendant que le demi-cercle engendre la sphère, ce rectangle engendre un *cylindre circonscrit* à la sphère.

La surface de la sphère est à la surface totale du cylindre circonscrit (en y comprenant les deux bases), dans le rapport de 2 à 3; les volumes de ces deux corps sont dans le même rapport.

Cette proposition remarquable a été trouvée par Archimède, qui avait demandé qu'elle fût gravée sur son tombeau; et c'est à la vue d'une figure représentant la sphère inscrite au cylindre que Cicéron, alors questeur en Sicile, découvrit le lieu d'inhumation du grand géomètre, que ses ingrats compatriotes avaient oublié moins de deux siècles après sa mort.

§ 10. *Propriétés des figures à la surface de la sphère.*

Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère, ou, en d'autres termes, n'a qu'un point commun avec elle. Toute section de la sphère par un plan est un cercle dont la grandeur dépend de la distance du plan coupant au centre.

On appelle *grands cercles* ceux dont le plan passe par le centre, et *petits cercles* tous les autres. Les grands cercles sont tous égaux entre eux et au cercle générateur.

Trois arcs de grand cercle, qui se coupent à la surface de la sphère, déterminent une figure que l'on appelle *triangle sphérique*.

Il y a dans un triangle sphérique six éléments, les trois côtés ou arcs de cercle à la surface de la sphère, et les trois angles dièdres que font entre eux les plans qui, passant par le centre, ont déterminé ces arcs sur la sphère.

Tout triangle sphérique correspond donc à un trièdre dont le sommet est au centre de la sphère, dont les angles dièdres sont ceux du triangle lui-même, et dont les angles plans ont pour mesure les côtés du triangle.

De même, tout *polygone sphérique* correspond par ses angles aux dièdres d'un angle solide dont le sommet est au centre de la sphère, et dont les angles plans ont pour mesure les côtés du polygone.

Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface de la sphère, est l'arc du grand cercle qui joint les deux points donnés.

Dans tout triangle sphérique, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

La somme des côtés de tout polygone sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

Un diamètre de la sphère, perpendiculaire au plan d'un cercle quelconque, rencontre la surface de la sphère en deux points également éloignés de tous les points de la circonférence de ce cercle, et qui en sont les *pôles*.

Si de chacun des sommets d'un triangle sphérique, comme pôles, on décrit des arcs de grand cercle qui en sont éloignés d'un *quadrant* (quart de circonférence d'un grand cercle), le nouveau triangle formé par l'intersection de ces arcs de cercle est dit *polaire* du premier.

Réciproquement les sommets du second sont les pôles du premier.

Chaque angle d'un de ces triangles a pour mesure la demi-circonférence moins le côté opposé dans l'autre triangle.

On démontre, sur les relations des triangles sphériques entre eux, des propositions tout à fait analogues à celles qui concernent les triangles rectilignes. Seulement, comme les trièdres, les triangles sphériques peuvent être égaux dans toutes leurs parties sans que la superposition soit possible pour cela ; c'est encore une égalité par symétrie. (Col. 144).

Deux triangles situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs parties :

1° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ;

2° Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;

3° Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun ;

4° Lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.

Cette dernière proposition n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, où de l'égalité des angles on ne peut conclure que la proportionnalité des côtés. La différence qui existe à cet égard entre les triangles des deux espèces est due à l'influence du rayon de la sphère. S'il s'agissait de triangles tracés sur des sphères de rayons différents, l'égalité des angles dièdres n'entraînerait que l'égalité des angles plans au centre, et la similitude des arcs interceptés par ceux-ci sur la sphère ; mais sur des sphères égales les triangles ne peuvent être semblables sans être égaux.

La somme des angles de tout triangle sphérique est moindre que six, et plus grande que deux angles droits.

Le rapport de la surface d'un triangle sphérique quelconque à la surface de la sphère est exprimé par la huitième partie de l'excès de la somme des trois angles sur deux angles droits, l'angle droit étant pris pour unité.

Le rapport de la surface d'un polygone sphérique *convexe* (qui n'a pas d'angles rentrants), à la surface de la sphère, est égal à la huitième partie de l'excès de la somme des angles augmentée de 4 sur le double du nombre des côtés du polygone.

Une des conséquences les plus remarquables de cette dernière proposition, c'est que le nombre S des angles solides d'un polyèdre augmenté du nombre F de ses faces est toujours égal au nombre des arêtes A augmenté de 2. On a donc algébriquement

$$S + F = A + 2.$$

§ 11. *De la similitude et des relations des figures dans l'espace.*

Deux *pyramides triangulaires* sont dites *semblables* lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées.

L'existence de ces conditions entraîne la similitude de toutes les autres faces homologues, l'égalité des angles solides homologues, la proportionnalité entre toutes les arêtes homologues, et l'égalité entre les angles dièdres homologues.

Cinq conditions seulement sont nécessaires pour la similitude de deux pyramides triangulaires. Parmi les divers énoncés auxquels peut donner lieu le choix des conditions, on distingue celui-ci .

Deux pyramides triangulaires sont semblables lorsqu'elles ont les côtés homologues proportionnels.

Deux *polyèdres* sont dits *semblables* lorsque ayant des bases semblables , les sommets des angles solides homologues, hors de ces bases, sont déterminés par des pyramides triangulaires semblables chacune à chacune , et semblablement disposées.

De cette définition il résulte que deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables et les angles solides homologues égaux; que les côtés, les diagonales , et généralement les lignes homologues sont dans un rapport constant ; que les deux polyèdres peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune, et semblablement placées.

Les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.

Deux *cônes* ou deux *cylindres* sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles ou par des rectangles semblables.

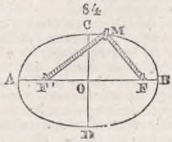
Deux cônes ou deux cylindres semblables sont aussi entre eux comme les cubes des dimensions homologues.

§ 12. *De quelques lignes courbes autres que la circonférence.*

L'ELLIPSE est une ligne courbe (fig. 84) telle que la somme des distances MF, MF′ de chacun de ses points à deux points fixes F et F′ est constante.

Pour décrire l'ellipse d'un mouvement continu, soit sur le terrain , soit sur le papier, on se sert d'un cordeau ou d'un fil FMF′, que l'on tient toujours tendu avec un piquet ou avec un crayon M.

84



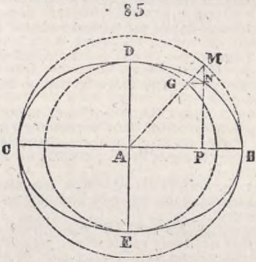
L'ellipse est *symétrique* par rapport à la ligne des foyers FF' et à une droite CD perpendiculaire au milieu de celle-ci. Sa plus grande dimension AB est dans le sens des *foyers* F, F' et porte le nom de *grand axe*; sa plus petite dimension CD est dans le sens perpendiculaire à la ligne des foyers et porte le nom de *petit axe*. Le point O est le *centre* de l'ellipse. OF est *l'excentricité*. FM et F'M sont les *rayons vecteurs*.

La longueur AB du grand axe est égale à la somme constante des deux rayons vecteurs tirés d'un point M de la courbe aux foyers.

Pour décrire l'ellipse au moyen de ses axes, il y a plusieurs moyens.

1° On décrit (fig. 85) deux circonférences

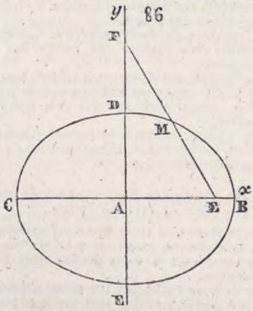
85



concentriques dont les diamètres sont égaux aux axes de l'ellipse. Du centre commun A, on tire le rayon AM, qui coupe la plus petite circonférence en G, et on mène GN parallèle à AB jusqu'à la rencontre de MP perpendiculaire à AB. Le point N appartient à l'ellipse. On peut donc ainsi obtenir par ce moyen autant de points de la courbe que l'on veut.

2° On trace deux axes à angle droit, Ax, Ay (fig. 86) et on fait mouvoir dans l'angle droit

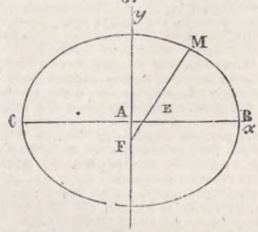
86



yAx une règle ou tige droite FE, dont la longueur est égale à la demi-somme des axes, et sur laquelle on a pris FM égal à la moitié du grand axe. Le point M, dans toutes les positions de la ligne FE, restera constamment sur l'ellipse.

3° On trace encore deux lignes à angle droit Ax, Ay (fig. 87) comme ci-dessus, et on assu-

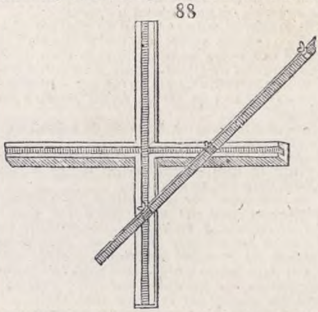
87



jettit la règle FEM, dont la longueur est égale à la moitié du grand axe et sur laquelle on a pris ME égal à la moitié du petit axe, à se mouvoir de telle sorte que le point F soit toujours sur le prolongement de la droite yA, et le point E sur la droite Ax. Le point M sera toujours sur l'ellipse,

Il est facile de voir qu'un instrument tel que le représente la fig. 88 peut servir à tracer

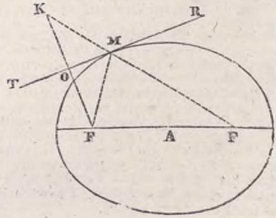
88



l'ellipse d'un mouvement continu, en donnant une position convenable au *tracelet* et aux arrêts qui peuvent glisser dans les deux rainures rectangulaires.

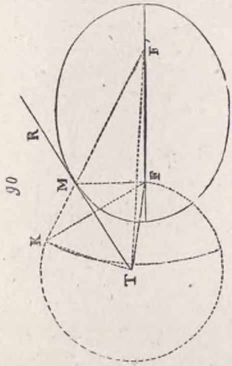
Pour mener une tangente à l'ellipse par un point donné M sur la courbe (fig. 89), on tire

89



les rayons vecteurs MF, MF′; on prolonge le second d'une quantité MK égale au premier, et on mène RMT perpendiculaire à la droite FK; c'est la tangente demandée.

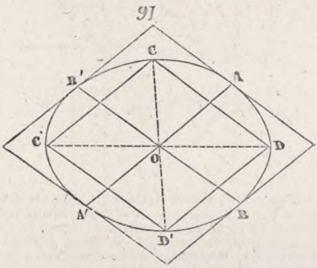
Si le point T (fig. 90) par lequel on doit me-



ner la tangente est hors de la courbe, on détermine d'abord le point K par l'intersection de deux arcs de cercle décrits l'un du point T comme centre avec le rayon TF, l'autre du point F′ comme centre avec un rayon égal au grand axe. On joint ensuite F′K, et le point M est placé sur cette dernière ligne, à la rencontre de la droite TM perpendiculaire à FK.

On appelle *diamètre* toute droite AA′, BB′, qui passe par le centre.

Deux diamètres tels que AA′ et BB′ (fig. 91)



sont dits *conjugués* l'un de l'autre lorsque chacun d'eux est parallèle à la tangente menée à l'extrémité de l'autre.

Dans ce cas aussi ils sont tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les *cordes* CD, CC′ parallèles à l'autre.

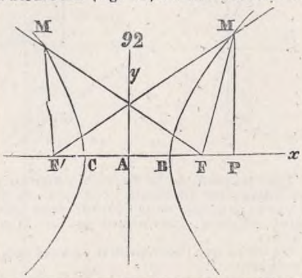
Si d'un même point C pris sur l'ellipse, on mène deux cordes CC′, CD, respectivement parallèles aux diamètres conjugués AA′, BB′, ces deux cordes sont dites *supplémentaires* l'une de l'autre; elles passent par les extrémités d'un nouveau diamètre DC′.

Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle construit sur les axes.

La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des deux axes.

L'aire de l'ellipse entière est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les deux demi-axes de l'ellipse : ou d'une manière abrégée à $\pi\ a\ b$.

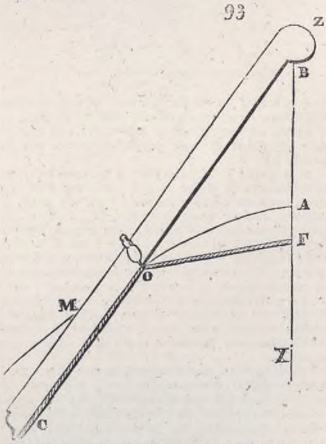
L'HYPERBOLE (fig. 92) est une courbe telle



que la différence des distances MF, MF′ de chacun de ses points a deux points fixes appelés *foyers* est constante et égale à *l'axe transverse* BC.

Cette courbe se compose de deux branches indéfinies symétriquement disposées par rapport aux deux axes Ax, Ay.

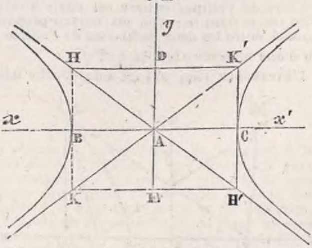
On peut la décrire d'un mouvement continu à l'aide d'une règle mobile autour d'une charnière, d'un fil tendu et d'un style (fig. 93).



On peut aussi la décrire par points que déterminent des intersections d'arcs de cercle.

Si l'on détermine entre les deux axes Ax, Ay de l'hyperbole (fig. 94) deux droites inclinées HH′, KK′, de telle sorte que AH et AK′ hypothénuse des triangles rectangles ABH, ACK′ soient égales à la distance du centre A au foyer, ces deux droites inclinées prennent le nom d'*asymptotes*

94

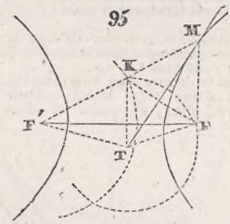


Elles jouissent de la propriété remarquable de s'approcher indéfiniment de plus en plus des deux branches de la courbe, dans quatre sens différents, sans jamais pouvoir la rencontrer.

DE est ce que l'on appelle le *second axe* de l'hyperbole.

Pour mener une tangente à l'hyperbole par un point M (fig. 95) donné sur la courbe, il

95



faut diviser en deux parties égales l'angle FMF' des *rayons vecteurs* FM, F'M, ou, en d'autres termes, prendre MK = MF, et abaisser du point M une perpendiculaire sur la droite KF.

Si le point T est extérieur à la courbe, on déterminera le point K par l'intersection de deux arcs de cercle, décrits, l'un du point T comme centre avec le rayon TF, l'autre du point F' comme centre avec un rayon égal à l'axe transverse.

La tangente TM est perpendiculaire à KF et le point de contact M est sur cette tangente, à la rencontre de la droite F'K prolongée.

Les propriétés de l'hyperbole relatives aux diamètres conjugués et aux cordes supplémentaires sont tout à fait analogues à celles de l'ellipse. La dernière seule doit être ainsi modifiée :

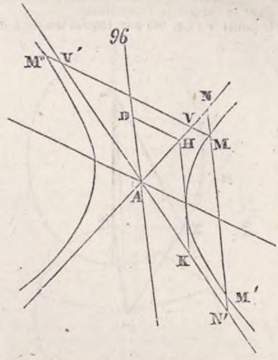
La différence des carrés faits sur deux diamètres conjugués quelconques, est égale à la différence des carrés construits sur les axes.

Les asymptotes de l'hyperbole coïncident avec les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques.

L'aire du parallélogramme formé par les asymptotes de l'hyperbole et par les parallèles menées à ces lignes, d'un point quelconque de la courbe, est constante et égale à la huitième partie du rectangle des axes, ou du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.

Il est facile de construire l'hyperbole par points lorsque l'on connaît les asymptotes, et un seul point M de la courbe (fig. 96). Car en

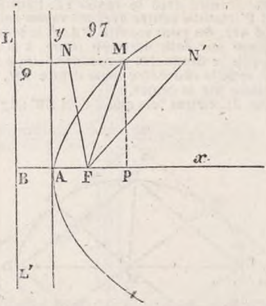
96



menant par le point M une droite quelconque NN', il suffira de prendre N'M' = NM. Le point M' appartiendra à la courbe. On prendra de même M''V' = MV, et on répétera cette construction sur autant de points que l'on voudra.

La PARABOLE (fig. 97) est une courbe dont

97



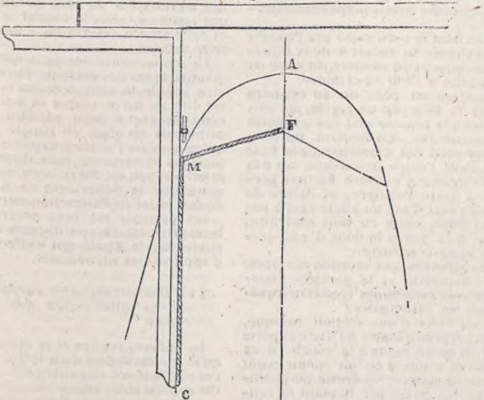
tous les points M sont également distants d'un point fixe F, appelé *foyer*, et d'une droite immobile LL' appelée *directrice*.

La courbe se compose de deux branches infinies qui s'étendent symétriquement au-dessus et au-dessous de l'*axe* A*x*, perpendiculaire à la directrice et passant par le foyer. Le point A est le *sommet*.

Le sommet est placé au milieu de la distance du foyer à la directrice, distance dont le double porte le nom de *paramètre*.

De la définition même de la courbe résulte un moyen de la décrire d'un mouvement continu, ainsi que le représente la figure 98. F MC est un fil dont une extrémité a été fixée contre une des branches d'une équerre et dont la longueur est la même que celle de cette branche. En maintenant constamment avec un style le fil appliqué contre l'équerre, qui peut glisser le long d'une règle, le point d'application M sera toujours à la même distance de la règle et du foyer F, et le style décrira la parabole.

98

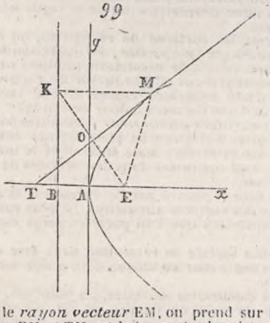


On peut encore décrire la parabole par points de différentes manières.

La parabole peut être considérée comme une ellipse dont le grand axe est infini.

Pour mener une tangente à la parabole par un point M donné sur la courbe (fig. 99), on

99



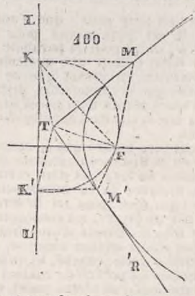
tire le *rayon vecteur* EM, on prend sur l'axe ET = EM et TM est la tangente cherchée.

Si le point T (fig. 100) par lequel la tangente doit être menée est hors de la courbe, on détermine sur la directrice LL' le point K tel que TK = TF. La tangente TM est perpendiculaire à FK, et le point de contact M est à la rencontre de cette tangente et d'une parallèle à l'axe.

Si l'on mène dans la parabole une suite de *cordes* parallèles à la même direction, les milieux de toutes ces cordes sont sur une même ligne droite ou *diamètre* parallèle à l'axe. La tangente à l'extrémité du diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en parties égales.

La parabole est *carrable*, c'est-à-dire que l'on peut déterminer à l'aide de la règle et du compas un espace plan dont la superficie soit égale à celle d'un segment parabolique quelconque. Si l'on considère en particulier le segment compris entre la courbe, un de ses

100



diamètres et une demi-corde *conjuguée* de ce diamètre, on arrive à ce résultat remarquable que l'aire du segment est égale aux deux tiers du parallélogramme de même base et de même hauteur.

SECTIONS DU CÔNE ET DU CYLINDRE. — Les trois courbes précédentes sont connues sous le nom générique de *sections coniques*. Elles peuvent en effet être obtenues par l'intersection d'un cône avec un plan.

Lorsque le plan coupe l'axe du cône entre le sommet et la base, la section est une ellipse.

Un plan parallèle à l'une des *génératrices* du cône, c'est-à-dire à l'une des positions de l'hypothénuse du triangle rectangle générateur, détermine une parabole.

Enfin l'hyperbole est produite par l'intersection du cône avec un plan qui coupe l'axe de ce cône au delà de la base et du sommet.

La seconde partie de l'hyperbole s'obtient par le même plan coupant, en prolongeant toutes les génératrices du cône au delà du sommet, de manière à avoir une seconde surface conique égale à la première.

Le cercle lui-même, qui n'est qu'un cas

particulier de l'ellipse, s'obtient en coupant le cône ou le cylindre droits perpendiculairement à l'axe.

Toute section dont le plan passe par l'axe du cône ou du cylindre se réduit à deux lignes droites qui se coupent au sommet du cône ou qui sont parallèles à l'axe du cylindre.

Si l'on considère un cône ou un cylindre obliques dont la base est un cercle, les sections parallèles à la base ne sont pas les seules qui soient circulaires. En menant un plan par l'axe et par celui des diamètres de la base qui fait avec l'axe l'angle maximum, on a la *section méridienne ;* et toute section perpendiculaire à cette dernière, et menée de manière à faire avec l'axe un angle égal à celui que fait la base, mais en sens contraire, est un cercle. Elle porte le nom d'*anti-parallèle* ou de *sous-contraire.*

PROPRIÉTÉS COMMUNES AUX SECTIONS CONIQUES. — L'ellipse, l'hyperbole et la parabole jouissent de propriétés communes très-remarquables dont voici les principales :

1° Si, par un foyer d'une section conique, on élève une perpendiculaire à l'axe qui passe par ce foyer, et qu'on mène à la courbe deux tangentes qui se coupent en un même point de la direction de cet axe ; la droite perpendiculaire à l'axe qui passe par le point de rencontre des deux tangentes, est telle que le rapport entre le rayon vecteur mené d'un point quelconque de la courbe au foyer, et la distance de ce point à la droite, est constant.

Ce rapport est plus petit que l'unité pour l'ellipse ; il est plus grand pour l'hyperbole ; égal à l'unité pour la parabole.

On peut donc définir une quelconque des sections coniques en disant que ce sont des courbes telles que le rapport des distances de chacun de leurs points à un point fixe, appelé *foyer*, et à une droite fixe, appelée *directrice*, est constant.

2° On peut dire encore que la somme ou la différence de la distance de chacun des points de ces courbes au foyer, et d'un certain multiple de la distance de ce même point à une droite fixe (qui n'est plus ici la directrice et qui passe par un foyer), est constante.

3° Si de tous les points d'une droite située dans le plan d'une section conique, on mène des tangentes à cette courbe, et qu'on joigne par des droites les points de contact des deux tangentes menées d'un même point, toutes les *cordes de contact* se couperont en un point unique, appelé *pôle* de la droite, sur le diamètre qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à la droite donnée. Celle-ci porte le nom de *polaire* du point par rapport à la section conique donnée.

Et réciproquement, si, d'un point situé dans le plan d'une section conique, on mène un nombre quelconque de sécantes, puis des tangentes à la courbe par les points où ces sécantes la coupent, les tangentes qui se rapportent à la même sécante iront concourir en un point d'une droite parallèle à la direction des cordes que divise en deux parties égales le diamètre passant par le point donné.

4° Si l'on imagine, dans l'intérieur d'un cône droit, prolongé s'il est nécessaire, deux sphères qui soient tangentes à la fois à la surface du cône et à un plan sécant qui y détermine une ellipse ou une hyperbole, les points de contact de ces sphères avec le plan sécant sont les foyers de la courbe et les plans déterminés par les courbes de contact de la sphère et du cône coupent le plan de la courbe suivant les directrices.

Dans le cas de la parabole, on ne peut mener à l'intérieur du cône qu'une seule sphère qui touche à la fois le cône et le plan coupant ; et cette sphère détermine le foyer et la directrice unique.

La connaissance des principales propriétés géométriques des sections coniques, et peut-être même la considération de ces courbes, est due au divin Platon et à son école. Cette connaissance a paru pendant près de deux mille ans un objet de simple curiosité, jusqu'au jour où l'illustre Kepler a trouvé que les planètes se meuvent dans des ellipses dont le soleil occupe un foyer. Peu après Newton a généralisé la découverte de Kepler, et en a déduit la loi de l'attraction universelle.

Cet exemple est bien propre à confondre les esprits superficiels disposés à mépriser des études scientifiques qui n'offrent pas encore d'applications immédiates.

§ 13. *Des principales surfaces courbes autres que celles des trois corps ronds.*

La sphère, le cône et le cylindre droits, tels qu'ils ont été définis dans le § 8, ne sont que des cas particuliers des *surfaces de révolution.* On appelle ainsi toutes celles qui sont décrites par le mouvement d'une ligne autour d'un *axe* fixe.

Tout plan qui passe par l'axe porte le nom de *plan méridien.*

On peut encore considérer les surfaces de révolution comme produites par le mouvement d'une circonférence, dont le centre reste sur l'axe, et dont le rayon varie de manière que son extrémité passe toujours par un point de la ligne génératrice ou de la ligne méridienne.

Parmi les surfaces de révolution, on distingue encore l'*ellipsoïde*, l'*hyperboloïde* et le *paraboloïde* de révolution, produits par le mouvement d'une ellipse autour de son grand axe, d'une hyperbole autour de son second axe, et d'une parabole autour de son axe.

Les *surfaces annulaires*, produites par la révolution d'une courbe plane fermée autour d'un axe extérieur, mais situé dans le même plan, sont comprises dans les surfaces de révolution.

Le *tore* engendré par le cercle est la plus usitée des surfaces annulaires. La plus simple des *alliances* que l'on porte au doigt est un tore.

Toute surface de révolution peut être exécutée sur le tour au moyen d'un guide convenable.

Les cloches, les sonnettes, les tonneaux, une foule de vases de faïence et de porcelaine sont terminés par des surfaces de révolution.

Le cylindre droit ou oblique n'est encore qu'un cas particulier des *surfaces cylindriques*, que l'on peut considérer comme engendrées par une droite mobile qui reste parallèle à une direction donnée en glissant sur une *directrice* fixe.

Le cône droit ou oblique n'est aussi qu'un cas particulier des *surfaces coniques* produites par le mouvement d'une droite qui, passant toujours par un point fixe, s'appuie constamment sur une *directrice* donnée.

Les *surfaces conoïdes* sont engendrées par une droite mobile assujettie à rester parallèle à un plan donné et à s'appuyer constamment sur une droite fixe et sur une courbe quelconque.

On donne le nom générique de *surfaces réglées* à celles sur lesquelles on peut appliquer une règle en certains sens. Toute surface engendrée par des lignes droites est donc réglée.

Une surface réglée est *développable* lorsque deux éléments rectilignes infiniment voisins peuvent être considérés comme dans le même plan, et que la surface entière peut être déroulée sur un plan.

Une surface réglée est *gauche* dans le cas contraire.

Les surfaces cylindriques et coniques sont toujours développables; les surfaces conoïdes sont généralement gauches. La surface engendrée par une droite qui glisse sur deux directrices quelconques en restant constamment parallèle à un plan fixe est gauche. Il en est de même de la surface engendrée par une droite assujettie à se mouvoir sur trois directrices quelconques.

Pour concevoir ce dernier mode de génération, il faut se figurer qu'un point quelconque d'une des directrices soit pris pour sommet de deux surfaces coniques déterminées par ce sommet et par les autres directrices; l'intersection de ces deux surfaces sera une ligne droite qui s'appuiera nécessairement sur ces deux directrices. En répétant cette construction pour un point quelconque de la première directrice, on aura donc la position correspondante d'une génératrice qui s'appuiera constamment sur les trois directrices.

Les ailes des moulins à vent offrent à peu de choses près l'exemple de surfaces gauches à trois directrices droites.

Les versoirs ou oreilles des charrues sont des surfaces gauches analogues à celles des moulins à vent.

Les *surfaces enveloppes* présentent le mode le plus général de génération des surfaces. Si l'on suppose une surface quelconque qui se meut dans l'espace en variant de grandeur et de position, suivant des lois déterminées, la surface qui serait la trace de toutes ces positions consécutives portera le nom de surface enveloppe.

Le tore, par exemple, est l'enveloppe de toutes les positions que prend une sphère à rayon constant, dont le centre se meut sur une circonférence de cercle.

Le cône est l'enveloppe de toutes les positions que prend une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite, et dont le rayon est dans un rapport constant avec la distance du centre à un point fixe pris sur cette droite.

§ 14. *Eléments de géométrie descriptive.*

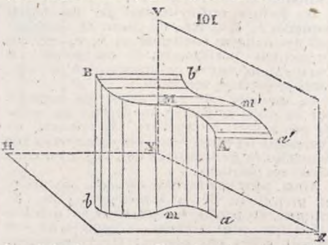
Méthode des projections. Monge a donné le nom de *géométrie descriptive* à des méthodes qu'il a, sinon créées, au moins réunies en un corps de doctrines et singulièrement perfectionnées, et qui ont pour but soit de représenter toutes les formes extérieures des corps, soit de résoudre sur les figures considérées dans l'espace, à l'aide de constructions effectuées seulement sur un plan, tous les problèmes qui peuvent se présenter.

Pour parvenir à ce double but, et d'abord pour représenter les corps, la géométrie descriptive emploie la *méthode des projections*.

On appelle *projection d'un point* sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

La *projection d'une droite* A est la droite tirée sur le *plan de projection* par les projections de deux points de A. C'est l'intersection du *plan projetant* mené par la droite A perpendiculairement au plan de projection.

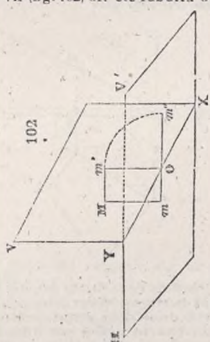
Généralement la projection d'une courbe quelconque AMB (fig. 101) est la suite *amb*



des pieds des perpendiculaires A*a*, M*m*, B*b*, abaissées des divers points de cette courbe sur un plan fixe XH. L'ensemble de ces perpendiculaires compose une surface cylindrique dans le sens général de ce mot, et cette surface prend le nom de *cylindre projetant* de la courbe AMB.

Si l'on projette la courbe AMB sur un second plan VX, perpendiculaire au premier HX l'ensemble des deux projections *amb*, *a'm'b'* détermine complètement la courbe AMB dans l'espace. Car cette courbe est l'intersection des deux surfaces cylindriques droites qui ont pour directrices les projections *amb*, *a'm'b'* et pour génératrices des droites respectivement perpendiculaires aux plans de ces projections.

Pour que les constructions relatives aux lignes dans l'espace puissent s'effectuer sur un même plan, il suffit d'imaginer que le plan vertical VX (fig. 102) ait été rabattu de gauche



à droite sur le plan horizontal HX, en tournant autour de leur intersection commune XY comme charnière. Alors tous les points *m'* du plan vertical ont décrit des arcs de cercle *m'm''*, et les constructions graphiques peuvent être effectuées sur une même feuille de papier V'XH qui prend le nom d'*épure*. Mais ce rabattement n'est admis que comme moyen d'exécution; et toutes les fois qu'on veut se rendre compte d'une opération par des constructions géométriques, on doit, par la pensée, relever le plan vertical, et se le figurer toujours dans une situation perpendiculaire au plan horizontal.

Les projections *m* et *m''* d'un même point M de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, après le rabattement.

On désigne ordinairement par des lettres capitales A, B, C, etc., les points de l'espace ; par des italiques analogues *a*, *b*, *c*, etc., les projections horizontales de ces points, et par des italiques avec des accents *a'*, *b'*, *c'*, etc., leurs projections verticales.

La manière de représenter les surfaces sur les plans de projection dépend du mode de génération des surfaces. En général, on représente les projections des *directrices* sur lesquelles la *génératrice* doit s'appuyer dans toutes ses positions.

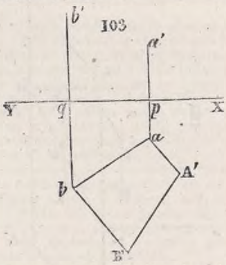
Ainsi, pour une surface conique, on prend les projections de la directrice, celles du sommet, et parmi les positions en nombre infini que peut occuper la génératrice on choisit celles qui peuvent être considérées comme les limites de toutes les autres.

On opère de même pour une surface cylindrique.

Pour une surface de révolution, on prend ordinairement les projections de l'axe et celles de la génératrice ou celles de la courbe méridienne. On peut encore prendre pour directrice une de ces deux courbes, et pour génératrice un cercle à rayon variable dont le centre est assujetti à se mouvoir sur l'axe donné.

Il résulte des divers modes de représentation des corps, que la projection d'un objet n'est autre chose qu'une *vue* de cet objet prise d'un point infiniment éloigné en avant du plan de projection.

QUESTIONS DIVERSES SUR LES LIGNES DROITES ET LES PLANS. — *Problème I.* Trouver la véritable distance de deux points A et B déterminés dans l'espace par leurs projections (*a*, *a'*) et (*b*, *b'*)? (fig. 103).



103

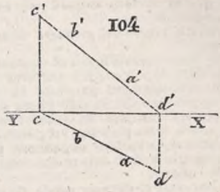
Aux extrémités de la droite *ab*, qui joint les projections horizontales des deux points, élevez sur cette droite deux perpendiculaires *a*A', *b*B' respectivement égales aux distances *a'p*, *b'q* des points *a'* et *b'* à la ligne de terre; A'B' sera la distance demandée, ou la véritable longueur de la droite dont les projections sont *ab*, *a'b'*.

Lorsqu'une droite est parallèle à l'un des deux plans de projection, sa projection sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre.

Lorsqu'une droite est située dans l'un des deux plans de projection, elle est sa projection à elle-même, dans ce plan, et l'autre projection se confond avec la ligne de terre.

Lorsqu'une droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et par conséquent aux deux plans de projection, ses deux projections se confondent en une seule et même droite perpendiculaire à la ligne de terre ; et pour la déterminer il faut connaître soit sa projection sur un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers, soit ses *traces*, c'est-à-dire les points où elle rencontre ces deux plans.

Problème II. Etant données (fig. 104) les

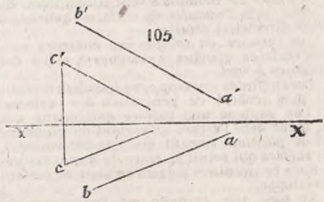


104

projections *ab*, *a'b'* d'une droite, trouver les traces de cette droite?

Prolongez *ab* jusqu'à la ligne de terre XY en *c*, le point *c'* où la perpendiculaire *cc'* à la ligne de terre coupe la droite *a'b'* est la trace cherchée sur le plan vertical. On obtient de même le point *d* où la droite située dans l'espace rencontre le plan horizontal.

Problème III. Etant données les projections *ab*, *a'b'* d'une droite et celles d'un point (*cc'*) (fig. 105) trouver les projections d'une droite

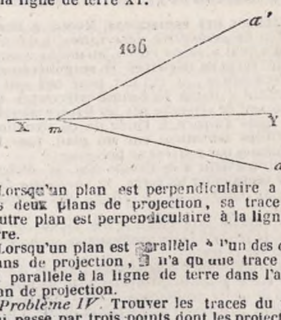


105

parallèle a la droite donnée et passant par le point donné?

Ces projections sont respectivement parallèles aux projections données, et passent par les points *c* et *c'*.

On représente un plan par ses *traces*, c'est-à-dire par ses intersections avec les plans de projection. Les traces *ma'*, *ma* d'un plan (fig. 106) se coupent évidemment en un point de la ligne de terre XY.



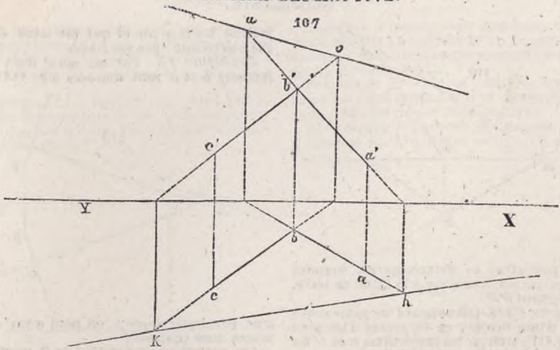
106

Lorsqu'un plan est perpendiculaire a l'un des deux plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

Lorsqu'un plan est parallèle à l'un des deux plans de projection, il n'a qu'une trace qui est parallele à la ligne de terre dans l'autre plan de projection.

Problème IV. Trouver les traces du plan qui passe par trois points dont les projections (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), (*c*, *c'*) sont données? (fig. 107).

107



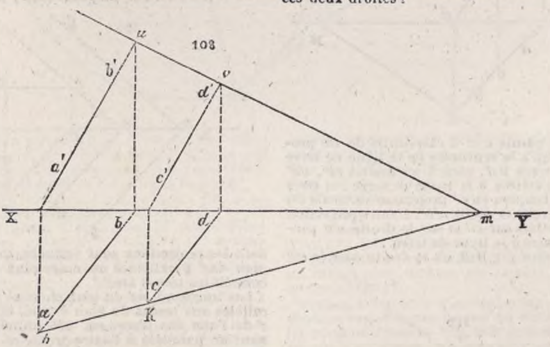
Cherchez les points u et h, v et k, où les droites $(ab, a'b')$ et $(bc, b'c')$ rencontrent les plans de projection. Les traces du plan cherché seront vu, hk, et iront concourir en un même point de la ligne de terre XY.

Outre cette vérification des constructions, il y en a deux autres fondées sur ce que la droite $(ac, a'c')$ doit rencontrer les plans de projection sur les traces déjà déterminées pour le plan cherché.

Le problème précédent revient encore à trouver les traces d'un plan qui passe par deux droites qui se coupent.

Problème V. Etant données les projections $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ de deux droites parallèles (fig. 108), trouver les traces du plan mené par ces deux droites ?

108



Les traces uv, hk du plan passent respectivement par les traces verticales u et v, et par les traces horizontales h et k des droites données.

La construction précédente s'appliquerait encore au problème suivant : trouver les traces d'un plan mené par un point et par une droite dont on connaît les projections.

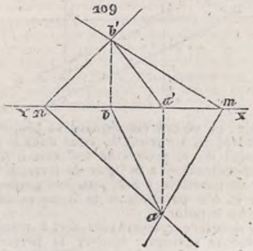
Car il suffirait de mener par les projections du point des parallèles aux projections de la droite, et d'achever comme ci-dessus.

Problème VI. Etant donnees les traces amb', anb' de deux plans (fig. 109), trouver les projections de leur intersection ?

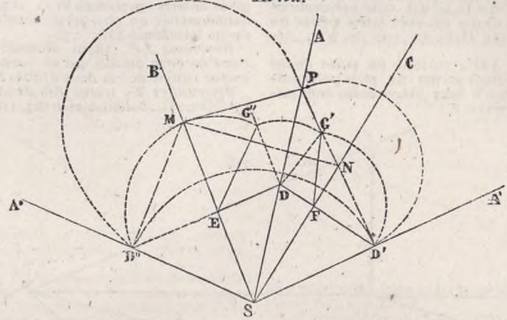
Abaissez des points a et b' des perpendiculaires aa' et $b'b$ à la ligne de terre : ab et $a'b'$ seront les projections demandées.

Problème VII. Etant donnée la projection horizontale ab d'une droite contenue dans un plan, ainsi que les traces de ce plan $a'mb$ trouver la projection verticale $a'b'$ de la droite? (fig. 110).

109

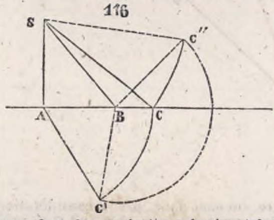


115.*bis*.



ticale SA, et de plus l'angle α que ces deux rayons visuels font entre eux; on demande la valeur de la projection horizontale de l'angle

116



α, que font les projections horizontales des rayons visuels.

Il s'agit évidemment de construire l'angle dièdre formé par les plans verticaux menés suivant les deux rayons visuels.

Faisons BSC'' $= \alpha$, prenons SC'' $=$ SC, puis déterminons le point C' par l'intersection de deux arcs de cercle, tels que BC' $=$ BC'' et AC' $=$ AC. L'angle CAC' sera l'angle demandé.

2° Etant données deux faces A'SC, CSB d'un trièdre (fig 115 *bis*), et l'angle dièdre compris, trouver les autres parties?

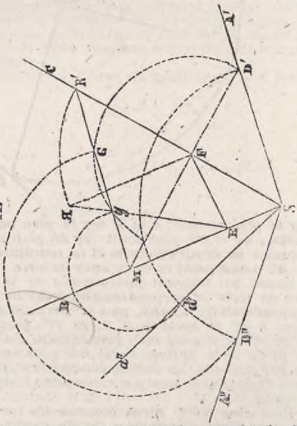
Avec le rayon arbitraire SD' décrivez du centre S un arc de cercle indéfini. Abaissez une perpendiculaire indéfinie D'FD sur SC, faites l'angle DFG' égal à l'angle dièdre donné, prenez FG' $=$ FD', abaissez G'D perpendiculaire sur D'D et DD'' perpendiculaire sur SB. La rencontre de cette droite avec l'arc D'D'' détermine le point D'', et par suite la face BSA''.

Les trois faces connues, on achèvera les constructions de la figure 115 *bis* pour trouver les deux autres angles dièdres.

3° Etant données deux faces A'SC, CSB (fig. 117) d'un angle solide et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver les autres parties?

D'un point D' pris arbitrairement sur SA', abaissez D'F perpendiculaire sur SC; du point F conduisez ensuite FE perpendiculaire et FR parallèle à SB. Faites l'angle FER égal à l'angle dièdre donné, prenez FR' $=$ FR, tirez MR' qui est coupé en G et *g* par l'arc décrit du point F comme centre avec le rayon FD'. Le rabattement SD''A'' ou S*d''a''* de la troisième face sera donné par le point D'' ou *d''* qui est à l'intersection de l'arc décrit du point S comme

117



centre avec le rayon SD' et des arcs décrits du point M comme centre avec les rayons M*g*, MG.

On voit que le problème peut admettre deux solutions.

Plans tangents aux surfaces. — Un plan est dit *tangent* à une surface en un point donné lorsqu'il contient les tangentes à toutes les courbes que l'on tracerait sur cette surface par le point en question.

Pour déterminer ce plan, il suffit de trouver les tangentes à deux courbes passant par le point de contact sur la surface.

Quand on projette sur un plan une courbe et sa tangente, les projections de ces deux lignes sont elles-mêmes tangentes l'une à l'autre.

Le *contour apparent* d'une surface projetée sur un des deux plans de projection s'obtient en cherchant les points de contact de tous les plans tangents qui sont perpendiculaires à l'autre plan de projection.

Le plan tangent à une surface cylindrique ou conique contient la génératrice rectiligne qui passe par le point de contact. Il contient en outre la tangente à la courbe que l'on obtient en coupant la surface par un plan parallèle au plan de la directrice. Il est donc facile de trouver les projections des deux droites qui déterminent les plans tangents aux surfaces cylindriques et coniques.

Dans toute surface de révolution, le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact; et la *normale* ou droite menée perpendiculairement au plan tangent par le point de contact va rencontrer l'axe, en un point qui ne varie pas pour un même *parallèle* (section perpendiculaire à l'axe.)

Intersections des surfaces. — Supposons que l'on coupe une surface dont la loi de génération est connue, par un plan horizontal, et que l'on construise un certain nombre de positions de la génératrice en projections horizontales et verticales. Les points où chacune de ces dernières sera rencontrée par la parallèle à la ligne de terre qui est la trace unique du plan coupant fournira un point de la projection verticale de l'intersection de la surface donnée avec le plan, et en rapportant ces points sur les projections horizontales de la génératrice on en déduira la projection horizontale de l'intersection cherchée.

Lorsque l'on veut avoir l'intersection de deux surfaces quelconques, si on les coupe par une suite de plans horizontaux, et que l'on construise leurs intersections par chacune de ces tranches horizontales, les points communs à ces intersections serviront à déterminer, en projection horizontale d'abord et ensuite en projection verticale, la forme de la courbe suivant laquelle se pénètrent les deux surfaces.

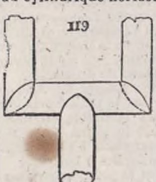
Cette méthode est générale et suffisante pour tous les cas. Mais on peut donner aux plans sécants telle direction que l'on veut, pourvu que l'on sache construire facilement les courbes auxiliaires déterminées par les intersections de ces plans avec la surface.

L'intersection cherchée est déterminée lorsque l'on a construit ses deux projections; mais si cette ligne est plane, il faut, en outre, en exécuter le *rabattement* sur un des plans de projection. Lorsque l'une des deux surfaces proposées est développable, il faut aussi effectuer le développement de cette surface, et y construire la *transformée* de l'intersection.

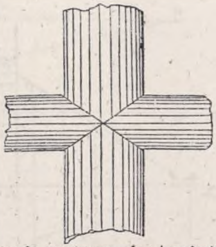
Quant à la tangente en un point de l'intersection commune des deux surfaces, elle est déterminée par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces; elle est perpendiculaire au plan des deux normales à ces surfaces.

Les figures 119, 120 et 121 représentent divers exemples de pénétrations et d'intersections mutuelles de surfaces cylindriques. — La première représente en *élévation* (projection verticale) l'emboîtement de tuyaux verticaux dans un tuyau cylindrique horizontal.

119

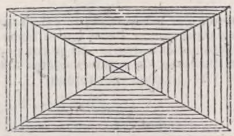


120



La seconde montre en *plan* (projection horizontale) l'intersection de deux *berceaux cylindriques* qui se coupent suivant une *voûte d'arêtes*.

121



La troisième montre en plan l'intersection de deux berceaux cylindriques qui déterminent une *voûte en arc de cloître*. Cette dernière ne diffère de la voûte d'arêtes qu'en ce que l'on conserve dans l'une les portions de berceau supprimées dans l'autre, et réciproquement.

La figure 122 représente le développement de la courbe que l'on obtient en coupant un cylindre droit à base circulaire par un plan *cmc'* incliné à cette base. La droite AB a pour longueur la circonférence de la base du cylindre, et est divisée en autant de parties égales que cette circonférence.

La figure 123 représente aussi le développement de la courbe que l'on obtient en coupant obliquement par un plan *bmb'* un cône droit à base circulaire. Il est facile de comprendre la construction à l'aide de laquelle on détermine chacun des points F' du développement de la courbe.

Principes de perspective. — La *perspective linéaire* a pour but de représenter sur un plan unique les contours apparents des objets.

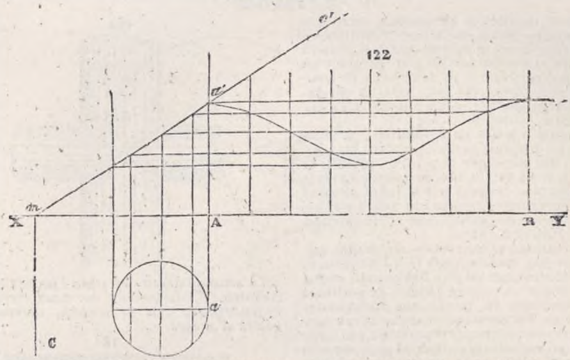
Pour arriver à ce but, on imagine que les rayons lumineux qui partent de tous les points de ces contours et qui se dirigent en ligne droite vers l'œil, soient coupés par un plan que l'on appelle *tableau*; les *traces* de tous ces rayons sur le tableau seront les perspectives des points correspondants des objets.

Si donc on connaît les projections horizontale et verticale d'un *rayon visuel*, on pourra, par les méthodes de la géométrie descriptive, trouver le point où il coupe le plan du tableau. Cette dernière branche de la géométrie contient donc implicitement la théorie et la pratique de la perspective linéaire.

On prend ordinairement le plan du tableau vertical, et on trace sur le plan horizontal les projections des figures dont les reliefs ou les hauteurs verticales sont censées connues.

On appelle *point de vue* ou *point principal* le pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil du spectateur sur le plan du tableau; *ligne d'horizon* une parallèle à la ligne de

122



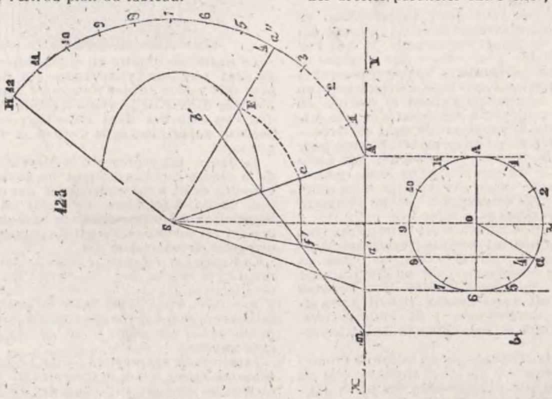
terre menée par le point principal; *points de distance* deux points situés sur la ligne d'horizon à gauche et à droite du point principal et à des distances de celui-ci égales à la distance de l'œil au plan du tableau.

Toute ligne droite reste droite en perspective.

Toute droite parallèle au plan du tableau reste parallèle à elle-même en perspective.

Les droites parallèles entre elles, mais qui

123



ne sont pas parallèles au plan du tableau, concourent en perspective; et pour obtenir leur *point de fuite* ou *de concours* il faut, par l'œil du spectateur, mener une droite parallèle aux premières et la prolonger jusqu'à la rencontre du plan du tableau.

Pour achever de déterminer une droite dont on a le point de concours, il suffit de trouver le point où elle perce le plan du tableau.

Toute droite qui passe par le pied du spectateur, ou, en d'autres termes, par la projection horizontale de l'œil de celui-ci, est verticale en perspective.

Si une droite est perpendiculaire au plan du tableau, sa perspective passe par le point principal.

Si une horizontale fait avec le plan du tableau un angle de 45°, sa perspective passe par l'un des deux points de distance.

Soit proposé de mettre en perspective un point M situé sur le plan horizontal de projection (fig. 124).

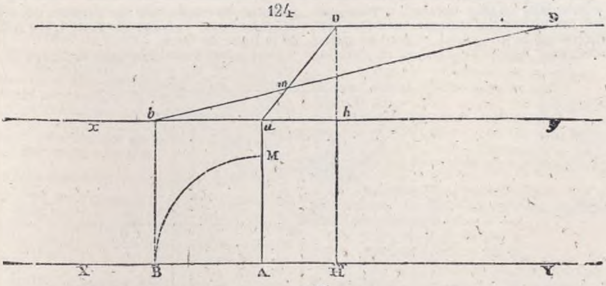
Commençons par remarquer que, si le plan du tableau était rabattu sur le plan horizontal en tournant autour de la ligne de terre XY, comme les objets dont nous voulons avoir la perspective sont en arrière du plan du tableau, le dessin de la perspective tomberait au milieu des projections horizontales. Pour éviter cet inconvénient, on suppose que la ligne de terre a été reculée parallèlement à elle-même en xy, avant que le rabattement soit opéré.

Cela posé, la perspective m du point M sera à l'intersection de la droite Oa, qui passe par le point principal, et de la droite bD, qui passe par le point de distance.

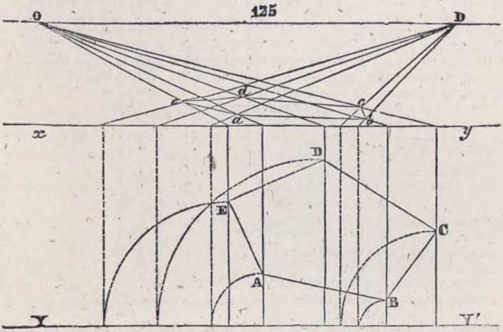
La perspective *abcde* (fig. 125) du polygone ABCDE situé sur le plan horizontal se déterminera par les sommets, comme on vient de l'indiquer pour le point M, la perspective de chaque sommet étant à l'intersection de deux lignes droites faciles à tracer.

Pour décrire la perspective d'un cercle placé dans le plan horizontal de projection, il faut

124



125



déterminer la perspective des sommets d'un polygone régulier circonscrit à ce cercle, et y inscrire ensuite une courbe (qui est une ellipse).

La figure 126 montre comment on peut mettre en perspective un parquet composé de carrés.

S'il s'agissait de mettre en perspective une

126

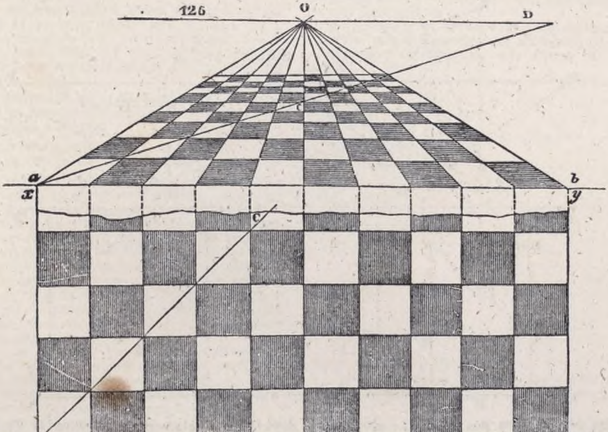
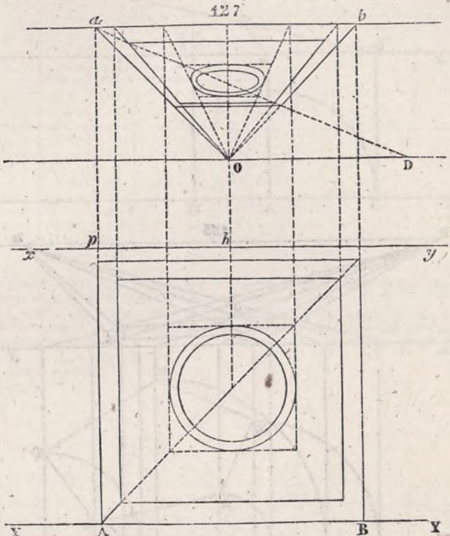


figure située dans un plan horizontal quelconque, dont on connait la hauteur au-dessus du plan horizontal de projection, et dont on peut, par conséquent, figurer la trace sur le plan du tableau, on répéterait les constructions précédentes en se servant de cette trace comme de la ligne de terre.

C'est ce que l'on a fait dans la figure 127 qui

127

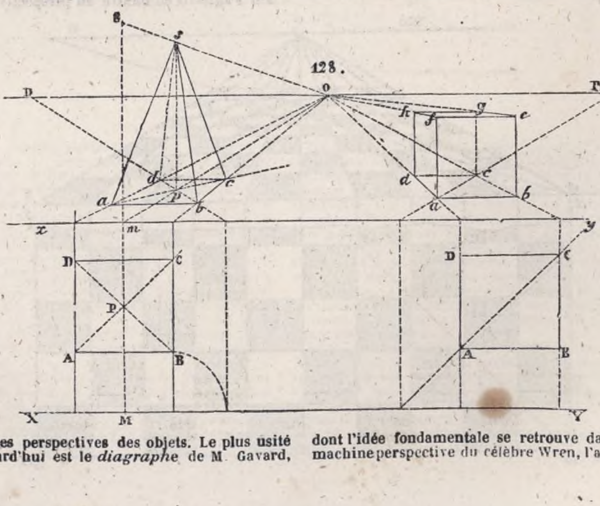


représente la perspective d'un plafond dont on voit la projection horizontale et dont ap est la hauteur.

Enfin la figure 128 donne la perspective d'une pyramide régulière a base carrée, dont la hauteur est mS, et la perspective d'un cube.

On a imaginé divers instruments pour pren-

128.



dre les perspectives des objets. Le plus usité aujourd'hui est le *diagraphe* de M. Gavard, dont l'idée fondamentale se retrouve dans la machine perspective du célèbre Wren, l'architecte qui a élevé Saint-Paul de Londres. Néanmoins, le diagraphe a reçu divers détails de construction très-ingénieux que ne présentait pas la machine de Wren.

Le *physionotrace* est un instrument bien inférieur au diagraphe, mais qui peut servir à rapporter à une petite échelle les contours des objets rapprochés et de moyenne grandeur. C'est une simple tige droite, mobile autour d'un point fixe, et qui décrit, par conséquent, par ses extrémités, des surfaces coniques semblables autour de ce point.

§ 15. *Trigonométrie rectiligne et sphérique.*

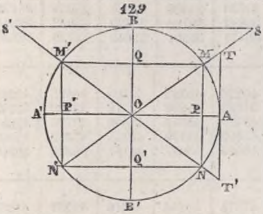
PRINCIPES FONDAMENTAUX. — La trigonométrie a pour objet de *résoudre* les triangles rectilignes et sphériques, c'est-à-dire de déterminer, par le calcul, leurs angles et leurs côtés, lorsque l'on a un nombre suffisant de données.

On établit pour cela des relations, non pas entre les côtés des triangles et les angles eux-mêmes, mais entre les côtés et certaines lignes qui dépendent des angles ou des arcs interceptés entre leurs côtés, lorsque l'on considère ces angles comme au centre d'une circonférence dont le rayon est connu.

Ces lignes sont :

Le *sinus* ou la *perpendiculaire* MP (fig. 129),

129



abaissée d'une extrémité de l'arc sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité;

La *tangente* AT;

La *sécante* OT.

On emploie aussi le sinus MQ, la tangente BS, et la sécante OS de l'arc MB qui est le *complément* de AM, c'est-à-dire qui, ajouté à AM, donne 90°. Ces trois dernières lignes portent les noms de *cosinus*, *cotangente*, *cosécante*.

En nommant x l'arc AM, on désigne les six lignes trigonométriques fondamentales par les expressions abrégées

$$\text{MP} = \text{sin. } x,\ \text{AT} = \text{tang. } x,\ \text{OT} = \text{sec. } x$$
$$\text{MQ} = \text{cos. } x,\ \text{BS} = \text{cot. } x,\ \text{OS} = \text{coséc. } x.$$

On désigne encore AP et BQ par les noms de *sinus-verse* et de *cosinus-verse*. Mais ces deux dernières lignes sont très-peu usitées.

En considérant comme *positives* les valeurs de toutes les lignes trigonométriques des angles moindres que 90°, pour des angles plus grands quelques-unes de ces lignes devront être changées de signes. Ainsi pour l'angle AOM', le cosinus OP' étant compté dans une direction diamétralement opposée au cosinus OP, devra être affecté du signe —, et considéré comme *négatif*.

Dans la haute géométrie, on a souvent à s'occuper d'angles plus grands que 180°. La détermination des diverses *valeurs corrélatives* des lignes trigonométriques doit donc s'étendre à des angles quelconques.

Pour procéder avec ordre on suppose que l'angle croisse successivement de 0° à 90°, puis de 90° à 180°, ensuite de 180° à 270°, enfin de 270° à 360°. Comme au delà l'angle repasse par toutes les mêmes valeurs, il n'est pas nécessaire de poursuivre plus loin l'examen.

En désignant le rayon par r et par k un nombre entier quelconque, on aura :

$$\text{Sin. } 2k.\ 90° = o,\quad \text{cos. } (2k+1)\ 90° = o$$
$$\text{Sin. } (4k+1)\ 90° = r,\quad \text{cos. } 4k.\ 90° = r$$
$$\text{Sin. } (4k-1)\ 90° = -r,\quad \text{cos. } (4k+2)\ 90° = -r.$$

Il est toujours facile d'approprier à un angle plus petit que 90° les valeurs d'un angle quelconque.

On commence par retrancher de cet angle 360° autant de fois que cela est possible, et l'on a les formules:

$$\text{Sin. } (360°.\ k + x) = \text{sin. } x,$$
$$\text{Cos. } (360°.\ k + x) = \text{cos. } x.$$

Cela posé, si le reste x est moindre que 90°, la question est résolue. S'il est compris entre 90° et 180°, on en retranche 90°, ce qui donne un reste z, et on emploie les formules :

$$\text{Sin. } (90° + z) = \text{sin. } (90° - z) = \text{cos. } z$$
$$\text{Cos. } (90° + z) = -\text{cos. } (90° - z) = -\text{sin. } z.$$

Ou bien on retranche le reste x de 180°, ce qui donne un nouveau reste z' et il vient

$$\text{Sin. } (180° - z') = \text{sin. } z'.$$
$$\text{Cos. } (180° - z') = -\text{cos. } z'.$$

Pour un reste x compris entre 180° et 270°, on emploiera les formules :

$$\text{Sin. } (180° + t) = -\text{sin. } (180° - t) = -\text{sin. } t$$
$$\text{Cos. } (180° + t) = \text{cos. } (180° - t) = -\text{cos. } t.$$

Ou encore:

$$\text{Sin. } (270° - t') = -\text{sin. } (90° - t') = -\text{cos. } t'$$
$$\text{Cos. } (270° - t') = -\text{cos. } (90° - t') = -\text{sin. } t'.$$

Enfin, pour un reste x, compris entre 270° et 360°, on aura recours aux relations:

$$\text{Sin. } (360° - u) = -\text{sin. } u$$
$$\text{Cos. } (360° - u) = \text{cos. } u.$$

Ou bien aux suivantes :

$$\text{Sin. } (270° + u') = -\text{sin. } (90° - u') = -\text{cos. } u'$$
$$\text{Cos. } (270° + u') = \text{cos. } (90° - u') = \text{sin. } u'.$$

Quant aux valeurs corrélatives des autres lignes trigonométriques, elles se déduisent de celles des sinus et cosinus à l'aide des formules qui vont suivre.

Ces formules, au nombre de cinq, servent à exprimer une quelconque des six lignes trigonométriques en fonction des autres et du rayon.

Les voici :

$$\text{Sin.}^2\ a + \text{cos.}^2\ a = r^2.$$

$$\text{Tang.}^2\ a = \frac{r \text{ sin. } a}{\text{cos. } a},$$

$$\text{Sec. } a = \frac{r^2}{\text{cos. } a}.$$

$$\text{Cot. } a = \frac{r \text{ cos } a}{\text{sin } a}.$$

$$\text{Cosec. } a = \frac{r^2}{\text{sin. } a},$$

Les trois premières donnent :

$$\text{Sec.}^2\ a = r^2 + \text{tang.}^2\ a.$$

La première, combinée avec les deux dernières, donne pareillement :

$$\text{Cosec.}^2\ a = r^2 + \text{cot.}^2\ a$$

Table des logarithmes des nombres

NOMBRES.	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45
10	00000	00217	00432	00647	00860	01072	01284	01494	01703	01912
11	04139	04336	04532	04727	04922	05115	05308	05500	05690	05881
12	07918	08099	08279	08458	08636	08814	08991	09167	09342	09517
13	11394	11561	11727	11893	12057	12222	12385	12548	12710	12872
14	14613	14768	14922	15076	15229	15381	15534	15685	15836	15987
15	17609	17754	17898	18041	18184	18327	18469	18611	18752	18893
16	20412	20548	20683	20817	20952	21085	21219	21352	21484	21617
17	23045	23172	23300	23426	23553	23679	23805	23930	24055	24180
18	25527	25648	25768	25888	26007	26126	26245	26364	26482	26600
19	27875	27989	28103	28217	28330	28443	28556	28668	28780	28892
20	30103	30211	30320	30428	30535	30643	30750	30856	30963	31069
21	32222	32325	32428	32531	32634	32736	32838	32940	33041	33143
22	34242	34341	34439	34537	34635	34733	34830	34928	35025	35122
23	36173	36267	36361	36455	36549	36642	36736	36829	36922	37014
24	38021	38112	38202	38292	38382	38471	38561	38650	38739	38828
25	39794	39881	39967	40054	40140	40226	40312	40398	40483	40569
26	41497	41581	41664	41747	41830	41913	41996	42078	42160	42243
27	43136	43217	43297	43377	43457	43537	43616	43696	43775	43854
28	44716	44793	44871	44948	45025	45102	45179	45255	45332	45408
29	46240	46315	46389	46464	46538	46613	46687	46761	46835	46909
30	47712	47784	47857	47929	48001	48073	48144	48216	48287	48359
31	49136	49206	49276	49346	49415	49485	49554	49624	49693	49762
32	50515	50583	50651	50718	50786	50853	50920	50987	51055	51121
33	51851	51917	51983	52048	52114	52179	52244	52310	52375	52440
34	53148	53212	53275	53339	53403	53466	53529	53593	53656	53719
35	54407	54469	54531	54593	54654	54716	54777	54839	54900	54962
36	55630	55691	55751	55811	55871	55931	55991	56050	56110	56170
37	56820	56879	56937	56996	57054	57113	57171	57229	57287	57345
38	57978	58035	58092	58149	58206	58263	58320	58377	58433	58490
39	59106	59162	59218	59273	59329	59384	59439	59494	59550	59605
40	60206	60260	60314	60369	60423	60477	60531	60584	60638	60692
41	61278	61331	61384	61437	61490	61542	61595	61648	61700	61752
42	62325	62377	62428	62480	62531	62583	62634	62685	62737	62788
43	63347	63397	63448	63498	63548	63599	63649	63699	63749	63799
44	64345	64395	64444	64493	64542	64591	64640	64689	64738	64787
45	65321	65369	65418	65466	65514	65562	65610	65658	65706	65753
46	66276	66323	66370	66417	66464	66511	66558	66605	66652	66699
47	67210	67256	67302	67348	67394	67440	67486	67532	67578	67624
48	68124	68169	68215	68260	68305	68350	68395	68440	68485	68529
49	69020	69064	69198	69152	69197	69241	69285	69329	69373	69417
NOMBRES.	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45

de 5 *en* 5 *unités de* 1 *à* 10 000.

NOMBRES.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
10	02119	02325	02531	02735	02938	03141	03342	03543	03743	03941
11	06070	06258	06446	06633	06819	07004	07188	07372	07555	07737
12	09691	09864	10037	10209	10380	10551	10721	10890	11059	11227
13	13033	13194	13354	13513	13672	13830	13988	14145	14301	14457
14	16137	16286	16435	16584	16732	16879	17026	17173	17319	17464
15	19033	19173	19312	19451	19590	19728	19866	20003	20140	20276
16	21748	21880	22011	22141	22272	22401	22531	22660	22789	22917
17	24304	24428	24551	24674	24797	24920	25042	25164	25285	25406
18	26717	26834	26951	27068	27184	27300	27416	27531	27646	27761
19	29003	29115	29226	29336	29447	29557	29667	29776	29885	29994
20	31175	31281	31387	31492	31597	31702	31806	31911	32015	32118
21	33244	33345	33445	33546	33646	33746	33846	33945	34044	34143
22	35218	35315	35411	35507	35603	35698	35793	35889	35984	36078
23	37107	37199	37291	37383	37475	37566	37658	37749	37840	37931
24	38917	39005	39094	39182	39270	39358	39445	39533	39620	39707
25	40654	40739	40824	40909	40993	41078	41162	41246	41330	41414
26	42325	42406	42488	42570	42651	42732	42813	42894	42975	43056
27	43933	44012	44091	44170	44248	44326	44404	44483	44560	44638
28	45484	45561	45637	45712	45788	45864	45939	46015	46090	46165
29	46982	47056	47129	47202	47276	47349	47422	47494	47567	47640
30	48430	48501	48572	48643	48714	48785	48855	48926	48996	49066
31	49831	49900	49969	50037	50106	50174	50243	50311	50379	50447
32	51188	51255	51322	51388	51455	51521	51587	51654	51720	51786
33	52504	52569	52634	52699	52763	52827	52892	52956	53020	53084
34	53782	53845	53908	53970	54033	54095	54158	54220	54283	54345
35	55023	55084	55145	55206	55267	55328	55388	55449	55509	55570
36	56229	56289	56348	56407	56467	56526	56585	56644	56703	56761
37	57403	57461	57519	57576	57634	57692	57749	57807	57864	57921
38	58546	58602	58659	58715	58771	58827	58883	58939	58995	59051
39	59660	59715	59770	59824	59879	59934	59988	60043	60097	60152
40	60746	60799	60853	60906	60959	61013	61066	61119	61172	61225
41	61805	61857	61909	61962	62014	62066	62118	62170	62221	62273
42	62839	62890	62941	62992	63043	63094	63144	63195	63246	63296
43	63849	63899	63949	63998	64048	64098	64147	64197	64246	64296
44	64836	64885	64933	64982	65031	65079	65128	65176	65225	65273
45	65801	65849	65896	65944	65992	66039	66087	66134	66181	66229
46	66745	66792	66839	66885	66932	66978	67025	67071	67117	67164
47	67669	67715	67761	67806	67852	67897	67943	67988	68034	68079
48	68574	68619	68664	68708	68753	68797	68842	68886	68931	68975
49	69461	69504	69548	69592	69636	69679	69723	69767	69810	69854
NOMBRES.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95

Table des logarithmes des nombres

NOMBRES.	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45
50	69897	69940	69984	70027	70070	70114	70157	70200	70243	70286
51	70757	70800	70842	70885	70927	70969	71012	71054	71096	71139
52	71600	71642	71684	71725	71767	71809	71850	71892	71933	71975
53	72428	72469	72509	72550	72591	72632	72673	72713	72754	72795
54	73239	73280	73320	73360	73400	73440	73480	73520	73560	73600
55	74036	74076	74115	74155	74194	74233	74273	74312	74351	74390
56	74819	74858	74896	74935	74974	75012	75051	75089	75128	75166
57	75587	75626	75664	75702	75740	75778	75815	75853	75891	75929
58	76343	76380	76418	76455	76492	76530	76567	76604	76641	76678
59	77085	77122	77159	77195	77232	77269	77305	77342	77379	77415
60	77815	77851	77887	77924	77960	77996	78032	78068	78104	78140
61	78533	78569	78604	78640	78675	78711	78746	78781	78817	78852
62	79239	79274	79309	79344	79379	79414	79449	79484	79518	79553
63	79934	79969	80003	80037	80072	80106	80140	80175	80209	80243
64	80618	80652	80686	80720	80754	80787	80821	80855	80889	80922
65	81291	81325	81358	81391	81425	81458	81491	81525	81558	81591
66	81954	81987	82020	82053	82086	82119	82151	82184	82217	82249
67	82607	82640	82672	82705	82737	82769	82802	82834	82866	82898
68	83251	83283	83315	83347	83378	83410	83442	83474	83506	83537
69	83885	83916	83948	83979	84011	84042	84073	84105	84136	84167
70	84510	84541	84572	84603	84634	84665	84696	84726	84757	84788
71	85126	85156	85187	85217	85248	85278	85309	85339	85370	85400
72	85733	85763	85794	85824	85854	85884	85914	85944	85974	86004
73	86332	86362	86392	86421	86451	86481	86510	86540	86570	86599
74	86923	86953	86982	87011	87040	87070	87099	87128	87157	87186
75	87506	87535	87564	87593	87622	87651	87679	87708	87737	87766
76	88081	88110	88138	88167	88195	88224	88252	88281	88309	88338
77	88649	88677	88705	88734	88762	88790	88818	88846	88874	88902
78	89209	89237	89265	89293	89321	89348	89376	89404	89432	89459
79	89763	89790	89818	89845	89873	89900	89927	89955	89982	90009
80	90309	90336	90363	90390	90417	90445	90472	90499	90526	90553
81	90849	90875	90902	90929	90956	90982	91009	91036	91062	91089
82	91381	91408	91434	91461	91487	91514	91540	91566	91593	91619
83	91908	91934	91960	91986	92012	92038	92065	92091	92117	92143
84	92428	92454	92480	92505	92531	92557	92583	92609	92634	92660
85	92942	92967	92993	93018	93044	93069	93095	93120	93146	93171
86	93450	93475	93500	93526	93551	93576	93601	93626	93651	93676
87	93952	93977	94002	94027	94052	94077	94101	94126	94151	94176
88	94448	94473	94498	94522	94547	94571	94596	94621	94645	94670
89	94939	94963	94988	95012	95036	95061	95085	95109	95134	95158
90	95424	95448	95472	95497	95521	95545	95569	95593	95617	95641
91	95904	95928	95952	95976	95999	96023	96047	96071	96095	96118
92	96379	96402	96426	96450	96473	96497	96520	96544	66567	96591
93	96848	96872	96895	96918	96942	96965	96988	97011	97035	97058
94	97313	97336	97359	97382	97405	97428	97451	97474	97497	97520
95	97772	97795	97818	97841	97864	97886	97909	97932	97955	97978
96	98227	98250	98272	98295	98318	98340	98363	98385	98408	98430
97	98677	98700	98722	98744	98767	98789	98811	98834	98856	98878
98	99123	99145	99167	99189	99211	99233	99255	99277	99300	99322
99	99564	99585	99607	99629	99651	99673	99695	99717	99739	99760
NOMBRES.	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45

de 5 *en* 5 *unités de* 1 *à* 10 000.

NOMBRES.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
50	70329	70372	70415	70458	70501	70544	70586	70629	70672	70714
51	71181	71223	71265	71307	71349	71391	71433	71475	71517	71559
52	72016	72057	72099	72140	72181	72222	72263	72304	72346	72387
53	72835	72876	72916	72957	72997	73038	73078	73119	73159	73199
54	73640	73679	73719	73759	73799	73838	73878	73918	73957	73997
55	74429	74468	74507	74547	74586	74624	74663	74702	74741	74780
56	75205	75243	75282	75320	75358	75397	75435	75473	75511	75549
57	75967	76005	76042	76080	76118	76155	76193	76230	76268	76305
58	76716	76753	76790	76827	76864	76901	76938	76975	77012	77048
59	77452	77488	77525	77561	77597	77634	77670	77706	77743	77779
60	78176	78211	78247	78283	78319	78355	78390	78426	78462	78497
61	78888	78923	78958	78993	79029	79064	79099	79134	79169	79204
62	79588	79623	79657	79692	79727	79761	79796	79831	79865	79900
63	80277	80312	80346	80380	80414	80448	80482	80516	80550	80584
64	80956	80990	81023	81057	81090	81124	81158	81191	81224	81258
65	81624	81657	81690	81723	81757	81790	81823	81856	81889	81921
66	82282	82315	82347	82380	82413	82445	82478	82510	82543	82575
67	82930	82963	82995	83027	83059	83091	83123	83155	83187	83219
68	83569	83601	83632	83664	83696	83727	83759	83790	83822	83853
69	84198	84230	84261	84292	84323	84354	84386	84417	84448	84479
70	84819	84850	84880	84911	84942	84973	85003	85034	85065	85095
71	85431	85461	85491	85522	85552	85582	85612	85643	85673	85703
72	86034	86064	86094	86124	86153	86183	86213	86243	86273	86303
73	86629	86658	86688	86717	86747	86776	86806	86835	86864	86894
74	87216	87245	87274	87303	87332	87361	87390	87419	87448	87477
75	87795	87823	87852	87881	87910	87938	87967	87996	88024	88053
76	88366	88395	88423	88451	88480	88508	88536	88564	88593	88621
77	88930	88958	88986	89014	89042	89070	89098	89126	89154	89182
78	89487	89515	89542	89570	89597	89625	89653	89680	89708	89735
79	90037	90064	90091	90119	90146	90173	90200	90227	90255	90282
80	90580	90607	90634	90660	90687	90714	90741	90768	90795	90822
81	91116	91142	91169	91196	91222	91249	91275	91302	91328	91355
82	91645	91672	91698	91724	91751	91777	91803	91829	91855	91882
83	92169	92195	92221	92247	92273	92298	92324	92350	92376	92402
84	92686	92711	92737	92763	92788	92814	92840	92865	92891	92916
85	93197	93222	93247	93273	93298	93323	93349	93374	93399	93425
86	93702	93727	93752	93777	93802	93827	93852	93877	93902	93927
87	94201	94226	94250	94275	94300	94325	94349	94374	94399	94424
88	94694	94719	94743	94768	94792	94817	94841	94866	94890	94915
89	95182	95207	95231	95255	95279	95303	95328	95352	95376	95400
90	95665	95689	95713	95737	95761	95785	95809	95832	95856	95880
91	96142	96166	96190	96213	96237	96261	96284	96308	96332	96355
92	96614	96638	96661	96685	96708	96731	96755	96778	96802	96825
93	97081	97104	97128	97151	97174	97197	97220	97243	97267	97290
94	97543	97566	97589	97612	97635	97658	97681	97704	97727	97749
95	98000	98023	98046	98068	98091	98114	98137	98159	98182	98204
96	98453	98475	98498	98520	98543	98565	98588	98610	98632	98655
97	98900	98923	98945	98967	98989	99012	99034	99056	99078	99100
98	99344	99366	99388	99410	99432	99454	99476	99498	99520	99542
99	99782	99804	99826	99848	99870	99891	99913	99935	99957	99978
NOMBRES.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95

Tables trigonométriques

LOG. SINUS.

LOG. COSINUS.

		0'	10'	20'	30'	40'	50'		
0°	90°	»	7,46373	7,76475	7,94084	8,06578	8,16268	179°	89°
1	91	8,24186	8,30879	8,36678	8,41792	8,46366	8,50504	178	88
2	92	8,54282	8,57757	8,60973	8,63968	8,66769	8,69400	177	87
3	93	8,71880	8,74226	8,76451	8,78568	8,80585	8,82513	176	86
4	94	8,84358	8,86128	8,87829	8,89464	8,91040	8,92561	175	85
5	95	8,94030	8,95450	8,96825	8,98157	8,99450	9,00704	174	84
6	96	9,01923	9,03109	9,04262	9,05386	9,06481	9,07548	173	83
7	97	9,08589	9,09606	9,10599	9,11570	9,12519	9,13447	172	82
8	98	9,14356	9,15245	9,16116	9,16970	9,17807	9,18628	171	81
9	99	9,19433	9,20223	9,20999	9,21761	9,22509	9,23244	170	80
10	100	9,23967	9,24677	9,25376	9,26063	9,26739	9,27405	169	79
11	101	9,28060	9,28705	9,29340	9,29966	9,30582	9,31189	168	78
12	102	9,31788	9,32378	9,32960	9,33534	9,34100	9,34658	167	77
13	103	9,35209	9,35752	9,36289	9,36819	9,37341	9,37858	166	76
14	104	9,38368	9,38871	9,39369	9,39860	9,40346	9,40825	165	75
15	105	9,41300	9,41768	9,42232	9,42690	9,43143	9,43591	164	74
16	106	9,44034	9,44472	9,44905	9,45334	9,45758	9,46178	163	73
17	107	9,46594	9,47005	9,47411	9,47814	9,48213	9,48607	162	72
18	108	9,48998	9,49385	9,49768	9,50148	9,50523	9,50896	161	71
19	109	9,51264	9,51629	9,51991	9,52350	9,52705	9,53056	160	70
20	110	9,53405	9,53751	9,54093	9,54433	9,54769	9,55102	159	69
21	111	9,55433	9,55761	9,56085	9,56408	9,56727	9,57044	158	68
22	112	9,57358	9,57669	9,57978	9,58284	9,58588	9,58889	157	67
23	113	9,59188	9,59484	9,59778	9,60070	9,60359	9,60646	156	66
24	114	9,60931	9,61214	9,61494	9,61773	9,62049	9,62323	155	65
25	115	9,62595	9,62865	9,63133	9,63398	9,63662	9,63924	154	64
26	116	9,64184	9,64442	9,64698	9,64953	9,65205	9,65456	153	63
27	117	9,65705	9,65952	9,66197	9,66441	9,66682	9,66922	152	62
28	118	9,67161	9,67398	9,67633	9,67866	9,68098	9,68328	151	61
29	119	9,68557	9,68784	9,69010	9,69234	9,69456	9,69677	150	60
30	120	9,69897	9,70145	9,70332	9,70547	9,70761	9,70973	149	59
31	121	9,71184	9,71393	9,71602	9,71809	9,72014	9,72218	148	58
32	122	9,72424	9,72622	9,72823	9,73022	9,73219	9,73416	147	57
33	123	9,73611	9,73805	9,73997	9,74189	9,74379	9,74568	146	56
34	124	9,74756	9,74943	9,75128	9,75313	9,75496	9,75678	145	55
35	125	9,75859	9,76039	9,76218	9,76395	9,76572	9,76747	144	54
36	126	9,76922	9,77095	9,77268	9,77439	9,77609	9,77778	143	53
37	127	9,77946	9,78113	9,78280	9 78445	9,78609	9,78772	142	52
38	128	9,78934	9,79095	9,79256	9,79415	9,79573	9,79731	141	51
39	129	9,79887	9,80043	9,80197	9,80351	9,80504	9,80656	140	50
40	130	9,80807	9,80957	9,81106	9,81254	9,81402	9,81549	139	49
41	131	9,81694	9,81839	9,81983	9,82126	9,82269	9,82410	138	48
42	132	9,82551	9,82691	9,82830	9,82968	9,83106	9,83242	137	47
43	133	9,83378	9,83513	9,83648	9,83781	9,83914	9,84046	136	46
44	134	9,84177	9,84308	9,84437	9,84566	9,84694	9,84822	135	45
		60'	50'	40'	30'	20'	10'		

LOG. SINUS.

LOG. COSINUS.

de 10' *en* 10' *pour les angles de* 0° *à* 180°.

LOG. COSINUS.

LOG. SINUS.

		0'	10'	20'	30'	40'	50'		
0°	90°	0,00000	0,00000	9,99999	9,99998	9,99997	9,99995	179°	89°
1	91	9,99993	9,99991	9,99988	9,99985	9,99982	9,99978	178	88
2	92	9,99974	9,99969	9,99964	9,99959	9,99953	9,99947	177	87
3	93	9,99940	9,99934	9,99926	9,99919	9,99911	9,99903	176	86
4	94	9,99894	9,99885	9,99876	9,99866	9,99856	9,99845	175	85
5	95	9,99834	9,99823	9,99812	9,99800	9,99787	9,99775	174	84
6	96	9,99761	9,99748	9,99734	9,99720	9,99705	9,99690	173	83
7	97	9,99675	9,99659	9,99643	9,99627	9,99610	9,99593	172	82
8	98	9,99575	9,99557	9,99539	9,99520	9,99501	9,99482	171	81
9	99	9,99462	9,99442	9,99421	9,99400	9,99379	9,99357	170	80
10	100	9,99335	9,99313	9,99290	9,99267	9,99243	9,99219	169	79
11	101	9,99195	9,99170	9,99145	9,99119	9,99093	9,99067	168	78
12	102	9,99040	9,99013	9,98986	9,98958	9,98930	9,98901	167	77
13	103	9,98872	9,98843	9,98813	9,98783	9,98753	9,98722	166	76
14	104	9,98690	9,98659	9,98627	9,98594	9,98561	9,98528	165	75
15	105	9,98494	9,98460	9,98426	9,98391	9,98356	9,98320	164	74
16	106	9,98284	9,98248	9,98211	9,98174	9,98136	9,98098	163	73
17	107	9,98060	9,98021	9,97982	9,97942	9,97902	9,97861	162	72
18	108	9,97821	9,97779	9,97738	9,97696	9,97653	9,97610	161	71
19	109	9,97567	9,97523	9,97479	9,97435	9,97390	9,97344	160	70
20	110	9,97299	9,97252	9,97206	9,97159	9,97111	9,97063	159	69
21	111	9,97015	9,96966	9,96917	9,96868	9,96818	9,96767	158	68
22	112	9,96717	9,96665	9,96614	9,96562	9,96509	9,96456	157	67
23	113	9,96403	9,96349	9,96294	9,96240	9,96185	9,96129	156	66
24	114	9,96073	9,96017	9,95960	9,95902	9,95844	9,95786	155	65
25	115	9,95728	9,95668	9,95609	9,95549	9,95488	9,95427	154	64
26	116	9,95366	9,95304	9,95242	9,95179	9,95116	9,95052	153	63
27	117	9,94988	9,94923	9,94858	9,94793	9,94727	9,94660	152	62
28	118	9,94593	9,94526	9,94458	9,94390	9,94321	9,94252	151	61
29	119	9,94182	9,94112	9,94041	9,93970	9,93898	9,93826	150	60
30	120	9,93753	9,93680	9,93606	9,93532	9,93457	9,93382	149	59
31	121	9,93307	9,93230	9,93154	9,93077	9,92999	9,92921	148	58
32	122	9,92842	9,92763	9,92683	9,92603	9,92522	9,92441	147	57
33	123	9,92359	9,92277	9,92194	9,92111	9,92027	9,91942	146	56
34	124	9,91857	9,91772	9,91686	9,91599	9,91512	9,91425	145	55
35	125	9,91336	9,91248	9,91158	9,91069	9,90978	9,90887	144	54
36	126	9,90796	9,90704	9,90611	9,90518	9,90424	9,90330	143	53
37	127	9,90235	9,90139	9,90043	9,89947	9,89849	9,89752	142	52
38	128	9,89653	9,89554	9,89455	9,89354	9,89254	9,89152	141	51
39	129	9,89050	9,88948	9,88844	9,88741	9,88636	9,88531	140	50
40	130	9,88425	9,88319	9,88212	9,88105	9,87996	9,87887	139	49
41	131	9,87778	9,87668	9,87557	9,87446	9,87334	9,87221	138	48
42	132	9,87107	9,86993	9,86879	9,86763	9,86647	9,86530	137	47
43	133	9,86413	9,86295	9,86176	9,86056	9,85936	9,85815	136	46
44	134	9,85693	9,85571	9,85448	9,85324	9,85200	9,85074	135	45
		60'	50'	40'	20'	20'	10'		

LOG. COSINUS.

LOG. SINUS.

Tables trigonométriques

LOG. TANGENTES.

LOG. COTANGENTES.

		0'	10'	20'	30'	40'	50'		
0°	90°	»	7,46373	7,76476	7,94086	8,06581	8,16273	179°	89°
1	91	8,24192	8,30888	8,36689	8,41807	8,46385	8,50527	178	88
2	92	8,54308	8,57788	8,61009	8,64009	8,66816	8,69453	177	87
3	93	8,71940	8,74292	8,76525	8,78649	8,80674	8,82610	176	86
4	94	8,84464	8,86243	8,87953	8,89598	8,91185	8,92716	175	85
5	95	8,94195	8,95627	8,97013	8,98358	8,99662	9,00930	174	84
6	96	9,02162	9,03361	9,04528	9,05666	9,06775	9,07858	173	83
7	97	9,08914	9,09947	9,10956	9,11943	9,12909	9,13854	172	82
8	98	9,14780	9,15688	9,16577	9,17450	9,18306	9,19146	171	81
9	99	9,19971	9,20782	9,21578	9,22361	9,23130	9,23887	170	80
10	100	9,24632	9,25365	9,26086	9,26797	9,27496	9,28186	169	79
11	101	9,28865	9,29535	9,30195	9,30846	9,31489	9,32122	168	78
12	102	9,32747	9,33365	9,33974	9,34576	9,35170	9,35757	167	77
13	103	9,36336	9,36909	9,37476	9,38035	9,38589	9,39136	166	76
14	104	9,39677	9,40212	9,40742	9,41266	9,41784	9,42297	165	75
15	105	9,42805	9,43308	9,43806	9,44299	9,44787	9,45271	164	74
16	106	9,45750	9,46224	9,46694	9,47160	9,47622	9,48080	163	73
17	107	9,48534	9,48984	9,49430	9,49872	9,50311	9,50746	162	72
18	108	9,51178	9,51606	9,52031	9,52452	9,52870	9,53285	161	71
19	109	9,53697	9,54106	9,54512	9,54915	9,55315	9,55712	160	70
20	110	9,56107	9,56498	9,56887	9,57274	9,57658	9,58039	159	69
21	111	9,58418	9,58794	9,59168	9,59540	9,59909	9,60276	158	68
22	112	9,60641	9,61004	9,61364	9,61722	9,62079	9,62433	157	67
23	113	9,62785	9,63135	9,63484	9,63830	9,64175	9,64517	156	66
24	114	9,64858	9,65197	9,65535	9,65870	9,66204	9,66527	155	65
25	115	9,66867	9,67196	9,67524	9,67850	9,68174	9,68497	154	64
26	116	9,68818	9,69138	9,69457	9,69774	9,70089	9,70404	153	63
27	117	9,70717	9,71028	9,71339	9,71648	9,71955	9,72262	152	62
28	118	9,72567	9,72872	9,73175	9,73476	9,73777	9,74077	151	61
29	119	9,74375	9,74673	9,74969	9,75264	9,75558	9,75852	150	60
30	120	9,76144	9,76435	9,76725	9,77015	9,77303	9,77591	149	59
31	121	9,77877	9,78163	9,78448	9,78732	9,79015	9,79297	148	58
32	122	9,79579	9,79860	9,80140	9,80419	9,80697	9,80975	147	57
33	123	9,81252	9,81528	9,81803	9,82078	9,82352	9,82626	146	56
34	124	9,82899	9,83171	9,83442	9,83713	9,83984	9,84254	145	55
35	125	9,84523	9,84791	9,85059	9,85327	9,85594	9,85860	144	54
36	126	9,86126	9,86392	9,86656	9,86921	9,87185	9,87448	143	53
37	127	9,87711	9,87974	9,88236	9,88498	9,88759	9,89020	142	52
38	128	9,89281	9,89541	9,89801	9,90061	9,90320	9,90578	141	51
39	129	9,90837	9,91095	9,91353	9,91610	9,91868	9,92125	140	50
40	130	9,92381	9,92638	9,92894	9,93150	9,93406	9,93661	139	49
41	131	9,93916	9,94171	9,94426	9,94681	9,94935	9,95190	138	48
42	132	9,95444	9,95698	9,95952	9,96205	9,96459	9,96712	137	47
43	133	9,96966	9,97219	9,97472	9,97725	9,97978	9,98231	136	46
44	134	9,98484	9,98737	9,98989	9,99242	9,99495	9,99747	135	45
		60'	50'	40'	30'	20'	10'		

LOG. TANGENTES.

LOG. COTANGENTES.

de 10' *en* 10' *pour les angles de* 0° *a* 180°.

LOG. COTANGENTES.

LOG. TANGENTES.

		0'	10'	20'	30'	40'	50'		
0°	90°	»	2,53627	2,23524	2,05944	1,93419	1,83727	179°	89°
1	91	1,75808	1,69112	1,63311	1,58193	1,53615	1,49473	178	88
2	92	1,45692	1,42212	1,38991	1,35991	1,33184	1,30547	177	87
3	93	1,28060	1,25708	1,23475	1,21351	1,19326	1,17390	176	86
4	94	1,15536	1,13757	1,12047	1,10402	1,08815	1,07284	175	85
5	95	1,05805	1,04373	1,02987	1,01642	1,00338	0,99070	174	84
6	96	0,97838	0,96639	0,95472	0,94334	0,93225	0,92142	173	83
7	97	0,91086	0,90053	0,89044	0,88057	0,87091	0,86146	172	82
8	98	0,85220	0,84312	0,83423	0,82550	0,81694	0,80854	171	81
9	99	0,80029	0,79218	0,78422	0,77639	0,76870	0,76113	170	80
10	100	0,75368	0,74635	0,73914	0,73203	0,72504	0,71814	169	79
11	101	0,71135	0,70465	0,69805	0,69154	0,68511	0,67878	168	78
12	102	0,67253	0,66635	0,66026	0,65424	0,64830	0,64243	167	77
13	103	0,63664	0,63094	0,62524	0,61965	0,61411	0,60864	166	76
14	104	0,60323	0,59788	0,59258	0,58734	0,58216	0,57703	165	75
15	105	0,57195	0,56692	0,56194	0,55701	0,55213	0,54729	164	74
16	106	0,54250	0,53776	0,53306	0,52840	0,52378	0,51920	163	73
17	107	0,51466	0,51046	0,50570	0,50128	0,49689	0,49254	162	72
18	108	0,48822	0,48394	0,47969	0,47548	0,47130	0,46715	161	71
19	109	0,46303	0,45894	0,45488	0,45085	0,44685	0,44288	160	70
20	110	0,43893	0,43502	0,43113	0,42726	0,42342	0,41961	159	69
21	111	0,41582	0,41206	0,40832	0,40460	0,40091	0,39724	158	68
22	112	0,39359	0,38996	0,38636	0,38278	0,37921	0,37567	157	67
23	113	0,37215	0,36865	0,36516	0,36170	0,35825	0,35483	156	66
24	114	0,35142	0,34803	0,34465	0,34130	0,33796	0,33463	155	65
25	115	0,33133	0,32804	0,32476	0,32150	0,31826	0,31503	154	64
26	116	0,31182	0,30862	0,30543	0,30226	0,29911	0,29596	153	63
27	117	0,29283	0,28972	0,28661	0,28352	0,28045	0,27738	152	62
28	118	0,27433	0,27128	0,26825	0,26524	0,26223	0,25923	151	61
29	119	0,25625	0,25327	0,25031	0,24736	0,24442	0,24148	150	60
30	120	0,23856	0,23565	0,23275	0,22985	0,22697	0,22409	149	59
31	121	0,22123	0,21837	0,21552	0,21268	0,20985	0,20703	148	58
32	122	0,20421	0,20140	0,19860	0,19581	0,19303	0,19025	147	57
33	123	0,18748	0,18472	0,18197	0,17922	0,17648	0,17374	146	56
34	124	0,17101	0,16829	0,16558	0,16287	0,16016	0,15746	145	55
35	125	0,15477	0,15209	0,14941	0,14673	0,14406	0,14140	144	54
36	126	0,13874	0,13608	0,13344	0,13079	0,12815	0,12552	143	53
37	127	0,12289	0,12026	0,11764	0,11502	0,11241	0,10980	142	52
38	128	0,10719	0,10459	0,10499	0,09939	0,09680	0,09422	141	51
39	129	0,09163	0,08905	0,08647	0,08390	0,08132	0,07875	140	50
40	130	0,07619	0,07362	0,07106	0,06850	0,06594	0,06339	139	49
41	131	0,06084	0,05829	0,05574	0,05319	0,05065	0,04810	138	48
42	132	0,04556	0,04302	0,04048	0,03795	0,03541	0,03288	137	47
43	133	0,03034	0,02781	0,02528	0,02275	0,02022	0,01769	136	46
44	134	0,01516	0,01263	0,01011	0,00758	0,00505	0,00253	135	45
		60'	50'	40'	30'	20'	10'		

LOG. COTANGENTES.

LOG. TANGENTES.

On peut supposer dans ces formules et dans toutes les formules de trigonométrie que le rayon r est égal à l'unité. Alors elles cessent d'être *homogènes*, c'est-à-dire que les termes ne contiennent plus le même nombre de facteurs. Il sera toujours facile de faire rentrer le rayon dans les formules, en rendant ces formules homogènes par l'introduction d'un facteur égal à une puissance convenable du rayon dans chaque terme.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES RECTANGLES. — On désigne les trois angles d'un triangle par les grandes lettres A, B, C, et les côtés opposés respectivement à ces angles par les petites lettres a, b, c.

Dans le triangle rectangle, A désigne l'angle droit, et, par conséquent, a l'hypothénuse.

Cela posé, il y a pour la résolution des triangles rectilignes rectangles quatre cas, qui peuvent se résumer dans le petit tableau suivant :

Données. *Valeurs des inconnues*

$$a,\ \mathrm{B}.\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{C} = 90^\circ - \mathrm{B} \\ b = a \sin.\ \mathrm{B} \\ c = a \cos.\ \mathrm{B} \end{array}\right.$$

$$b,\ \mathrm{B}.\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{C} = 90^\circ - \mathrm{B} \\ a = \dfrac{b}{\sin.\ \mathrm{B}} \\ c = b \cot.\ \mathrm{B} \end{array}\right.$$

$$a,\ b.\quad \left\{\begin{array}{l} c = \sqrt{(a+b)(a-b)} \\ \sin.\ \mathrm{B} = \dfrac{b}{a} \\ \mathrm{C} = 90^\circ - \mathrm{B}. \end{array}\right.$$

$$b,\ c.\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Tang.}\ \mathrm{B} = \dfrac{b}{c} \\ \mathrm{C} = 90^\circ - \mathrm{B} \\ a = \dfrac{b}{\sin.\ \mathrm{B}} \end{array}\right.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES QUELCONQUES. — Il y a encore quatre cas qui peuvent se résumer dans le tableau suivant :

Données. *Valeurs des inconnues.*

$$a,\ \mathrm{B},\mathrm{C}\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = 180^\circ - (\mathrm{B}+\mathrm{C}) \\ b = \dfrac{a \sin.\ \mathrm{B}}{\sin.\ \mathrm{A}} \\ c = \dfrac{a \sin.\ \mathrm{C}}{\sin.\ \mathrm{A}} \end{array}\right.$$

$$a,\ b\ \mathrm{A}\quad \left\{\begin{array}{l} \sin.\ \mathrm{B} = \dfrac{b \sin.\ \mathrm{A}}{a} \\ \mathrm{C} = 180^\circ - (\mathrm{A}+\mathrm{B}) \\ c = \dfrac{a \sin.\ \mathrm{C}}{\sin.\ \mathrm{A}} \\ \text{ou en posant } \sin.\ \varphi = \dfrac{b \sin.\ \mathrm{A}}{a} \\ c = \dfrac{a \sin.\left(\varphi \pm \mathrm{A}\right)}{\sin\ \mathrm{A}} \end{array}\right.$$

Il peut y avoir deux solutions, ou une seule, ou aucune.

$$a,\ b,\ \mathrm{C}.\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}+\mathrm{B} = 180^\circ - \mathrm{C} \\ \mathrm{Tang.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \dfrac{a-b}{a+b}\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \\ \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \\ \mathrm{B} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \\ c = \dfrac{a \sin.\ \mathrm{C}}{\sin.\ \mathrm{A}},\ \text{ou encore} \\ c = \dfrac{(a+b) \sin.\ \frac{1}{2}\mathrm{C}}{\cos.\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})} \end{array}\right.$$

$$a,\ b,\ c.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Soit } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \\ \text{on aura} \\ \sin.\ \frac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \end{array}\right.$$

Les autres angles B et C se déterminent par des formules tout à fait analogues.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES. — Il y a six cas compris dans le tableau suivant, a est encore l'hypothénuse. Ici a, b, c représentent des arcs.

Données. *Valeurs des inconnues.*

$$a,\ b.\quad \left\{\begin{array}{l} \cos.\ c = \dfrac{\cos.\ a}{\cos.\ b}, \\ \sin.\ \mathrm{B} = \dfrac{\sin.\ b}{\sin.\ a}, \\ \cos.\ \mathrm{C}. = \dfrac{\mathrm{tang.}\ b}{\mathrm{tang.}\ a}. \end{array}\right.$$

B doit être de la même espèce que b.

$$b,\ c.\quad \left\{\begin{array}{l} \cos.\ a = \cos.\ b \cos.\ c, \\ \mathrm{Tang.}\ \mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{tang.}\ b}{\sin.\ c}, \\ \mathrm{Tang.}\ \mathrm{C}. = \dfrac{\mathrm{tang.}\ c}{\sin.\ b}. \end{array}\right.$$

$$a,\ \mathrm{B}.\quad \left\{\begin{array}{l} \sin.\ b = \sin.\ a \sin.\ \mathrm{B}, \\ \mathrm{Tang.}\ c = \mathrm{tang.}\ a \cos.\ \mathrm{B}, \\ \cot.\ \mathrm{C} = \cos.\ a\ \mathrm{tang.}\ \mathrm{B}. \end{array}\right.$$

b devra être de même espèce que B.

$$c,\ c,\quad \left\{\begin{array}{l} \sin.\ a = \dfrac{\sin.\ b}{\sin.\ \mathrm{B}}, \\ \sin.\ c = \dfrac{\mathrm{tang.}\ b}{\mathrm{tang.}\ \mathrm{B}}, \\ \sin.\ \mathrm{C}. = \dfrac{\cos.\ \mathrm{B}}{\cos.\ b}. \end{array}\right.$$

On peut prendre à volonté $a >$ ou $a < 90^\circ$. Mais quand le choix sera fait, l'espèce de c sera donnée par la relation $\cos.\ a = \cos.\ b \cos.\ c$, et cette espèce sera aussi celle de C.

b, C. $\left\{\begin{array}{l} \text{Tang. } a = \dfrac{\text{tang. } b}{\text{cos. C}}, \\ \text{Tang. } c = \text{sin. } b \text{ tang. C.} \\ \text{Cos. B} = \text{cos. } b \text{ sin. C.} \end{array}\right.$

B, C. $\left\{\begin{array}{l} \text{Cos. } a = \text{cot. B cot. C}, \\ \text{Cos. } b = \dfrac{\text{cos. B}}{\text{sin. C}}, \\ \text{Cos. } c = \dfrac{\text{cos. C}}{\text{sin. B}}. \end{array}\right.$

Résolution des triangles sphériques quelconques. — Il y a encore six cas compris dans le tableau suivant :

Données. *Valeurs des inconnues.*

a, b, c. Posant $a + b + c = 2p$, il vient

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin. }(p-b)\text{ sin. }(p-c)}{\text{sin. } b \text{ sin. } c}}.$$

Les valeurs des autres angles s'obtiennent par des formules tout à fait analogues en remplaçant b par a pour B, et c par a pour C.

a, b, A.

$$\text{Sin. B} = \frac{\text{sin. A sin. } b}{\text{sin. } a},$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b)\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})},$$

$$\text{Cot. } \tfrac{1}{2}\text{C} = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

L'élément B, étant déterminé par son sinus, peut être aigu ou obtus.

a, b, C.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{C}\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{C}\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

$$\text{A} = \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) + \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}),$$

$$\text{B} = \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) - \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}),$$

$$\text{Sin } c = \frac{\text{sin. } a \text{ sin C}}{\text{sin. A}}.$$

c, A, B.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c\,\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})},$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang } \tfrac{1}{2} c\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})},$$

$$\text{Sin C} = \frac{\text{sin. } c \text{ sin. A}}{\text{sin. } a}.$$

a, A, B.

$$\text{Sin. } b = \frac{\text{sin. } a \text{ sin. B}}{\text{sin. A}},$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b)\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})},$$

$$\text{Cot. } \tfrac{1}{2}\text{C} = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\,\frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

A, B, C. En posant $\text{A} + \text{B} + \text{C} = 180° + 2\text{P}$, il vient

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sin. P. sin. }(\text{A}-\text{P})}{\text{sin. B sin. C}}}.$$

On obtient sin. $\tfrac{1}{2} b$ et sin. $\tfrac{1}{2} c$ par des formules tout à fait analogues.

Les trois derniers cas sont tout à fait analogues aux trois premiers, et peuvent s'y ramener d'après les propriétés du triangle polaire (voir colonne 153). Le quatrième revient au troisième, le cinquième au second, le sixième au premier.

Les seuls cas dans lesquels il y ait incertitude sur l'espèce des éléments inconnus sont le second et le cinquième. Les résultats relatifs au second cas où a, b et A sont les données, se trouvent compris dans le tableau suivant.

1° Pour $\text{A} < 90°$

$b < 90°$	$a < b$, 2 solutions.
	$a \geqq b$, 1 s.
	$a + b \geqq 180°$, aucune.
$b > 90°$	$a + b < 180°$, 2 s.
	$a + b \geqq 180°$, 1 s.
	$a \geqq b$, aucune.
$b = 90°$	$a < b$, 2 s.
	$a \geqq b$, aucune.

2° Pour $\text{A} > 90°$

$b < 90°$	$a + b > 180°$, 2 s.
	$a + b \leqq 180°$, 1 s.
	$a \leqq b$, aucune.
$b > 90°$	$a > b$, 2 s.
	$a \leqq b$, 1 s.
	$a + b \leqq 180°$, aucune.
$b = 90°$	$a > b$, 2 s.
	$a \leqq b$, aucune.

3° Pour $A = 90°$

$$b < 90° \begin{cases} a > b, \text{ 1 s.} \\ a \leqq b, \text{ aucune,} \\ a + b \geqq 180°, \text{ aucune.} \end{cases}$$

$$b = 90° \begin{cases} a = 90°, \text{ infinité de solutions,} \\ a \lessgtr 90°, \text{ aucune} \end{cases}$$

La considération du triangle polaire permet d'appliquer ces résultats au triangle dont on donne les éléments A, B, a, ce qui est le cinquième cas. Il faut changer partout a, b, A en A, B, a, le signe $>$ en $<$, et $<$ en $>$.

Il est à observer que des constructions graphiques effectuées sur un plan peuvent donner des indications plus ou moins approchées des valeurs des divers éléments des triangles rectilignes ou sphériques que l'on peut avoir à résoudre. On ne doit donc pas négliger les vérifications ou les indications approchées qui résultent de ces constructions. Pour ce qui concerne les triangles rectilignes, voyez la col. 133 ; pour les triangles sphériques, voyez les problèmes sur les trièdres, col. 173. Il suffit de rappeler ici que tout trièdre revient à un triangle sphérique (col. 153), et que le trièdre supplémentaire ne diffère pas du triangle sphérique polaire. (Col. 153 et 173.)

Usage des tables trigonométriques. — Ces tables renferment ordinairement, non pas les valeurs des lignes trigonométriques elles-mêmes, mais les valeurs des logarithmes de ces lignes.

On trouve d'autant plus d'avantage à user de tables ainsi construites, que toutes les formules précédemment données pour la résolution de triangles, tant rectilignes que sphériques, se prêtent parfaitement au calcul logarithmique.

Mais, comme les sinus et les cosinus de tous les angles possibles, et des tangentes des angles moindres que 90° sont des fractions du rayon, en supposant le rayon égal à l'unité, on n'a que des logarithmes négatifs pour les lignes trigonométriques contenues dans les tables. On remédie à cet inconvénient, en augmentant de dix unités tous ces logarithmes, ce qui les rend positifs, si ce n'est pour des angles extrêmement petits et tout à fait négligeables ; on en est quitte pour retrancher des résultats auxquels on parvient en combinant ces logarithmes par voie d'addition et de soustraction, le plus grand multiple de 10 qui y est contenu.

La table trigonométrique que nous donnons ici est le pendant de la petite table de logarithmes qui la précède, et dont nous avons expliqué l'usage ailleurs (voir col. 47). Cette table trigonométrique donne avec cinq décimales les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de tous les angles compris entre 0° et 180°, et croissant de 10 en 10 minutes. (Col. 195. et suiv.)

Un même logarithme correspond toujours à quatre lignes trigonométriques d'angles différents. Ainsi, dans la première page de notre table, si l'on suit la ligne horizontale qui commence à gauche par le nombre 17° jusqu'à la rencontre de la colonne verticale, en tête de laquelle se trouve le nombre 40′ on trouve 9,48213 qui est le logarithme-sinus de 17° 40′, mais qui correspond aussi au cosinus de 72° 20′, au cosinus de 107° 40′, et au sinus de 162° 20′. Car on a en général :

$$\sin. x = \cos. (90° - x)$$
$$= - \cos. (90° + x) = \sin. (180° - x).$$

On voit, d'après cet exemple, comment les lectures doivent se faire dans la table. Le mot Log. sinus, qui est en tête de la première page, se combine avec les nombres de degrés contenus dans la première colonne à gauche, et avec les nombres de minutes placés aussi en tête ; le mot Log. cosinus, au-dessous du premier, se combine avec les nombres de degrés contenus dans la seconde colonne à gauche, et avec les mêmes nombres de minutes ; le mot Log. cosinus, placé en bas de la page, se combine avec le nombre de degrés de la dernière colonne à droite et avec les nombres de minutes du bas de la page ; enfin le mot Log. sinus, placé en bas de la page, au-dessus de Log. cosinus, se combine avec les nombres de minutes du bas, et avec les nombres de degrés de l'avant-dernière colonne à droite.

La disposition des autres pages de la table est tout à fait analogue.

Cette disposition est fondée sur ce que, pour les quatre angles

$$45° - x, 45° + x, 135° - x, 135° + x$$

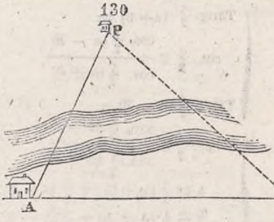
les valeurs absolues des lignes trigonométriques *directes* de deux de ces angles, sont égales entre elles et à celles des lignes trigonométriques *indirectes* des deux autres angles.

Le sinus, la tangente et la sécante sont ce que l'on appelle les lignes directes ; le cosinus, la cotangente et la cosécante sont les lignes indirectes.

Il est inutile d'entrer ici dans aucun détail sur l'usage des tables trigonométriques de Lalande, de Callet, de Borda, de Guépratte, etc., parce que les personnes qui veulent s'en servir connaissent déjà assez les logarithmes ordinaires pour comprendre les instructions qui précèdent ces tables. Il suffira donc ici de donner quelques exemples numériques, où nous n'emploierons que les petites tables que nous publions.

1er Exemple. Trouver la distance d'un point A où l'on est placé (fig. 130) à un point éloigné

130



P, qui est inaccessible, mais qu'on peut apercevoir.

On mesure d'abord une base A B, ainsi que les angles P A B, P B A ; il s'agit alors de résoudre un triangle rectiligne quelconque connaissant un côté et deux angles.

Prenons	AB	=	247m 49
	A	=	62° 41′
	B	=	59° 42′
On en déduit	P	=	57° 37′
On a	Log	247,5 =	2,39358
	Log. sin.	59° 40′ =	9,93606
	Ct. Log. sin.	57° 35′ =	0,07357
		Somme.......	12,40321

2,40312 = Log. 253,0.

La distance cherchée AP est donc de 253 mètres environ.

Le calcul exact fait avec les tables de Callet aurait donné 253m, 032.

2e Exemple. Trouver la distance PQ de deux points inaccessibles, mais visibles (fig. 131).

On mesure une base	AB = 345m 29
	BAP = 69° 26'
	BAQ = 44° 31'
	PAQ = 25° 41'
	ABP = 48° 15'
	ABQ = 102° 14'
d'ou l'on conclut	APB = 62° 19'
et	AQB = 33° 15'

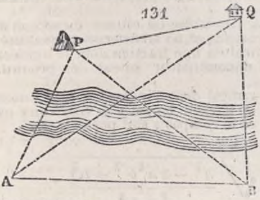
(L'angle PAQ n'est pas égal à la différence entre BAP et BAQ, parce que les quatre points A, B, Q, B ne sont pas dans un même plan.)

Dans le triangle PAB, on connaît la base AB et les deux angles qui la comprennent ; on pourra donc calculer AP.

On calculera de même AQ dans le triangle ABQ.

Dans le triangle PAQ, on connaîtra donc deux côtés AP, AQ et l'angle compris PAQ, ce qui est le troisième cas de la résolution des triangles rectilignes obliquangles.

131



1° Calcul de AP

Log. 345,5 =	2,53845
Log sin. 48° 10' =	9,87221
Compt. log. sin. 62° 20' =	0,05273
Somme......	12,46339

2,46452 = log. 291,0

2° Calcul de AQ.

Log. 345,5 =	2,53845
Log. sin. 102° 10' =	9,99013
Ct. log. sin. 33° 20' =	0,26195
Somme......	12,79053

2,79053 = log. 617,5

3° Calcul des angles APQ et AQP

On aura AQ + AP = 908,5
AQ − AP = 326,5

$\frac{1}{2}$ (APQ + AQP) = 77° 9' 30"

Log. tang. 77° 10' =	0,64243
Log. 326,5 =	2,51388
Ct. log. 908,5 =	7,04168
Somme....	10,19799

0,19799 = log. tang. 57° 40'.

Donc $\frac{1}{2}$ (APQ − AQP) = 57° 40'
APQ = 134° 49'
AQP = 19° 29'

4° Calcul de PQ.

Log. 291 =	2,46339
Log. sin. 25° 40' =	9,63662
Ct. log. sin. 19° 30' =	0,47650
Somme......	12,57651

2,57651 = log. 376,

La valeur exacte calculée avec les tables de Callet est de 375,110. L'erreur en plus est donc seulement de 1,39 sur 375,11 ou de $\frac{1}{270}$ environ du résultat véritable. Cette approximation est suffisante dans beaucoup de cas.

Il faut d'ailleurs observer que l'on obtiendra une approximation beaucoup plus grande avec nos petites tables, lorsque l'on prendra des moyennes entre les logarithmes qu'elles donnent, pour des nombres qui tombent entre ceux que l'on trouve directement dans ces tables.

§ 16. *Géométrie analytique.*

Principes fondamentaux. — La *géométrie analytique* n'est autre chose que l'*application de l'algèbre à la géométrie.* La trigonométrie en fait donc partie.

Viète, que nous avons déjà cité comme le père de l'algèbre moderne, est le premier qui ait employé cette science pour trouver les parties inconnues d'une figure, en exprimant par des équations les relations qui lient entre elles toutes les parties de cette figure.

Descartes donne dans sa géométrie le précepte suivant, que l'on attribue à tort à Newton, pour résoudre, par le moyen de l'algèbre, les problèmes déterminés.

« Voulant résoudre quelque probiesme, on » doit d'abord le considérer comme desia fait, » et donner des noms à toutes les lignes qui » semblent nécessaires pour le construire, » aussy bien à celles qui sont inconnuës qu'aux » autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connuës et inconnuës, » on doit par courir la difficulté, selon l'ordre » qui monstre le plus naturellement de tous » en quelle sorte elles dependent mutuellement les unes des autres, iusques à ce qu'on » ait trouvé moyen d'exprimer une mesme » quantité en deux façons : ce qui se nomme » une Equation. »... « Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de » lignes qui étoient inconnuës... »

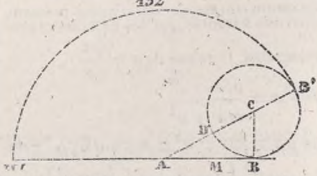
Par exemple s'il s'agit de partager une droite a en moyenne et extrême raison (Voyez col. 135), la valeur du plus grand segment x sera donnée par l'équation

$$x^2 = a(a - x), \text{ d'où l'on tire}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

La première valeur seule convient au problème tel qu'il a été proposé et donne la valeur de la droite AM. Mais la seconde valeur de x qui est négative, prise abstraction faite de son signe, est précisément celle que l'on trouve si l'on cherche sur le prolongement d'une droite BA (fig. 132) un point M' tel que la

132



distance AM' soit moyenne proportionnelle entre la distance BM' et la droite BA elle-même.

On doit donc établir en principe que si l'on emploie l'algèbre pour résoudre un problème de géométrie, et qu'on prenne pour inconnue une distance comptée sur une ligne donnée, à partir d'un point fixe situé sur cette ligne, les valeurs négatives de cette inconnue devront être portées dans un sens opposé à celui où l'on a supposé que cette distance était placée.

Mais lorsque l'on cherche une distance inconnue du côté opposé à celui où elle doit être placée, l'erreur de la supposition n'est pas toujours rectifiée par des valeurs négatives; cette erreur est indiquée quelquefois par des valeurs imaginaires. C'est ce qui arriverait dans l'exemple précédent si l'on supposait que le point cherché fût placé à droite du point B sur la droite AB.

Lorsque l'on a trouvé, par le moyen de l'algèbre, les valeurs des lignes inconnues, il s'agit de les construire géométriquement.

Pour cela on remarquera d'abord que toute expression d'une ligne doit être véritablement *linéaire*, c'est-à-dire qu'elle doit se composer de termes dans lesquels le degré du numérateur surpasse d'une unité le degré du dénominateur. Si cette condition n'est pas remplie, c'est qu'une des lignes de la question a été prise pour unité, et, comme l'unité est alors connue, il n'en sera pas moins facile de construire les expressions des inconnues.

CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES. — On fait donc réellement des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, en un mot toutes les opérations de l'arithmétique par le moyen de figures de géométrie.

Ainsi la valeur $x=\frac{ab}{c}$ se construit par le moyen d'une quatrième proportionnelle aux lignes c, a, b (voyez prob. XVIII, col. 135).

Si on suppose $c=1$, la quatrième proportionnelle aux lignes 1, a, b sera le produit de a par b.

Si on fait $b=1$, la quatrième proportionnelle aux lignes c, a, 1, sera le quotient de a par c.

Dans tous les cas, les lignes a, b, c, x, etc., sont censées rapportées à la même unité.

La construction de l'expression

$$x=\frac{A^{m}B^{n}C^{p}}{a^{m'}b^{n'}c^{p'}}$$

n'offrira non plus aucune difficulté. On prendra d'abord :

$$\alpha=\frac{A^2}{a}$$

puis $\beta=\frac{\alpha A}{a}=\frac{A^3}{a^2}$

puis $\gamma=\frac{\beta A}{a}=\frac{A^4}{a^3}$

En continuant toujours de la même manière, on arrivera à trouver, par des quatrièmes proportionnelles, la valeur de $x=\frac{\psi c}{c}$

Pour $x=\frac{abc-d^3}{mn+p^2}$.

On posera $abc=d^2\alpha, mn=d\beta, p^2=d\gamma$

d'où $x=\frac{d^2(\alpha-d)}{d(\beta+\gamma)}=\frac{d(\alpha-d)}{\beta+\gamma}$

x s'obtient donc en construisant une quatrième proportionnelle aux trois lignes $\beta+\gamma$, $\alpha-d$ et d. Quant aux lignes auxiliaires α, β, γ, elles seront données par les relations

$$\alpha=\frac{abc}{d^2},\ \beta=\frac{mn}{d},\ \gamma=\frac{p^2}{d}$$

que l'on sait construire d'après ce qui précède.

Tout l'artifice de la méthode consiste donc à transformer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs du premier degré.

Les expressions les plus simples des radicaux du second degré sont

$$\sqrt{ab},\ \sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2-b^2}.$$

La première est la moyenne proportionnelle entre a et b (voyez prob. XIX, col. 135).

La seconde est l'hypothénuse du triangle rectangle qui a a et b pour côtés de l'angle droit.

La troisième est un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui a pour hypothénuse a, et pour autre côté de l'angle droit b.

On peut encore considérer $\sqrt{a^2-b^2}$ comme la moyenne proportionnelle entre $a+b$ et $a-b$.

Pour construire un radical du second degré plus compliqué, on transforme la quantité sous le radical en une fraction dont le numérateur et le dénominateur soient des produits de lignes.

Un radical dont l'indice est une puissance paire de 2, peut toujours se construire par la règle et le compas : soit par exemple

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^7-3a^4b^3+b^7}{a^3+b^3}}$$

Nous poserons $b^3=a^2\alpha, b^7=a^6\beta$, d'où,

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^4(a-3\alpha+\beta)}{a+\alpha}}$$

soit $\gamma=\frac{a(a-3\alpha+\beta)}{a+\alpha}$ et $\delta=\sqrt{a\gamma}$

On aura $x=\sqrt[4]{a^3\gamma}=\sqrt{a\sqrt{a\gamma}}$

$=\sqrt{a\delta}$.

Pour construire les racines d'une équation du second degré, on n'a pas besoin de la résoudre. Il suffit de remarquer que l'équation

$$x^2-ax=-b^2$$

peut se mettre sous la forme

$$x(a-x)=b^2.$$

Les racines x et $a-x$ sont donc deux lignes dont la somme est a et dont le rectangle est égal à un carré donné b^2 (voyez prob. XXV, col. 136).

L'équation $x^2+ax=b^2$ ne diffère de la première qu'en ce que les racines sont des signes contraires aux racines de celle-ci

L'équation $x^2 - ax = + b^2$ revient à $x(x - a) = b^2$

Les racines x et $-(x - a)$ sont donc deux lignes dont les valeurs absolues sont telles que leur différence est égale à a, et leur rectangle est égal au carré b^2 (Voy. prob. XXVI, col. 136.)

L'équation $x^2 + ax = + b^2$ a ses racines de signes contraires à celles de la précédente.

On peut donc construire facilement les valeurs absolues de l'équation générale du second degré.

$$x^2 \pm ax = \pm b^2.$$

Il n'est pas possible de construire avec la règle et le compas les expressions irrationnelles qui ne peuvent pas se réduire à des radicaux du second degré.

Telle est la cause pour laquelle les anciens ne sont pas parvenus à résoudre les fameux problèmes de la *duplication du cube* et de la *trisection de l'angle* sans employer les sections coniques ou d'autres lignes différentes de la ligne droite et de la circonférence.

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES DE QUELQUES RÉSULTATS DE GÉOMÉTRIE. — Il existe plusieurs expressions élégantes de l'aire A d'un triangle en fonction de divers éléments qui déterminent ce triangle.

1° Si l'on donne les trois côtés a, b, c et que l'on pose $2p = a + b + c$ on aura :

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

2° Si l'on nomme a', b', c', les trois droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés opposés, droites qui se coupent en un même point, et que l'on pose

$$2p' = a' + b' + c'$$

on aura encore :

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{p'(p' - a')(p' - b')(p' - c')}$$

3° Si l'on désigne par h, h' et h'' les trois hauteurs du triangle, et que l'on pose

$$2H = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$$

on aura

$$\frac{1}{A} = 4\sqrt{H\left(H - \frac{1}{h}\right)\left(H - \frac{1}{h'}\right)\left(H - \frac{1}{h''}\right)}$$

L'aire d'un quadrilatère inscrit, dont les quatre côtés sont a, b, c, d, a pour expression

$$A = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

dans laquelle $2p = a + b + c + d$.

L'aire du trapèze exprimée en fonction des quatre côtés est

$$A = \frac{a + c}{a - c}\sqrt{(p - a)(p - c)(p - b - c)(p - c - d)}$$

a et c sont les deux côtés parallèles, et on a $2p = a + b + c + d$

Soit un solide (fig. 133) compris entre deux rectangles BC, EF, dont les plans sont parallèles et dont les faces latérales sont, par conséquent, des trapèzes.

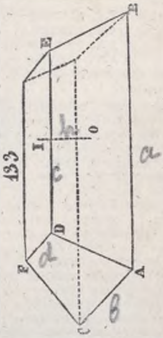
Posons $AB = a$, $AC = b$, $DE = c$, $DF = d$, et désignons par h la distance OI des deux bases parallèles. L'expression du volume V de solide sera.

$$V = \frac{h}{6}\left[ab + cd + (a + c)(b + d)\right]$$

Si l'on fait $a = 2^m,50$, $b = 1^m,50$, $c = 1^m,50$, $d = 0^m,50$, $h = 0^m\,50$, il en résulte

$$V = 1^{mc},04166...$$

Telle est la forme que l'on donne ordinairement aux tas de sable ou de cailloux destinés à



l'approvisionnement des routes, et on compte ces tas pour un mètre cube en négligeant les 0,0417 d'excédant.

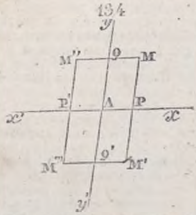
REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES. — Lorsque l'on cherche à fixer par le calcul la position d'un point, et que les conditions de l'énoncé s'appliquent, non pas à un seul point, mais à tous les points d'une même ligne, on arrive à une équation unique entre deux inconnues, comme on devait s'y attendre, puisque le problème est indéterminé.

Cette équation doit pouvoir servir à trouver le *lieu géométrique* cherché ou la suite des points qui jouissent de la propriété commune. Et réciproquement toute équation à deux variables représente un lieu géométrique sur un plan.

Mais quelles sont ces variables, ou, en d'autres termes, quelles lignes choisit-on pour déterminer la position d'un point sur un plan.

On prend ordinairement les distances de ce point à deux *axes* fixes A x, Ay (fig. 134) qui

134



se coupent suivant un angle connu, la distance à chacun des axes étant mesurée parallèlement à l'autre axe.

Ainsi le point M est déterminé dans l'angle yAx par l'*abscisse* x = AP = MQ et par l'*ordonnée* y = AQ = MP. On convient de regarder comme positives les abscisses comptées dans la direction Ax, et les ordonnées comptées dans la direction Ay. Les abscisses deviennent négatives dans le sens Ax' et les ordonnées deviennent aussi négatives dans le sens Ay'.

On a donc les résultats suivants pour tous les points placés dans l'un des quatre angles que font les deux *axes des coordonnées* xx', yy'.

Dans l'angle yAx, abscisse +, ordonnée +.
yAx', abscisse —, ordonnée +.
y'Ax, abscisse +, ordonnée —.
y'Ax', abscisse —, ordonnée —.
à l'*origine* des coordonnées A, on a $x = 0$, $y = 0$.

On conçoit donc comment on peut construire par points le lieu géométrique représenté par une équation à deux variables. On fera croître successivement l'une des variables x, par exemple, depuis 0 jusqu'à l'infini positif, représenté par $+\infty$, et depuis 0 jusqu'à l'infini négatif $(-\infty)$, et on déterminera les valeurs correspondantes positives et négatives que l'équation fournira pour y. On aura alors dans chacun des quatre angles des coordonnées les points qui appartiennent au lieu géométrique cherché.

Ce qui est très-remarquable, c'est que le degré de l'équation ne change pas lorsque l'on change de position les axes des coordonnées. Ce degré est donc éminemment propre à servir de base de classification pour les lignes, et on partage celles-ci par *ordres* ou *degrés*.

Les formules générales propres à la transformation des coordonnées sont :

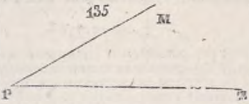
$$x = a + \frac{x' \sin.(\theta - \alpha) + y' \sin.(\theta - \alpha')}{\sin.\theta}$$

$$y = b + \frac{x' \sin.\alpha + y' \sin.\alpha'}{\sin.\theta}$$

dans lesquelles x et y représentent les anciennes coordonnées d'un point quelconque exprimées en fonctions des nouvelles coordonnées x', y', du même point, en fonction des anciennes coordonnées a, b, de la nouvelle origine, de l'ancien angle θ des axes, de l'angle α que le nouvel axe des x' fait avec l'ancien axe des x, de l'angle α' que le nouvel axe des y' fait avec l'ancien axe des x.

On emploie encore un autre système de coordonnées que l'on appelle *polaires*, et qui ne pouvant servir à la classification des lignes a néanmoins, dans certains cas, des avantages qui lui sont propres. Ainsi les coordonnées polaires du point M (fig. 135) sont l'angle

135



$\omega =$ MPz que le *rayon vecteur* MP mené de ce point au *pôle* P fait avec l'*axe* fixe Pz, et la longueur ρ de ce rayon vecteur.

Pour transformer une équation à deux variables rapportée aux coordonnées rectilignes x et y, en une autre rapportée aux coordonnées polaires ρ et ω, il faut employer les formules

$$x = a + \frac{\rho \sin.(\theta - \alpha - \omega)}{\sin.\theta}$$

$$y = b - \frac{\rho \sin.(\alpha + \omega)}{\sin.\theta}$$

dans lesquelles a et b sont les coordonnées rectilignes du pôle, θ l'angle des axes de ces coordonnées, et α l'angle que l'axe polaire fait avec l'axe des x.

Réciproquement pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées ordinaires, on emploiera les formules

$$\rho = \sqrt{(x-a) + (x-a)(y-b)\cos.\theta + (y-b)^2}$$

$$\text{Tang.}\,\omega = \frac{-(x-a) + (y-b)(\sin.\theta - \cos.\theta \,\text{tang.}\,\alpha)}{x - a + (y-b)(\cos.\theta + \sin.\theta\,\text{tang.}\,\alpha)}$$

On appelle *algébriques* les équations à deux variables qui peuvent se ramener à la forme $ay^m + (bx + c)y^{m-1} + (dx^2 + ex + f)y^{m-2} + \text{etc.} = 0$.

Les autres équations sont appelées *transcendantes*.

De là la distinction entre les lignes algébriques et les lignes transcendantes. Les équations de ces dernières ne pourraient être composées d'un nombre limité de termes renfermant les puissances des variables x et y. Mais elles prennent quelquefois une forme très-simple en coordonnées polaires.

Une ligne algébrique du degré m ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de m points.

Les équations du premier degré à une ou deux variables ne représentent que des lignes droites.

Les équations du second degré ne représentent qu'une des trois sections coniques, ou un système de lignes droites.

Newton a fait l'énumération des lignes du troisième degré, et il en a trouvé 72 comprises sous 14 divisions. Stirling a ajouté 4 espèces que Newton avait omises. Cramer en a trouvé encore 2 autres, ce qui fait en tout 78 espèces.

Euler a entrepris la classification générale des lignes du quatrième degré, et il a trouvé 146 genres renfermant eux-mêmes pour la plupart plusieurs espèces qui ont entre elles des différences notables.

La combinaison des équations qui représentent les lignes droites et courbes conduit à la démonstration de toutes les propriétés de ces lignes, et à la détermination de tous les éléments des figures de géométrie. Et réciproquement, la connaissance des propriétés des lignes ou d'un nombre d'éléments suffisant sert à trouver les équations de ces lignes.

Par exemple pour la ligne droite, dont l'équation est

$$y = ax + b$$

l'angle des axes des coordonnées étant θ, l'angle α que cette droite fait avec l'axe des x sera déterminé par la relation

$$\text{Tang.}\,\alpha = \frac{a \sin.\,\theta}{1 + a \cos.\,\theta}$$

et réciproquement, l'équation de la ligne droite qui fait un angle α avec l'axe des x, et qui a b pour coordonnée à l'origine, est

$$y = \frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,(\theta-\alpha)}\,x + b.$$

On trouvera de même l'équation d'une droite qui passe par deux points donnés, ou par un point donné et qui est parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée, ou qui fait un angle quelconque avec celle-ci ; on déterminera les coordonnées du point d'intersection de deux droites, la distance de deux points, etc.

L'équation générale du second degré à deux variables est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

elle représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que $B^2 - 4AC$ est négatif, positif ou nul.

Dans les deux premiers cas, il est toujours possible, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, de trouver un point tel qu'en le prenant pour origine des coordonnées, les termes du premier degré disparaissent de l'équation transformée. Ce point est le centre de la courbe.

Il est toujours possible, pour une quelconque des trois courbes, de trouver deux axes rectangulaires tels qu'en les prenant pour axes des coordonnées, le terme qui renferme le rectangle des variables disparaisse. Même, dans le cas de la parabole, le terme qui renferme le carré d'une des variables disparaîtra en même temps que le rectangle.

L'équation générale peut donc se ramener à l'une des trois formes suivantes :

$$y^2 + m^2x^2 = p \quad \text{(ellipse).}$$

$$y^2 - m^2x^2 = p \quad \text{(hyperbole).}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{(parabole).}$$

Les deux premières équations peuvent se mettre sous une forme très-symétrique, savoir :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

$2a$ et $2b$ sont le grand et le petit axe de l'ellipse : $2a$ est l'axe transverse et $2b$ le second axe de l'hyperbole. Ces deux courbes ont alors pour coordonnées leurs axes principaux. Leurs foyers sont situés sur l'axe des x à des distances du centre égales à $\sqrt{a^2 - b^2}$ pour l'ellipse et à $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour l'hyperbole.

Le *paramètre* ou la double ordonnée qui passe par le foyer a pour valeur $\frac{2b^2}{a}$ dans l'ellipse et l'hyperbole et $2p$ dans la parabole.

Les trois courbes sont représentées par l'équation polaire très-simple

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos.\,\omega}$$

dans laquelle p représente le demi-paramètre de la courbe ; e étant moindre que 1, plus grand que 1 ou égal à 1, suivant que la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. L'origine des coordonnées polaires est ici l'un des foyers, et l'axe des foyers de la courbe est pris pour axe polaire.

Le cercle est un cas particulier de l'ellipse : son équation, lorsqu'il est rapporté à deux axes rectangulaires quelconques passant par son centre est

$$x^2 + y^2 = r^2$$

r désigne le rayon.

Ces diverses équations des lignes du second ordre renferment implicitement toutes les propriétés que nous avons énoncées sur ces lignes et une foule d'autres très-curieuses, auxquelles la synthèse des anciens ne conduit souvent que par une voie plus pénible.

Des points, des lignes et des surfaces dans l'espace. — On détermine la position d'un point dans l'espace par ses trois coordonnées x, y, z, ou par ses distances à trois plans fixes qui se coupent suivant les trois axes des coordonnées ; distances mesurées, pour chacun des plans, parallèlement à l'intersection des deux autres plans.

Toute équation à trois variables représente une surface dans l'espace.

Pour déterminer une ligne, il faut deux surfaces qui se coupent, ou deux équations à deux ou à trois variables.

Une équation à deux variables représente une surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe de celle des coordonnées qui manque.

Toute équation du premier degré à deux ou à trois variables représente un plan. Lorsqu'elle est complète, elle se met sous la forme très-simple

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

a, b, c sont les coordonnées à l'origine, ou les longueurs des axes comprises entre l'origine et le plan, respectivement sur l'axe des x, des y et des z.

On peut éliminer entre deux équations à trois variables une variable quelconque. Par conséquent, on peut substituer aux deux équations à trois variables qui représentent une ligne, deux autres équations à deux variables seulement.

Ainsi aux deux équations complètes qui représentent des plans dont l'intersection détermine une ligne droite, on substituera les équations

$$x = az + b \qquad y = pz + q$$

dont l'ensemble représente une ligne droite quelconque.

La transformation des coordonnées dans l'espace s'opère au moyen de formules du premier degré de la forme

$$x = \alpha + ax' + by' + cz'$$

$$y = \beta + a'x' + b'y' + c'z'$$
$$z = \gamma + a''x' + b''y' + c''z'$$

Le degré des équations ne change donc pas lorsque l'on opère des transformations quelconques des axes des coordonnées dans l'espace.

Il est donc naturel de partager les *surfaces algébriques* en différents ordres suivant le degré de leurs équations.

Une surface du degré m ne peut pas être coupée par un plan suivant une ligne d'un degré supérieur à m, ni être rencontrée par une ligne droite en plus de m points.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ. — L'équation générale du second degré à trois variables peut toujours par un choix convenable d'axes des coordonnées, se ramener à l'une des formes

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H \ldots\ldots (a)$$
$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx \ldots\ldots (b)$$

La première représente les surfaces qui ont un centre, la seconde celles qui n'en ont pas.

L'équation (a) peut toujours être censée renfermer deux termes positifs P et P' dans le premier membre, par suite de changements convenables de signes ; et elle ne présente alors que trois cas distincts, suivant que l'on a $+$ P'' et $+$ H, $-$ P'' et $+$ H, $-$ P'' et $-$ H.

Dans le premier cas, l'équation peut se ramener à la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elle représente un *ellipsoïde*, surface limitée dans tous les sens, et dont la section par un plan est toujours une ellipse.

Dans le cas particulier où $a^2 = b^2 = c^2$ l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

représente une sphère dont le rayon est a.

Pour $-$ P'' et $+$ H, on a une équation de la forme

$$(2) \ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

qui représente l'*hyperboloïde à une nappe*. Les sections parallèles au plan des xy sont des ellipses qui augmentent avec leur distance à ce plan.

Les coupes parallèles aux plans des xz et des yz sont des hyperboles, mais qui ne tournent pas toujours leurs branches du même côté.

Pour $-$ P'' et $-$ H, l'équation se ramène à la forme

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

qui représente l'*hyperboloïde à deux nappes*.

Le plan des xy ne coupe pas la surface ; les deux autres plans coordonnés la coupent suivant des hyperboles.

A partir d'une distance convenable, les sections parallèles au plan des xy, au-dessus et au-dessous, déterminent des ellipses dont les diamètres vont en augmentant depuis 0 jusqu'à l'infini.

Toutes les sections parallèles au plan des xz ou à celui des yz donnent des hyperboles semblables et semblablement placées.

Les surfaces qui n'ont pas de centre, comprises dans l'équation (b), se réduisent à deux, suivant que l'on a tous les termes positifs ou seulement P'' négatif.

Dans le premier cas, l'équation peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{q'} = 2x.$$

Elle représente le *paraboloïde elliptique*.

Toutes les sections parallèles aux plans des xy et des xz sont des paraboles respectivement égales aux sections faites par ces deux plans eux-mêmes ; et toutes les sections faites parallèlement au plan des yz sont des ellipses qui vont en augmentant depuis un point jusqu'à l'infini.

La dernière équation, qui devient

$$(5) \qquad \frac{y^2}{q} - \frac{z^2}{q'} = 2x$$

représente le *paraboloïde hyperbolique*, la plus singulière des surfaces du second degré. Le plan des yz la coupe suivant deux droites qui se croisent à l'origine des coordonnées ; le plan des xy, suivant une parabole tournée du côté des x positifs ; le plan des xz, suivant une parabole tournée du côté des x négatifs. Toutes les sections parallèles au plan des yz sont des hyperboles dont les centres sont sur l'axe des x, et qui tournent différemment leurs branches à gauche et à droite de ce plan. Leurs asymptotes sont parallèles aux deux droites suivant lesquelles la surface est coupée par le plan des yz.

Les sections parallèles au plan des xy sont des paraboles égales à celle que détermine ce plan, de sorte que la surface du paraboloïde hyperbolique peut être engendrée par une parabole qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet restant toujours sur une autre parabole donnée.

Si l'on suppose dans l'équation (a) que H soit nul, on aura deux cas à examiner, savoir :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$$
$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0$$

La première équation représente un point unique à l'origine ; la seconde un cône dont le sommet est à l'origine.

Si l'on fait $P'' = o$ dans (a), l'équation peut prendre une des deux formes :

$$Px^2 + P'y^2 = H, \quad Px^2 - P'y^2 = H$$

La première donne un cylindre à base elliptique ou une droite, ou ne représente rien, suivant que H est positif, nul ou négatif.

La seconde donne un cylindre à base hyperbolique tant que H n'est pas nul, et deux plans qui se coupent si $H = 0$.

Pour $P' = 0$ et $P'' = 0$, l'équation (a) représente deux plans parallèles, ou un plan unique, ou deux plans imaginaires, suivant que H est positif, nul ou négatif.

En laissant de côté les cas qui rentrent dans la précédente, l'équation (b) ne donne qu'une nouvelle surface qui est un *cylindre à base parabolique*, et qui a pour équation

$$P'y^2 = 2Qx.$$

Les surfaces du second degré peuvent donc se réduire à cinq genres distincts qui comprennent comme cas particuliers les cônes et les cylindres. Comme d'ailleurs toute équation du degré m comprend implicitement les lieux géométriques des degrés inférieurs, l'équation du second degré peut donner aussi deux plans qui se coupent, deux plans parallèles, un plan unique, une droite, un point : elle peut même offrir des cas d'impossibilité, et ne représenter aucun point de l'espace.

Les surfaces du second degré jouissent d'une foule de propriétés curieuses, dont un grand nombre sont analogues à celles des lignes du même ordre. Exposons seulement ici celles de ces propriétés qui ont rapport à la forme et au mode de génération de ces surfaces.

Les sections parallèles d'une surface du second degré sont des lignes de même degré semblables et semblablement placées.

Toutes les surfaces du second ordre, le paraboloïde hyperbolique excepté, peuvent être coupées selon des cercles, par des plans parallèles conduits suivant deux directions différentes.

Si deux surfaces du second ordre se rencontrent suivant une première ligne plane, elles se couperont encore suivant une autre ligne plane.

Parmi les surfaces du second ordre, il y en a deux, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique, qui sont *réglées* et *gauches*. On peut tracer deux droites sur ces deux surfaces, par chacun de leurs points.

L'hyperboloïde à une nappe peut être engendré par une droite qui se meut le long de trois droites fixes non parallèles à un même plan; et le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui glisse sur trois droites fixes parallèles à un même plan, ou encore par une droite qui glisse sur deux droites fixes en restant toujours parallèle à un plan donné.

§ 17. *Géométrie pratique.*

On comprend ordinairement sous ce nom une foule d'applications des principes de géométrie, qui peuvent être groupées en plusieurs branches distinctes, telles que le *dessin linéaire*, le *levé des plans*, l'*arpentage*, le *nivellement*, la *stéréométrie* ou *jaugeage*, etc.

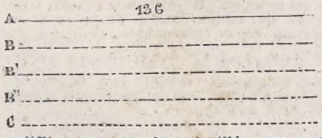
Le DESSIN LINÉAIRE enseigne à exécuter sur le papier la construction de toutes les figures susceptibles d'être définies rigoureusement.

On emploie ordinairement pour cet usage la règle, le tire-ligne, les compas à pointes sèches et à tire-ligne, le compas à verge pour les cercles de grand rayon, le compas à balustre pour les petits cercles, le T, l'équerre, le rapporteur, les échelles, le double décimètre, le compas de réduction, le compas de proportion, des crayons de mine de plomb de dureté moyenne, du caoutchouc (gomme élastique), de l'encre de Chine et des godets pour la délayer.

Les constructions du dessin linéaire peuvent se ramener à celles que nous avons eu occasion de donner dans le cours de la géométrie.

Lorsqu'il s'agit de la solution graphique d'un problème et notamment de la géométrie descriptive, on doit faire en lignes pleines A les données ou les inconnues de la question (fig. 136). Les lignes auxiliaires doivent être

136



en différents genres de *pointillé*, comme on le voit en B, B' et B'', pour les distinguer autant que possible les unes des autres. Enfin les parties des lignes données ou inconnues qui sont invisibles ou cachées par quelque plan, par quelque corps placé au-devant doivent être *ponctuées* comme C.

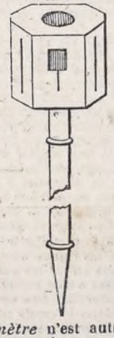
Le LEVÉ DES PLANS peut se faire avec divers instruments. La manière la plus simple consiste à n'employer que des lignes droites, que l'on trace facilement sur le terrain à l'aide de *jalons* ou bâtons droits qu'il est facile d'aligner. Les distances se mesurent ensuite sur ces lignes avec la *chaîne d'arpenteur*, composée en général de 50 chaînons de 0m 20 de longueur chacun. Les propriétés des figures élémentaires de la géométrie, des parallèles, des perpendiculaires, des transversales, etc., permettent d'effectuer avec ces moyens simples toutes les opérations possibles sur le terrain. On pourrait réunir en un corps de doctrine tous ces procédés, dont quelques-uns sont fort curieux, et constituent une espèce de *géométrie de la règle*. Nous renvoyons pour de plus amples développements à la *Perspective* de l'illustre Lambert (Zuric, 1759), aux *Récréations mathématiques* de Montucla, aux *Problèmes pour les Arpenteurs*, de Mascheroni (2e éd. 1838), aux *Solutions peu connues*, de Servois, etc.

La *géométrie du compas* de Mascheroni est un ouvrage fort remarquable, où, bien au contraire, les constructions de tous les problèmes fondamentaux de la géométrie sont effectuées seulement à l'aide du compas.

Quel que soit le procédé employé au levé des plans, les figures que l'on trace sur le terrain se ramènent implicitement à des triangles déterminés par un nombre de données suffisant.

L'*équerre d'arpenteur* (fig. 137) est, avec la chaîne, l'instrument le plus simple et le plus ordinairement employé. C'est un cylindre ou un prisme creux en cuivre, portant quatre fentes déterminées par deux plans perpendiculaires entre eux et passant par l'axe. On peut, avec cet instrument, mener des droites perpendiculaires entre elles, en regardant à travers les fentes les directions rectangulaires que ces fentes déterminent. Les figures levées à l'équerre se décomposent en triangles et en trapèzes placés rectangulairement sur diverses droites prises pour axes.

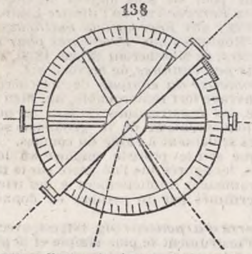
137



Le *graphomètre* n'est autre chose qu'un rapporteur avec lequel on mesure les angles sur le terrain. Autour du centre du demi-cercle peuvent se mouvoir une ou deux *alidades*, règles munies de fentes ou de fenêtres où se croisent des fils qui déterminent des lignes de visée ; les alidades sont remplacées avec avantage par des lunettes.

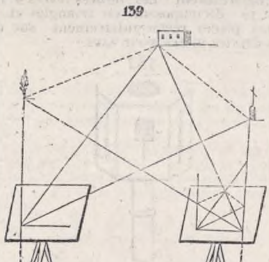
Le cercle entier (fig. 138) est un instrument bien préférable au graphomètre. S'il est disposé de telle sorte que l'on puisse à volonté entraîner avec le cercle une des lunettes qu'il porte, ou cette lunette seule, il sera facile de *répéter* les angles, c'est-à-dire d'obtenir par des observations successives le double, le triple,... le décuple de l'angle. Les erreurs de lecture, d'observation et de graduation se compensent; et comme l'angle décuple est obtenu avec autant d'approximation que l'aurait été l'angle simple, ce dernier n'est plus affecté que d'une erreur dix fois moindre que celle qui résulterait probablement d'une observation unique. Le *cercle répétiteur* est dû à notre compatriote Borda : mais le principe de la répétition des angles avait déjà été émis par l'astronome allemand Tobie Mayer.

138



Lorsque l'on a levé un plan sur le terrain avec le graphomètre ou le cercle, on le rapporte au moyen de triangles semblables à ceux qui ont été tracés ou mesurés sur le terrain. La *planchette* permet de dessiner immédiatement sur le terrain le plan qu'on veut lever (fig. 139). Il suffit pour cela de tracer sur le

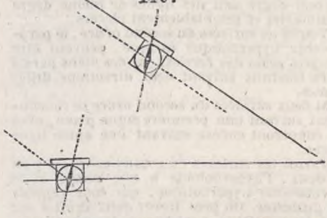
139



papier appliqué à la planchette, que l'on tient bien horizontale, les lignes avec une alidade, dans les directions où on les voit, et de prendre leurs longueurs à une échelle déterminée de la grandeur naturelle. Les sommets de certains triangles, dans lesquels se décomposent les figures, seront déterminés, sur le papier, par des intersections de droites et non plus par des mesures directes.

Enfin le levé à la *boussole* est fondé sur la propriété dont jouit l'aiguille aimantée, suspendue librement, d'avoir une direction constante dans un même lieu. La figure 140 montre que, si l'on mesure les angles que font les lignes tracées sur un plan avec l'aiguille de la boussole, le parallélisme que conservent les diverses positions de l'aiguille détermine les angles des polygones levés, et qu'il suffit alors de mesurer les côtés de ces polygones.

140.



L'ARPENTAGE a pour but principal la mesure de surfaces planes, exécutée d'après un levé de plan. Cette mesure doit être effectuée d'après la méthode de *cultellation*, c'est-à-dire qu'on doit prendre uniquement les projections horizontales des surfaces inclinées et non pas leurs développements. Cela est fondé sur ce que la pousse des végétaux s'opérant de bas en haut, verticalement, un terrain en pente comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont la base serait horizontale, ne produit pas plus, en général, que ne produirait la base elle-même.

La mesure des surfaces planes, terminées par des lignes droites ou par des courbes dont on peut obtenir l'aire, ne saurait offrir de difficulté. Mais, lorsque l'on veut mesurer exactement une surface terminée par une ligne courbe irrégulière, le mieux est d'avoir recours à la methode générale de quadrature due au géomètre anglais Thomas Simpson.

Cette méthode consiste à partager l'aire à évaluer en segments compris entre un arc de la courbe donnée et trois droites, savoir une *base* et deux ordonnées extrêmes. On divise la base en un assez grand nombre de parties égales pour qu'en élevant des ordonnées aux points de division, les arcs curvilignes compris entre les extrémités des ordonnées ne s'éloignent pas trop des cordes tirées par ces mêmes extrémités. L'aire de chaque segment curviligne est égale au tiers du produit que l'on obtient en multipliant par l'intervalle constant compris entre les ordonnées de la courbe la somme des ordonnées extrêmes augmentée du double de la somme des autres ordonnées de rang impair, et du quadruple de la somme des ordonnées de rang pair (non compris la dernière si elle est de rang pair).

Lorsqu'un polygone a été levé à l'équerre, on le connaît seulement par les coordonnées de ses sommets. Il existe une formule très-simple qui donne l'aire A du polygone en fonction de ces coordonnées, désignées par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)etc... pour les sommets comptés dans un sens déterminé à partir de l'un quelconque d'entre eux. Cette formule est

$$2\,A = x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \dots$$

$+x_{n-1}y_n - y_{n-1}x_n + x_n y_1 - y_n x_1$

Enfin il existe un admirable instrument nommé *planimètre*, dû à MM. Oppikoffer et Ernst, et encore trop peu connu, à l'aide duquel on peut déterminer mécaniquement toutes les superficies planes. Il suffit de promener une pointe sur tout le contour d'une courbe, ou de l'amener successivement sur tous les sommets d'un polygone, pour lire sur un cadran la valeur numérique de l'aire de la figure. Le planimètre a reçu l'approbation de l'Académie des sciences, de l'administration des ponts et chaussées, de celle du cadastre, et il est destiné à rendre de grands services aux ingénieurs et aux géomètres.

Les arpenteurs ont encore souvent à partager des terrains suivant des conditions données; et, à l'aide de leurs instruments, ces opérations se réduisent à des questions de géométrie théorique.

Le NIVELLEMENT (fig. 141) a pour but de déterminer les hauteurs respectives auxquelles divers points se trouvent placés sur le terrain.

Le *niveau d'eau* est l'instrument le plus simple que l'on emploie ordinairement à cette opération. Il se compose d'un tube recourbé aux deux extrémités duquel sont adaptées deux fioles de verre ouvertes, et porté sur un trépied appuyé sur le sol. Le tube est rempli d'eau qui arrive à peu près jusqu'au milieu des fioles lorsque le niveau est convenablement placé. La ligne de visée menée par les bords extérieurs des fioles tangentiellement à la surface du liquide est *horizontale*, et perpendiculaire à la direction du *fil à plomb*, qui est dite *verticale*. A l'aide d'une *mire*, ou règle graduée munie d'un *voyant*, on mesure les distances verticales comprises entre les lignes de visée et les points que l'on nivelle sur le terrain. Les différences entre ces distances verticales sont les différences de niveau. (Col. 443 et 1544.)

Par l'addition de ces différences consécutives, lorsque le terrain va en descendant, par leur soustraction lorsqu'il va en montant, on obtient les positions respectives d'un nombre quelconque de points par rapport à un même plan horizontal.

La STÉRÉOMÉTRIE est à la cubature des solides ce que l'arpentage est au levé des plans. Elle ne saurait offrir de difficulté pour les polyèdres ou pour les corps terminés par des surfaces courbes dont on sait évaluer le volume. Quant aux corps terminés par des surfaces courbes irrégulières, on les évaluera par un procédé analogue à celui de Thomas Simpson.

Si l'on suppose que le volume a mesurer soit compris entre une surface courbe, quatre plans verticaux appartenant à un parallélipipède rectangle, et la base de ce parallélipipède, on partagera le solide en tranches d'égale épaisseur par des plans parallèles à l'un des pans latéraux et équidistants entre eux. On évaluera, par la formule de Simpson, les aires de chacune de ces sections, y compris les sections extrêmes. Puis, considérant chacune de ces sections comme une ordonnée simple, on multipliera le tiers de leur distance commune par la somme des aires des sections extrêmes augmentée du double de la somme des autres sections de rang impair, et du quadruple de la somme des autres sections de rang pair.

Le nom de JAUGEAGE est plus spécialement donné à la partie de la stéréométrie qui s'applique aux corps destinés à contenir des liquides ou à y être plongés. Le jaugeage des bateaux et des navires peut s'opérer en les partageant en tranches horizontales et verticales suivant la règle précédente. La physique nous fournira plus tard un procédé plus simple et plus direct. (Col. 388.)

Le nom de *jauge* est appliqué plus particulièrement aux instruments destinés au jaugeage des tonneaux. On a proposé pour l'évaluation du volume des tonneaux diverses méthodes, qui reviennent en général à substituer au tonneau un cylindre de même longueur, et d'un diamètre intermédiaire entre celui du *bouge* (section du milieu du tonneau) et celui du fond. Les jauges les plus ordinairement employées portent une échelle de parties égales qui sert à mesurer la longueur du tonneau, et une échelle de parties inégales décroissantes que l'on appelle *échelle des diamètres*. Il suffit de multiplier le nombre qui correspond, sur cette échelle, au diamètre du cylindre équivalent du tonneau, par le nombre qui correspond à la longueur du tonneau, sur l'échelle des parties égales, pour avoir le volume cherché exprimé au moyen de l'unité de volume.

La règle donnée par l'Encyclopédie méthodique, pour obtenir le diamètre du cylindre équivalent au tonneau, consiste à retrancher du diamètre du bouge les $\frac{3}{8}$ ou les 0,375 de la différence entre le diamètre du bouge et celui du fond.

§ 18. *De l'histoire et de l'étude de la géométrie.*

Esquisse historique. L'étude de la géométrie remonte à l'origine des sociétés. On assure qu'elle prit naissance chez les Egyptiens qui se trouvaient dans la nécessité de reconnaître et de tracer les limites de leurs champs après chaque débordement du Nil.

Mais c'est seulement à Thalès et à Pythagore que commence la considération des vérités *abstraites* de la géométrie, indépendamment de leurs applications à des mesures de longueur, de superficie ou de volume.

Pythagore avait, dit-on, promis une hécatombe à Jupiter, s'il parvenait à trouver la relation qu'il cherchait entre les côtés du triangle rectangle. Cette tradition montre avec quelle passion le génie des Grecs s'était tourné vers les spéculations sublimes des sciences abstraites.

Parmi les géomètres grecs, il faut citer Anagore de Clazomène; le divin Platon, qui appelait Dieu l'*éternel géomètre*, et qui avait inscrit sur la porte de son école : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ; » Euclide, qui a réuni dans ses *éléments* les travaux de ses devanciers ; Apollonius de Perge, auteur d'un beau traité sur les sections coniques; Archimède, le plus illustre des géomètres de l'antiquité ; un certain nombre de philosophes de l'école d'Alexandrie, etc.

C'est à la méthode nouvelle des coordonnées et des équations des courbes, que Descartes publia dans sa géométrie, qu'est dû l'essor prodigieux de cette science dans les temps modernes. Cavalleri, Fermat, Barrow, Pascal, Roverval, furent souvent dignes de rivaliser avec ce grand homme et de précéder Newton et Leibnitz.

La découverte du calcul infinitésimal, faite à peu près en même temps par ces deux derniers, a donné à la géométrie une impulsion nouvelle qui dure encore aujourd'hui.

Parmi les diverses branches de la géométrie théorique qui semblent dignes d'être développées, il faut placer au premier rang ce que Leibnitz appelait la *géométrie de situation*. C'est à des idées du genre de celles que Leibnitz provoquait, qu'il faut rapporter les travaux de Vandermonde (voyez les Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences), qui, vers la fin du siècle dernier, a proposé une notation très-simple et très-expressive, au moyen de laquelle il définit clairement et rigoureusement les formes et les mouvements les plus compliqués, tels que les diverses sinuosités de la maille d'un tricot ou d'un filet, et résout un problème très-difficile sur la marche du cavalier aux échecs. Il faut encore rapporter à ces idées le beau travail de M. Poinsot sur les polygones étoilés.

De même que l'on a appliqué le calcul à la géométrie, on peut, réciproquement, appliquer la géométrie au calcul numérique. M. Cousinery, déjà connu par sa *géométrie perspective*, a publié récemment un ouvrage intitulé le *Calcul par le Trait*, où il a réuni en un corps de doctrine une foule de considérations et de procédés curieux à ce sujet.

Indications bibliographiques. — La géométrie élémentaire est enseignée dans une foule d'ouvrages qui s'adressent à diverses classes d'étudiants. Les *Eléments d'Euclide* ont dominé long-temps dans les écoles. Les Eléments de géométrie de Legendre offrent toute la rigueur des démonstrations de l'antiquité avec de notables perfectionnements ; quel que soit le mode d'enseignement adopté, ce livre passera toujours à bon droit pour un chef-d'œuvre. La géométrie de M. Lacroix présente, sous une forme moins sévère, les principes de la géométrie, et renferme quelques applications. Les ouvrages de MM. Vincent, Cirodde, etc., peuvent être recommandés aux professeurs et aux élèves. Parmi les auteurs qui se sont occupés d'applications, il faut citer principalement MM. Ch. Dupin, Bergery, Sonnet, etc. On trouvera dans la *Nouvelle Géométrie* de ce dernier presque toutes les applications indiquées précédemment par les autres, les principes de la géométrie descriptive, et, dans un petit atlas séparé du livre, des figures faites avec beaucoup de soin, dont nous avons emprunté un certain nombre.

La géométrie descriptive a été traitée par Monge, le créateur de cette science ; les ouvrages que MM. Lefébure de Fourcy et Leroy ont publiés sur ce sujet se recommandent par leur clarté et par le soin avec lequel les épures ont été faites. Le dernier surtout est très-complet. Il doit être suivi bientôt d'un nouveau volume qui renfermera les applications de la géométrie descriptive à la perspective, aux ombres, à la coupe des pierres, à la charpenterie, etc.

La géométrie analytique a été traitée avec succès par divers auteurs et notamment par MM. Biot, Lacroix, Lefrançois, Lefébure de Fourcy, etc. M. Leroy a donné, sous le titre d'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, un ouvrage où les méthodes de Monge, de MM. Poisson, Binet et d'autres savants sont exposées avec beaucoup d'ordre et de clarté.

La trigonométrie se trouve dans plusieurs des ouvrages précédemment cités, tels que ceux de Legendre, de M. Lefébure de Fourcy, etc. La trigonométrie publiée en italien par Cagnoli, et traduite en français par Chompré, est le traité le plus complet en ce genre.

On peut citer, comme un excellent ouvrage, les *Eléments des sections coniques*, par Mauduit. Les démonstrations sont synthétiques, et n'exigent pas la connaissance de la géométrie analytique.

Il n'y a peut-être aucune branche des mathématiques pures sur laquelle on ait écrit autant que sur la géométrie. L'*Introduction à l'analyse des infiniment petits*, d'Euler, l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, de Cramer, les œuvres des grands géomètres, Archimède, Apollonius, Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, L'Hospital, Bernouilli, Huygens, Lambert, Monge, etc., les collections académiques doivent être indiquées aux personnes qui veulent acquérir de l'érudition en géométrie.

Mascheroni, dans sa *Géométrie du compas*, Carnot, dans sa *Géométrie de position*, M. Poncelet, dans ses *Propriétés projectives des figures*, MM. Chasles, Lhuilier, Ch. Dupin et beaucoup d'autres, dans des mémoires détachés, ont étendu singulièrement, depuis le commencement de ce siècle, le domaine des spéculations purement géométriques. Les *Annales de Mathématiques*, de M. Gergonne, sont peut-être le recueil scientifique le plus riche en productions de ce genre. Le *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, celui de M. Crelle, publié à Berlin, la *Correspondance physique et mathématique* de M. Quetelet, publiée à Bruxelles, et les mémoires des diverses académies renferment aussi beaucoup de mémoires importants sur toutes les branches de la géométrie.

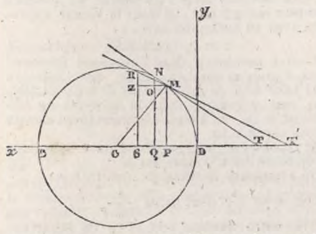
IV. CALCUL INFINITÉSIMAL.

§ 1. *Principes généraux du calcul différentiel.*

ORIGINE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL. — C'est à un problème de géométrie que le calcul infinitésimal doit son origine.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mener une tangente MT au point M de la circonférence MDB (fig. 1). Il suffira évidemment de connaître la *sous-tangente* PT, c'est-à-dire la longueur de l'axe des abscisses comprise entre le pied de l'ordonnée MP et le point T, où la tangente coupe cet axe.

1



Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un nombre *infini* de côtés; soit MN un de ces côtés *infiniment petits;* ce côté, prolongé jusqu'à l'axe, sera évidemment la tangente cherchée, puisqu'il ne pénétrera pas dans l'intérieur du polygone.

Pour tous les points de la circonférence, on a la relation

$$\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$$

En désignant le rayon CM par r, l'ordonnée MP par y, l'abscisse DP par x, il vient

$$y^2 + (r-x)^2 = r^2$$

ou

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Telle est l'équation de la circonférence rapportée aux axes Dx, Dy, équation applicable au point M.

On aura aussi pour le point N

$$(y + \mathrm{NO})^2 = 2r(x + \mathrm{MO}) - (x + \mathrm{MO})^2$$

retranchant la première équation de la seconde, il vient, pour le rapport de MO à NO,

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}} = \frac{2y + \mathrm{NO}}{2r - 2x - \mathrm{MO}}$$

d'un autre côté la similitude des triangles NOM, MPT, donne la proportion :

$$\mathrm{NO} : \mathrm{MO} :: \mathrm{MP} : \mathrm{PT},$$

d'où

$$\mathrm{PT} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}}\,\mathrm{MP} = \frac{(2y + \mathrm{NO})\,y}{2r - 2x - \mathrm{MO}}$$

La valeur de la sous-tangente PT serait donc déterminée si NO et MO étaient connues. Mais ces quantités sont *infiniment petites*, comme le côté MN; on ne commettra donc qu'une erreur infiniment petite en négligeant NO, accroissement infiniment petit de l'ordonnée y, à côté de la quantité finie $2y$, et MO, accroissement infiniment petit de l'abscisse x, à côté de la quantité finie $2r-2x$, et on aura exactement

$$\mathrm{PT} = \frac{y^2}{r-x}$$

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'erreur commise en négligeant les quantités infiniment petites est absolument nulle; de sorte que ces quantités qui entrent d'abord dans le calcul, disparaissant du résultat final auquel on parvient, n'entachent ce résultat d'aucune inexactitude.

Pour l'exemple ci-dessus, il est facile de s'assurer *à posteriori* que l'on parviendrait à la même expression de la sous-tangente PT, en partant du principe connu que le triangle CMT est rectangle en M, et se décompose en deux triangles CMP, MTP semblables entre eux et au premier.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS FONDAMENTALES. Le calcul différentiel a pour but l'application du calcul algébrique à des considérations analogues à celles qui se sont présentées dans l'exemple précédent, c'est-à-dire que ce calcul s'exerce sur des quantités infiniment petites combinées avec des quantités finies, pour arriver à la détermination de quantités finies inconnues.

L'accroissement infiniment petit de la variable x est ce que l'on appelle sa *différentielle*, et est désigné par le symbole dx; de même dy est l'accroissement infiniment petit ou la différentielle de y. Dans l'exemple précédent, on a $\mathrm{MO} = dx$, $\mathrm{NO} = dy$. Le triangle MNO est appelé *triangle différentiel.*

On voit qu'en général la sous-tangente PT est égale au produit de l'ordonnée MP ou y, par le rapport $\frac{dx}{dy}$ purgé des quantités infiniment petites qu'il renfermait d'abord; et ce rapport lui-même se déduit de l'équation de la courbe.

Soit généralement cette équation

$$y = f(x)$$

donnons à x l'accroissement infiniment petit dx, y augmentera de dy, et on aura

$$y + dy = f(x + dx)$$

retranchant la première équation de la seconde, il vient

$$dy = f(x + dx) - f(x)$$

Il suffit donc de développer le second membre pour connaître dy au moyen de dx, et par suite dx au moyen de dy.

Si l'on divise les deux membres par dx, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ est ce que l'on appelle le *coefficient différentiel* de la fonction y. C'est la valeur du rapport entre la différentielle de cette fonction et la différentielle de la *variable indépendante* x. Ou bien, comme le second membre de la relation précédente a une valeur vers laquelle convergerait de plus en plus ce rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

à mesure que l'on donnerait à h des valeurs de plus en plus petites, on dit encore que le coefficient différentiel est la *limite du rapport* entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable indépendante.

Pour bien comprendre l'existence de cette limite, il suffit de se reporter à l'exemple par lequel nous avons commencé. En effet, si au lieu de la tangente MT, on considère d'abord une sécante RMT′, la similitude des deux triangles RMZ, MT′P, conduira à la relation

$$\mathrm{TP}+\mathrm{T'T}=\mathrm{MP}\,\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}$$

d'un autre côté, d'après l'équation du cercle, on trouvera

$$\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}=\frac{2y+\mathrm{RZ}}{2r-2x-\mathrm{MZ}}$$

Or, si l'on fait tourner la sécante RMT′ autour du point M, de manière à rapprocher de plus en plus le point R de ce point, la sécante se rapprochera d'autant plus de la tangente MT; RZ et MZ diminueront en même temps, et lorsque la sécante sera devenue tangente, on pourra considérer RZ et MZ comme absolument nulles, de sorte que $\frac{y}{r-x}$ est la limite du rapport $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}$, ou la valeur du coefficient différentiel $\frac{dx}{dy}$. On a vu dans l'ALGÈBRE (col. 97) que la *dérivée* $f'(x)$ d'une fonction de x, $f(x)$ est le coefficient de la première puissance de h dans le développement $f(x+h)$. Cette dérivée est elle-même la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Le coefficient différentiel est donc la même chose que la dérivée, et l'on passera sans difficulté de la différentielle d'une quantité à la dérivée, en supprimant le facteur dx, et de la dérivée à la différentielle en multipliant par dx.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS SIMPLES. Quelle que soit la manière dont on envisage le symbole $\frac{dy}{dx}$, on sent qu'il est important de trouver d'abord les règles pour la différentiation de toutes les fonctions possibles.

Ces règles sont résumées ci-dessous

	Valeur de la fonction y.	*Valeur de la différentielle dy.*
FONCTIONS ALGÉBRIQUES.	$a+x$ . . .	dx
	$a-x$ . . .	$-dx$
	ax. . . .	$a\,dx$
	$\frac{a}{x}$	$-\frac{adx}{x^2}$
	x^m	$mx^{m-1}\,dx$
FONCTIONS TRANSCENDANTES.	a^x	a^x Log. nep. $a\,dx$
	Log. x . . .	$\mathrm{M}\frac{dx}{x}$
	Sin. x . . .	Cos. $x\,dx$
	Cos. x . . .	$-$Sin. $x\,dx$
	Arc. sin. x .	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
	Arc. cos. x	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Si dans l'expression $y=x^m$, on fait $m=\frac{1}{2}$, d'où $y=\sqrt{x}$, on en tire

$$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Les différentielles de la fonction exponentiell a^x, et de la fonction logarithmique Log. x, ren ferment deux symboles Log. nep. a et M qu'il faut expliquer.

Lorsque l'on cherche la limite vers laquelle *converge* la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

c'est-à-dire la limite dont on s'approche de plus en plus à mesure que l'on prend plus de termes de cette série, on trouve un nombre compris entre 2 et 3, et dont la valeur exprimée avec 10 décimales est

$$e=2,7182818285$$

C'est ce nombre e, dont l'usage est fréquent dans l'analyse mathématique, que Néper a pris pour base de son système de logarithmes. Log. nep. a indique donc le *logarithme népérien* de a, on l'écrit ordinairement sous la forme abrégée la.

M représente le logarithme de e pris dans le système dont la base est a.

On a toujours la relation (Col. 1518.)

$$\text{Log. } e=\frac{1}{la} \text{ d'où } la=\frac{1}{\log. e}$$

Dans notre système ordinaire de logarithmes où $a=10$, on a

$$\mathrm{M}=\log.\ e=0{,}4342944819$$

Et réciproquement

$$\text{Log. nep. } 10=2{,}3025850930.$$

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES. — Soit z une *fonction de fonction* de x, déterminée par les équations

$$z=\mathrm{F}(y),\ y=f(x),$$

la différentielle de z prise par rapport à la variable x, sera donnée par la formule

$$dz=\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

De même, si l'on avait

$u=\mathrm{F}(z)$, $z=f(y)$, $y=\varphi(x)$, il viendrait

$$du=\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,dx.$$

La question est ramenée à chercher autant de coefficients différentiels simples qu'il y a de fonctions. Exemples :

1° Pour $u=x\pm y\pm z\pm t\pm$ etc.

on a $du=dx\pm dy\pm dz\pm dt\pm$ etc.

2° Pour $u=xyzt\ldots$, il vient

$du=yzt\ldots dx+xzt\ldots dy+xyt\ldots dz+$ etc

3° Pour $u=\frac{z}{y}$, on a $du=\frac{ydz-zdy}{y^2}$

4° Pour $u=y^z$, il vient

$$du=y^{z-1}(zdy+ylydz)$$

ly désigne le logarithme népérien de y.

En général, pour différentier une fonction composée quelconque, il suffit de la différentier successivement par rapport à chacune des fonctions dont elle est formée, comme si les autres étaient constantes, et de faire la somme des quantités ainsi obtenues.

Exemple :

1°. $y = \text{tang.}\, x = \dfrac{\sin.\, x}{\cos.\, x}$

$$dy = \left(1 + \text{tang.}^2\, x\right) dx$$

2°. $y = \cot.\, x = \dfrac{\cos.\, x}{\sin.\, x}$

$$dy = -\left(1 + \cot.^2\, x\right) dx$$

3°. $y =$ arc tang. x, d'où $x = \dfrac{\sin.\, y}{\cos.\, y}$

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

4°. $y =$ arc cot. x, d'où $x = \dfrac{\cos.\, y}{\sin.\, y}$

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

généralement, si l'on a

$$u = \mathrm{F}\,(y, z, t, v \ldots)$$

$y, z, u, v\ldots$ étant des fonctions de x, on aura

$$du = \frac{du}{dy}\, dy + \frac{du}{dz}\, dz + \frac{du}{dt}\, dt + \text{etc.}$$

$\dfrac{du}{dy}\, dy,\ \dfrac{du}{dz}\, dz, \ldots$ sont ce que l'on appelle des *différentielles partielles* de la fonction u, c'est-à-dire qu'elles sont prises séparément par rapport à chacune des fonctions y, z, t, v, les autres fonctions étant considérées comme constantes.

La formule subsiste lors même que plusieurs ou la totalité des variables $y, z, t, v, \ldots$ sont *indépendantes*. Seulement les symboles dy, dz, dt, etc... représentent des quantités constantes dans le cas où ils s'appliquent à des variables de cette espèce.

Lorsque l'on a une relation telle que

$$u = \mathrm{F}\,(x, y) = o$$

où y est *fonction implicite* de x, c'est-à-dire où l'on n'obtiendrait la valeur de y en x qu'après avoir résolu l'équation, il n'est pas nécessaire, néanmoins, de résoudre cette équation pour avoir la différentielle de y au moyen de celle de x ; on a pour cela la formule

$$dy = -\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dy}}\, dx$$

En général, si n variables $x, y, z, \ldots$ sont liées entre elles par les m équations $u = o$, $v = o$, $w = o, \ldots$ on aura en même temps les m équations différentielles $du = o$, $dv = o$, $dw = o, \ldots$ à l'aide desquels on pourra déterminer les différentielles de m variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

Différentielles successives. La différentielle et la dérivée d'une fonction de x sont de nouvelles fonctions dont on peut chercher la différentielle et la dérivée. On est conduit ainsi à considérer les différentielles et les dérivées du second, du troisième... ordre.

La différentielle de dy s'indique par $d.\, dy$ ou pour abréger par $d^2 y$. Les différentielles successives sont donc

$$dy,\ d^2 y,\ d^3 y, \ldots d^n y$$

Les successives dérivées de y étant

$$y',\ y'',\ y''', \ldots\ y^{(n)}$$

on aura

$$dy = y' dx,\ d^2 y = y'' dx^2 \ldots d^n y = y^{(n)}\, dx^n$$

on a encore l'expression générale

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\, dx^n$$

dans laquelle $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ représente le coefficient différentiel ou la dérivée du n^e ordre.

Pour des fonctions d'une seule variable, ces différentiations successives n'offrent aucune difficulté.

Pour une fonction z de deux variables indépendantes x et y, on a la formule $d^2 z = \dfrac{d^2 z}{dx^2}\, dx^2 + 2 \dfrac{d^2 z}{dx\, dy}\, dx\, dy + \dfrac{d^2 z}{dy^2}\, dy^2$

Le premier terme provient de la différentiation de $\dfrac{dz}{dx}$ par rapport à x ; le dernier de $\dfrac{dz}{dy}$ différentié par rapport à y ; le terme intermédiaire est la somme des résultats égaux que l'on obtient en différentiant $\dfrac{dz}{dx}$ par rapport à y, et $\dfrac{dz}{dy}$ par rapport à x

En général, si z est fonction des variables indépendantes x, y, t, u, on a la formule

$$d^n z = \left(\frac{dz}{dx}\, dx + \frac{dz}{dy}\, dy + \frac{dz}{dt}\, dt + \ldots\right)^n$$

dans le second membre de laquelle il faudra remplacer dz^n par $d^n z$, après avoir effectué le développement de la n^{eme} puissance du polynome.

Dans le cas où la fonction z renferme des variables dépendantes, il faut regarder comme variables leurs différentielles ; alors la formule précédente ne subsiste plus.

En ayant égard à la distinction qui doit être établie entre les différentielles des variables indépendantes et celles des variables dépendantes, il est facile d'obtenir aussi les différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

§ 2. *Applications du calcul différentiel à l'analyse algébrique.*

Valeurs des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée. Soit une fraction $\dfrac{f\,(x)}{\mathrm{F}\,(x)}$ dont les deux termes deviennent nuls à la fois lorsque l'on y remplace x par a. Cette indétermination du symbole $\frac{0}{0}$ indique l'existence d'un facteur commun aux deux termes de cette fraction. Pour obtenir la véritable valeur de cette fraction, il faut prendre les dérivées successives du numérateur et du dénominateur, et y substituer a à la place de x, jusqu'à ce que l'on arrive à deux dérivées de même ordre qui ne deviennent pas nulles à la fois par cette substitution. Alors on trouvera pour la fraction proposée une valeur nulle, finie ou infinie.

On remédie de la même manière à l'indétermination du symbole $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque les deux termes de la fraction proposée deviennent infinis à la fois.

On ramène à la règle précédente les cas où l'indétermination se présente sous l'une des formes

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS. Soit d'abord $y = f(x)$, une fonction d'une seule variable. Les valeurs de x auxquelles correspond un *maximum* ou un *minimum* sont données par la relation

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

soit $x = a$, l'une de ces valeurs. A $x = a$ correspond un maximum lorsque le premier coefficient différentiel, qui ne devient pas nul par cette substitution, est de rang pair et négatif; et un minimum lorsque ce coefficient différentiel est positif. Il n'y a ni maximum ni minimum lorsque le premier coefficient différentiel, qui ne disparaît pas, est de rang impair.

Ces propriétés ont déjà été indiquées sous une autre forme. (Voyez ALGÈBRE, col. 98.)

Les abeilles, dans leur architecture, nous offrent un exemple bien remarquable de la solution d'un problème de *minimum*. Les *alvéoles* ou cellules de ces insectes ont, comme on sait, la forme générale d'un prisme hexaèdre régulier, de sorte que, d'abord, il ne reste aucun vide entre les parois de ces alvéoles, comme on peut s'en assurer en se reportant à la fig. 57, col. 140. De plus, les *rayons* ou gâteaux sont composés de deux rangs d'alvéoles adossés de telle sorte, que l'axe de ceux qui ont leurs orifices d'un côté est dans le prolongement de l'arête commune à trois alvéoles contigus de l'autre côté. Mais ces deux rangs de cellules ne sont pas séparés par une cloison plane; chacun de ces prismes hexaèdres réguliers est terminé par un pointement à trois faces, en forme de losanges égales et également inclinées, ayant leur sommet commun sur l'axe du prisme, et pour plus longue diagonale, le côte du triangle équilatéral inscrit dans l'hexagone qui sert de base au prisme. L'angle, au sommet de ces losanges, est de 109° 28′, et l'autre angle, de 70° 32′ environ.

Or, le volume de l'alvéole ne change pas par suite de la substitution de ce pointement trièdre à la base hexagonale; mais la surface varie, et il y a une forme de losanges pour laquelle elle est un minimum, et pour laquelle, par conséquent, la cire employée à la confection des parois sera économisée le plus possible. Ce qu'il y a d'admirable, c'est que les abeilles ont précisément atteint ce minimum. Car en cherchant par le calcul les angles de la losange qui doivent satisfaire à cette condition, on trouve que la tangente de la moitié d'un de ces angles a pour valeur $\sqrt{2}$. Cet angle est donc de 109° 28′ 16″, et le supplément de 70° 31′ 44″. Nous renvoyons, pour plus amples détails, aux *Annales des sciences naturelles*, t. XIII.

Dans le cas d'une fonction de deux variables,

$$z = f(x, y)$$

il faut que l'on ait à la fois

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = 0$$

il faut de plus que les dérivées $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ soient de même signe et satisfassent à la relation d'inégalité

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0$$

Ces conditions étant remplies, il y a :

1° maximum pour $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$

2° minimum pour $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$.

En général pour une fonction u, d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, t\ldots$, il faut que l'on ait séparément

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0 \quad \text{etc...}$$

Les valeurs que ces équations fournissent pour $x, y, z\ldots.$ répondent à un maximum ou à un minimum, suivant qu'elles donnent pour les coefficients différentiels

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2},$$

des quantités toutes trois négatives ou toutes trois positives. Elles doivent encore satisfaire à d'autres conditions trop compliquées pour trouver place ici.

SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN. La première de ces fameuses formules donne le développement suivant les puissances croissantes de h du résultat $f(x+h)$, que l'on obtient en substituant $x + h$ à la place x dans la fonction $y = f(x)$. Cette formule est

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3.} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}$$

Elle a déjà été donnée sous une autre forme (voir ALGÈBRE, col. 97.)

On peut en déduire une autre série remarquable qui porte le nom de Maclaurin, mais qui paraît due à Stirling, savoir :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots. + \frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}f^{(n)}(0) + \ldots$$

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{(n)}(0)$$

étant les valeurs que prennent les fonctions y et les coefficients différentiels successifs

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n},$$

lorsque l'on y fait $x = 0$.

La formule de Stirling est très-utile pour développer les fonctions d'une seule variable suivant les puissances croissantes de cette variable.

Elle donnera successivement :

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\,la + \frac{x^2}{1.2}\,l^2a + \text{etc.}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}$$

$$- \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \text{etc.}$$

$$\text{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$- \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

De la formule de Taylor, on tirera :

$$\text{Log.}(1 \pm x)$$

$$= \text{M}\left(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots\right)$$

série qui n'est convergente que lorsque x est < 1.

Mais la série

$$\text{Log}(1+y) = \text{Log.}\,y$$

$$+2\text{M}\left(\frac{1}{1+2y} + \frac{1}{3(1+2y)^3} + \frac{1}{5(1+2y)^5} + \text{etc.}\right)$$

est très-convergente, quel que soit y.

M est le module ou la valeur de l'unité divisée par le logarithme népérien de la base du système. Pour les logarithmes ordinaires, on sait que $\text{M} = 0{,}4342945$.

Formules de Lagrange et de Laplace. Lagrange a été conduit par induction à une formule remarquable au moyen de laquelle on obtient le développement d'une fonction quelconque de y, $\psi(y)$ lorsque y est déterminé par la relation :

$$y = a + \varphi(y)$$

Cette formule est :

$$\psi(y) = \psi(a) + \psi'(a)\,\varphi(a)$$

$$+ \frac{1}{1.2}\,\frac{d.\,\psi'(a)\,\varphi(a)^2}{da}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^2\,\psi'(a)\,\varphi(a)^3}{da^2} + \ldots$$

Elle est d'une grande utilité pour la solution du fameux problème du *retour des suites*, qui a pour but, étant donné un développement de z en fonction de y, savoir

$$z = \alpha y + \beta\, y^2 + \gamma\, y^3 + \text{etc.}$$

de trouver la forme du développement de y en z, ou plus généralement de y^n en z.

Si l'on pose

$$a = \frac{z}{\alpha}$$

et

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{a}\left(\beta + \gamma\, y + \delta\, y^2 + \ldots\right)$$

on trouve, d'après la formule de Lagrange

$$y^n = a^n - \frac{n}{1.\alpha}\, a^{n+1}\left(\beta + \gamma a + \delta\, a^2 + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n}{1.2.\alpha^2}\,\frac{d.a^{n+3}\left(\beta + \gamma a + \delta a^2 + \ldots\right)^2}{da}$$

$$- \frac{n}{1.2.3.\alpha^3}\,\frac{d^2\,a^{n+5}\left(\beta + \gamma a + \delta a^2 + \ldots\right)^3}{da^2}$$

$$+ \text{etc.}$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, on obtient, en faisant les calculs indiqués dans le second membre, la nouvelle formule

$$y = \frac{1}{\alpha} z - \frac{\beta}{\alpha^3} z^2 + \left(\frac{2\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^5}\right) z^3 - \left(\frac{5\beta^3 - 5\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta}{\alpha^7}\right) z^4$$

$$+ \frac{14\beta^4 - 21\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha^2\beta\delta + 3\alpha^2\gamma^2 - \alpha^3\varepsilon}{\alpha^9} z^5$$

$$+ \text{etc.} \ldots$$

Philippe Rubbiani a calculé les coefficients de ce développement jusqu'au neuvième terme.

Si le développement de z en y est limité et ne renferme que m termes, les formules précédentes donneront les valeurs de la puissance n de la plus petite des racines de l'équation générale algébrique de degré m, et de cette racine elle-même. Lagrange est parvenu aussi à trouver les développements de toutes les autres racines de l'équation. Si donc le problème général de la résolution des équations algébriques n'est pas considéré comme résolu, cela tient à ce que les expressions de ces développements ne sont pas convergentes, en général, et que l'on ignore les conditions de cette convergence, ou plutôt les moyens de l'obtenir.

Laplace, en cherchant une démonstration directe de la formule de Lagrange, est parvenu à une formule plus générale au moyen de laquelle on obtient le développement d'une fonction quelconque $u = \psi(y)$, y étant une variable liée avec la variable indépendante x, par l'équation

$$y = \text{F}\left[a + x\,\varphi(y)\right]$$

Les caractéristiques ψ, F et φ indiquent des formes données de fonctions quelconques Cette formule est

$$u = U + z\frac{du}{da}\cdot\frac{x}{1} + \frac{d.z^2\frac{du}{da}}{da}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{d^{n-1}.z^n\frac{du}{da}}{da^{n-1}}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}$$

U désigne ce que devient u lorsque $x = 0$, et z représente $\varphi(y)$ pour abréger. La supposition $x = 0$ faite dans l'équation en y donne $y = F(a), \frac{dy}{da} = F'(a)$, valeurs qu'il faudra substituer dans z ou $\varphi(y)$ et dans $\frac{du}{da}$.

Dans le cas particulier où $y = a + x\varphi(a)$ la formule de Laplace en donne une qui ne diffère de celle de Lagrange qu'en ce que le second terme de celle-ci est multiplié par x, le troisième par x^2, le quatrième par x^3, et ainsi de suite. On obtient donc ensuite la formule de Lagrange en faisant $x = 1$.

§ 3. *Applications du calcul différentiel à la géométrie.*

PROBLÈME GÉNÉRAL DES TANGENTES. — Soit une courbe plane quelconque représentée par l'équation $y = f(x)$.

l'équation de la tangente menée à la courbe par le point $(x'\ y')$, est

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x')$$

Si le point x', y' est donné sur la courbe, on connaît immédiatement la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et par suite la position de la tangente.

Si le point (x', y') est hors de la courbe, on détermine les coordonnées x'' et y'' du point de contact au moyen des deux équations $y'' = f(x'')$

$$y'' - y' = \frac{dy''}{dx''}(x'' - x')$$

Si l'équation de la courbe était de la forme $f(x,y) = 0$

l'équation de la tangente pourrait s'écrire ainsi :

$$\frac{df}{dx}(x - x') + \frac{df}{dy}(y - y') = 0$$

or la différentielle de l'équation de la courbe est :

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$$

f désigne, pour abréger, la fonction $f(x, y)$.

On passe donc de l'équation différentielle à l'équation de la tangente en remplaçant, dans la première, les différentielles dx et dy par les facteurs $x - x'.\ y - y'$.

L'équation de la *normale* ou perpendiculaire à la tangente, sera

$$\frac{df}{dy}(x - x') - \frac{df}{dx}(y - y') = 0.$$

Pour la courbe $y = f(x)$, les longueurs de la tangente et de la normale, comprises entre le point de contact et l'axe des x, de la soustangente et de la sous-normale, sont données par les relations :

$$\text{Tang.} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

$$\text{Norm.} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\text{Sous-tang.} = y\frac{dx}{dy}$$

$$\text{Sous-norm.} = y\frac{dy}{dx}$$

Ces diverses équations et relations donnent des solutions du *problème direct des tangentes* envisagé dans toute sa généralité.

ASYMPTOTES. Les asymptotes non parallèles à l'axe des y peuvent être considérées comme des tangentes dont le point de contact s'est éloigné à l'infini de cet axe. Il suffira donc, pour avoir leur équation, de chercher ce que devient l'équation de la tangente pour $x = \pm\infty$.

On obtiendra de même les asymptotes non parallèles à l'axe des x, en faisant $y = \pm\infty$.

Les asymptotes parallèles à l'axe des y, ou perpendiculaires à l'axe des x sont données par la relation $\frac{dy}{dx} = 0$. Les valeurs de x que l'on en tirera devront aussi rendre y infini.

Pour avoir les asymptotes perpendiculaires à l'axe des y on cherche les valeurs de y qui satisfont à l'équation $\frac{dx}{dy} = 0$, et qui correspondent, par la courbe, à une valeur infinie de x.

POINTS SINGULIERS. Certains points des courbes présentent des particularités remarquables dépendant de la position des axes des coordonnées ou inhérentes à la nature même de la courbe. Ceux qui se trouvent dans le second cas portent le nom de *points singuliers*.

1° Si la fonction $f(x, y)$ ne devient réelle que pour un nombre limité de valeurs de x, l'équation $f(x, y) = 0$, ne représentera qu'un point ou une suite de *points isolés*. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 0$ ne représente qu'un seul point placé à l'origine des coordonnées. L'équation $f(x, y) = 0$ peut fournir en même temps un ou plusieurs points isolés et une ou plusieurs branches de courbes, comme dans les équations

$$y^2 = x^2\left(x^2 - a^2\right) \text{ et } ay^2 - x^3 + bx^2 = 0.$$

2° Lorsque la fonction $f(x, y) = 0$ passe tout à coup du réel à l'imaginaire, ou change brusquement de valeur, la ligne que l'on considère s'arrête tout à coup en certains points que l'on appelle *points d'arrêt*.

Telles sont les deux courbes logarithmiques

$$y = \frac{1}{\log.\ x},\ y = x\log.\ x,$$

qui ont chacune pour point d'arrêt l'origine des coordonnées.

Lorsque la fonction $f(x, y)$ reste continue, c'est-à-dire qu'elle croît ou décroît insensiblement pour de très-petites variations de x et de y; mais qu'en même temps le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ change brusquement de valeur, les deux branches de la courbe viennent se réunir en un point donné, de manière que leurs tangentes forment entre elles un certain angle. Ce point s'appelle un *point saillant*. Tel est, par exemple, le point correspondant à $x=0$, dans les courbes représentées par les équations.

$$y = x \text{ arc tang } \frac{1}{x},\quad y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

4° Si les deux branches d'une même courbe s'arrêtent en un point donné, de manière à avoir en ce point une tangente commune, ce point sera ce qu'on appelle un *point de rebroussement ;* de *première espèce* si la tangente passe entre les deux branches de la courbe, et de *seconde espèce* si la tangente laisse les deux branches d'un même côté.

5° On appelle *points multiples* ceux où viennent se rencontrer au moins trois branches de courbe qui s'y arrêtent, ou deux branches au moins qui ne s'y arrêtent pas.

Ainsi la courbe $y^2 = x^2\left(1-x^2\right)$ est formée de deux branches qui se croisent à l'origine en touchant les droites $y=+x$, $y=-x$.

6° Un *point d'inflexion* est un point où la tangente et la courbe se traversent mutuellement.

Pour déterminer les points singuliers des six espèces, on emploiera les règles suivantes.

On reconnaît qu'un point situé sur la courbe $u=f(x,y)=0$ est un point isolé, ou un point d'arrêt, ou un point saillant, ou un point de rebroussement, lorsque pour les coordonnées de ce point on a les équations $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{du}{dy}=0$, la fonction u et les coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ restant finis et continus dans le voisinage de ce point.

I. Le point $(x'\,y')$ sera un point isolé, 1° si les ordonnées qui correspondent à $x'+h$ et à $x'-h$, tirées de l'équation $u=0$, sont toutes deux imaginaires ; 2° si à ce point la courbe n'a point de tangente, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} < 0$$

$\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'étant pas nuls.

II. Le point (x',y') sera un point d'arrêt 1° si l'une seulement des ordonnées correspondant aux abscisses $x'+h$ et $x'-h$ est imaginaire; 2° si la courbe en ce point n'a qu'une tangente, ce qui exige que les coordonnées x' et y' vérifient la relation $\frac{d^2u}{dx^2}=0$.

III. Le point x', y' sera un point saillant 1° si à chacune des abscisses $x'+h$, $x'-h$ répond une seule ordonnée très-peu différente de y', ou si à l'une de ces abscisses répondent seulement deux ordonnées sensiblement égales à y' ; 2° si la courbe au point x', y' a réellement deux tangentes, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} > 0.$$

IV. Enfin le point x', y' ne pourra être un point de rebroussement qu'autant que la première condition exigée pour le point saillant étant remplie, les deux tangentes en ce point se réduiront à une seule, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

V. Pour que n branches de courbe se réunissent en un point multiple, il faut que les coordonnées de ce point satisfassent à $n-1$ séries d'équations que l'on obtient en égalant à zéro les coefficients différentiels du premier, du second,... du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre de la fonction $u=f(x,y)=0$.

VI. Les coordonnées d'un point d'inflexion doivent toujours satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Osculation et courbure. L'angle infiniment petit formé par deux éléments infiniment voisins d'une courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, est ce que l'on appelle l'*angle de contingence*.

Le cercle dont le centre se trouve à la rencontre des deux perpendiculaires élevées par les milieux de ces éléments, et qui leur est tangent, porte le nom de *cercle osculateur*, et son rayon ρ est le *rayon de courbure* de la courbe. La longueur absolue de ce rayon est donnée par la formule

$$\rho = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Les coordonnées a et b du centre du cercle osculateur au point x, y sont données par les formules suivantes, où l'on a

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$a = x - \rho\frac{dy}{ds},\quad b = y + \rho\frac{dx}{ds}$$

Le cercle osculateur a ce que l'on appelle un *contact du second ordre* avec la courbe.

En général, la courbe $y=\varphi(x)$ a avec la courbe $y=f(x)$ le contact de l'ordre le plus élevé possible, lorsque pour le point x', y' les coefficients différentiels tirés de ces deux équations sont égaux par couples jusqu'à un ordre égal au nombre des coefficients moins un qui entrent dans l'équation $y=\varphi(x)$. Ce contact est ce que l'on appelle *osculation*, et la courbe $y=\varphi(x)$ est *osculatrice* de la courbe $y=f(x)$.

Les n équations que l'on obtient en égalant ainsi les ordonnées $\varphi(x)$ et $f(x)$ et leurs $n-1$ premiers coefficients différentiels, servent à déterminer les n coefficients arbitraires de l'équation $y=\varphi(x)$.

Développées. — Le *centre de courbure* ou du cercle osculateur peut être considéré comme le point de rencontre de deux normales infiniment voisines.

La suite des points de rencontre de toutes les normales à une courbe détermine une nouvelle courbe que l'on appelle *développée* de la première, qui elle, est la *développante*. Ces dénominations tiennent à ce que les normales consécutives à la première courbe sont tangentes à la seconde, et à ce que l'on peut engendrer la première au moyen de la seconde, en déroulant un fil que l'on aurait complétement enroulé sur cette dernière. Dans ce mouvement, le fil, supposé constamment tendu et inextensible, reste normal à la développante et tangent à la développée.

L'équation de la développée $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ s'obtient en éliminant x et y entre les trois equations.

$$f(x, y) = o$$

$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} - (\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Pour ce qui concerne les surfaces courbes et les courbes à doubles courbures, leurs plans tangents, leurs normales, leurs rayons et leurs lignes de courbure, leurs développées, etc., nous renvoyons aux ouvrages spéciaux sur la matière. Nous citerons en première ligne les excellentes *Leçons de calcul différentiel*, rédigées par M. l'abbé Moigno d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Cauchy ; leçons auxquelles nous avons emprunté les résultats de la théorie des points singuliers.

§ 4. *Principes du calcul intégral.*

But de ce calcul et notation. — Le *calcul intégral* a pour but d'apprendre à remonter des quantités différentielles aux quantités finies d'où elles peuvent provenir.

Ainsi $mx^{m-1}dx$ étant la différentielle de x^m, réciproquement x^m est *l'intégrale* de $mx^{m-1}dx$, ce que l'on exprime ainsi :

$$\int mx^{m-1}dx = x^m + C$$

le signe $\int$ (somme ou intégrale) indique la *sommation* d'une infinité d'éléments infiniment petits. Il faut observer que, lorsque deux quantités sont égales à une constante près, leurs différentielles sont égales; et que par conséquent, toute intégrale doit être augmentée d'une constante C que l'on détermine ensuite d'après les conditions de la question.

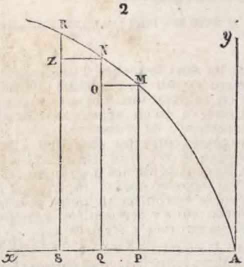
Un exemple emprunté à la géométrie va faire concevoir l'utilité du calcul intégral.

Soit AMNR (fig. 2) une courbe dont il s'agit de déterminer l'aire, c'est-à-dire la surface comprise entre l'arc AM de la courbe, l'abscisse AP $= x$, et l'ordonnée MP $= y$.

Si l'abscisse AP augmente d'une quantité infiniment petite PQ $= dx$, l'ordonnée MP variera elle-même de NO$=dy$, le trapèze infiniment petit MPQN sera *l'élément différentiel* de l'aire de la courbe. Ce trapèze a pour mesure $\frac{1}{2}(2y + dy)\,dx$, ou simplement ydx, parce que l'on peut négliger à côté de cette quantité $\frac{1}{2}\,dxdy$, qui est un infiniment petit du second ordre, et qui correspond au triangle MNO. L'aire de la courbe, se composant d'une infinité de trapèzes tels que ydx, on obtiendra cette aire en *intégrant* cette différentielle, ce qui donne

$$\text{Aire ANP} = \int ydx + C.$$

2



Si la courbe est une parabole dont l'équation soit $y^2 = 2\,px$, on tirera de cette équation $ydy = pdx$, d'où $dx = \frac{ydy}{p}$. Substituant cette valeur de dx sous le signe $\int$, il vient

$$\text{Aire AMP} = \int \frac{y^2\,dy}{p} + C$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{y^3}{p} + C$$

comme on peut s'en assurer *à posteriori* par la différentiation de $\frac{1}{3}\,\frac{y^3}{p} + C$

Remplaçant y^2 par $2px$, et observant qu'à l'origine des coordonnées en A, l'aire est nulle, et que, par conséquent, C $= 0$ pour $y = 0$, il vient enfin

$$\text{Aire AMP} = \frac{2}{3}\,xy.$$

Résultat déjà connu qui montre que l'aire du segment parabolique est les deux tiers du rectangle de même base et de même hauteur. (Col. 162.)

Règles fondamentales. — Les règles du calcul intégral dérivent nécessairement de celles du calcul différentiel.

D'abord les signes d et $\int$, relatifs à la différentiation et à l'intégration, s'excluent mutuellement, de sorte que l'on a

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \text{ et}$$

$$\int d\,F(x) = F(x)$$

On peut faire sortir de dessous le signe $\int$

une constante qui multiplie la différentielle, et écrire

$$\int A f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx.$$

On a en général

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

si l'on sait que l'intégrale doive avoir une valeur déterminée B pour $x = a$, on aura $C = B - F(a)$, et la valeur de l'intégrale sera $F(x) - F(a) + B$.

Si l'intégrale est nulle pour $x = a$, et qu'on la prenne jusqu'à $x = b$, sa valeur sera $F(b) - F(a)$. Pour exprimer ce résultat, on écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

C'est ce que l'on appelle l'*intégrale définie* prise entre a et b.

L'intégration des différentielles qui proviennent des fonctions simples n'offre aucune difficulté. On peut vérifier *à posteriori* par la différentiation les résultats ci-dessous.

1° DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.	LEURS INTÉGRALES.
$x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{dx}{x}$	lx
2° DIFFÉRENTIELLES D'EXPONENTIELLES.	**LEURS INTÉGRALES.**
$e^x dx$	e^x
$a^x dx$	$\frac{a^x}{la}$
3° DIFFÉRENTIELLES DE FONCTIONS CIRCULAIRES.	**LEURS INTÉGRALES**
$\cos. x\,dx$	$\sin. x$
$\sin. x\,dx$	$-\cos. x$
$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\text{tang.}\,x$
$\frac{dx}{\sin.^2 x}$	$-\cot.\,x$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sin.}\,x$
$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos.}\,x$
$\frac{dx}{1+x^2}$	$\text{arc tang.}\,x$
$-\frac{dx}{1+x^2}$	$\text{arc cot.}\,x$

Ces formules subsistent également quand, au lieu d'une variable x, on a une fonction quelconque de x, et, au lieu de dx, la différentielle de cette même fonction.

L'intégrale de la somme de plusieurs fonctions différentielles est égale à la somme des intégrales de ces fonctions.

De la formule connue

$$duv = udv + vdu$$

on tire la suivante :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

qui sert à l'*intégration par parties* et qui est employée à chaque instant dans le calcul intégral, lorsque l'intégrale de vdu est plus facile à trouver que celle de udv.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES. — L'intégration des fonctions rationnelles entières se déduit de ce qui précède.

Pour effectuer l'intégration d'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ supposée réduite à sa plus simple expression, et de laquelle on a extrait la partie entière, on la décompose en fractions simples. On distingue plusieurs cas.

1° Si le dénominateur $f(x)$ peut se décomposer en facteurs du premier degré, tous inégaux, on pose :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots$$

On obtient les numérateurs A, B, C en remplaçant successivement x par a, b, c, dans la fraction $\frac{F(x)}{f'(x)}$.

2° Si le facteur $x-a$ entre n fois dans $f(x)$, on a $f(x) = (x-a)^n \varphi(n)$, et l'on pose

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \ldots + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

multipliant les deux nombres par $f(x)$, joignant à l'équation qui en résulte ses $n-1$ premières dérivées et faisant ensuite $x=a$, on a n équations de condition pour déterminer les n coefficients A, A_1, A_2, etc.

3° Si le facteur du second degré $(x-\alpha)^2 + \beta^2$ auquel correspondent des racines imaginaires, entre dans le dénominateur $f(x)$, on posera.

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

Pour déterminer A et B, on prendra l'équation

$$\frac{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = A\alpha + B + A\beta\sqrt{-1}$$

qui fournit deux relations distinctes en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire.

4° Enfin, si le dénominateur renferme le facteur multiple du second degré

$$\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^n$$

on posera $\frac{F(x)}{f(x)}$ égale à une somme de fractions dont les numérateurs seront de la forme $Ax + B$, et dont les dénominateurs iront en décroissant depuis le facteur multiple du second degré, jusqu'à ce facteur élevé seulement à la première puissance. La dernière de toutes les fractions sera de la forme $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ étant le facteur qui, multiplié par le facteur multiple du second degré, produit le dénominateur $f(x)$.

En multipliant par $f(x)$ les deux membres de l'équation ainsi posée, que l'on prenne les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ et que l'on fasse ensuite $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on aura un nombre n d'équations qui se décomposeront chacune en deux, ce qui donnera $2n$ conditions pour déterminer les $2n$ quantités, (A, B), (A_1, B_1), etc.

L'intégration des quatre espèces de fractions partielles que l'on obtient en décomposant une fraction rationnelle, conduit aux résultats suivants, abstraction faite de la constante.

I. $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,\mathrm{l}\,(x-a).$$

II. $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}$$

III. $$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}A\,\mathrm{l}\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{A\alpha+B}{\beta}\ \text{arc tang}\ \frac{x-\alpha}{\beta}$$

IV. Si l'on pose $\dfrac{x-\alpha}{\beta} = z$, on aura

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n} = -\frac{A}{2(n-1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{n-1}} + \frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

et

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}$$

En diminuant ainsi successivement d'une unité l'exposant n, on arrive à l'intégrale

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}\ z.$$

Intégration de quelques fonctions irrationnelles. — Une fonction différentielle qui ne renferme pas d'autres radicaux que ceux de la forme $\sqrt{a+bx\pm x^2}$ peut être rendue rationnelle et intégrée par les procédés précédents. Si α et α' désignent les racines réelles de l'équation $x^2 - bx - a = 0$, il suffit de poser le radical égal à $(x-\alpha)z$ dans le cas où x^2 est affecté du signe $-$; et de le poser égal à $z-x$ dans le cas où l'on a $+x^2$. On tire de ces relations x en z, et dx en dz, et l'on n'a plus que des expressions rationnelles.

La différentielle binome

$$x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

dans laquelle m et n sont des nombres quelconques, peut être rendue rationnelle dans deux cas particuliers, savoir :

Quand $\dfrac{m+1}{n}$ sera un nombre entier, et quand la somme des fractions $\dfrac{m+1}{n}$ et $\dfrac{p}{q}$ forme un nombre entier. Dans le premier cas, on posera $a+bx^n = z^q$, et dans le second $a+bx^n = z^q x^n$.

On peut préparer la différentielle binome de manière que l'exposant n soit un nombre entier et positif. L'intégration par parties fournit alors des formules pour diminuer à volonté les exposants m et $\dfrac{p}{q}$ et réduire la différentielle à sa plus simple expression.

Intégration par séries. — Quand on ne peut pas obtenir l'intégrale exacte d'une différentielle $f(x)\,dx$, on développe $f(x)$ en série convergente, et on intègre ensuite chacun des termes après l'avoir multiplié par dx.

On peut appliquer ce procédé à la différentielle binome quand elle ne se trouve pas dans les conditions d'intégrabilité.

§ 5. *Application du calcul intégral à la géométrie.*

Rectification des courbes planes. — La longueur de l'arc s d'une courbe plane rapportée à des coordonnées rectangulaires, a pour expression générale

$$s = \int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\text{, ou bien}$$

$$s = \int dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$$

Soit prise pour exemple la parabole $y^2 = 2px$. Nous aurons $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{p}$ d'où

$$s = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2+y^2}$$

intégrale qui, prise depuis $y = o$ a pour valeur

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{1}{2}p\ \mathrm{l}.\frac{1}{p}\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$

Telle est la valeur de l'arc de parabole compris entre le sommet et le point dont l'ordonnée est y.

Quand la courbe est rapportée à des coordonnées polaires r et t, la différentielle de l'arc a pour expression

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, dt^2}$$

Dans la *spirale logarithmique* courbe dont l'équation est $r = a^t$, on a

$$dt = \frac{1}{\mathrm{l}a}\,\frac{dr}{r}$$

d'où $ds = \frac{dr}{\mathrm{l}a}\sqrt{1 + \mathrm{l}^2 a}$

En prenant l'intégrale du second membre entre les limites r' et r'', on a

$$s = \frac{r'' - r'}{a}\sqrt{1 + \mathrm{l}^2 a}$$

Quadrature des courbes planes. — Lorsqu'une courbe plane est rapportée à des coordonnées rectangulaires, la partie de l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques correspondant aux abscisses x' et x'' a pour expression

$$\mathrm{A} = \int_{x'}^{x''} y\,dx$$

Pour intégrer cette expression, il faut, de l'équation de la courbe, tirer la valeur de y en x, ou la valeur de dx en y et en dy seulement.

Une courbe étant rapportée à des coordonnées polaires r et t, on aura pour la portion de l'aire comprise entre deux rayons vecteurs r' et r'',

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\int_{r'}^{r''} r^2\,dt.$$

En appliquant cette formule à la spirale logarithmique $r = a^t$, on substitue la valeur $dt = \frac{1}{\mathrm{l}a}\,\frac{dr}{r}$ dans l'intégrale précédente, et on en tire

$$\mathrm{A} = \frac{1}{4\mathrm{l}a}\left(r''^2 - r'^2\right)$$

Les principes du calcul infinitésimal servent à démontrer sans peine une proposition fort remarquable dont Van-Heuraet se servit en 1659 pour trouver la rectification de la parabole cubique $ay^2 = x^3$, en la faisant dépendre de la quadrature de la parabole ordinaire. Cette proposition consiste en ce que si deux courbes sont telles que pour une même abscisse l'ordonnée de la seconde soit proportionnelle au quotient de la normale de la première par l'ordonnée correspondante, la longueur de l'arc de la seconde sera dans le même rapport avec l'aire du segment de la première.

Quadrature des surfaces et cubature des solides de révolution. — Soit A l'aire décrite par l'arc s d'une courbe $y = f(x)$ tournant autour de l'axe des x. L'élément différentiel de l'aire de la surface est

$$d\,\mathrm{A} = 2\pi\, ds$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre.

Pour intégrer cette différentielle on tirera de l'équation de la courbe y et ds en x et en dx ou ds en y et en dy, de manière à n'avoir plus à chercher que l'intégrale d'une expression de la forme X dx ou Y dy, X étant fonction de x seul, et Y de y seul.

De même la différentielle du volume V du solide de révolution compris entre la surface et entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x est

$$d\,\mathrm{V} = \pi\, y^2\, dx.$$

Cette formule doit être préparée comme la précédente avant l'intégration.

On peut obtenir par une seule intégration, comme pour les solides de révolution, le volume d'un corps qui est coupé par des plans parallèles suivant des sections dont l'aire est fonction d'une seule variable.

Ainsi en coupant l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance x de l'origine, on obtient pour section une ellipse dont l'aire a pour valeur

$$\frac{\pi\, bc}{a^2}\left(a^2 - x^2\right).$$

Le volume entier de l'ellipsoïde sera donc donné par la formule

$$\mathrm{V} = \frac{\pi\, bc}{a^2}\int \left(a^2 - x^2\right) dx.$$

Prenant l'intégrale entre les limites $+a$ et $-a$, on a $\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi\, abc$, résultat qui comprend comme cas particulier le volume de la sphère $\frac{4}{3}\pi\, r^3$, lorsque $a = b = c = r$.

Quadrature des surfaces et cubature des solides d'une forme quelconque. L'expression de l'aire A d'une surface courbe quelconque $z = f(x, y)$ s'obtient au moyen de l'*intégrale double*

$$\mathrm{A} = \int dx \int dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

p et q sont les dérivées partielles de z, prises par rapport à x et à y.

On commence par intégrer

$$dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

par rapport à y, c'est-à-dire en y considérant y seul comme variable; puis on multiplie par dx le résultat de cette première intégration et on intègre de nouveau par rapport à x.

Quant aux limites entre lesquelles doivent être prises les intégrales, elles dépendent de la portion de l'aire de la surface que l'on considère.

S'agit-il, par exemple, de la portion de la surface comprise dans un cylindre vertical dont l'équation est F $(x, y) = 0$? On tirera de cette équation des valeurs de y en x qui sont les limites variables relatives à la tranche parallèle au plan des zy et à la distance x de l'origine. Lorsque l'on aura substitué ces valeurs de y dans la première intégrale, on prendra la seconde intégrale entre des limites constantes x' et x'' qui sont les valeurs maxima et minima de x dans F $(x, y) = 0$. Ces nouvelles limites sont données par l'équation que l'on obtient en éliminant y entre les équations

$$F(x, y) = 0 \text{ et } \frac{dF}{dy} = 0.$$

Le volume V d'un corps terminé par la surface $z = f(x, y)$ s'obtient au moyen de l'intégrale double

$$V = \int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Les limites de l'intégration s'obtiennent comme pour l'aire de la surface courbe.

Lorsqu'il s'agit d'obtenir le volume entier d'un corps terminé par la surface fermée qui a pour équation $\psi(x, y, z) = 0$, les deux *nappes* extrêmes de la surface ont pour ordonnées :

$$z' = f(x, y) \text{ et } z'' = F(x, y).$$

L'élément différentiel du volume est

$$(z'' - z')\, dxdy.$$

On intégrera d'abord cette différentielle par rapport à y, en y considérant x comme constant, après y avoir remplacé y par des valeurs en x que l'on tire de l'équation finale résultant de l'élimination de z entre les équations

$$\frac{d\psi}{dz} = 0, \text{ et } \psi(x, y, z) = 0.$$

La seconde intégration doit être effectuée par rapport à x entre les limites données par l'équation résultant de l'élimination de y et de z entre les trois équations

$$\psi(x, y, z) = 0,\ \frac{d\psi}{dy} = 0 \text{ et } \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

La méthode de Thomas Simpson (voyez Géométrie, col. 224) est applicable à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces courbes, aussi bien qu'à la quadrature des aires planes et à la cubature des solides.

§ 6. *Principes du calcul aux différences finies.*

Calcul direct aux différences.—Lorsqu'une fonction u, prend diverses valeurs consécutives u_0 u_1, u_2, ... u_n, pour des accroissements successifs et finis des variables dont cette fonction dépend, les différences entre ces états consécutifs de la fonction sont appelées *différences premières* et représentées par la caractéristique Δ. On a donc en général

$$\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

Les différences entre les différences premières consécutives sont appelées *différences secondes*, et représentées par Δ^2. On a donc

$$\Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$$

On peut continuer ainsi et considérer les *différences troisièmes, quatrièmes*, etc.

Il est facile d'obtenir la valeur u_n de l'un des états de la fonction u au moyen d'une première valeur u_0 de cette fonction et des différences des ordres successifs. On a pour cela la formule symbolique

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0$$

dans laquelle les exposants de Δ après le développement indiquent l'ordre de la différence de u et non pas des puissances.

De même, de la connaissance des états successifs par lesquels la fonction u a passé depuis u_m jusqu'à u_{m+n}, on peut déduire la valeur de la différence de l'ordre n de u_m au moyen de la formule symbolique

$$\Delta^n u_m = (u - 1)^n u_m.$$

Dans le développement du second membre, on devra changer les exposants de u en *indices*.

La *différence finie* d'une fonction devient une différentielle lorsque les accroissements des variables cessant d'être finis, deviennent infiniment petits.

La recherche des différences finies des diverses fonctions simples n'offre aucune difficulté.

Calcul inverse aux différences. — Ce calcul a pour but de remonter des différences aux fonctions primitives. L'intégration qui l'on fait pour cela s'indique par la caractéristique Σ.

Il existe une formule générale par laquelle l'intégration de ce genre pour la fonction u ne dépend que d'une intégrale ordinaire et des dérivées succesives de la fonction u. Cette formule est :

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\, dx - \frac{1}{2} u + \frac{h}{12}\frac{du}{dx} - \frac{h^3}{720}\frac{d^3 u}{dx^3} + \text{etc.}$$

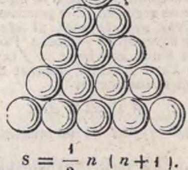
h désigne l'accroissement constant de la variable indépendante x.

La sommation des suites dont on connait le terme général u^n est une application importante du calcul inverse des différences. L'intégrale Σu^n augmentée d'une quantité constante c, donne la somme de tous les termes qui précèdent ce terme général.

En appliquant cette règle à la sommation des nombres polygones et figurés, on retrouve les formules connues. (Voir Algèbre, col. 81 et suiv.)

Quelques-unes de ces formules sont fort utiles pour évaluer facilement le nombre S de boulets compris dans une pile. Ces piles sont disposées ordinairement avec symétrie, de manière que toutes les sphères égales qu'elles renferment soient tangentes.

Dans le cas d'une seule tranche triangulaire dont le côté contient n boulets, on prendra la formule



(1)... $$S = \frac{1}{2} n (n + 1).$$

Pour une seule tranche carrée, on aura

(2)... $$S = n^2$$

Une pile en forme de tetraèdre régulier dont le côté renferme n boulets sera déterminée par

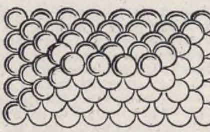
(3)... $$S = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

Dans une pile en forme de pyramide quadrangulaire à base carrée, le nombre des boulets est

(4).. $$S = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Enfin, lorsque la pile a la forme d'une pyramide quadrangulaire à base carrée dont le côté est n augmentée d'un prisme, de telle sorte que l'arête supérieure contienne m boulets, on a

(5) .. $$S = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{m+2(m+n-1)}{3}\right]$$



La forme de cette expression montre que le nombre total des boulets est égal au nombre de ceux que renferme la face triangulaire, multiplié par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles.

En faisant $m = 1$ dans la dernière formule, on retrouve l'avant-dernière.

Le problème inverse qui consiste à trouver le nombre des boulets qui doivent entrer dans la base de la pile est facile à résoudre. Ainsi ce nombre est la racine du plus grand carré contenu dans 2S pour la formule (1); la racine du plus grand cube contenu dans 6S pour (3), et dans 3S pour (4).

FORMULES D'INTERPOLATION. Elles servent à insérer entre les termes donnés d'une suite de nouveaux termes soumis à la même loi que les premiers.

La plus simple de toutes est

$$u = u_0 + \frac{x}{h}\Delta u_0 + \frac{1}{2}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\Delta^2 u_0 + \text{etc.}$$

Elle donne successivement toutes les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots$ de u lorsque l'on y remplace x par 0, h, $2h$, etc.

Pour que cette série soit convergente, il faut que les différences consécutives aillent en diminuant.

Lorsqu'on l'emploie pour trouver la valeur de x connaissant u et u_0, elle donne, en s'arrêtant aux différences secondes, une équation du second degré en x.

L'illustre Lagrange a donné une formule d'interpolation remarquable par la symétrie de sa forme, pour le cas où les valeurs connues u_0, u_1, u_2, u_n de la fonction u, correspondent à des valeurs x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$ non équidistantes de la variable indépendante x.

Cette formule est

$$u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{etc.}$$

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ étant donnés par la formule générale

$$X_m = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)(x_m-x_2)} \frac{\ldots(x-x_n)}{\ldots(x_m-x_n)}$$

dans laquelle on supprime à la fois au numérateur et au dénominateur le facteur qui en a m avant lui.

§ 7. *Détails historiques et bibliographiques.*

Les premiers essais du calcul différentiel furent publiés par Leibnitz dans les *Actes de Leipsig* du mois d'octobre 1684. Le mémoire où est consignée cette admirable découverte est intitulé : *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* Les premiers principes du calcul intégral parurent quelque temps après dans un écrit portant pour titre : *De Geometriâ reconditâ et analysi indivisibilium, atque infinitorum.*

Ce ne fut que sur la fin de l'année 1686 que Newton mit au jour son livre immortel des *Principes,* dans lequel est exposé le *calcul des fluxions*, qu'il avait déjà inventé, très-probablement depuis plusieurs années. Ce calcul est tout-à-fait analogue au calcul différentiel, mais inférieur à celui-ci sous le rapport des notations et de la métaphysique. Aussi les travaux des géomètres du continent, les Bernouilli, le marquis de l'Hospital, portèrent-ils uniquement sur la méthode de Leibnitz.

Quelques années plus tard, lorsqu'à l'aide de ce puissant instrument, ils eurent étonné l'Europe savante par un nombre prodigieux de découvertes remarquables, on souleva la question de priorité entre Leibnitz et Newton; et le commencement du dix-huitième siècle offrit le spectacle déplorable d'une polémique animée entre deux des plus grands génies des temps modernes.

« On peut, dit Lagrange, regarder Fermat » comme le premier inventeur des nouveaux cal- » culs. » Les travaux de Descartes, de Pascal, de Fermat, de Huygens, de Barrow, de Roberval, de Wallis et surtout de Newton, prouvent en effet que l'on touchait depuis long-temps à cette grande découverte, lorsqu'elle fut proclamée par Leibnitz. Mais, malgré le respect que nous inspire l'autorité de Lagrange, nous ne pouvons méconnaître que, par l'appréciation exacte de la métaphysique et des conséquences de son invention, Leibnitz a laissé bien loin derrière lui tous ceux que l'on pourrait lui opposer comme rivaux, sans excepter le grand Newton lui-même.

Les services que l'invention du calcul infinitésimal a rendus aux sciences sont innombrables. La géométrie pure, la mécanique, la physique, mais surtout l'astronomie théorique, ont été comme créées ou au moins renouvelées à l'aide de ce merveilleux instrument. Euler, Maclaurin, Lambert, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Monge, Vandermonde, Laplace, Legendre, Abel, etc., doivent être cités parmi ceux qui se sont le plus occupés de la théorie ou des applications des nouveaux calculs. Sans citer aucun des géomètres vivants, nous dirons que la France n'a pas cessé de se maintenir, pour la culture de cette partie de la science, au rang élevé qu'elle y a pris dès les premiers temps.

Parmi les ouvrages où l'on peut étudier avec fruit le calcul infinitésimal, nous citerons ceux de MM. Cauchy, Cournot, Duhamel, Lacroix, Moigno, Navier, etc. Carnot, dans sa *Métaphysique du calcul infinitésimal*, Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, M. Wronski, dans ses divers ouvrages sur l'*algorithmie*, se sont principalement attachés à la philosophie de ces calculs.

L'*Analyse des infiniment petits* de l'Hospital, et les *Lectiones mathematicæ* de Jean Bernouilli, sont les deux premiers écrits où l'on ait exposé méthodiquement avec quelque étendue les principes du calcul différentiel et du calcul intégral. Le *Calcul des fluxions* de Maclaurin est le meilleur ouvrage qui ait été publié d'après la méthode et les notations de Newton. La seconde édition du grand traité en trois volumes in-4°, publiée par M. Lacroix, de 1810 à 1819, est le répertoire le plus complet des travaux des géomètres qui se sont occupés de l'analyse infinitésimale, jusqu'à l'époque où ils ont paru. Mais on doit étudier les mémoires des diverses sociétés savantes et tous les journaux scientifiques depuis la fin du dix-septième siècle, et enfin les ouvrages des géomètres qui se sont distingués depuis cette époque, si l'on veut acquérir une connaissance vraiment approfondie de la branche importante des mathématiques dont nous venons de donner une esquisse rapide.

V. CALCUL DES PROBABILITÉS.

§ I. *Principes généraux du calcul des probabilités.*

PRÉLIMINAIRES. Cette branche importante des mathématiques sert à rendre comparables entre elles les différentes hypothèses que l'on peut faire soit sur des événements futurs, soit sur les causes d'événements connus.

« Tous les événements, » dit Laplace, « ceux « même qui, par leur petitesse, semblent ne « pas tenir aux grandes lois de la nature, en « sont une suite aussi nécessaire que les ré- « volutions du soleil..... La courbe décrite par « une simple molécule d'air ou de vapeurs, est « réglée d'une manière aussi certaine que les « orbites planétaires: il n'y a de différences « entre elles que celle qu'y met notre igno- « rance. »

Ce que l'on doit entendre par *probabilité* est relatif en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances. Si nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événements, un seul doit arriver, il est *probable* qu'un de ces événements pris à volonté n'arrivera pas, puisque plusieurs cas également possibles excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La probabilité d'un événement est le rapport qui existe entre le nombre des cas favorables à cet événement et le nombre total des cas possibles. Elle est donc représentée par une fraction toujours moindre que l'unité. L'unité est le symbole de la certitude.

Un événement doit être considéré comme probable lorsque sa probabilité est plus grande que $\frac{1}{2}$; car les chances favorables sont en plus grand nombre que les défavorables.

Lorsqu'un événement n'admet que deux cas possibles, si l'un des deux cas a une probabilité plus grande que $\frac{1}{2}$, l'autre cas aura une probabilité moindre. On voit donc combien était fausse l'assertion que Pascal a si bien stigmatisée dans ses *Provinciales*, que deux thèses contraires peuvent être toutes deux probables.

Le mot hasard ne doit être considéré que comme exprimant notre ignorance des vraies causes des phénomènes. M. Libri a donné l'étymologie curieuse de ce mot : *asar* signifie *difficile* dans la langue arabe. Or, les expressions de *azari, ad azarum, ludum azari* se trouvent dans divers ouvrages italiens de la fin du moyen âge où l'on traite d'un jeu avec trois dés, et s'appliquent aux points qu'il est le plus difficile d'amener, à ceux que l'on n'obtient que par *hasard*, comme on dit vulgairement. L'*h* a été ajoutée pour remplacer une lettre arabe qui n'a pas d'équivalent dans notre alphabet.

ÉVALUATION DES PROBABILITÉS DANS LES CAS LES PLUS SIMPLES. 1. La définition même de la probabilité prouve qu'elle ne dépend nullement du nombre absolu des événements favorables ou possibles, mais bien de leur rapport.

Dans l'évaluation des probabilités, on compare ordinairement les événements de différentes espèces à des billes de diverses couleurs qui seraient mêlées et réparties dans une ou plusieurs urnes, suivant des lois déterminées entièrement ou partiellement par l'énoncé de chaque question.

La somme des probabilités de tous les événements possibles est constamment égale à l'unité.

Ainsi, lorsqu'on a dans une urne m boules noires, n boules blanches et p boules rouges, les probabilités respectives d'extraire une boule d'une de ces trois couleurs sont exprimées par les fractions

$$\frac{m}{m+n+p}, \quad \frac{n}{m+n+p}, \quad \frac{p}{m+n+p}$$

dont la somme est égale à l'unité.

Au lieu d'urne et de boules, on pourrait considérer un prisme droit allongé, dont les bases seraient des polygones réguliers de $m+n+p$ côtés, et qui aurait m faces noires, n blanches et p rouges.

II. L'évaluation précédemment donnée pour la probabilité suppose les cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des probabilités ; et la probabilité est alors la somme des *possibilités* de chaque cas favorable.

Par exemple, au jeu bien connu de *pile* ou *face*, si l'on cherche la probabilité d'amener *pile* au moins une fois en deux coups, on peut ne compter que trois cas différents, savoir : *pile* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second ; *face* au premier et *pile* au second coup ; enfin *face* au premier et au second coup. D'Alembert considérant à tort les trois cas comme également possibles en concluait que la probabilité cherchée est $\frac{2}{3}$. Mais il est visible que la probabilité d'amener *pile* au premier coup est $\frac{1}{2}$, tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$, de sorte qu'en vertu du principe II ci-dessus, la probabilité cherchée est réellement $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$.

On parvient au même résultat en considérant que les lettres a et b ne peuvent donner lieu qu'aux quatre arrangements également possibles

$$aa,\ ab,\ ba,\ bb$$

et que trois de ces arrangements sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité.

L'exemple suivant montre une nouvelle application des probabilités composées.

On a des urnes en nombre a contenant chacune m boules blanches et n noires, et des urnes en nombre b contenant p boules blanches et q boules noires. On demande la probabilité d'extraire une boule blanche en prenant au hasard dans l'une quelconque de ces urnes.

Les probabilités d'extraire une boule blanche d'une des urnes de la première et de la seconde série sont respectivement

$$\frac{m}{m+n} \quad \text{et} \quad \frac{p}{p+q}$$

Les probabilités relatives de mettre la main sur une urne de la première ou de la seconde série, sont

$$\frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a+b}$$

Les probabilités composées d'extraire une boule blanche de l'une ou de l'autre série sont donc

$$\frac{am}{(a+b)(m+n)} \quad \text{et} \quad \frac{bp}{(a+b)(p+q)};$$

et la probabilité totale est évidemment la somme de ces probabilités partielles.

III. Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières : ce que l'on exprime ordinairement en disant que la *probabilité composée* est le produit des *probabilités simples*.

Supposons par exemple que l'on ait assemblé dans un paquet les 13 cartes d'une même couleur qui se trouvent dans un jeu complet de 52 cartes, et qu'on demande la probabilité que les deux premières cartes du paquet soient un *as* et un *deux*. La probabilité que l'*as* soit la première dans le paquet de 13 cartes est $\frac{1}{13}$; cette carte ôtée, il en reste 12, et la probabilité que le *deux* soit la première du nouveau paquet est $\frac{1}{12}$; ainsi la probabilité du concours de ces deux événements sera

$$\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}.$$

On arriverait au même résultat, quoique d'une manière moins simple, en remontant à l'énumération de toutes les chances possibles. On sait que le nombre des permutations dont 13 cartes sont susceptibles (voyez ALGÈBRE, col. 84) est

$$1 . 2 . 3 . 4 \ldots . 12 . 13$$

Lorsque 2 des 13 cartes ont une place déterminée, il en reste 11 autres que l'on peut arranger de toutes les manières possibles, c'est-à-dire que le nombre des chances favorables est de

$$1 . 2 . 3 \ldots . 10 . 11$$

La probabilité sera par conséquent égale au rapport de ces deux produits, ou à $\frac{1}{12 . 13}$ en supprimant les facteurs communs.

IV. Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est encore le produit de la probabilité du premier événement par la probabilité que, cet événement étant arrivé, l'autre arrivera.

Ainsi soient trois urnes A, B, C, dont deux ne renferment que des boules blanches, et dont une ne renferme que des boules noires. On demande la probabilité d'extraire à la fois des urnes B et C des boules blanches. La probabilité d'extraire de C une boule blanche est $\frac{2}{3}$; et si cette boule blanche avait été réellement extraite, comme l'indécision ne porterait plus que sur les urnes A et B, la probabilité d'extraire une boule blanche de B serait $\frac{1}{2}$.

La probabilité d'extraire à la fois des boules blanches des urnes B et C est donc

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}.$$

V. Si l'on calcule *à priori* la probabilité de l'événement arrivé, et la probabilité d'un événement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend ; la seconde probabilité divisée par la première sera la probabilité de l'événement attendu, tirée de l'événement observé.

Ce principe est un corollaire du précédent.

DÉTERMINATION DES PROBABILITÉS DANS LES ÉPREUVES RÉPÉTÉES DES MÊMES HASARDS. — On entend ici par épreuves répétées la succession d'événements indépendants les uns des autres, comme les jets successifs d'un même nombre de dés semblables, ou les tirages de numéros pris dans une urne et remis chaque fois afin de conserver toujours le même rapport entre le nombre de chances de chaque espèce.

Les probabilités d'événements de ce genre se déterminent d'abord par les probabilités composées.

Par exemple, s'il s'agit de savoir quelle est la probabilité d'amener deux fois de suite le point 6 avec un dé à 6 faces, c'est comme si l'on cherchait le concours de deux événements dont la probabilité simple est de $\frac{1}{6}$; on aura donc pour la probabilité demandée

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

La probabilité de ne pas obtenir 6 en 2 coups est $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. La somme de ces deux probabilités n'est pas égale à l'unité, parce qu'il y a en outre le cas où 6 n'arriverait qu'au premier coup, dont la probabilité est $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ et le cas où 6 n'arriverait qu'au second coup, dont la probabilité est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$. La réunion des probabilités correspondant à ces quatre cas est

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

La formule du binome de Newton donne à la fois toutes les probabilités des divers événements qui résultent des jets successifs du même dé. Car si p et q désignent les probabilités respectives de deux événements contraires, on voit, d'après ce qui précède, que $p^{m-n}\,q^n$ est la probabilité que l'événement q arrivera n fois sur m coups, dans des rangs déterminés. Mais si l'on ne détermine pas l'ordre des événements simples, comme les m coups pris n à n peuvent donner un nombre de combinaisons différentes déterminé par le coefficient de la formule du binome dans le terme qui en a n avant lui (voyez ALGÈBRE, col. 83), la probabilité d'obtenir n fois l'événement q ou $m-n$ fois l'événement p sera exprimée par

$$\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-n+1)}{1.\ 2.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n}\,p^{m-n}\,q^n$$

Les divers termes du développement de la puissance m du binome $p+q$ donnent donc les probabilités d'obtenir les événements p et q des nombres déterminés de fois en m coups.

La somme des deux premiers termes du développement donne la probabilité que l'événement p n'arrivera pas moins de $m-1$ fois sur les m épreuves.

La somme des trois premiers termes indique la probabilité de n'avoir pas moins de $m-2$ fois l'événement p et plus de 2 fois l'événement q sur les m épreuves.

Si, par exemple, on demande la probabilité d'amener le point 6 au moins deux fois dans quatre jets successifs d'un dé à six faces, on fera $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $m = 4$, et on prendra la somme des 3 premiers termes du développement de $(p+q)^4$, ce qui donnera

$$\frac{1}{6^4} + 4\,\frac{1.\,5}{6^4} + 6\,\frac{1.\,25}{6^4} = \frac{171}{1296}$$

probabilité comprise entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{8}$.

On peut se proposer de déterminer le nombre d'épreuves nécessaire pour qu'un événement acquière une probabilité donnée. Si l'on demandait en combien de jets du même dé on obtiendra la probabilité g que le point 6 arrivera au moins $m-n$ fois, on aurait $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, et il faudrait déterminer m par la condition

$$g = p^m + \frac{m}{1}\,p^{m-1}q + \ldots\ldots + \frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots n}\,p^{m-n}q^n$$

ce qui ne pourrait s'obtenir que par tâtonnement.

Lorsque n est plus grand que $\frac{m}{2}$, on peut simplifier la recherche de m en prenant la condition.

$$1 - g = q^m + \frac{m}{1}q^{m-1} + \ldots + \frac{m\,(m-1)\ldots n}{1.\ 2\ldots(n+1)}\,q^{n+1}\,p^{m-n-1}$$

dans laquelle le nombre de termes devient moindre que dans la précédente.

Si, par exemple, on demande en combien d'épreuves on obtiendra la probabilité g que l'événement p arrivera au moins une fois, on aura $m - n = 1$, et on prendra

$$1 - g = q^m$$

$$\text{d'où } m = \frac{\log.\,(1-g)}{\log.\,q}$$

Cette formule sert à trouver le nombre de jets de deux dés, dans lequel il y a autant de probabilité d'amener deux six (ou *sonnez*) que de ne pas le faire. Il suffit de poser.

$$1 - g = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{36}, q = \frac{37}{36}$$

$$\text{d'où } m = \frac{\log.\,2}{\log.\,36 - \log.\,35} = 24{,}6$$

ce qui démontre que l'événement proposé est moins probable que le contraire, quand on n'embrasse que 24 jets; et plus probable, quand on en prend 25.

LOI DES GRANDS NOMBRES. — Au milieu des causes variables et inconnues que nous désignons par le mot de *hasard*, et qui rendent incertaine et irrégulière la marche des événements, tant qu'on ne considère que des cas particuliers, on voit naître, à mesure qu'ils se multiplient, une régularité frappante. Concevons, par exemple, une urne qui renferme des boules blanches et des boules noires, et supposons que l'on remette dans l'urne la boule que l'on vient d'en tirer, chaque fois que l'on va procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites au nombre des boules noires extraites sera le plus souvent très-irrégulier dans les premiers tirages; mais les causes variables de cette irrégularité, se détruisant mutuellement dans un grand nombre de tirages, laissent de plus en plus apercevoir le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne, ou les possibilités respectives d'en extraire une boule d'une de ces deux couleurs, à chaque tirage.

Cet exemple particulier servira à faire comprendre une proposition conforme aux lois du bon sens et de l'observation, et dont la démonstration, qui offrait de grandes difficultés, a été donnée pour la première fois par Jacques Bernouilli. On énonce ainsi cette proposition :

« On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, que le rapport du nombre de répétitions du même événement à celui des épreuves ne s'écartera pas de la probabilité simple de cet événement au-delà de limites données, quelque resserrées qu'on suppose ces limites. »

Il suit immédiatement de ce résultat que les rapports des effets de la nature sont à peu près constants, quand ces effets sont considérés en grand nombre. Ainsi, malgré la variété des années, la somme des productions pendant un nombre d'années considérable est sensiblement la même; c'est à l'homme à répartir également entre tous les temps les biens que la nature produit avec une inégalité apparente chaque année.

Beaucoup d'effets dus aux causes morales sont eux-mêmes soumis à la loi des grands nombres. Le rapport des naissances annuelles à la population et celui des mariages aux naissances n'éprouvent que de très-petites variations. A Paris, le nombre des naissances annuelles est à peu près le même. On a observé à Paris et à Londres que, dans les temps ordinaires, le nombre des lettres mises au rebut pour défaut dans les adresses, change peu chaque année.

On voit encore que, dans une série d'événements indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue sur celle des causes irrégulières. C'est ce qui rendait les gains de la loterie aussi certains que les produits de l'agriculture: les chances qu'elle se réservait lui assuraient un bénéfice dans l'ensemble d'un grand nombre de mises.

Ainsi des chances favorables et nombreuses étant constamment attachées à l'observation des principes éternels d'humanité, de justice et de raison qui fondent et maintiennent les sociétés, ce seul motif devrait suffire pour que l'on ne s'en écartât jamais.

La régularité frappante qui se manifeste dans la succession indéfiniment prolongée des événements du même genre a toujours été considérée à juste titre comme une preuve de la Providence. C'est en vain que l'on a nié la réalité des bases de cette croyance, si générale et si consolante, en prétendant substituer des lois aveugles à une volonté intelligente. N'est-il pas évident qu'admettre ces lois, c'est rendre tacitement hommage à l'intelligence suprême qui seule peut les avoir établies?

§ 2. *Quelques applications du calcul des probabilités.*

Application des combinaisons. — Les probabilités d'ôter un nombre pair ou impair, en prenant au hasard dans un tas composé de m pièces, sont exprimées respectivement par les fractions.

$$\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} \text{ et } \frac{2^{m-1}}{2^m-1}.$$

La probabilité de voir sortir au moins un numéro sur deux que l'on a pris, dans un tirage de 5 numéros sur 90 contenus dans la roue, est égale à la somme des 2 fractions

$$2\,\frac{88 \,.\, 87 \,.\, 86 \,.\, 85}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \text{ et } \frac{88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

divisée par la fraction $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ ou à $\frac{87}{801}$.

Au bout de 100 tirages, la probabilité que tous les numéros seront sortis est 0,7410 à 0,0001 près. Au bout de 200 tirages, cette probabilité est 0,9990 qui diffère très-peu de l'unité ou de la certitude.

Jeux. Espérance mathématique et espérance morale. — On doit regarder comme équitable tout jeu dans lequel les joueurs déposent des sommes proportionnelles au nombre des chances qui les feraient gagner.

Si l'on appelle *espérance mathématique* le produit de la probabilité par le gain que peut espérer chacun des joueurs ou par la mise de l'autre joueur, le principe précédent s'énoncera en disant qu'avant de commencer à jouer, les espérances mathématiques des joueurs doivent être égales.

Lorsque des joueurs viennent à se séparer avant que le jeu soit terminé, on règle le partage d'après un nouveau principe, savoir que : Tout joueur perd la propriété de l'argent qu'il dépose, mais acquiert, en revanche, sur le fonds du jeu, un droit proportionnel à la probabilité qu'il a de gagner ce fonds.

Lorsque les espérances mathématiques ne sont pas égales, alors, en vertu de la loi des grands nombres, le gain de l'un des joueurs doit aller en augmentant, et on peut toujours trouver un nombre d'épreuves pour lequel la probabilité que ce gain atteindra une somme déterminée approche autant que l'on voudra de la certitude.

Telle était la cause des bénéfices des maisons de jeu et des loteries. On doit applaudir à la destruction de ces établissements honteux dont le succès était fondé sur les mauvaises passions ou sur l'ignorance des individus qui cherchent leurs moyens de subsistance ou la richesse ailleurs que dans un travail utile à la société.

A la loterie, l'*extrait simple* ne rendait que 15 fois la mise, quoiqu'il dût rendre 18 fois cette mise; l'*extrait déterminé* ne rendait que 70 au lieu de 90 fois; l'*ambe*, 270 au lieu de 400 fois $\frac{1}{2}$; l'*ambe déterminé*, 5100 au lieu de 8009 fois; le *terne*, 5500 au lieu de 11748 fois; le *quaterne*, 75000 au lieu de 511 038 fois; enfin le *quine*, 1 000 000 au lieu de 43 949 268 fois la mise.

Cependant on doit ajouter que lors même que les chances du jeu seraient égales, un homme raisonnable ne consentira point à exposer une somme un peu forte dans l'espérance d'un petit gain très-probable; mais il se déterminerait au contraire aisément à risquer une faible somme pour obtenir un gain considérable et d'une probabilité fort petite. Il faut donc distinguer l'*espérance morale* de l'espérance mathématique et ne pas prendre celle-ci pour règle unique d'une détermination dans les circonstances analogues à celle que nous venons d'indiquer.

Singulier procédé pour trouver, par des épreuves répétées, le rapport de la circonférence au diamètre. — Que l'on trace sur une surface plane une suite de lignes droites parallèles et également espacées; que l'on prenne une aiguille bien cylindrique, d'une longueur moindre que l'intervalle constant qui sépare les parallèles, et qu'on la projette au hasard un grand nombre de fois sur la partie de la surface qui est couverte par les lignes. Si on compte le nombre total de fois où l'aiguille a été projetée, et que l'on note le nombre de ses rencontres avec l'une quelconque des parallèles, le rapport de ces deux nombres, multiplié par le double du rapport de la longueur de l'aiguille à l'intervalle des droites équidistantes, exprimera le rapport de la circonférence au diamètre avec d'autant plus d'approximation que les épreuves auront été plus multipliées.

En désignant par d l'intervalle de deux parallèles voisines, par a la longueur de l'aiguille, par p le nombre des rencontres, et par q le nombre total des jets, q étant très-grand, on aura la formule

$$\pi = \frac{2\,aq}{pd}$$

L'erreur sera la plus petite possible pour un nombre donné d'épreuves, lorsque la longueur a de l'aiguille sera égale au quart du produit de l'intervalle d des divisions par le rapport π dont la valeur est connue. (Voyez Géométrie, col. 121.)

Ainsi on pourra faire l'expérience avec une aiguille de 50 millimètres de longueur en la projetant sur des parallèles dont l'intervalle serait de 63 millimètres et $\frac{6}{10}$, ou sur des données proportionnelles à celles-ci.

Sommation de certaines séries. — Leibnitz a fait une application non moins singulière que la précédente qui est due à Laplace. Pour trouver la véritable valeur de la série indéfinie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.},$$

il fait observer que la suite devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair; et comme dans l'infini, il n'y a aucune raison de préférer le pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la véritable valeur de la série.

Nonobstant l'objection que Laplace a faite à ce raisonnement, M. Lacroix a prouvé que rien ne s'opposait à ce qu'il fût admis. (Voir son Traité in-4° du calcul différentiel et du calcul intégral, t. III, p. 160.)

Résultats moyens. — Méthode des moindres carrés. — Une des applications les plus utiles du calcul des probabilités consiste dans la recherche du résultat le plus probable entre un certain nombre d'observations qui ont donné des résultats différents.

Dans le cas le plus simple, où la détermination d'une quantité ne dépend que de l'observation d'un seul fait, on doit prendre la moyenne arithmétique des observations, c'est-à-dire, la somme des nombres donnés par les observations et la diviser par le nombre de ces observations.

Plus généralement, lorsque la théorie donne, pour l'expression d'une certaine loi, une équation de la forme

$$x + ay + bz + ct + \ldots + k = 0 \ldots (1)$$

qui lie entre elles les n variables $x, y, z, t \ldots$, et que cette théorie ne fait pas connaître les valeurs des coefficients constants $a, b, c \ldots, k$, on peut se proposer de les déterminer par expérience avec autant d'exactitude que possible.

Supposons que l'on ait fait pour cela un nombre d'observations $n + m$ plus grand que le nombre des n coefficients à déterminer. La substitution des résultats de n des observations faites dans l'équation (1), donnerait n équations qui détermineraient les n coefficients $a, b, c \ldots, k$. Mais la substitution des résultats des m autres observations dans l'équation (1) où les coefficients auraient été ainsi calculés, ne rendrait pas généralement cette équation identique : le second membre, au lieu d'être nul, prendrait une valeur numérique E, qui n'est autre chose que l'erreur due à ce que les observations ne sont pas parfaitement exactes.

Le calcul des probabilités démontre que l'on obtient la plus grande approximation possible, lorsque l'on s'arrange de telle sorte que la somme des carrés des erreurs E soit un minimum. Or, d'après les principes du calcul différentiel (voyez col. 235), cette dernière condition fournira les n équations suivantes, où $\sum$ désigne une somme arithmétique de quantités semblables, correspondant aux $n + m$ observations :

$$\sum xy + a\sum y^2 + b\sum yz + c\sum yt + \ldots = 0$$
$$\sum xz + a\sum yz + b\sum z^2 + c\sum zt + \ldots = 0$$
$$\sum xt + a\sum yt + b\sum zt + c\sum t^2 + \ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La loi de toutes ces équations est facile à saisir : en général, pour former l'équation du minimum, par rapport à l'un des coefficients à déterminer $a, b, c \ldots$, il faut multiplier tous les termes de l'équation proposée par la variable qui a ce coefficient dans l'équation, et égaler à zéro la somme de tous les résultats que l'on obtient, en substituant dans le produit, ainsi obtenu, toutes les données des observations. On obtient ainsi, entre les n coefficients $a, b, c \ldots, k$, un nombre n d'équations à la formation desquelles toutes les observations concourent également, et qui servent à déterminer les valeurs les plus probables de ces coefficients.

Dans le cas très-usité où l'on n'a que deux cofficients à déterminer a et k, dans la relation $x - ay - k = 0$, les valeurs de ces coefficients seront données par les formules

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - \sum y \sum y},$$

$$k = \frac{\sum x \sum y^2 - \sum y \sum xy}{n\sum y^2 - \sum y \sum y}.$$

La *méthode des moindres carrés*, qui vient d'être exposée, est employée à chaque instant en astronomie, en physique et en général dans les sciences d'observation. M. Müntz, ingénieur des ponts et chaussées, l'a appliquée avec succès à la détermination exacte de la formule des transports qui est $x - ay - k = 0$, a étant le prix du transport de l'unité de poids à l'unité de distance, k la dépense, constante pour une même matière, du chargement et du déchargement, et enfin x la somme à payer pour le transport de l'unité de poids à la distance y. (Voyez les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1er sem. de 1834, p. 86.)

§ 3. *Esquisse historique et bibliographique.*

Avant Pascal et Fermat, personne n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre au calcul les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs, les règles des enjeux et des paris. Le chevalier de Méré fut le premier qui tourna l'attention de Pascal vers le calcul des probabilités, en lui proposant de trouver le nombre de jets de deux dés, dans lequel il y a autant de probabilité d'amener *sonnez* que de ne pas l'amener. (Voyez col. 260). Mais on n'a conservé que le souvenir des paradoxes que la solution de Pascal inspira au chevalier ; tandis que les traces des méditations du grand géomètre se retrouvent à chaque instant dans ses admirables *Pensées*, où l'on voit une prédilection marquée pour les raisonnements fondés sur l'emploi des probabilités. Du reste son illustre émule, le conseiller au parlement de Toulouse, donna aussi pour le problème le plus difficile qu'ils aient abordé une solution qui a même plus de généralité que celle de Pascal. Les deux noms de Pascal et de Fermat doivent donc être associés pour ce qui concerne l'invention et les premiers développements de cette branche remarquable des mathématiques.

Huygens réunit les divers problèmes que l'on avait déjà résolus, et en ajouta de nouveaux, dans un petit traité, le premier qui ait paru sur cette matière, et qui a pour titre: *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Hudde et Witt en Hollande, et Halley en Angleterre appliquèrent ensuite le calcul aux probabilités de la vie humaine. Vers le même temps, Jacques Bernouilli proposa aux géomètres divers problèmes de probabilité dont il donna depuis des solutions, et composa son bel ouvrage intitulé *Ars conjectandi* qui ne parut qu'en 1713, sept ans après sa mort arrivée en 1706. Dans cet intervalle de temps, Montmort fit paraître son *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (1re éd. de 1709, 2e de 1713). Abraham Moivre, Français fixé en Angleterre par suite de la révocation de l'édit de Nantes, donna en 1711 son traité: *Doctrine of Chances* perfectionné dans trois éditions successives.

Plusieurs savants, parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maur, Simpson, Sussmilch, Messène, Moheau, Price, Baily et Duvillard, ont réuni un grand nombre de données précieuses sur la population, les naissances, les mariages, la mortalité, les rentes viagères, les tontines, les assurances, etc., sujets qui seront traités dans l'ARITHMÉTIQUE SOCIALE.

Daniel Bernouilli s'est occupé de soumettre au calcul l'espérance morale; et Bayes, dans les Transactions philosophiques de 1763, a donné des résultats curieux sur la probabilité des causes et des évènements futurs conclue des événements observés.

Condorcet publia en 1785 son ouvrage remarquable intitulé: *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles. Cependant les travaux postérieurs de Laplace et de M. Poisson offrent des sujets intéressants d'étude.

On a encore de Condorcet un ouvrage posthume, intitulé: « Eléments du calcul des probabilités. »

Lagrange, Legendre, Gauss, Laplace ont fait faire à ce calcul de grands progrès. La *Théorie analytique des probabilités* de ce dernier est l'ouvrage le plus complet et le plus savant qui ait été publié sur la matière. Mais notre respect même pour la science de l'auteur nous fait regarder comme fort inférieures à la partie purement analytique les considérations morales de l'*Essai philosophique* qui forme l'introduction de ce traité.

Legendre et Gauss ont eu, chacun de leur côté, l'idée de la méthode des moindres carrés; mais la priorité appartient à Legendre.

M. Lacroix a complété son cours de mathématiques, en publiant un *Traité élémentaire du calcul des probabilités*.

Citons encore comme un excellent livre les *Grundzüge der Wahrscheinlichkeits Rechnung* de M. Hagen (Berlin 1837).

VI. MÉCANIQUE.

§ 1. *Eléments de statique.*

DÉFINITIONS. — La MÉCANIQUE est une science où l'on s'occupe de la détermination des *mouvements* que doivent prendre les corps en vertu des *forces* qui peuvent les solliciter.

Un corps est dit en *mouvement* lorsqu'il occupe successivement diverses positions dans l'espace. Il est en *repos* lorsque sa position ne change pas.

On appelle *force* une cause quelconque de mouvement.

La *statique* est la partie de la mécanique où l'on considère seulement les conditions d'*équilibre* des forces, c'est-à-dire les conditions nécessaires pour que les corps sollicités par ces forces restent en repos.

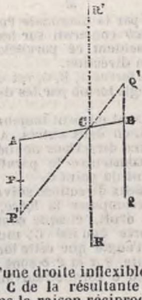
La *dynamique* est la partie de la mécanique où l'on traite de toutes les questions qui se rapportent au mouvement des corps.

On doit distinguer le point d'application, la direction et l'intensité d'une force.

Une force qui peut produire le même effet que plusieurs autres est appelée leur *résultante*. Lorsque plusieurs forces se font équilibre, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES. — Lorsque deux forces parallèles P et Q (fig. 1), dirigées dans le même sens, sont appliquées aux

1



extrémités d'une droite inflexible AB, le point d'application C de la résultante R partage la droite AB dans la raison réciproque de P à Q, de sorte que l'on a la proportion

$$P : Q :: BC : AC,$$

et la résultante R est égale à la somme des deux forces P et Q.

Si donc les droites AP, BQ représentent les intensités des forces P et Q, pour trouver le point d'application C il suffira de prolonger QB d'une quantité $BQ' = AP$, de prendre $AP' = BQ$ et de tirer $P'Q'$ qui coupera AB au point cherché.

Si on substitue à la force R une force R′ égale et directement opposée, les trois forces P, Q, R′ seront en équilibre. Alors on voit immédiatement que, pour déterminer le point d'application B de la résultante Q de deux forces parallèles P et R′, qui tirent en sens contraire, il faut prendre le point B de telle sorte que l'on ait la proportion

$$R' : P :: AB : BC.$$

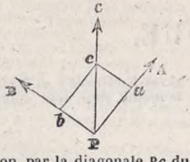
Ce point se construira d'ailleurs très-simplement, comme le point C précédemment, puisque l'on connaît $AP' = R' - P$ et $BQ' = P$. La résultante Q est égale à la différence des forces R′ et P.

On peut donc obtenir facilement la résultante d'autant de forces parallèles que l'on voudra. Il suffit, pour cela, de chercher la résultante R des deux premières ; la résultante R′ de R et de la troisième ; la résultante R″ de R′ et de la quatrième, et ainsi de suite.

Lorsque deux forces parallèles sont égales et agissent en sens contraires, leur résultante est nulle et son point d'application situé à l'infini. Aucune force unique ne peut faire équilibre à un système de ce genre qui porte le nom de *couple* ; M. Poinsot a fondé ses *Éléments de statique* sur la considération des couples. Cette théorie, ainsi appliquée par son savant auteur, a produit les résultats les plus remarquables dont l'enseignement de la mécanique se soit enrichi depuis trente ans.

Composition des forces qui concourent en un même point. — La résultante C de deux forces quelconques, A et B, appliquées à un même point P (fig. 2), est représentée en grandeur et

2



en direction par la diagonale Pc du parallélogramme $Pacb$ construit sur les lignes Pa, Pb qui représentent ce parallélogramme en grandeur et en direction.

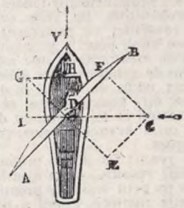
Chacune des forces A, B, C, est donc comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

Réciproquement on peut toujours décomposer une force C en deux autres, A et B, agissant suivant des directions données. Il suffit pour cela de construire le parallélogramme $Pacb$ en partant du point C.

Lorsque les deux directions suivant lesquelles on veut décomposer la force, font entre elles un angle droit, chaque composante est égale à la force donnée C, multipliée par le cosinus de l'angle que cette force fait avec cette composante, Pa et Pb sont ce que l'on appelle la force C estimée suivant PA et suivant PB.

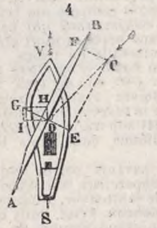
Ces conséquences de la proposition précédente, connue sous le nom de *parallélogramme des forces* expliquent une foule d'effets mécaniques connus. Les figures 3 et 4 représentent l'action du vent sur un bâtiment

3



à voiles. Soit CD la direction et l'intensité du vent qui agit sur la voile AB. Cette force peut se décomposer en deux autres, l'une DE perpendiculaire, l'autre DB parallèle au plan de la voile supposée tendue. La première seule

4



peut agir pour pousser le bâtiment. Or, elle peut à son tour se décomposer en deux autres, l'une DH dans le sens de l'axe longitudinal, l'autre DI dans le sens du travers du bâtiment. Mais en raison de la forme allongée de celui-ci, la résistance du liquide au mouvement transversal est bien plus puissante que la résistance au mouvement longitudinal. Le navire marche donc dans la direction de la flèche V, avec un faible mouvement de *dérive* dans le sens DI.

Ce qui précède explique comment deux bâtiments, poussés par le même vent, peuvent naviguer dans des directions diamétralement opposées. Lorsque l'axe longitudinal du navire fait le plus petit angle possible avec la direction du vent, on dit que l'on *serre le vent au plus près*.

Lorsque trois forces appliquées à un point dans l'espace ne sont pas situées dans un même plan, leur résultante est représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent ces forces en grandeur et en direction.

On peut donc, par des constructions successives de parallélipipèdes, ou même de parallélogrammes, obtenir la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées, dans l'espace à un même point.

Réciproquement une force est toujours décomposable en trois autres respectivement parallèles à trois lignes données dans l'espace, pourvu que deux de celles-ci ne soient pas parallèles.

Si les trois composantes sont rectangulaires entre elles, la valeur de la résultante estimée suivant chacune des composantes est égale à cette résultante multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la composante.

COMPOSITION DES FORCES QUELCONQUES.—Tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps, peuvent toujours se réduire à une seule force et à un couple unique, lesquels sont, en général, situés dans des plans différents.

Cette proposition est fondée : 1° sur ce que l'on peut pour chacune des forces P qui sollicitent un système appliquer à l'un quelconque des points de ce système deux forces contraires P et — P' égales à P, sans que pour cela le système soit changé ; 2° sur ce que tous les couples (P,—P') peuvent se composer en un couple unique, aussi bien que toutes les forces P' peuvent se réduire à une force unique.

On peut dire encore que tant de forces que l'on voudra, dirigées arbitrairement dans l'espace, peuvent toujours se réduire à deux au plus, non situées dans le même plan : et deux forces qui sont dans ce cas ne peuvent avoir de résultante unique.

Mais quand de trois forces on n'en peut trouver tout au plus que deux qui soient situées dans un même plan, il est toujours possible de rendre ces trois forces réductibles à une seule, sans rien changer à leurs directions dans l'espace.

La géométrie analytique à trois dimensions sert à exprimer par des équations la condition nécessaire pour que des forces en nombre quelconque aient une résultante unique, ainsi que la valeur et la position de cette résultante.

Pour cela on désignera par a, b, c les angles que l'une des forces P du système fait avec trois axes rectangulaires de coordonnées ; par R la résultante ; par α, β, γ les angles que cette résultante fait avec les axes ; par X, Y et Z les sommes de quantités analogues à P cos. a à P cos b et à P cos. c pour toutes les forces du système ; enfin par L, M, et N les sommes de quantités analogues aux produits

$$P\,(z \cos b - y \cos c),$$
$$P\,(x \cos c - z \cos a),$$
$$P\,(y \cos a - x \cos b).$$

Alors la condition, pour qu'il y ait une résultante unique, sera exprimée par l'équation

$$LX + MY + NZ = 0$$

Et lorsque cette condition sera satisfaite, pourvu cependant que les trois résultantes X, Y, Z ne soient pas nulles à la fois, la valeur de la résultante est

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

et les angles que sa direction fait avec les axes des coordonnées sont déterminés par les relations

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE. — Dans le cas de l'équilibre, les 6 quantités X, Y, Z et L, M, N doivent être nulles séparément, ce qui s'exprime en langage ordinaire de la manière suivante :

Pour qu'un nombre quelconque de forces soient en équilibre, il faut d'abord que la somme de ces forces décomposées parallèlement à trois axes qui se coupent soit nulle par rapport à chacun de ces axes. Ensuite, en convenant d'appeler *moment d'une force* par rapport à un axe le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à cet axe, par la distance de la projection à l'axe, les trois dernières conditions de l'équilibre s'énoncent en disant que la somme des moments des forces doit être nulle par rapport à chacun des trois axes des coordonnées.

Si l'on vient à supposer que toutes les forces concourent en un même point, les trois dernières équations disparaissent d'elles-mêmes, et on voit qu'il suffit, pour que l'équilibre ait lieu dans ce cas, que la somme des composantes des forces suivant trois axes qui se coupent, soit nulle par rapport à chacun de ces axes.

Dans le cas particulier où les forces sont parallèles, on trouvera, d'après les équations précédentes, que la résultante est égale à la somme algébrique des composantes, en comptant comme positives celles qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire. De plus le *moment* de la résultante, par rapport à un plan quelconque parallèle à la direction des forces, est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même plan. Le moment est, dans ce cas, le produit de la force par sa distance au plan ; le signe du moment change, soit avec celui de la force, soit avec celui du *bras de levier* ou de la distance au plan. Lorsque la force et le levier changent de signe tous les deux, le moment tend à faire tourner dans le même sens, et ne change pas de signe.

La distance de la résultante à un plan parallèle à la direction des forces, étant égale à la somme des moments des forces divisée par la somme des forces, il est facile de déterminer la position de la résultante dans l'espace par ses distances à deux plans fixes.

Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique de ces forces soit nulle, et que les sommes de leurs moments par rapport à deux plans parallèles à leurs directions soient nulles d'elles-mêmes.

CENTRES DES FORCES ET DES DISTANCES. — Si l'on considère un système quelconque de forces parallèles appliquées à un assemblage de points, et qu'on incline successivement tout le système de ces forces dans diverses situations, de manière que les mêmes forces passent toujours par les mêmes points et conservent leurs grandeurs et leur parallélisme, les résultantes générales qu'on trouvera successivement dans chacune de ces positions se croiseront toutes au même point, auquel on donne le nom de *centre des forces parallèles*.

M. Minding, professeur à Berlin, est parvenu à une propriété analogue et beaucoup plus générale, pour un système quelconque de forces non parallèles. Elle consiste en ce que les forces d'un système étant supposées telles qu'elles ne se fassent pas équilibre, si on les fait tourner autour de leurs points respectifs d'application, sans déranger leurs inclinaisons mutuelles, il y a une infinité de positions du système dans lesquelles toutes les forces peuvent être remplacées par une résultante unique. La direction de cette résultante coupe toujours les contours d'une ellipse et d'une hyperbole, situées dans deux plans perpendiculaires entre eux; ces deux courbes sont d'ailleurs dans de telles relations, que les foyers de l'une coïncident avec les sommets de l'autre. Réciproquement, chaque droite qui joint un point de l'ellipse à un point de l'hyperbole, peut être considérée comme la direction de la résultante unique, pour une certaine position du système.

Puisque le centre des forces parallèles est situé sur la direction de la résultante, la distance de ce point à un plan quelconque se trouvera comme la distance de la résultante à ce plan, en supposant que toutes les forces, sans cesser d'être parallèles et appliquées aux mêmes points, sont devenues parallèles à ce plan. En faisant la même opération pour trois plans, le centre des forces parallèles sera déterminé.

Si toutes les forces sont égales et de même sens, la position du centre ne dépend plus que de la figure formée par les points d'application; sa distance à un plan quelconque est égale à la somme de tous les points d'application divisée par leur nombre, ou à la moyenne distance de tous les points d'application au plan. Dans ce cas, le centre des forces parallèles prend le nom de *centre des moyennes distances*.

Pesanteur et centres de gravité. — La *pesanteur* ou *gravité*, celle des forces de la nature à laquelle nous sommes le plus assujettis, nous offre à chaque instant des applications des considérations précédentes. Cette force, dont la nature nous est inconnue, se manifeste principalement en faisant descendre les corps vers la terre lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes. Elle exerce son action sur toutes les molécules des corps et se fait sentir également à chacune d'elles. Dans un même lieu, on peut regarder les petites forces qui sollicitent ces molécules comme parallèles et dans le même sens, et leur appliquer ce qui a été dit plus haut.

Donc la résultante de toutes les forces parallèles de la pesanteur leur est aussi parallèle, c'est-à-dire verticale, et elle est égale à leur somme. La quantité de cette résultante est ce que l'on nomme le *poids* des corps, lequel est par conséquent proportionnel au nombre des molécules matérielles ou à la *masse* du corps. Enfin le point unique par lequel passe toujours la direction du poids porte le nom de *centre de gravité*, que l'on appelle encore quelquefois *centre de masse*, *centre de figure*, et même centre des moyennes distances, à raison de sa propriété géométrique fondamentale.

Il résulte de la définition même du centre de gravité que si ce point est fixe, le corps auquel il appartient demeurera en equilibre dans toutes les positions.

Pour avoir égard à la pesanteur dans toutes les questions de mécanique, il suffit de considérer chaque corps comme réduit à son centre de gravité, qu'on supposera sollicité par une force égale et parallèle à son poids. Il ne s'agit donc que de savoir déterminer les centres de gravité des divers corps ou assemblages de corps qui peuvent se présenter.

Cette détermination peut être opérée très-simplement pour une foule de corps de forme régulière, lorsqu'on les suppose *homogènes*, c'est-à-dire composés de molécules également réparties.

Ainsi le centre de gravité de l'aire d'un triangle est à la rencontre des trois droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés.

Pour trouver le centre de gravité d'un trapèze, prolongez vers la droite l'une des deux bases d'une longueur égale à l'autre, et celle-ci, vers la gauche, d'une longueur égale à la première, et tirez la ligne qui joint les extrémités de ces deux prolongements; elle coupera celle qui joint les milieux des deux bases au point demandé.

Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est au point de rencontre des quatre droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des bases opposées.

Le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque ou d'un cône, est sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne, à partir de la base.

La détermination des centres de gravité d'un polygone ou d'un polyèdre quelconque se déduit de ce qui précède. Car un polygone peut toujours être décomposé en triangles, ou si l'on veut, en triangles et en trapèzes; un polyèdre peut aussi être décomposé en pyramides. Si l'on suppose appliquées aux centres de gravité des figures partielles dans lesquelles se décomposent le polygone ou le trapèze, des forces parallèles et respectivement égales aux poids de ces figures, on trouvera le centre de gravité du système absolument de la même manière que l'on trouverait le centre des forces parallèles. On emploiera donc à cette recherche ou la composition successive des forces parallèles, ou le calcul des moments par rapport à deux axes fixes ou à trois plans fixes qui se coupent.

L'analyse infinitésimale est nécessaire lorsqu'il s'agit de faire le calcul des moments pour des lignes, des surfaces et des solides que l'on n'a pu décomposer préalablement en parties, dont les centres de gravité soient connus.

D'abord, dans le cas d'une ligne à double courbure déterminée par ses équations dans l'espace, si p désigne le *poids spécifique* de la ligne, c'est-à-dire le poids qu'aurait l'unité de longueur, poids variable suivant une fonction connue des coordonnées, le poids total P de l'arc s sera donné par la formule

$$P = \int p.ds,$$

et les coordonnées x', y', z' du centre de gravité seront déterminées par les relations

$$Px' = \int px.ds, \quad Py' = \int py.ds,$$

$$Pz' = \int pz.a$$

Les intégrales sont prises entre les limites qui déterminent les extrémités de l'arc.

Si la ligne est homogène, on a $\frac{P}{p} = s$, et les formules précédentes sont simplifiées parce que l'on peut faire sortir de dessous le signe $\int$ la constante p.

Pour le centre de gravité d'une surface hétérogène, on aura de même

$$P = \iint p.dS, \quad Px' = \iint px.dS,$$

$$Py' = \iint py.dS, \quad Pz' = \iint pz.dS$$

Les limites des intégrations doivent être les mêmes que pour la quadrature des surfaces courbes, et dS désigne l'élément différentiel de la surface.

Dans le cas de l'homogénéité on a $\frac{P}{p} = S$, et les formules sont simplifiées.

Pour déterminer le centre de gravité d'un corps solide quelconque, on a

$$P = \iiint p \,.\, dxdydz,$$

$$Px' = \iiint px \,.\, dxdydz,$$

$$P y' = \iiint py \,.\, dxdydz,$$

$$Pz' = \iiint pz \,.\, dxdydz.$$

Les limites des intégrales seront déterminées comme dans le cas de la cubature des solides. Si le corps devient homogène, on a

$$\frac{P}{p} = V = \iiint dxdydz = \iint z\, dx\, dy;$$

Les formules sont alors simplifiées, et les intégrales triples réduites à des intégrales doubles.

Pour déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un corps il suffit de le suspendre successivement par deux points différents à un fil flexible. Les directions du fil suffisamment prolongées se couperont toujours en un point qui est le centre de gravité.

ÉQUILIBRE STABLE ET INSTABLE. APPLICATIONS. — Un corps ne peut être en équilibre qu'autant que la verticale menée par son centre de gravité passe par un point fixe dans le système. Seulement l'équilibre n'est *stable* qu'autant que le centre de gravité est au-dessous du point d'appui; il est *instable* dans le cas contraire.

Un bâton que l'on soutient en l'air sur le bout du doigt offre un exemple bien connu d'équilibre instable. Mais, si l'on a soin de contrarier avec le doigt les divers mouvements que les oscillations du centre de gravité tendent à imprimer au bâton, on parvient à le maintenir dans des positions voisines de la verticale. Il est même à remarquer qu'on y parvient d'autant plus facilement qu'il est chargé d'un poids plus fort à la partie supérieure. Car, à mesure que le centre de gravité s'éloigne du point d'appui mobile que lui offre le doigt, il décrit des arcs de cercle d'un moindre nombre de degrés pour un même chemin qu'il parcourt ; et la force qui tend à faire tomber le bâton croît seulement avec le nombre de degrés que décrit son centre de gravité en dehors de la verticale.

Dans tout autre cas il y a avantage à placer le centre de gravité le plus bas possible pour obtenir une plus grande stabilité. Tel est le principe du chargement des diligences et des voitures de roulage.

Les animaux, dans leurs postures et leurs mouvements, placent le centre de gravité de leur corps de manière qu'il soit soutenu. Quand un homme se tient debout, la verticale passant par son centre de gravité doit tomber dans l'intérieur de la base formée par les plantes de ses pieds. Le calcul, d'accord avec l'expérience, prouve qu'à mesure que les pieds sont plus écartés l'un de l'autre, leur direction doit, pour la plus grande stabilité du corps, approcher davantage du parallélisme et dans la marche ou dans la pose ordinaire d'un homme debout, les *pieds en dehors* sont aussi conformes aux lois de la mécanique qu'aux exigences de la bonne grâce.

Un homme qui porte un fardeau sur ses épaules est obligé de s'incliner en avant, sous peine d'être entraîné en arrière par son fardeau (fig. 5). Par une raison semblable, une

5

femme grosse, une nourrice qui porte un enfant dans ses bras, sont obligées de rejeter leur corps en arrière. Enfin le boucher, le pâtissier qui portent leur charge sur la tête ont soin de se tenir aussi droits que possible.

Le piéton (fig. 6) qui gravit une colline penche son corps en avant ; il renverse son corps en arrière lorsqu'il la descend ; ou plutôt,

6

dans l'un et l'autre cas, il cherche à maintenir dans l'intervalle des points d'appui, la verticale passant par son centre de gravité.

Le centre de gravité d'un homme bien proportionné, qui se tient debout et immobile, se trouve ordinairement dans l'intérieur du corps à peu près à la hauteur du nombril.

THÉORÈME DE PAPPUS OU DE GULDIN. — Le centre de gravité jouit d'une propriété géométrique très-remarquable et très-utile qui consiste en ce que : 1° Lorsqu'une courbe plane a tourné autour d'un axe fixe situé dans son plan de manière à engendrer une surface de révolution (voyez col. 164), l'aire de cette surface comprise entre deux plans méridiens est égale à la longueur de la ligne génératrice multipliée par l'arc de circonférence qu'a décrit le centre de gravité entre ces méridiens. 2° Le volume du solide de révolution compris entre cette surface et les deux plans méridiens a pour mesure le produit de l'aire comprise entre la courbe plane, l'axe et les deux ordonnées extrêmes perpendiculaires à l'axe, par l'arc de circonférence qu'a décrit le centre de gravité.

Ce théorème remarquable, attribué à tort à Guldin, qui le publia en 1635, doit être restitué à Pappus, géomètre d'Alexandrie qui vivait dans le quatrième siècle de notre ère, et qui nous a laissé dans ses *Collections mathématiques* le dépôt précieux des principales connaissances des anciens géomètres.

§ 2. *Application des principes de statique aux machines les plus simples.*

Les *machines* sont des instruments destinés à transmettre l'action des forces en la modifiant d'une manière conforme au but que l'on se propose. Ces modifications s'opèrent au moyen d'*obstacles* qui gênent les mouvements, et ne leur permettent de s'opérer que dans certaines directions ou du moins entre certaines limites.

On peut réduire à trois les machines simples suivant la nature de l'obstacle : 1° le *levier*, 2° le *tour*, 3° le *plan incliné*. Dans la première machine, l'obstacle est un point fixe autour duquel le corps a la liberté de tourner dans tous les sens; dans la seconde, l'obstacle est une droite ou axe fixe autour duquel les différents points du corps ne peuvent tourner que dans des plans parallèles entre eux; dans la troisième, l'obstacle est un plan inébranlable contre lequel le corps s'appuie, et sur lequel il a la liberté de glisser ou de rouler.

Dans tout ce qui va suivre nous ferons abstraction des diverses circonstances physiques qui peuvent influer sur l'équilibre, telles que le frottement des corps les uns sur les autres, et la raideur des *cordes* au moyen desquelles les forces transmettent leur action aux divers points de la machine. Ainsi l'on supposera que l'action de chaque force se transmet suivant l'axe de la corde à laquelle elle est appliquée de manière que l'on pourra considérer les cordes comme des fils parfaitement flexibles et inextensibles. On verra facilement dans quel cas et comment on doit avoir égard aux diamètres des cordes.

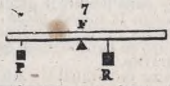
Levier. — Le *levier* peut être considéré comme une barre rigide, d'une forme quelconque, mobile autour d'un point fixe, qui la partage en deux *bras* inégaux, sollicité chacun par une force. Pour l'équilibre, il faut et il suffit que ces deux forces soient dans un même plan avec l'appui, que leurs moments par rapport à ce point soient égaux et qu'elles tendent à faire tourner en sens contraire.

Plus généralement, si le levier est sollicité par un nombre quelconque de forces, il faut que toutes ces forces aient une résultante unique qui passe par le point d'appui; et la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens se trouve alors égale à la somme des moments qui tendent à faire tourner en sens contraire. La charge du point d'appui est absolument la même que si toutes les forces s'étaient transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point sans changer de grandeur ni de sens.

Dans le cas où le levier n'est sollicité que par deux forces, on peut considérer l'une d'elles comme la *puissance* qui tend à imprimer le mouvement à la machine, et l'autre comme la *résistance* ou l'effort qu'il faut vaincre. On distingue alors *trois genres* de leviers, suivant la place qu'occupe le point d'appui relativement à ces deux forces.

Dans le levier du premier genre (fig. 7),

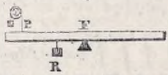
7



l'appui F tombe entre la puissance P et la résistance R; et la puissance a d'autant plus d'avantage qu'elle agit sur un bras de levier plus long.

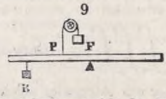
Dans le levier du second genre (fig. 8), la résistance R est placée entre l'appui F et la puissance P, qui a toujours l'avantage, et dans une proportion plus forte à mesure que son bras de levier augmente.

8



Enfin la puissance P (fig. 9) agit entre la résistance R et le point d'appui F, dans le levier du troisième genre.

9



Pour avoir égard au poids du levier, il faut considérer ce poids comme une force verticale appliquée au centre de gravité. Si le levier est placé de telle sorte que cette verticale passe par le point d'appui, l'action du poids sera détruite, et l'on n'aura plus à s'occuper que des autres forces appliquées au levier.

Balance. — La balance ordinaire est un levier du premier genre aux extrémités duquel sont suspendus, par des cordons, deux bassins ou plateaux destinés à recevoir les corps dont on veut comparer le poids.

Pour que cet instrument soit juste, il faut que le point d'appui divise le levier ou *fléau* en deux portions égales, et que le centre de gravité soit dans la verticale menée par le point d'appui. Mais il faut de plus que le centre de gravité tombe au-dessous du point d'appui pour que l'on puisse mettre la balance dans un état d'équilibre stable, et à peu de distance de ce point pour qu'elle soit suffisamment sensible; car elle serait *folle* si le centre de gravité était au-dessus du point d'appui du fléau, c'est-à-dire qu'on n'aurait qu'un équilibre instable; et elle deviendrait *indifférente* si ces deux points coïncidaient.

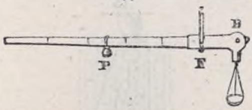
Borda a donné sous le nom de *méthode des doubles pesées* un procédé extrêmement simple à l'aide duquel on peut obtenir les poids exacts des corps, même avec une balance qui ne satisfait pas à la condition fondamentale d'une parfaite égalité dans les longueurs des bras de levier. Il suffit d'équilibrer d'abord le corps à peser avec un contre-poids quelconque tel que de la grenaille de plomb, du sable, etc., et remplacer ensuite le corps par des poids exacts qui se trouvent de nouveau en équilibre avec le contre-poids; on est certain que ces poids expriment exactement le poids du corps.

Avant la méthode de Borda, on mettait successivement dans les deux plateaux le corps à peser, et on extrayait la racine carrée du produit des deux nombres qui exprimaient les valeurs des poids faisant équilibre au corps dans ses deux positions.

Plusieurs mécaniciens français et étrangers sont parvenus à donner à la balance un degré de précision vraiment surprenant. M. Séguier a annoncé dans un rapport lu à l'Académie des sciences le 9 janvier 1837 qu'une balance présentée par M. Ernst, chargée de 500 grammes dans chaque plateau, trébuchait sous un poids additionnel d'un seul milligramme. Cette balance est pourvue de détails ingénieux de construction qui permettent de l'ajuster et de la régler à volonté.

Romaine. — La balance romaine (fig. 10) ainsi appelée parce qu'elle était d'un grand usage chez les Romains qui la nommaient *sta-*

10

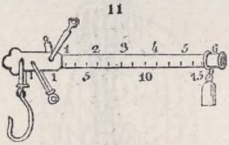


tera, est aussi un levier droit du premier genre, mais dont les bras de levier sont inégaux. A l'extrémité B du bras le plus court est un bassin ou un crochet à l'aide duquel on suspend le corps dont on veut trouver le poids. Un poids connu P est mobile au moyen d'un anneau le long de l'autre bras, de sorte qu'en le faisant glisser à une distance convenable de l'appui F, il fait équilibre au poids du corps qui agit de l'autre côté.

Dans le cas le plus général, où le centre de gravité du fléau et du bassin est hors de la verticale passant par le point d'appui, on commence par déterminer le zéro de la graduation en cherchant le point où il faut placer le poids P pour établir l'équilibre. Ensuite, ayant placé un poids connu dans le bassin, on éloignera le poids P du point de suspension jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli, et on cotera du chiffre qui exprime la valeur du poids le point où le poids aura été arrêté. Les multiples et les sous-multiples de l'intervalle compris entre le zéro et ce point de division correspondront respectivement aux mêmes multiples et sous-multiples des poids mis dans le bassin.

La figure 11 représente une espèce de ro-

11

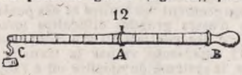


maine assez usitée dans le commerce pour les pesées qui n'exigent pas une grande précision. Cet instrument est muni de deux tiges de suspension qui permettent de changer le point d'appui, par un simple retournement; il porte donc aussi deux graduations différentes.

La romaine de M. Paul, inspecteur des poids et mesures à Genève, est bien préférable à toutes celles dont on se sert communément. Voir à ce sujet le tome III du *Philosophical Magazine*.

Balance danoise.— C'est un levier droit encore du premier genre (fig. 12), portant à

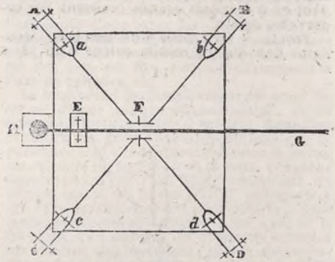
12



l'une de ses extrémités un poids constant B qui y est soudé, à l'autre extrémité un crochet C pour recevoir la marchandise à peser, et un autre crochet A que l'on peut faire glisser le long du levier pour servir de point de support. Les divisions du levier doivent commencer à partir du centre de gravité de l'appareil non chargé et être opérées en progression harmonique. (Voyez col. 141). Elles ont donc l'inconvénient d'être très-rapprochées les unes des autres vers l'extrémité C.

Pont a bascule. — On appelle ainsi une espèce de balance employée à la pesée des plus lourds fardeaux, principalement sur les routes, pour prévenir les excès de chargements prohibés par les lois sur la police du roulage. Le fardeau se place sur une plate-forme ou tablier en bois, au-dessus d'une fosse creusée dans la direction de la route, et revêtue intérieurement de maçonnerie. Cette fosse renferme un mécanisme dont la fig. 12 *bis* donnera une idée.

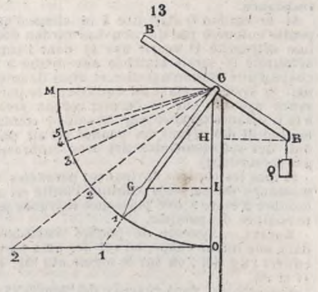
12 *bis.*



A, B, D, C sont des leviers du troisième genre, dirigés vers le centre de la plate-forme, qui ont pour points d'appui des pièces scellées en *a*, *b*, *d*, *c*, dans les angles des murs de la fosse. La plate-forme et sa charge sont supportées en *a*, *b*, *d*, *c* par ces leviers, au moyen de patins en fer; et les quatre leviers réunis vers le centre de la plate-forme, mais de manière à se mouvoir librement, sont supportés en F par un long levier encore du troisième genre, dont le point d'appui est sur un massif de maçonnerie E, et dont le grand bras E G aboutit à l'aide d'une tige verticale à l'une des extrémités du fléau d'une balance, dont l'autre fléau porte un bassin que l'on charge de poids, par lesquels on connaît le poids de la charge du tablier. Par exemple, si les points *a*, *b*, *c*, *d*, F sont placés à la *dixième* partie de la longueur de chacun de leurs leviers, il suffira en G d'un poids égal à la *centième* partie du poids du chargement du tablier pour équilibrer ce chargement.

Peson. — C'est (fig. 13) un levier BB′, sur le

13

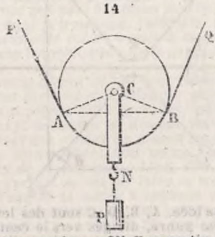


point d'appui duquel est fixée à angle droit une tige pesante CG, dont le centre de gravité est en G. Si l'instrument est disposé de telle sorte que le centre de gravité du levier coïncide avec le point d'appui, on trouve que lorsque l'on suspend un poids Q à l'une des extrémités du levier, la tangente de l'inclinaison de l'aiguille CG croît en proportion du poids du corps. Rien n'est donc plus facile que de tracer une graduation convenable sur le limbe d'un quart de cercle MCO fixé au support de l'instrument.

Dans le cas général, on peut toujours graduer ce limbe par expérience directe, en mettant en Q des poids connus croissant par intervalles égaux.

Poulie. — On appelle ainsi une roue circulaire CAB (fig. 14) mobile autour d'un axe C

14



qui porte une *chape* CN. Une partie AB de la circonférence de la poulie est enveloppée par une corde FABQ dont les deux extrémités sont tirées par les forces F et Q. L'équilibre de la poulie se rapporte à celui du levier. Dans le cas où le crochet N de la chape est fixe, les deux forces F et Q doivent être égales pour qu'il y ait équilibre; et la charge de l'arc de la poulie est égale à l'une de ces forces multipliée par le rapport de la sous-tendante de l'arc embrassée par le cordon, au rayon de la poulie. Si, au contraire, l'extrémité du cordon AF, au lieu d'être tirée par une force, est attachée à un point fixe F, et que la chape porte un poids P, la puissance Q qui tend à faire monter le poids est à ce poids comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par le cordon.

Le cas le plus favorable à la puissance est celui où les deux parties du cordon sont parallèles et embrassent la demi-circonférence; alors la puissance est moitié seulement de la résistance.

Si le cordon Q était fixé à la chape d'une poulie entourée par un nouveau cordon dont une extrémité F′ serait fixe et dont l'autre extrémité Q′ serait attachée elle-même à la chape d'une troisième poulie, et ainsi de suite, tout le système étant en équilibre, la puissance agissant sur le dernier cordon serait à la résistance opposée par le poids P comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes des arcs embrassés par les cordons.

Si tous les cordons deviennent parallèles, la puissance est au poids comme l'unité est au nombre 2 élevé à une puissance marquée par le nombre des poulies.

Moufle. — Système de poulies assemblées dans une même chape, ou sur des axes particuliers (fig. 15), ou sur le même axe (fig. 16, 17 et 18).

Considérons, dans chacune des figures 15 et 16, deux moufles, l'un fixe, l'autre mobile. Il est facile de voir que dans l'une et l'autre figure, si l'on suppose les cordons sensiblement parallèles, la puissance sera à la résistance comme l'unité est au nombre des cordons qu

15

soutiennent le moufle mobile. Pour une même longueur de corde, le point d'attache se trouvant au moufle inférieur de la fig. 16, la résistance

16

sistance est soutenue par un cordon de plus, et cette disposition offre, sous ce rapport, de l'avantage sur le système de la fig. 15 où l'extrémité de la corde se trouve attachée à la chape supérieure.

L'agencement des cordes et des poulies présente d'assez grandes difficultés lorsque le nombre des poulies devient considérable. La fig. 17 représente, vu par la tranche et sans corde, le système de moufles dû à l'ingénieur anglais Smeaton. Chacun des équipages supérieur et inférieur a deux rangs de poulies, mais dans l'équipage supérieur qui est fixe, les poulies du rang supérieur ont plus grand diamètre que celles du rang inférieur, et l'inverse a lieu dans l'équipage inférieur qui est mobile. Les poulies sont marquées sur la figure par les numéros 1, 2, 3... suivant l'ordre dans lequel elles sont enveloppées par la corde.

Le n° 1 se trouve au crochet inférieur de l'équipage du bas, et le n° 10 à la boucle inférieure de l'équipage du haut.

La machine de White, représentée dans la fig. 18, se compose de deux moufles dont les poulies sont creusées dans une même pièce. Les diamètres ont été calculés de telle sorte

que, pour une corde d'une grosseur déterminée, les vitesses de rotation de toutes les poulies doivent être les mêmes. Cette disposition offre l'avantage d'éviter les frottements multipliés qui résultent de l'emploi d'un grand nombre d'axes séparés. Néanmoins elle est fort peu usitée à cause des difficultés de l'ajustage.

Tour. — C'est généralement un *arbre* ou cylindre aux bases duquel on adapte ordinairement deux *tourillons* ou cylindres de même axe, mais d'un diamètre plus petit, qui reposent sur deux appuis fixes. Le cylindre, en tournant sur ces tourillons, est donc dans le même cas que s'il tournait autour de son axe considéré comme ligne fixe. La résistance à vaincre est appliquée à une corde qui s'enroule autour du cylindre, tandis que la puissance le fait tourner en agissant, soit tangentiellement à une roue perpendiculaire à l'axe de ce cylindre et invariablement liée avec lui, soit à l'extrémité d'une barre fixée à angle droit sur l'axe du cylindre, soit au moyen d'une *manivelle* ou levier coudé rectangulairement dont un des bras est fixé perpendiculairement à l'axe du cylindre, etc.

Le tour prend particulièrement le nom de *treuil* lorsque son axe est horizontal, et de *cabestan* lorsque l'axe est vertical. Dans l'un et l'autre cas, pour l'équilibre, il faut que la puissance soit à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue. Les pressions exercées sur l'axe sont absolument les mêmes que si ces forces étaient transportées sur l'axe parallèlement à elles-mêmes, dans leurs plans perpendiculaires à cet axe; et il est facile d'en déduire les pressions exercées sur chacun des tourillons, par la décomposition des forces parallèles et par le parallélogramme des forces. Le poids du treuil augmente la pression sur chaque tourillon d'une quantité que l'on détermine aussi facilement.

Si l'on considère un nombre quelconque de forces dirigées dans tous les sens par rapport au treuil, il faut décomposer chacune d'elles en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction de l'axe fixe. La résultante des forces parallèles à l'axe est détruite par la résistance longitudinale de cet axe; il suffit donc que les composantes perpendiculaires à l'axe se fassent équilibre, ou que la somme de leurs moments par rapport à cet axe soit nulle.

Dans un système de tours à axes parallèles qui réagissent les uns sur les autres, de sorte que chacun des cylindres communique directement avec la roue du suivant par une corde tangente, la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindre est au produit des rayons des roues.

Roues dentées.—Ces roues offrent un exemple du système précédent, dans lequel les tours ont été rapprochées. Le cylindre du premier auquel est appliquée la puissance Q (fig. 19) devient alors tangent à la roue du second, le cylindre de celui-ci tangent à la roue du troisième et ainsi de suite. Le poids ou la résistance P agit tangentiellement à l'arbre du dernier tour. Les roues et les cylindres sont munis *d'engrenages* ou d'une série de *dents* également espacées, de manière que chaque roue ainsi dentée ne peut tourner sur son axe, sans que le cylindre, qui porte le nom de *pignon*, ne tourne en même temps sur le sien.

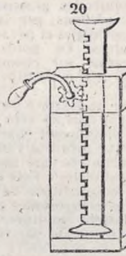
La condition d'équilibre est donc que la puissance soit à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.

Le Cric, dont les tailleurs de pierre font si grand usage (fig. 20), se rapporte au tour. Il se compose d'un pignon qu'une puissance appliquée à une manivelle fait tourner, et qui agit sur une *crémaillère* ou barre inflexible dentée; cette barre, mobile seulement dans le sens de sa longueur, porte un fardeau dont le poids ou la résistance agit dans le même sens.

19

Pour l'équilibre, il faut que le rapport de la puissance à la résistance soit égal à celui du rayon de la manivelle au rayon du pignon.

20



Plan incliné. — Lorsqu'un corps s'appuie sur un plan par plusieurs points, et qu'il est sollicité par plusieurs forces, il faut, pour l'équilibre, que ces forces puissent se réduire à une seule, normale au plan, et dont la direction tombe dans l'intérieur du polygone formé par tous les points de contact.

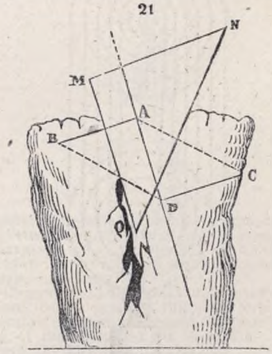
Lorsque le corps ne pose que par un seul point, la pression exercée par les forces est égale à leur résultante. Si le corps pose sur deux points, la résultante, dont la direction tombe nécessairement entre ces deux points, sur la droite qui les joint, se décompose en deux forces parallèles appliquées aux points d'appui et qui expriment leurs pressions respectives. S'il y a trois points d'appui non en ligne droite, et que l'on représente la pression totale par l'aire du triangle qui joint ces trois points, la pression exercée à chacun d'eux sera égale à l'aire d'un triangle qui a pour base le côté opposé et pour sommet le point où tombe la direction de la résultante.

Lorsque le nombre des points d'appui excède 2 en ligne droite ou 3, en général, les considérations de pure statique sont insuffisantes pour déterminer les valeurs des pressions exercées en chaque point. D'Alembert, Bossut, M. Poinsot et d'autres géomètres en ont conclu que les pressions sont indéterminées mathématiquement; et que si, dans la nature, les pressions exercées par les corps aux différents points de contact sont nécessairement déterminées dans tous les cas, cela tient à ce que tous les corps sont plus ou moins flexibles et élastiques; et qu'en tenant compte de ces propriétés, on pourra trouver autant de relations qu'il en faudra pour déterminer les pressions des points d'appui. Mais Euler et Lambert ont envisagé la chose sous un point de vue différent; beaucoup de géomètres distingués, français et allemands, se sont rangés à leur opinion, et n'ont pu se résoudre à admettre ce paradoxe singulier : que, dans le cas d'une rigidité parfaite de certains corps, la nature admettrait une indétermination quelconque dans des pressions qui ont une existence très-réelle. M. Augustin Cournot a donné une solution très-satisfaisante de cette difficulté, en invoquant des principes nouveaux qu'il rapporte à la *dynamique latente* ou science des effets des forces. Nous renvoyons le lecteur au *Bulletin des sciences mathématiques*, 1827, n°s 5 et 76, et 1828, n° 5 et 6.

Dans le cas où le plan que l'on considère n'est pas perpendiculaire à la direction de la pesanteur, et où le corps qui y est posé n'est retenu que par une seule force qui fait équilibre à son poids, ce plan prend plus particulièrement le nom de *plan incliné*, et les deux forces sont entre elles dans le rapport des sinus des angles qu'elles font avec la normale au plan. L'avantage le plus grand a lieu pour la puissance lorsqu'elle est parallèle au plan incliné, et dans ce cas elle est au poids du corps qu'elle y retient en équilibre, comme la hauteur du plan est à sa longueur. La puissance étant horizontale, son rapport au poids devient celui de la hauteur du plan à la base. Une force perpendiculaire au plan incliné ne pourrait, quelque grande qu'elle fût, y maintenir un corps pesant, s'il n'existait une résistance provenant du frottement que nous évaluerons plus tard.

Le coin est un prisme triangulaire que la figure 21 représente vu par une de ses bases

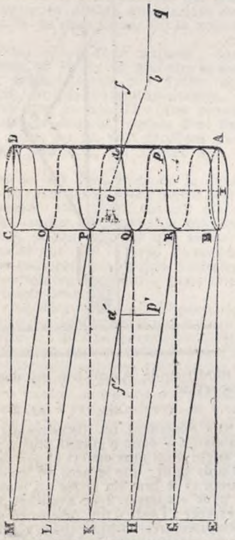
21



MNQ, et que l'on introduit par une de ses arêtes Q entre deux obstacles pour exercer latéralement deux efforts qui tendent à les écarter. L'arête Q s'appelle le *tranchant* du coin, les faces adjacentes MQ, NQ se nomment les *côtés* et la face MN la *tête*. C'est sur cette dernière qu'on applique le coup ou la pression.

La condition d'équilibre du coin se déduit évidemment de celle qui est relative à un corps sollicité par deux forces sur un plan incliné, et consiste en ce que la puissance étant représentée par la tête du coin, les deux forces qui en résultent perpendiculairement aux côtés sont représentées par ces côtés eux-mêmes.

Vis.—Considérons un cylindre droit ABCD (fig. 22) dont on développe sur un plan la surface



22

convexe suivant le rectangle BEMC. Divisons les hauteurs BC, EN en un même nombre de parties égales, et menons les transversales BG, RH, QK etc. Si l'on replie le rectangle BEMC sur le cylindre, la suite de ces transversales tracera à la surface de ce cylindre une courbe continue que l'on nomme *hélice*. Chacune d'elles détermine une *spire* de B en R, de R en Q, etc. etc...; les portions d'une génératrice quelconque du cylindre, comprises entre plusieurs spires consécutives, sont égales, et cet intervalle constant est le *pas* de l'hélice.

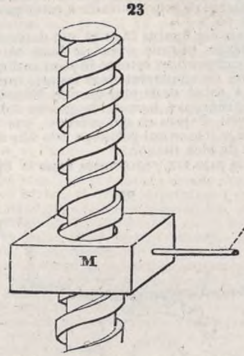
La propriété fondamentale de l'hélice est d'être partout également inclinée aux diverses génératrices de la surface cylindrique. On peut donc comparer la position d'un point *a*, situé sur l'hélice et sollicité par plusieurs forces à celle d'un point *a'*, situé sur un plan incliné QK ayant pour base QH la longueur développée de la circonférence du cylindre droit et pour hauteur HK le pas de l'hélice. Si le point *a* est en équilibre sous l'influence de deux forces, l'une *p* verticale, l'autre *q* horizontale, et agissant à l'extrémité du bras de levier *ob*, le rapport entre ces deux forces sera égal à celui de la circonférence que tend à décrire la puissance *q*, au pas de l'hélice; il est donc indépendant du rayon du cylindre.

La vis (fig. 23 et 24) est un cylindre droit revêtu d'un *filet* saillant engendré par le plan d'un parallélogramme, d'un triangle ou d'une figure quelconque qui, s'appuyant par sa base sur une génératrice, tourne autour de l'axe du cylindre, en faisant toujours le même angle avec les sections méridiennese, et en descendant le long d'une hélice tracée sur sa surface. Tous les points du *filet* de la vis appartiennent donc à des hélices de même pas, qu'on nomme le pas de la vis, décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différents.

L'*écrou* n'est autre chose que le moule qu'on obtiendrait en entourant le corps de la vis avec matière plastique. Sur les figures 23 et 24 l'écrou est à l'intérieur de la pièce M.

Si la vis est fixe (fig. 23) l'écrou, qui seul est

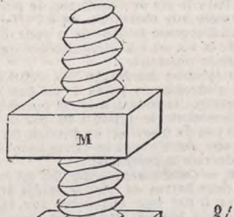
23



mobile, est sollicité par deux forces seulement, l'une parallèle à l'axe qui tend à le faire descendre en tournant autour de cet axe, l'autre Q dans un plan perpendiculaire à cet axe, et qui tend à le faire remonter en sens contraire. La condition d'équilibre est que la puissance Q soit à la résistance exercée dans le sens de l'axe, comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.

Cette condition n'est pas modifiée lorsque c'est l'écrou M qui est fixe (fig. 24) et la vis

24



mobile. Seulement, dans le premier cas, l'écrou avance dans le sens où montent les spires de la vis; il marche en sens contraire, c'est-à-dire vers la *tête* de la vis, dans l'autre cas.

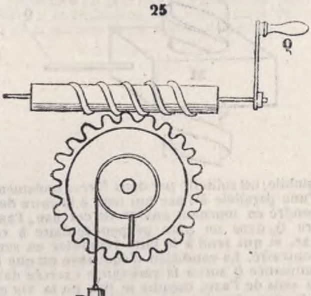
On distingue par les mots *dextrorsùm* et *sinistrorsùm* les deux sens dans lesquels peut être dirigé le filet de la vis, suivant que l'hélice directrice va en montant de gauche à droite ou de droite à gauche, à partir de la base du cylindre supposé vertical. La règle suivante donnera toujours le sens du mouvement de la pièce mobile, vis ou écrou : « On enfonce la vis dans un écrou fixe, ou on la retire, suivant qu'on la fait tourner dans le sens que son nom indique ou en sens contraire. Lorsque l'écrou est mobile et la vis fixe, dans le sens de sa longueur, en la faisant tourner autour de son axe, on imprime à l'écrou un mouvement de sens contraire à celui qu'aurait pris la vis. »

Les vis des figures 23 et 24, qui doivent être considérées comme ayant le bout en l'air, sont *dextrorsùm*, comme le sont ordinairement les vis employées dans les arts mécaniques, à cause de la plus grande facilité que nous éprouvons à tourner de gauche à droite.

On voit, d'après ce qui précède, que la vis est une machine qui participe à la fois du levier et du plan incliné.

La VIS SANS FIN, représentée dans la fig. 25,

25

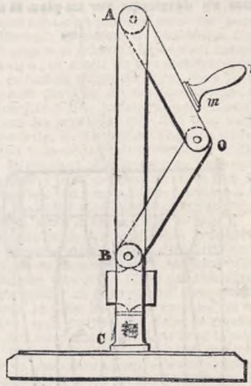


est mobile autour de son axe, et mène les dents successives d'une roue à laquelle son filet se présente toujours d'une manière uniforme. Dans le cas de l'équilibre, la puissance Q appliquée à la manivelle est à l'effort avec lequel le filet passe la dent de la roue comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.

Si un cylindre horizontal ou treuil autour duquel s'enroule un poids P est fixé sur le même axe que la roue dentée, la puissance est au poids comme le produit du pas de la vis par le rayon du treuil est au produit du rayon de la roue dentée par la circonférence que tend à décrire la puissance.

GENOU. — Cette machine (fig. 26) est composée de deux barres ou verges raides AO, BO, jointes en O par une charnière sur laquelle elles peuvent tourner comme les deux branches d'un compas. L'extrémité A de la première est liée par une autre charnière à une barre inébranlable AC, de sorte que cette branche AO est comme un levier dont l'appui fixe est au point A. L'extrémité B de la seconde branche est contenue dans une rainure fixe AC le long de laquelle elle peut se glisser librement. La puissance P est exercée perpendiculairement à la direction An, suivant un manche mn fixé perpendiculairement sur AC, et la résistance à vaincre Q est placée entre B et C vers le bas de la rainure. On voit que cette machine dépend à la fois du levier et du plan incliné.

26



La condition de l'équilibre est donnée par la proportion

$$P : Q :: a \sin. O : r \cos. B$$

où a et r désignent les distances AO et An. La puissance a donc d'autant plus d'avantage que l'angle O est plus ouvert et par suite l'angle B plus petit; que le bras du levier AO est plus petit et le bras du levier An plus grand.

On peut employer avec avantage le genou pour exercer à l'aide d'une puissance médiocre des pressions très-considérables, ou pour former sur certains corps de fortes empreintes.

POLYGONE FUNICULAIRE. — On appelle ainsi un assemblage de points liés entre eux par des cordons parfaitement flexibles et inextensibles, et sollicités par des forces qui agissent suivant les cordons extrêmes et suivant d'autres cordons, mais de manière que chacun des points ou nœuds n'en assemble pas plus de trois à la fois. Il faut, pour l'équilibre, que deux cordons consécutifs du polygone soient dans un même plan avec la direction de la force appliquée au sommet de l'angle qu'ils font. De plus, toutes les forces doivent avoir une résultante unique, et chaque cordon est tendu par la force qui le sollicite, comme il le serait par la résultante de toutes les autres forces qu'on y transporterait parallèlement à elles-mêmes.

Lorsque les directions des forces qui sollicitent le système sont toutes parallèles, il faut que toutes ces forces et les côtés du polygone soient dans un même plan. Si ces forces sont verticales, la tension de chaque côté est proportionnelle à la sécante de l'angle que ce côté fait avec l'horizon.

La CHAINETTE est la courbe d'un polygone funiculaire d'une infinité de côtés, formé par une corde parfaitement flexible et inextensible, suspendue à deux points dont la distance est moindre que la longueur de la corde, et sollicitée en tous ses points par l'action de la pesanteur. Cette courbe est une de celles dont les géomètres se sont le plus occupés et dont il ont découvert les propriétés un peu après l'invention du calcul différentiel. La corde étant homogène, la courbe sera telle que la tangente de son inclinaison sur l'horizon augmente comme la longueur de l'arc à partir du point le plus bas.

La chaînette jouit de la propriété d'avoir son centre de gravité le plus bas possible, parmi toutes les courbes qui, partant des mêmes points de suspension, ont la même longueur.

La *voûte d'équilibre naturel*, dont les *voussoirs* en forme de globules se soutiendraient mutuellement par l'effet de leur poids seul, est une chaînette renversée.

La *lintéaire* ou courbure que prend une voile dont les deux extrémités sont fixes, et qui est enflée par un vent soufflant dans des directions parallèles, est encore une chaînette.

Il résulte des propriétés de la chaînette, comme de celles du polygone funiculaire, qu'il est impossible de tendre, suivant une ligne droite, un cordon ou une chaîne dont les deux extrémités ne sont pas sur une même verticale, quelle que soit la force de tension. La corde se romprait plutôt que d'affecter une forme exactement rectiligne; mais elle peut en approcher beaucoup.

Cette considération est très-importante pour la mesure des longueurs sur le terrain. Elle prouve que, si l'on veut opérer avec exactitude, il faut mesurer ces longueurs à l'aide de règles parfaitement ajustées, suivant des directions rectilignes et horizontales. Si l'on emploie une chaîne ordinaire d'arpenteur, du poids de 1 kil., 5 et de 10 mètres de longueur (voy. GÉOMÉTRIE, col. 222), composée de 50 chaînons de $0^m,20$ chacun, et tendue à ses extrémités par deux chaîneurs qui exercent chacun un effort de 5 kilog., le calcul montre que ces deux extrémités, supposées sur une même horizontale, ne sont qu'à une distance de $9^m,962$ l'une de l'autre. L'erreur commise par la diminution horizontale de longueur est plus grande que celle qui résulterait d'un chaînage opéré sur un plan incliné à $6^m,08$ par mètre, dont la projection horizontale, pour une longueur de 10 mètres, est de $9^m,968$.

§ 3. *Eléments de dynamique.*

LOI D'INERTIE. — La matière est de sa nature *inerte*, c'est-à-dire qu'elle est impropre à se donner à elle-même aucun mouvement si elle est en repos, ou à modifier le mouvement qu'elle peut avoir, tant qu'elle n'est pas sollicitée par quelque force. Un point matériel qui a reçu une impulsion unique doit donc se mouvoir indéfiniment en ligne droite d'une manière uniforme. Cette tendance de la matière à persévérer dans son état de mouvement ou de repos constitue la *loi d'inertie*, la première de la dynamique, établie par Newton, dans son livre immortel des *Principes*. Elle est d'ailleurs confirmée par l'expérience : en effet, nous observons sur la terre que les mouvements se perpétuent plus long-temps à mesure que les obstacles qui s'y opposent viennent à diminuer; ce qui doit nous porter à croire que, sans ces obstacles, ils dureraient toujours.

PROPORTIONNALITÉ DES FORCES AUX VITESSES, ET COMPOSITION DES MOUVEMENTS. — La *vitesse* d'un corps qui a un mouvement uniforme est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir. On prend ordinairement pour unité la vitesse d'un point qui parcourt un mètre en une seconde de temps.

Le second principe fondamental de la dynamique consiste dans la proportionnalité de la force à la vitesse que cette force imprime à un point matériel; en d'autres termes, plusieurs forces agissant à la fois et dans le même sens sur un corps lui font parcourir dans l'unité de temps un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément.

Cette loi, qui découle naturellement de l'idée que nous nous faisons des forces peut encore être considérée comme un résultat de l'expérience. En effet, on observe que, dans un navire dont la marche est uniforme, un mobile soumis à l'action d'un ressort, de la pesanteur, ou de toute autre force, se meut relativement aux parties du navire de la même manière, quelles que soient la vitesse de ce navire et sa direction; et l'on peut établir, comme une loi générale des mouvements terrestres, que si, dans un système de corps emportés d'un mouvement commun, on imprime à l'un d'eux une force quelconque, son mouvement relatif ou apparent sera le même, quel que soit le mouvement général du système, et l'angle que fait sa direction avec celle de la force imprimée. Si donc on conçoit deux corps mus sur une même droite avec des vitesses égales, et qu'en imprimant à l'un d'eux une force qui s'ajoute à la première, sa vitesse relativement à l'autre corps soit la même que si les deux corps étaient primitivement en repos, il est visible que l'espace décrit par le corps en vertu de sa force primitive et de celle qui lui est ajoutée, est alors égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait décrire dans le même temps; d'où il résulte que la force est proportionnelle à la vitesse

Il résulte encore de là que différents mouvements imprimés à la fois ou successivement à un même corps se composent de manière que ce corps se trouve à chaque instant dans le même point de l'espace où il devrait se trouver en effet par la combinaison de ces mouvements, s'ils existaient chacun réellement et séparément dans le corps.

FORCES ACCÉLÉRATRICES ET MOUVEMENTS VARIÉS. — Galilée, qui a le premier aperçu les deux principes précédents, en a déduit la loi du mouvement des projectiles. La pesanteur nous offre l'exemple journalier d'une de ces forces que l'on appelle *accélératrices*, parce que, comme elles agissent sans interruption, elles ajoutent à chaque instant un nouveau degré de vitesse aux corps qu'elles sollicitent. En un même point du globe, cette force est constante, et le mouvement qui en résulte pour le corps qui y est librement soumis est *uniformément varié*. La vitesse acquise par ce corps est proportionnelle au temps, et les espaces qu'il parcourt sont proportionnels aux carrés des temps; si l'action de la pesanteur venait à cesser, le corps mu uniformément en vertu de sa vitesse acquise décrirait, dans un temps égal à celui de sa chute, un espace double de celui qu'il a parcouru.

Ces lois sont comprises dans les formules très-simples

$$v = gt, \qquad e = \tfrac{1}{2}\, gt^2$$

où g représente la vitesse acquise au bout d'une seconde par l'influence de la pesanteur, ou le double de l'espace parcouru dans le même temps, v la vitesse acquise et e l'espace parcouru au bout de t secondes. A l'Observatoire de Paris on a $g = 9^m,80896$.

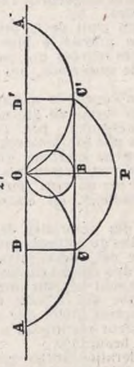
Sur un plan incliné, le mouvement est encore uniformément accéléré, abstraction faite des résistances du frottement et de l'air:

mais la *pesanteur relative* y est moindre, de sorte que les vitesses et les espaces parcourus sont à ceux qui seraient parcourus dans le même temps, suivant la verticale, dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur. Il suit de là que toutes les cordes d'un cercle qui aboutissent à l'une des extrémités de son diamètre vertical sont décrites, par l'action de la pesanteur, dans le même temps que son diamètre.

Un projectile lancé suivant une droite quelconque s'en écarte sans cesse en décrivant une parabole à laquelle cette droite est tangente. Car, en vertu de l'impulsion primitive, le mouvement mesuré sur la droite doit être uniforme ; mais, en vertu de la pesanteur, les ordonnées verticales doivent être proportionnelles aux carrés des abscisses, ce qui est une propriété fondamentale de la parabole.

Pendule. — Un corps pesant, suspendu librement sur un axe, tend toujours à se maintenir en équilibre ; de sorte que la verticale qui passe par le centre de gravité, passe aussi par l'axe de suspension. Si on l'écarte de cette position d'équilibre, il finit par y revenir en faisant des oscillations dont l'amplitude va sans cesse en diminuant par suite de la résistance de l'air et du frottement. On peut imaginer que l'on remplace le *pendule composé* par un *pendule simple*, se réduisant à un fil inextensible et sans pesanteur, qui porterait à une de ses extrémités un point matériel pesant.

Huygens a trouvé les lois remarquables du mouvement d'un appareil de ce genre. D'abord, Galilée avait aperçu que, pour deux écarts peu considérables de la verticale, les oscillations, quoique d'amplitude inégale, sont sensiblement *isochrones*, c'est-à-dire qu'elles s'opèrent dans des temps égaux. Mais cet isochronisme n'est qu'approché sur la circonférence que décrit l'extrémité du pendule ; il n'est rigoureux que si cette extrémité décrivait une courbe sur laquelle la pesanteur décomposée parallèlement à la tangente serait proportionnelle à l'arc compté du point le plus bas. Huygens trouva que cette courbe n'est autre chose qu'une *roulette* ou *cycloïde*, décrite par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une ligne droite. On se fera une idée de cette courbe en se figurant le chemin que parcourt un clou fixé à la bande de la roue d'une voiture qui roule, sans dévier, sur un chemin uni. Sur la figure 27, on voit les deux cycloïdes OCA, OC′A′ que décrit le point O de la circonférence qui a pour diamètre OB, lorsque cette circonférence roule successivement à gauche et à droite du point O, les longueurs OD, DA, OD′, D′A′ étant respectivement égales à la moitié de la circonférence. Huygens trouva encore que, pour faire décrire une cycloïde CPC′ à un pendule oscillant, il suffit de fixer l'extrémité d'un fil inextensible à l'origine commune O de deux cycloïdes OCA, OC′A′ égales à celles que l'on veut faire décrire et placées en sens contraire, de manière que le fil, en oscillant, enveloppe alternativement chacune des deux courbes. La longueur OBP de ce fil doit d'ailleurs être égale à la moitié OC ou OC′ de la longueur de la cycloïde, ou au double du diamètre du cercle générateur. Quelque ingénieuses que soient ces recherches, l'expérience a fait préférer le pendule circulaire comme étant beaucoup plus simple et d'une précision suffisante, même à l'astronomie. Mais on leur doit l'application du pendule aux horloges, qui est si importante dans l'usage ordinaire de la vie civile et dans les observations scientifiques. Elles ont fait naître aussi la théorie des *développées* (voy. col. 242), devenue très-utile par ses applications au système du monde.



La formule qui donne en secondes la durée t des oscillations très-petites d'un pendule circulaire simple, d'une longueur l exprimée en mètres, est... $t = \pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$

dans laquelle π représente le rapport de la circonférence au diamètre et g la vitesse acquise par un mobile au bout d'une seconde, en vertu de l'action de la gravité.

Il est facile de voir, au moyen de cette formule, que la détermination du mouvement rectiligne des graves peut être ramenée à la mesure de la longueur du pendule simple qui bat les secondes. Or cette mesure peut être opérée avec une très-grande précision ; elle est de $0^m,993855$ pour l'Observatoire de Paris. On est redevable à Huygens de cette remarque ingénieuse qui lie le mouvement du pendule à la chute des corps pesants.

La formule montre encore que le temps de la chute, le long d'un petit arc terminé par un diamètre vertical, est au temps de la chute, le long de ce diamètre, ou, ce qui revient au même, le long de la corde de l'arc, comme le quart de la circonférence est au diamètre.

La droite, menée entre deux points donnés, n'est donc pas la ligne de plus vite descente de l'un à l'autre. La recherche de cette ligne a excité la curiosité des géomètres, et ils ont trouvé qu'elle est encore une cycloïde dont l'origine A est au point le plus élevé.

La cycloïde est donc à la fois *tautochrone*, c'est-à-dire que, si de l'un quelconque de ses points on laisse tomber un corps pesant le long de sa concavité, il arrivera toujours au point le plus bas dans le même intervalle de temps; et *brachystochrone* ou *de la plus vite descente* pour les corps qui y sont abandonnés à l'action de la pesanteur.

Cette courbe a encore beaucoup de propriétés remarquables. Son aire totale OCA est triple de celle du cercle générateur, et sa longueur rectifiée est quadruple du diamètre OB de ce même cercle.

Les durées des oscillations très-petites de pendules de longueurs différentes, dans un même lieu, sont comme les racines carrées les longueurs; et, pour des pendules de même longueur, dans des lieux différents, les durées des oscillations sont en raison inverse des racines carrées des intensités de la pesanteur.

C'est au moyen de ces conséquences remarquables de la formule du pendule que l'on a déterminé la variation de la pesanteur à la surface de la terre et au sommet des montagnes. Les observations du pendule ont pareillement fait connaître que la pesanteur ne dépend ni de la surface ni de la figure du corps, mais qu'elle pénètre leurs parties les plus intimes, et qu'elle tend à leur imprimer dans le même temps des vitesses égales.

Centre d'oscillation ou de percussion. — Lorsqu'il s'agit de déterminer *à priori* la position du point où toute la matière d'un corps suspendu librement devrait être concentrée pour que les oscillations du pendule simple résultant fussent isochrones à celles de ce corps, il est nécessaire d'avoir recours à de nouveaux principes.

Descartes fut le premier qui, pour évaluer la force des corps en mouvement uniforme eu égard à leur masse et à leur vitesse, proposa de prendre leur *quantité de mouvement*, c'est-à-dire le produit de la masse par la vitesse. Dans un corps soumis au mouvement varié, le produit de la masse par la force accélératrice exprime la force élémentaire ou naissante, la *force motrice* nécessaire pour imprimer la vitesse élémentaire que le corps a prise ou qu'il tend à prendre. Des forces motrices ou des quantités de mouvement se détruiront ou se feront équilibre si elles sont égales et directement opposées, ou si, étant appliquées à une machine quelconque, elles suivent les lois de l'équilibre de cette machine.

Si donc on considère ensemble les mouvements que la gravité imprime à chaque instant aux molécules d'un pendule composé; comme ces molécules, en vertu de leur liaison ne peuvent suivre ces mouvements, on concevra les mouvements qu'elles doivent prendre comme résultant des mouvements imprimés et d'autres mouvements ajoutés ou retranchés, qui doivent se faire équilibre au moyen des liaisons du système. Le problème se trouve ainsi ramené aux principes de la statique. C'est à Jacques Bernouilli qu'est due cette solution du fameux problème du *centre d'oscillation*, donnée en 1691 d'abord, et beaucoup plus complétement en 1703.

On trouve ainsi que le centre d'oscillation, dont la distance à l'axe de suspension donne la longueur du pendule simple, est sur une ligne perpendiculaire à l'axe de suspension, passant par le centre de gravité du pendule, et à une distance de cet axe que l'on obtient, en faisant la somme de tous les produits des poids qui composent le pendule par les carrés de leur distance à l'axe, et en divisant cette somme par le poids du pendule multiplié par la distance de son centre de gravité au même axe.

Principe de la conservation des forces vives. — Avant Bernouilli, Huygens avait déterminé ce point en se fondant sur ce principe, que si plusieurs poids attachés, comme on voudra, à un pendule, descendent par la seule action de la gravité, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, pourra remonter à une telle hauteur que le centre commun de gravité se trouvera remonté à la même hauteur d'où il était descendu. D'après les théorèmes de Galilée et la définition connue du centre de gravité, ce principe se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant est la même, soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, soit qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales.

Or, dans le mouvement, le produit de la masse par le carré de la vitesse est ce que l'on appelle la *force vive ;* de là le nom de *principe de la conservation des forces vives*.

La considération des forces vives est de la plus haute importance dans les machines en mouvement. On peut toujours comparer la force vive produite par une machine, son *effet utile*, à l'effort nécessaire pour élever un certain poids à une certaine hauteur. Si le poids ou la hauteur varient séparément, la force vive variera dans la même proportion; elle est donc proportionnelle à leur produit. Mais la hauteur à laquelle il faut élever un poids pour qu'il acquière, en tombant de cette hauteur, une vitesse déterminée, est proportionnelle au carré de la vitesse. La force vive elle-même est donc égale au produit de la masse par le carré de la vitesse du corps en mouvement. Ainsi se trouve expliquée cette dénomination et l'utilité du principe d'Huygens.

Jean et Daniel Bernouilli donnèrent beaucoup d'extension à ce principe, et s'en servirent avec succès, le premier pour résoudre quelques problèmes difficiles, le second pour en déduire les lois des mouvements des fluides dans des vases.

Mouvement curviligne. — Le mouvement circulaire nous offre encore l'exemple d'une force agissant d'une manière continue. Car en vertu de la loi d'inertie, un corps mû sur une circonférence tend sans cesse à s'éloigner du centre par la tangente. L'effort qu'il fait pour cela se nomme *force centrifuge*, et toute force dirigée vers un centre porte le nom de *force centrale* ou *force centripète*. Dans le mouvement circulaire la force centrale est égale et directement contraire à la force centrifuge; l'une et l'autre sont égales au carré de la vitesse divisé par le rayon. Donc la force centrifuge est égale à la pesanteur si la vitesse du corps qui circule est la même que celle qu'acquiert un corps pesant tombant d'une hauteur égale à la moitié du rayon de la circonférence décrite.

La force centrifuge à l'équateur est à peu près $\frac{10}{2884}$ ou $\frac{1}{288}$ de la gravité. Si donc la rotation de la terre devenait 17 fois plus rapide, la force centrifuge deviendrait 289 fois ce qu'elle est aujourd'hui, et elle ferait plus que contrebalancer l'action de la pesanteur.

Les forces centrifuges sont entre elles comme les rayons des circonférences, divisés par les carrés des temps des révolutions. Donc sur divers parallèles terrestres, la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre est proportionnelle aux rayons de ces parallèles.

Ces beaux théorèmes découverts par Huygens ont conduit Newton à la théorie générale du mouvement dans les courbes, et à la loi de la pesanteur universelle.

On généralise d'abord l'expression de la force centrifuge en disant qu'elle est égale au carré de la vitesse du corps divisé par le rayon

... osculateur (voyez col. 242) au point ... courbe que l'on considère.

Principe des aires ou conservation des moments de rotation. — Ensuite si la courbe est décrite en vertu d'une force dirigée vers un point fixe, on peut décomposer cette force en deux, l'une suivant le rayon osculateur, l'autre suivant l'élément de la courbe. La première fait équilibre à la force centrifuge. La seconde augmente ou diminue la vitesse du corps ; cette vitesse est donc continuellement variable. Mais elle est toujours telle, que les aires décrites par le rayon vecteur autour du point d'où émane la force centrale, sont proportionnelles aux temps. Réciproquement, si les aires tracées par le rayon vecteur autour d'un point fixe, croissent comme les temps, la force qui les fait décrire est constamment dirigée vers ce point.

Ce principe donné par Newton dans ses *Principes* a été généralisé par d'Arcy en 1747. Cette généralisation consiste en ce que dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe, sur un même plan de projection, est toujours proportionnelle au temps.

Dès 1746, Euler et Daniel Bernouilli avaient publié un nouveau principe, qui ne diffère que pour la forme de celui de d'Arcy, dont il est l'expression differentielle; savoir que dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par la vitesse de circulation autour du centre et par sa distance au même centre, est toujours indépendante de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres, et se conserve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieurs.

D'Arcy lui-même a présenté ensuite son principe sous une autre forme qui le rapproche davantage du précédent, et qui consiste en ce que la somme des produits des masses, par les vitesses et par les perpendiculaires tirées du centre sur les directions des corps, est une quantité constante. Sous ce point de vue, il l'a appelé, mal à propos, *conservation de l'action*.

Principe de la moindre action. — Plusieurs philosophes, frappés de l'ordre qui règne dans la nature, et de la fécondité de ses moyens dans la production des phénomènes, ont pensé qu'elle parvient toujours à son but par les voies les plus simples. En étendant cette manière de voir à la mécanique, ils ont cherché l'économie que la nature avait eue pour objet dans l'emploi des forces et des temps. L'ancien géomètre Héron et Fermat avaient fait des remarques de ce genre sur la loi de la *réflexion* et de la *réfraction* de la lumière, (Col. 399 et 400), lorsque, vers le milieu du siècle dernier, Maupertuis, conduit par la métaphysique des *causes finales*, proposa le principe devenu fameux depuis sous le nom de *principe de moindre action*, et qui consiste en ce que, lorsque plusieurs corps agissant les uns sur les autres éprouvent un changement dans leur mouvement, ce changement est toujours tel que la quantité d'action employée par la nature pour le produire est la plus petite possible; et cette action a pour mesure, suivant Maupertuis, le produit de la masse par l'espace et par la vitesse. Maupertuis déduisit de ce principe les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, dans un mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1744. Deux ans après, dans un nouveau mémoire communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin, il étendit ces applications aux lois du mouvement, et même du repos; et, généralisant son idée, il en fit un principe universel, dont ceux de la loi de l'équilibre, de la marche uniforme du centre de gravité dans le choc des corps, de la conservation des forces vives, etc., ne sont que des cas particuliers.

Ces diverses communications furent l'origine d'une polémique longue et acharnée à laquelle prirent part beaucoup de géomètres distingués, et notamment Euler, qui, se rangeant du côté de Maupertuis, étendit et généralisa le principe en faisant voir que, dans le mouvement des corps soumis à des forces centrales, l'intégrale de la vitesse, multipliée par l'élément de la courbe, est toujours un minimum.

Lagrange lui-même, tout en regardant comme impropre la dénomination de moindre action, l'a conservée en étendant le résultat d'Euler au mouvement de tout système de corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque. Le théorème consiste alors, suivant Lagrange, en ce que chaque corps du système décrit constamment une courbe telle que la somme des forces vives consommées dans un temps donné pour parvenir d'une position à une autre est nécessairement un maximum ou un minimum.

M. Jacobi de Kœnigsberg, l'un des plus savants géomètres de notre époque, a prouvé que Lagrange s'était trompé en ce qui concerne les mots *maximum* ou *minimum ;* que jamais le maximum ne peut avoir lieu ; qu'il y a toujours minimum pour un mouvement resserré entre certaines limites, et que, passé ces limites, il n'y a ni maximum ni minimum. « Il paraît, » dit M. Jacobi, « qu'en changeant « en *maximum* et *minimum*, le mot *minimum* dont seul se sont toujours servis Euler « et Laplace, Lagrange a voulu, d'une manière « succincte et ingénieuse, censurer l'opinion « d'Euler qui, par son principe, a cru pouvoir « formuler la providence divine. En effet, en « admettant comme également possible le « maximum et le minimum, si l'on continue « à attribuer à l'intégrale en question sa notion métaphysique, ce serait dire que la nature ferait agir ses forces avec la plus grande « ou la moindre sagesse. »

Quel que soit donc le jugement que l'on porte sur la métaphysique des causes finales, on ne peut nier que, dans cette circonstance au moins, elle n'ait rendu le service de faire connaître une belle propriété dynamique, tandis que la doctrine contraire a induit en erreur un illustre géomètre.

Conservation du mouvement du centre de gravité. — Il existe encore un principe remarquable de dynamique, beaucoup plus ancien que les précédents, et démontré par Newton au commencement de ses *Principes*. Il consiste en ce que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit ; de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, par des fils, ou des leviers, ou des lois d'attraction, sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos, ou se meut uniformément en ligne droite.

D'Alembert a donné depuis de l'extension à ce principe, en faisant voir que si chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante et qui agisse suivant des lignes parallèles, ou qui soit dirigée vers un point fixe et agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étaient libres; à quoi on peut ajouter que le mouvement de ce centre est, en général, le même que si toutes les forces des corps, quelles qu'elles soient, y étaient appliquées chacune suivant sa propre direction.

§ 4. *Faits divers relatifs aux principes et à l'histoire de la mécanique.*

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES, LE PLUS GÉNÉRAL DE LA STATIQUE. — Les principes généraux de la statique peuvent se réduire à trois, celui du *levier*, celui de la *composition des forces* et celui des *vitesses virtuelles*.

Le premier est dû à Archimède, le seul parmi les anciens qui nous ait laissé une théorie de l'équilibre, dans ses deux livres de l'*équilibre des plans*. Parmi les modernes, Stevin, Galilée, Huygens, etc., ont cherché à simplifier et à perfectionner la démonstration d'Archimède. Ce principe suffit pour résoudre tous les problèmes de statique. Guido Ubaldi, en 1577, l'a appliqué au treuil; Galilée à un cas particulier du plan incliné, dans ses *Mécaniques* publiées par le P. Mersenne, en 1634; Roberval au cas le plus général du plan incliné, en 1636.

Le principe de la composition ou du parallélogramme des forces suffit aussi pour déterminer les lois de l'équilibre dans tous les cas. Aristote, Archimède, Nicomède ont connu la composition des mouvements; les deux derniers l'ont employée pour la description des courbes. Mais Galilée est le premier qui ait employé la considération du mouvement composé dans la mécanique pour déterminer la *trajectoire* parabolique décrite par un projectile dans le vide. Enfin, jusqu'à l'année 1687, dans laquelle ont paru les *Principes* de Newton et le *Projet d'une nouvelle mécanique* de Varignon, on n'avait point pensé à substituer, dans la composition des mouvements, les forces aux mouvements qu'elles peuvent produire, et à déterminer la force composée résultant de deux forces données, comme on détermine le mouvement composé de deux mouvements rectilignes et uniformes donnés. Varignon a déduit le principe du levier de celui de la composition des forces, qui, par sa simplicité et par la facilité de son application à tous les problèmes sur l'équilibre, a été adopté des mécaniciens aussitôt après sa découverte, et a servi de base à presque tous les traités de statique qui ont paru depuis.

On doit entendre par *vitesse virtuelle* celle qu'un corps en équilibre est disposé à prendre, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement. Le troisième principe général de la statique consiste en ce que des forces sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces forces.

Dans le levier et dans les autres machines en équilibre, il est facile de reconnaître que la puissance et la résistance sont toujours en raison inverse des espaces que l'une et l'autre peuvent parcourir en même temps. Guido Ubaldi est le premier qui ait aperçu cette loi, en 1577, dans le levier et dans les poulies mobiles ou moufles. Galilée l'a reconnue ensuite dans les plans inclinés et dans les machines qui en dépendent, et il en a compris toute la généralité. Wallis, dans sa Mécanique, publiée en 1669, l'a adoptée, et il en a déduit la théorie de l'équilibre dans les principales machines. Descartes et Toricelli l'ont donnée sous des formes nouvelles.

Le principe des vitesses virtuelles peut être rendu très-général, de cette manière. Si un système quelconque de tant de corps ou de points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourt un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt, suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.

Jean Bernouilli est le premier qui ait aperçu, en 1717, cette grande généralité du principe des vitesses virtuelles, et son utilité pour résoudre les problèmes de statique. Ce principe a donné lieu ensuite à celui que Maupertuis a proposé, en 1740, sous le nom de *Loi du repos*, et qu'Euler a développé et généralisé en 1751. On peut dire que tous les principes généraux que l'on découvrira peut-être encore dans la science de l'équilibre ne seront que des expressions différentes pour la forme, mais identiques au fond, avec le principe des vitesses virtuelles.

Enfin Lagrange a exposé dans toute son étendue la formule générale qui est la conséquence de ce principe, et qui renferme tous les problèmes que l'on peut se proposer sur l'équilibre des corps. Il l'a démontrée *à priori*, et en a tiré tous les principes connus de statique.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT POUR LA SOLUTION DE TOUS LES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE. — Le principe des forces vives, tel que Huygens l'avait appliqué à la détermination du centre d'oscillation, fut long-temps employé seul pour la solution des problèmes de dynamique; mais comme ce principe ne donne qu'une équation, on cherchait les autres par la considération des forces inconnues avec lesquelles on concevait que les corps devaient se pousser ou se tirer : ce qui rendait ces problèmes ordinairement très-difficiles.

Le traité de dynamique de d'Alembert, qui parut en 1743, leva toutes les difficultés fondamentales, en offrant une méthode générale pour mettre en équations tous les problèmes de dynamique; extension de l'idée très-ingénieuse que Jacques Bernouilli avait employée dans la détermination du centre d'oscillation (voyez col. 293). Le principe de d'Alembert consiste en ce que si on imprime à plusieurs corps des mouvements qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, il est clair qu'on peut regarder ces mouvements comme composés de ceux que les corps prendront réellement et d'autres mouvements qui sont détruits; d'où il suit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibre.

On peut encore énoncer le principe de d'Alembert en disant qu'il doit y avoir équilibre entre les forces réellement appliquées au système, mais prises en sens contraires, et les forces qui produiraient les mouvements engendrés, le système étant supposé libre.

On peut donc ramener toutes les questions de dynamique à celles de statique. En combinant le principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles, Lagrange a réduit toute la dynamique à une formule générale, d'où il a déduit les principes relatifs aux forces vives.

au mouvement du centre de gravité, aux aires et à la moindre action.

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES. — Nous avons déjà eu occasion de citer, dans le cours de ce résumé de mécanique, un grand nombre d'auteurs dont les ouvrages peuvent être bons à consulter pour l'histoire de la science. La *Mécanique analytique* de Lagrange sera long-temps encore l'ouvrage le plus utile à étudier pour les jeunes gens qui veulent acquérir des connaissances profondes en haute mécanique. La *Mécanique céleste* de Laplace, la *Mécanique philosophique* de de Prony, la *Mécanique* de Poisson, les *Principes fondamentaux de l'Equilibre et du Mouvement* de Carnot, la *Statique* de M. Poinsot, que nous avons citée comme un véritable chef-d'œuvre, doivent aussi être indiqués dans le même but, quoique à différents degrés. Enfin les œuvres des grands géomètres des deux derniers siècles, surtout celles de Newton, d'Euler et de d'Alembert, ainsi que les collections académiques ne doivent pas être négligées.

Aux personnes qui, sans vouloir approfondir la science, désirent en avoir des notions exactes, nous indiquerons surtout la petite mécanique de MM. Kater et Lardner, traduite en français par M. A. Cournot. On y trouve des applications nombreuses et bien choisies.

VII. ASTRONOMIE.

§ 1er. *Description du Ciel.*

PREMIER APERÇU DU SYSTÈME DU MONDE. — La Terre que nous habitons est un globe à peu près sphérique, dont le circuit est de 40 000 kilomètres, et le diamètre moyen de 12 732 kilomètres. Elle tourne sur elle-même en 23 heures 56 minutes 4 secondes, et autour du Soleil dans l'espace de 365 jours $\frac{1}{4}$ ou d'une année. Le diamètre autour duquel la révolution diurne s'opère s'appelle l'*axe*; ses extrémités sont les *pôles*. La révolution annuelle s'effectue suivant une courbe plane, qui est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer et que l'on appelle *écliptique*. L'axe de la Terre est incliné d'environ 23° 27′ 37″ à celui de l'écliptique. Le pôle le plus voisin de l'Europe est le pôle *nord;* l'autre est le pôle *sud*. Un observateur placé suivant l'axe, ayant le *nord* à sa tête et le *sud* à ses pieds, aurait l'*orient* à sa gauche et l'*occident* à sa droite. La Terre fait partie d'un système de corps dont le Soleil occupe à peu près le centre, et qui tournent aussi autour de cet astre et sur eux-mêmes. Ces corps, qui présentent de nombreuses analogies avec la Terre, sont, à partir du Soleil, *Mercure, Vénus*, la *Terre, Mars, Junon, Cérès, Pallas, Vesta, Jupiter, Saturne* et *Uranus*. Outre ces *planètes*, il y a les *satellites*, qui tournent autour d'une planète principale. Ainsi la Terre est accompagnée, dans son mouvement de translation, par la *Lune*, qui tourne autour de la Terre et sur elle-même. Jupiter a quatre lunes ou satellites; Saturne en a sept, et de plus un anneau : Uranus a six satellites.

Des *comètes* innombrables se meuvent aussi autour du Soleil. Elles diffèrent essentiellement des planètes, notamment en ce qu'elles sillonnent l'espace dans tous les sens, suivant des courbes ou *orbites* excessivement allongées; tandis que les orbites planétaires ont en général elliptiques, à peu près circulaires, assez peu inclinées sur l'écliptique, et que les mouvements s'y opèrent constamment dans le même sens, d'occident en orient, aussi bien que les rotations sur l'axe.

Des myriades d'*astéroïdes* encore plus nombreux, dont la nature et les mouvements sont peu connus, achèvent de peupler la portion de l'espace que le Soleil éclaire, et où il règne pour ainsi dire.

Quant aux *étoiles*, elles sont séparées de nous par des distances qui effraient l'imagination. Quoique la lumière qu'elles nous envoient parcoure plus de 300 000 kilom. par seconde, cette lumière n'emploie pas moins de neuf à dix années à nous parvenir, en partant de celles dont nous sommes le plus rapprochés ; et on ne peut douter qu'il n'y en ait dont la lumière ne nous arrive qu'au bout de cent, de mille années, et peut-être davantage.

Une comparaison familière, empruntée à M. Herschel, donnera une idée assez exacte des diverses proportions de la partie du monde qui nous environne. Imaginons une plaine bien unie, au centre de laquelle nous placerons un globe de 60 centimètres de diamètre, une grosse citrouille, par exemple, pour représenter le Soleil; Mercure sera figuré par un grain de moutarde, tournant sur une circonférence à 24 mètres de distance du centre du colosse central; Vénus par un petit pois, sûr une circonférence à 44 mètres; la Terre par un pois un peu plus gros, sur une circonférence à 61 mètres; Mars par une grosse tête d'épingle, à 93 mètres; Junon, Cérès, Pallas et Vesta par des grains de sable, à des distances de 145 à 169 mètres; Jupiter par une orange moyenne, sur une orbite de 317 mètres de rayon; Saturne par une petite orange, à 582 mètres; Uranus par une grosse cerise, à 1170 mètres environ. Quant aux comètes, au moment où elles sont voisines du Soleil et des planètes, elles produiraient dans notre tableau l'effet, tantôt d'une plume légère emportée par les vents, tantôt d'un jet de fumée se perdant dans l'espace par son extrémité. En réduisant l'univers entier dans la même proportion, il faudrait faire au moins 40 000 kilomètres (10 000 lieues) dans tous les sens avant de rencontrer l'étoile la plus rapprochée de notre point central.

LE SOLEIL est un globe lumineux dont le diamètre est de 109 fois $\frac{1}{4}$ et le volume 1 300 000 fois environ celui de la Terre. Le diamètre apparent varie de 31′ 31″ à 32′ 36″. Il tourne sur lui-même d'occident en orient, dans l'espace d'environ vingt-cinq jours, autour d'un axe incliné de 82° 40′ sur le plan de l'écliptique. Son *équateur*, ou grand cercle perpendiculaire à l'axe, est donc incliné de 7° 20′ sur ce plan.

Lorsqu'on examine le Soleil avec de puissants télescopes garnis de verres fortement colorés pour préserver la vue contre l'ardeur de ses rayons, on observe fréquemment à sa surface, dans une région qui ne s'étend guère qu'à 30° de part et d'autre de l'équateur solaire, des taches obscures entourées d'une sorte de bordure moins sombre, appelée *pén-*

ombre. Deux taches de ce genre sont représentées dans la figure 1. Les taches du Soleil ne sont pas permanentes. D'un jour à l'autre, ou même d'heure en heure, elles semblent s'élargir ou se resserrer, changer de forme, puis disparaître tout-à-fait, ou reparaître dans d'autres parties de la surface où il n'y en avait pas auparavant.

1

Taches du Soleil.

Ces mouvements, qui sont indépendants du mouvement de rotation commun au Soleil et aux taches de sa surface, s'opèrent quelquefois sur une échelle immense. Il résulte d'observations récentes de M. Laugier que souvent une même force semble rapprocher et éloigner à la fois deux taches de l'équateur solaire. Une multitude de *pores* ou petits points obscurs, de *facules* ou raies plus lumineuses que le reste du disque dans le voisinage des grandes taches, couvrent encore la surface du Soleil. Cette surface paraît donc dans un état continuel de changement. L'hypothèse de W. Herschel paraît expliquer d'une manière assez satisfaisante les diverses apparences que présentent les taches du Soleil. Il suppose que cet astre se compose d'un noyau solide obscur, entouré d'une atmosphère assez dense, d'une grande étendue, qu'enveloppe enfin la substance lumineuse et calorifique. Si les deux couches gazeuses extérieures viennent à se déchirer, le noyau obscur occupera le centre d'une tache, et la pénombre sera produite par la réflexion de la lumière sur l'atmosphère intermédiaire.

Les flammes les plus vives et les corps solides dans l'état d'ignition le plus intense ne paraissent plus que comme des taches noires sur le disque du Soleil, quand on les interpose entre ce disque et l'œil. Il pourrait donc se faire que le noyau solide du Soleil fût dans un état d'ignition très-intense, quoiqu'il nous paraisse obscur quand il est vu au milieu des taches.

On en est réduit à des conjectures pour expliquer la puissance calorifique et lumineuse des rayons solaires. Cependant on est généralement porté à l'attribuer à des causes susceptibles de les reproduire indéfiniment, telles que le frottement ou l'excitation produite par une décharge électrique, plutôt qu'à une véritable combustion de matière pondérable.

MERCURE. — La petitesse de cette planète et sa grande proximité du Soleil la rendent très-difficile à observer. Son diamètre apparent varie de 4" à 12". Son diamètre réel n'est que le tiers, sa surface la dixième partie et son volume la vingt-cinquième partie du diamètre de la surface et du volume de la Terre. Mercure, suivi à travers un puissant télescope, laisse voir des phases tout-à-fait analogues à celles de notre Lune, mais dont les bords mal terminés indiquent l'existence d'une atmosphère. Schræter a signalé dans cette planète des montagnes dont la hauteur serait double de celle de nos plus hautes montagnes. A l'aide d'échancrures observées au croissant dans les phases, on a cru reconnaître que Mercure tourne sur lui-même à peu près en vingt-quatre heures, comme la Terre. Quelquefois Mercure vient à passer entre la Terre et le Soleil sous la forme d'une tache noire qui décrit la corde de ce disque. Le dernier phénomène de ce genre a eu lieu le 7 novembre 1835; les autres passages du dix-neuvième siècle auront lieu aux dates suivantes: 8 mai 1845, 9 novembre 1848, 12 novembre 1861, 5 novembre 1868, 6 mai 1878, 8 novembre 1881, 10 mai 1891, 10 novembre 1894.

VÉNUS. — Cette planète est un peu plus petite que la Terre; sa surface est les 0,9 et son volume les 0,8 de la surface et du volume de notre globe. Quoique son diamètre apparent atteigne parfois la valeur de 61", ce qui excède le diamètre apparent de toute autre planète, elle est la plus difficile de toutes à voir d'une manière nette dans les télescopes. Le grand éclat de la partie éclairée produit des scintillations de lumière, qui amplifient tous les défauts de l'instrument optique. Vue au télescope, Vénus nous présente des phases comme Mercure et comme la Lune, passant par toutes les formes intermédiaires entre celles d'un croissant délié et d'un disque complet. Elle est entourée d'une atmosphère analogue pour la densité et l'étendue à l'atmosphère terrestre. Schræter a cru voir dans cette planète des montagnes colossales, qui surpassent six fois en hauteur nos plus grandes montagnes, telles que le Chimborazo et le Dhavalagiri. Le grand Cassini avait cru reconnaître, en 1666, que Vénus tourne sur elle-même en 23 heures 18 minutes. Schræter avait assigné à cette rotation une durée de 23 heures 21 minutes. Cependant Bianchini avait prétendu qu'elle était de 24 jours environ. On était donc dans l'incertitude à ce sujet, lorsque les astronomes de l'observatoire du Collége des Jésuites à Rome, par une suite d'observations de jour, faites avec beaucoup de soins et d'assiduité, dans le cours de 1839, à l'aide d'une excellente lunette de Cauchoix, ont levé tous les doutes en confirmant le résultat de Schræter. Comme Mercure, Vénus s'interpose quelquefois entre nous et le Soleil, sur le disque duquel elle paraît semblable à une tache ronde. Ces passages, qui sont très-rares, ont la plus haute importance pour les astronomes, parce qu'ils donnent le moyen le plus exact que l'on connaisse de mesurer la distance du Soleil à la Terre. Les deux derniers ont été observés en 1769 et en 1772. Ceux des siècles suivants auront lieu les 9 décembre 1874, 6 décembre 1882, 8 juin 2004, 6 juin 2012, 11 décembre 2117, 8 décembre 2125, etc.

MARS est la première des planètes dites *supérieures*, par opposition aux deux précédentes qui sont appelées *inférieures* comme étant entre la Terre et le Soleil. Son diamètre n'est environ que les 0,6, sa superficie les 0,3 et son volume les 0,2 du diamètre, de la superficie et du volume de la Terre. Son diamètre apparent varie de 4" à 27". On distingue très-nettement sur cette planète des contours qui peuvent séparer des continents et des mers. La figure 2 la représente telle qu'elle a été observée par M. Herschel le 16 août 1830, avec un télescope à réflexion de six mètres de foyer. La forme légèrement allongée de cette figure indique une des phases, qui sont beaucoup moins sensibles que pour Vénus, à cause du plus grand éloignement. La couleur rougeâtre que la planète offre, même à l'œil nu, indique sans doute une teinte ocreuse du sol, semblable à celle que nos terrains de sables et de grès rouges pourraient présenter aux habitants de Mars. Les parties les plus rouges sont probablement les continents, et celles que l'on compare à des mers paraissent généralement verdâtres en vertu d'un contraste de couleurs (voyez Col. 403). On n'aperçoit pas toujours ces taches d'une manière aussi distincte; mais lorsqu'on les voit elles offrent constamment la même apparence. Cela tient sans doute à ce que la planète n'est pas entièrement dépourvue d'atmosphère ni de nuages; mais il résulte de l'observation faite le 28 novembre 1832, par M. James South, que cette atmosphère ne peut être que

2

Mars vu au télescope.

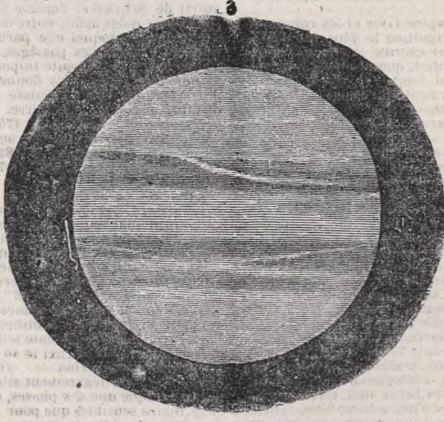
fort rare et peu dense. Mars tourne sur lui-même en 24 h. 39. m. 21 s. autour d'un axe incliné d'environ 30° 18' sur l'écliptique. Les *pôles*, ou extrémités de cet axe, semblent comme les pôles de la Terre être entourés de calottes de glace qui fondraient alternativement lorsqu'elles sont exposées à l'action plus directe des rayons solaires. La fig. 2 représente à sa partie supérieure une de ces taches brillantes, dont l'existence coïncidait précisément avec l'hiver de l'hémisphère dont le centre de cette tache est le pôle. Ce fait vient ajouter un nouveau degré de probabilité à l'existence d'une atmosphère; car sans liquides il n'y aurait pas de glaces et sans atmosphère il n'y aurait pas de liquides à la surface d'une planète.

Les quatre nouvelles planètes.— Cérès fut découverte par Piazzi, à Palerme, le 1er janvier 1801; Pallas par Olbers, à Brême, le 28 mars 1802; Junon, le 1er septembre 1804 par Harding à Lilienthal; Vesta, le 29 mars 1807, par Olbers à Brême. La petitesse et l'éloignement de ces planètes les rendent très difficiles à observer. Suivant Herschel, leur diamètre apparent, lorsqu'elles sont le plus rapprochées de nous, n'atteint pas une seconde entière. Schrœter assigne un diamètre d'environ 437 kilomètres à Vesta; de 2282 à Junon; de 2593 à Cérès; de 3348 à Pallas. Vesta serait donc 25 000 fois plus petite que la Terre, et 540 fois moindre que la Lune. Un voyageur qui parcourrait 45 kilomètres seulement par jour, mettrait moins de deux mois à faire le tour de cette planète.

Cérès et Pallas sont souvent comme enveloppées dans une vaste atmosphère, qui s'étendrait à plus de 700 kilomètres de leur surface, et qui empêcherait de distinguer leur noyau solide; d'autres fois, au contraire, les planètes sont nettement terminées et brillent d'une lumière aussi pure que celle des étoiles fixes. Schrœter dit avoir remarqué que cette atmosphère se contracte quelquefois de la moitié de son volume et même disparaît entièrement. On a remarqué dans Junon des changements analogues, mais moins prononcés. Vesta n'a rien présenté de semblable. On ne sait rien encore de la rotation des petites planètes sur elles-mêmes.

Jupiter est la plus grosse des planètes. Son diamètre est d'environ 148 000 kilomètres, ou 11

3

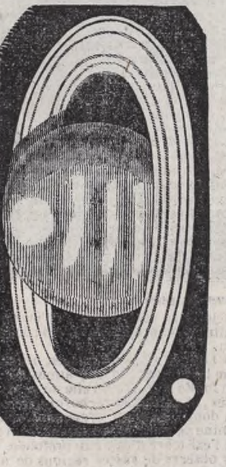


Jupiter et ses bandes.

fois aussi grand que celui de la terre. Sa superficie est 121 fois aussi grande que la superficie et son volume 1333 fois aussi fort que le volume de la terre. Son volume est cependant 905 fois moindre que celui du Soleil. Son diamètre apparent varie de 30", à 49". Jupiter tourne sur lui-même dans la période étonnamment courte de 9 h. 55 m. 8s. Son disque paraît toujours croisé dans une certaine direction par des bandes ou zones obscures, comme on le voit sur la figure 3 qui représente Jupiter tel que M. Herschel l'a observé à Slough, le 23 septembre 1832, avec son réflecteur de 6 ... Ces bandes varient dans leur grandeur et leur position sur le disque, mais jamais dans leur direction générale qui est parallèle à l'équateur, autour duquel elles sont plus larges et plus nombreuses. On les a même vues se rompre et se disperser sur toute la surface de la planète; mais ce phénomène est extrêmement rare. Assez souvent on y aperçoit des subdivisions et des embranchements tels que ceux que représente la figure, ou des taches sombres qui rappellent l'idée de nuages. Suivant Schrœter, on voit souvent des taches se mouvoir avec une vitesse de 100 à 130 mètres par seconde, triple de celle de nos plus forts ouragans. Ces mouvements indiquent l'existence d'une atmosphère sillonnée par des courants analogues à nos vents alisés.

Jupiter est aplati dans le sens de son axe, qui est au diamètre équatorial dans le rapport de 100 à 107.

Saturne, vu au télescope, offre le spectacle surprenant d'un globe entouré d'une espèce d'anneau mince et large; le diamètre de la planète est d'environ 126 000 kilomètres et diffère par conséquent assez peu de celui de Jupiter. Son diamètre est 10 fois environ, sa superficie 95 fois et son volume 928 fois le diamètre,



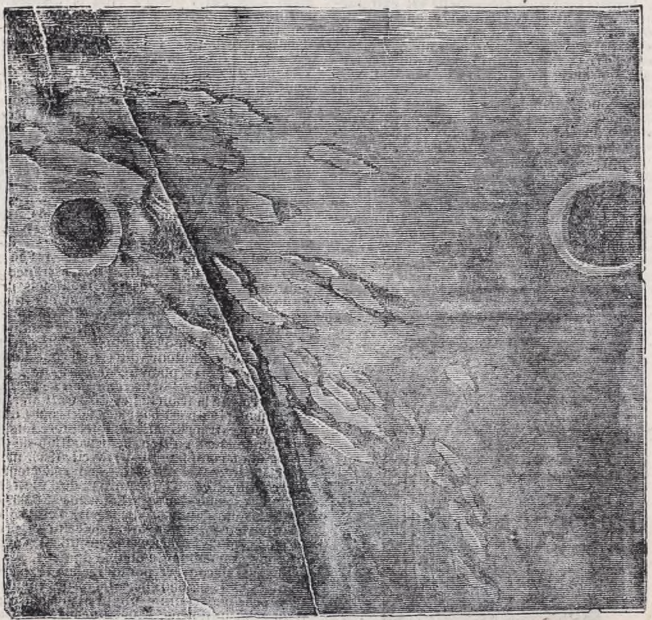
Saturne et son anneau.

la superficie et le volume de la terre. Son diamètre apparent varie de 15" à 21". La figure 4 montre Saturne tel qu'il a été vu dans le courant du mois de juin 1838 par les astronomes du collége romain. On remarquera, à la surface de la planète, des bandes analogues à celles de Jupiter, mais moins caractérisées. La surface de l'anneau porte aussi des bandes obscures qui le partagent comme en cinq anneaux concentriques. Herschel le père, qui n'avait aperçu qu'une seule de ces bandes, pensait que l'anneau se composait réellement de deux parties distinctes; et les observateurs du collége romain semblent adopter une opinion analogue pour les nouvelles bandes signalées par eux. M. Arago considère comme beaucoup plus vraisemblable que les traits noirs pris pour des intervalles vides doivent être comparés aux bandes de Jupiter et de Saturne lui-même. Ce qui vient à l'appui de cette opinion, c'est qu'avec l'excellente lunette de Cauchoix les astronomes romains ont vu le nombre des divisions augmenter jusqu'à cinq et disparaître ensuite, au moins en partie, sans qu'on puisse trouver une raison suffisante de la disparition dans la position de la planète, ou dans sa plus grande distance à la Terre, ou dans la pureté variable du ciel. Cependant Smith cite, dans son Optique, une observation de Clarke, de laquelle il résulterait que la division principale de l'anneau est due à un vide à travers lequel on peut apercevoir des étoiles dans certaines circonstances. Le diamètre extérieur de l'anneau est de 140 750 kilomètres, son diamètre intérieur de 94 000 kilomètres environ; sa largeur est donc de 46 750 kilomètres, son épaisseur, suivant J. Herschel de 163 kilomètres; la distance de l'intérieur de l'anneau à la surface de la planète de 38 700 kilomètres. D'après Herschel, le volume de l'anneau serait donc quintuple de celui de la Terre; et si l'on admet l'épaisseur de 882 kilomètres, assignée par Schrœter, ce volume deviendra 27 fois celui de la Terre. La planète tourne sur elle-même en 10 h. 16 m. environ, autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'anneau, et incliné de 61° 20' au plan de l'écliptique. L'anneau lui-même tourne autour du centre qui lui est commun avec la planète, dans 10 h. 27 m. environ. Tous les 15 ans, l'anneau se présente à la terre par la tranche, et disparaît alors entièrement, si ce n'est pour des télescopes d'une puissance extraordinaire. La dernière fois que ce phénomène a eu lieu, la disparition de l'anneau était complète le 29 avril 1833, même pour M. Herschel muni de son réflecteur de 45 centimètres d'ouverture et de 6 mètres de longueur focale. Lorsque Saturne est à 90° des positions où l'anneau disparaît, l'ellipse qui termine le contour apparent de celui-ci, prend sa plus grande largeur, et le grand axe devient presque exactement le double du petit.

Uranus, découvert par Herschel le père, le 13 mars 1781, ne nous paraît dans les meilleurs télescopes que comme un petit disque rond, d'un éclat uniforme, sans anneaux, bandes ni taches discernables. Son diamètre apparent est d'environ 4" et ne varie jamais beaucoup à cause de la petitesse de l'orbite de la terre, en comparaison de celle de cette planète. Herschel le père y a constaté un aplatissement sensible qui indique une rotation très-rapide de la planète sur elle-même. Le diamètre moyen est d'environ 52 230 kilomètres; la surface contient donc 17 fois et le volume 76 fois la surface et le volume de la terre.

La Lune est le satellite de la Terre. La distance moyenne des centres de ces deux astres est d'environ 60 rayons terrestres, ou de 381 000 kilomètres. Cette distance, qui paraît si grande, n'est guère plus du quart du diamètre du Soleil; de sorte que si le centre de la terre était transporté au centre du Soleil, la surface extérieure de celui-ci embrasserait l'orbite entière de la Lune et s'étendrait encore presque autant au delà. Le diamètre réel la superficie et le volume de la Lune, sont aux mêmes éléments pris sur la terre dans le rapport de 1 aux nombres 3,69 — 13,60 — 50, 15. L'inclinaison de l'orbite lunaire est de 5° 8' 48" sur le plan de l'écliptique. La Lune tourne sur elle-même, d'occident en orient, autour d'un axe presque perpendiculaire à l'écliptique, faisant un angle de 88° 29' 49" avec ce plan. La période de la rotation est exactement égale à celle de la révolution autour de la terre, de 27 j. 7 h. 43 m. environ. Les phases de la Lune sont connues de tout le monde et dues à ce qu'elle ne tourne que successivement vers nous la partie de son disque éclairée par le Soleil. A l'aide des télescopes, nous distinguons à la surface de la Lune des inégalités qui ne peuvent être que des montagnes et des vallées. Le bord convexe du croissant est circulaire et à peu près uni, mais le bord concave de la partie éclairée se montre toujours avec des déchirures ou dentelures profondes. Les montagnes voisines de ce bord projettent des ombres considérables qui diminuent à mesure que la partie éclairée augmente à nos yeux. Enfin, lors de la pleine lune, on n'aperçoit plus, sur la surface, d'ombres portées, mais seulement des dégradations de teintes

5



Une région de la Lune, vue au télescope.

D'après les mesures des ombres, on a pu calculer les hauteurs de beaucoup de ces montagnes; Schrœter assigne plus de 8,000 mètres à la hauteur du point désigné sous le nom de Leibnitz. La majeure partie de la surface est hérissée d'aspérités de ce genre, dont l'aspect est singulier et d'une frappante uniformité. Presque toutes sont exactement circulaires, ou prennent la forme de coupes dont l'intérieur a une courbure elliptique vers les bords. Pour les plus larges, le fond de l'excavation est ordinairement une aire plane, du centre de laquelle s'élève une petite éminence conique à pente raide. Elles ont la ressemblance la plus parfaite avec les terrains volcaniques tels qu'on les observe au Vésuve, à l'Etna, dans le Puy-de-Dôme. M. Herschel le fils a même distingué sur quelques-unes des marques incontestables de déjections volcaniques. Le cratère dit Bernouilli a une profondeur de 6 000 mètres environ.

La Lune n'a pas de nuages, ni rien qui indique la présence d'une atmosphère. On est donc fondé à croire qu'elle ne renferme ni liquides, ni mers. Les taches obscures auxquelles on a donné ce nom présentent, quand on les examine de près, des apparences inconciliables avec l'existence d'une eau profonde. Cependant on y observe de vastes régions de niveau, qui ressemblent complétement aux terrains déposés par les eaux à la surface de la Terre.

La figure 5, donnée par Gruithuisen, servira à prendre une idée de l'apparence qu'offrent certaines régions de la Lune vues au télescope, lorsqu'elles sont éclairées obliquement par le Soleil. Le cratère à droite porte le nom de l'ancien astronome Manilius; le cratère à gauche celui de Ménélaüs. Schrœter et Gruithuisen ont souvent observé que les apparences d'une même région de la Lune variaient d'une lunaison à l'autre; mais ces changements sont dus à des différences dans la manière dont une même portion de la Lune peut être éclairée par le Soleil.

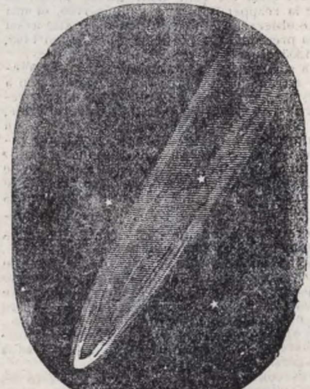
SATELLITES DES AUTRES PLANÈTES. — Jupiter est entouré de quatre satellites que l'on peut apercevoir, même avec des télescopes d'un médiocre pouvoir. Leurs orbites coïncident presque exactement avec l'équateur de la planète principale, et par conséquent on aperçoit toujours ces satellites comme des points brillants sur une ligne droite passant par le centre de Jupiter, et parallèle aux bandes. Leurs diamètres, dans l'ordre des distances à Jupiter sont $\frac{1}{34}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{34}$ du diamètre de cette planète. Le diamètre apparent d'aucun d'eux n'atteint 2 secondes pour nous. Les satellites tournent d'occident en orient autour de Jupiter. Tantôt ils passent derrière l'ombre portée par la planète et disparaissent momentanément; tantôt ils passent sur le disque de la planète elle-même. Dans ce dernier cas il arrive souvent qu'on observe le satellite comme une tache brillante sur une bande obscure; parfois, au contraire, il paraît comme une tache obscure de dimensions plus petites que l'ombre qu'il projette sur le disque de la planète. Ce fait curieux observé par Schrœter et Harding indique, pour certains satellites, des taches obscures d'une grande étendue, sur la surface ou dans l'atmosphère de ces corps. Les trois premiers satellites ne peuvent pas être éclipsés simultanément, et l'on ne connaît qu'une seule observation, faite par Molineux le 2 novembre 1681 (vieux style), où Jupiter ait été vu sans satellite.

Les 7 satellites de Saturne sont bien moins connus que ceux de Jupiter. Le septième, le plus éloigné de la planète l'emporte de beaucoup sur les autres par ses dimensions, qui ne le cèdent guère à celles de Mars. Son orbite a une inclinaison sensible sur le plan de l'anneau avec lequel les orbites de tous les autres coïncident à très-peu près. Ce satellite offre, comme ceux de Jupiter, des variations périodiques dans sa lumière, ce qui a permis de constater qu'il tourne sur son axe dans le même temps qu'il met à accomplir une révolution autour de Saturne. Le sixième satellite est vu assez facilement; les trois suivants sont très-petits et ne peuvent être aperçus qu'avec de bons télescopes. Enfin les deux satellites intérieurs qui viennent effleurer les bords de l'anneau et qui se meuvent exactement dans son plan, n'ont été aperçus que dans des circonstances particulières. A une époque où l'anneau disparaissait dans les télescopes ordinaires, en 1789, Herschel le père, muni d'un télescope à reflecteur d'un mètre 20 cent. d'ouverture, les a vus enfiler, comme les grains d'un chapelet, le filet de lumière très-mince auquel se réduisait l'anneau, s'éloigner pour un temps très-court de l'extrémité de ce filet, puis se dérober de nouveau aux regards. Mais ce qui prouve combien la pureté du ciel peut suppléer à la puissance des instruments, c'est qu'à Rome, dans le courant de juin et de juillet 1838, les astronomes du Collége des Jésuites ont vu tous les satellites de Saturne à travers une lunette de Cauchoix dont l'objectif n'est que de 0m,16 de diamètre. La figure 4, qui se rapporte à cette observation déjà citée, montre le satellite le plus rapproché de la planète. Les cinq satellites les plus éloignés ne sont jamais éclipsés, si ce n'est à l'époque où le plan de l'anneau passe par le Soleil et où nous le voyons de côté.

Après les deux premiers satellites de Saturne, ceux d'Uranus sont les plus difficiles à apercevoir. Sur six qui ont été signalés par Herschel le père, deux seulement, le second et le quatrième, ont été revus. Contrairement à l'analogie qui s'observe dans tout le système solaire, les plans de leurs orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique, et leurs mouvements sont *rétrogrades*, c'est-à-dire qu'ils s'opèrent d'orient en occident; le mouvement ordinaire d'occident en orient porte le nom de *direct*.

COMÈTES. — Ces astres consistent ordinairement en une masse de lumière large et éclatante, mais mal terminée, qu'on appelle la *tête*, où se trouve souvent un centre ou *noyau* beaucoup plus brillant, semblable à une étoile ou à une planète. La *queue* consiste en deux traînées lumineuses qui partent de la tête dans une direction le plus souvent opposée au Soleil, par rapport à la comète, tantôt se réunissant, tantôt restant distinctes et séparées. Quelquefois la queue atteint une immense longueur apparente. Celle de la comète de l'an 371 avant J.-C., citée par Aristote, occupait un tiers de l'étendue du ciel ou 60°. Celle de l'an 1618 de notre ère avait, dit-on, une traînée de 104° de longueur. La comète de 1680 avait une tête dont l'éclat n'excédait pas celui d'une étoile de 2e grandeur, avec une queue qui couvrait 70°, et selon d'autres 90° du ciel. La figure 6 représente la comète de 1819, une des dernières que l'on ait pu apercevoir à l'œil nu.

6



Comète de 1819.

Les comètes de 1585 et de 1763 n'offraient aucun vestige de queue, et Cassini décrit celle de 1682 comme ayant la rondeur et l'éclat de Jupiter. Au contraire celle de 1744 avait six queues qui se déployaient comme un immense éventail sur une longueur de près de 30°. Les petites comètes télescopiques, qui sont les plus nombreuses, ne paraissent que comme des masses vaporeuses, rondes ou un peu ovales, plus denses vers le centre, mais sans noyau distinct.

Les étoiles les plus petites, qui disparaissent dans les brumes légères de l'horizon, restent visibles à travers la partie la plus dense de la comète.

Le nombre de comètes observées monte à plus de 700, et il est probable qu'il en existe plusieurs milliers. Beaucoup doivent échapper à nos regards, parce qu'elles traversent la partie visible du ciel pendant le jour. Sénèque rapporte que lors d'une éclipse totale de Soleil arrivée 60 ans avant J.-C., on aperçut une comète très-large près du Soleil. Les comètes de 1402 et de 1532 et celle qui parut un peu avant la mort de César étaient, dit-on, assez brillantes pour être aperçues en plein midi, dans tout l'éclat du soleil.

La constitution physique des comètes est probablement très-variée. Il paraît vraisemblable que la structure de quelques-uns de ces astres est celle d'une enveloppe creuse, de forme parabolique, qui renferme près du sommet la tête et le noyau. Dans quelques-unes on a aperçu un point stellaire très-petit, indice de la présence d'un corps solide.

Les mouvements des comètes, quoique irréguliers en apparence, s'effectuent sur des courbes très-allongées, de forme elliptique, hyperbolique ou parabolique. Le mouvement apparent peut atteindre une rapidité telle, que la comète de 1472 décrivit en un jour un arc céleste de 120°. Les comètes qui ont pour orbite une ellipse peuvent être considérées comme appartenant à notre système planétaire, et reviennent périodiquement tant que leurs mouvements ne sont pas altérés par l'influence des planètes. La plus remarquable d'entre elles est celle dont Halley prédit en 1682 la réapparition pour l'année 1759, et qui a été observée de nouveau en 1835. Elle avait paru précédemment en 1607, en 1531, en 1456, en 1305, etc.

La comète d'Encke, ainsi nommée du célèbre astronome de Berlin qui, le premier, en a constaté, en 1819, le retour périodique, est remarquable par la brièveté de sa révolution, qui s'opère en 1207 jours ou 3 ans et demi à peu près, sur une ellipse très-excentrique, inclinée d'environ 13° 22' à l'écliptique.

Une autre comète à courte période porte le nom de M. Biela de Josephstadt, qui en a le premier reconnu la périodicité il y a quelques années. Elle décrit en 6 ans $\frac{3}{4}$ une ellipse médiocrement excentrique. La dernière apparition a eu lieu en 1838.

Cette comète est sans queue et sans aucune apparence de noyau solide. Son orbite coupe le plan de l'écliptique très-près de l'orbite de la terre; et si, lors du passage de 1832, la terre eût été en avance d'un mois sur son orbite, elle aurait traversé la comète : rencontre singulière, qui aurait bien pu n'être pas sans dangers.

Les comètes sont de beaucoup les corps les plus volumineux de notre système. Newton a trouvé que la queue de la grande comète de 1680, immédiatement après le passage au point le plus près du soleil, n'avait pas moins de 80 millions de kilomètres de longueur : la plus grande longueur de cette queue s'est élevée à plus de 165 millions de kilomètres, ce qui dépasse considérablement la distance de la Terre au Soleil.

Constellations. — Les astronomes attachent peu d'importance aux divisions arbitraires dont la plupart sont établies dans le ciel depuis la plus haute antiquité, et auxquelles on a donné le nom de constellations. Ils ne s'en servent que pour désigner d'une manière abrégée les étoiles remarquables, en joignant au nom de la constellation une lettre grecque attribuée à chacune des étoiles qui la composent, comme α du Lion, σ du Scorpion, etc.

Le moyen le plus simple d'apprendre à connaître les constellations consiste à employer un globe céleste que l'on compare avec le ciel dans les différentes saisons de l'année. Pour 16 fr., on peut s'en procurer un de 0m 25 de diamètre, monté sur un pied avec deux cercles gradués en cuivre et en zinc. La *méthode des alignements*, qui consiste à déterminer la position des étoiles au moyen des lignes que l'on imagine par d'autres étoiles connues, facilite singulièrement l'usage du globe céleste. Pour en donner un seul exemple, nous dirons que l'*étoile polaire*, qui occupe à peu près le pôle nord de l'axe autour duquel la Terre opère son mouvement diurne, est sensiblement dans le prolongement d'une ligne droite que l'on imagine projetée sur la voûte céleste, en passant par les deux *gardes* de la Grande-Ourse, ou du Chariot de David, constellation que tout le monde connaît.

Étoiles de diverses grandeurs. — Les étoiles sont ordinairement classées d'après leur éclat apparent, que l'on nomme *grandeur*. Les numéros les moins élevés appartiennent aux étoiles les moins brillantes. Dans les circonstances les plus favorables on ne peut apercevoir à l'œil nu que les étoiles des six ou sept premières grandeurs. Mais avec le secours des télescopes, on va beaucoup plus loin, et une personne exercée compte les étoiles jusqu'à la seizième grandeur.

D'après Littrow, le nombre des étoiles de première grandeur est de 14; celui de la deuxième est de 70; celui de la troisième d'environ 300; celui des étoiles visibles à l'œil nu, c'est-à dire comprises dans les six premières classes, est d'environ 5 000; celui des étoiles des neuf ou dix premières classes, d'environ 70 000.

Ces grandeurs ne se manifestent à nos instruments que par l'intensité, et nullement par un diamètre apparent quelconque. Il est même à remarquer que plus le télescope employé est parfait, plus l'étoile tend à se réduire à un simple point brillant, qu'un fil d'araignée éclipse totalement. Jusqu'à présent les astronomes ne sont pas d'accord sur la loi des intensités lumineuses des grandeurs, tout en reconnaissant que cette loi approche d'une progression géométrique dont chaque terme serait la moitié du précédent.

Variations de lumière des étoiles. — Un moyen exact de classer les étoiles d'après l'intensité de leur lumière, serait de la plus haute importance parce qu'il servirait à faire connaître les changements qu'elle éprouve dans la suite des siècles. Les Grecs attribuaient la couleur rouge à Sirius qui nous paraît aujourd'hui d'un blanc éblouissant. Castor était, dans l'antiquité, le plus grand des deux Gémeaux, tandis qu'aujourd'hui il est évidemment plus petit que Pollux. L'étoile α de l'Hydre était rangée dans la première classe par les anciens, et maintenant elle ne peut plus être considérée que comme de la deuxième. Les 7 belles étoiles de la Grande-Ourse changent continuellement d'éclat, et tour à tour une d'elles paraît plus brillante que les autres.

Dans certaines étoiles, ces changements d'éclat et de lumière sont périodiques. L'une des plus remarquables est l'étoile o, dans la Baleine, signalée d'abord par Fabricius en

1596. Sa période est d'environ 334 jours. Dans son plus grand éclat, qui dure environ 15 jours, l'étoile paraît à peu près de deuxième grandeur; elle décroît pendant 3 mois, devient invisible pendant 5 mois et augmente de nouveau de grandeur apparente pendant 3 autres mois. Cependant, il y a parfois des irrégularités dans ces diverses phases. Hévélius rapporte même que, pendant plus de 4 années, d'octobre 1672 à décembre 1676, elle ne parut pas du tout.

Algol, ou β de Persée, paraît ordinairement comme une étoile de deuxième grandeur, et reste telle pendant 2 jours 14 heures, au bout desquels son éclat décroît soudain, et dans l'espace d'environ 3 heures $\frac{1}{2}$ elle est réduite à la quatrième grandeur. Elle recommence alors à croître, pour reprendre au bout de 3 heures $\frac{1}{2}$ son éclat habituel, l'étendue entière de sa période étant d'environ 20 jours 20 heures 48 m. Goodricke, qui a découvert ce fait important en 1782, pensait que cet effet singulier est dû à la présence d'un corps opaque qui tourne autour de l'étoile et vient s'interposer entre elle et nous.

L'apparition soudaine d'une étoile, l'an 125 avant J.-C., décida, dit-on, Hipparque à entreprendre son catalogue d'étoiles, le plus ancien dont il soit fait mention. L'an 389 de notre ère, près de α de l'Aigle, on vit paraître une étoile qui eut, pendant 3 semaines, l'éclat de Vénus, et disparut ensuite entièrement. Dans les années 945, 1264 et 1572, des étoiles brillantes ont paru dans la région du Ciel comprise entre Céphée et Cassiopée, et il paraît vraisemblable qu'elles sont un seul et même astre dont la période serait de 300, ou, suivant Goodricke, de 150 ans. L'apparition de l'étoile de 1572 fut si soudaine, que le célèbre astronome danois Tycho-Brahé, retournant un soir (le 11 novembre), de son observatoire chez lui, fut étonné de trouver un groupe de curieux occupés à regarder cette étoile, qu'il n'avait pas aperçue une demi-heure auparavant. Elle était alors aussi brillante que Sirius, et elle continua de croître en éclat au point de surpasser Jupiter; on la voyait en plein midi. Elle commença à décroître en décembre de la même année, et au mois de mars 1574 elle avait entièrement disparu. Le 10 octobre 1604, une étoile du même genre apparut dans la constellation du Serpentaire et fut visible jusqu'en octobre 1605.

En un mot, lorsqu'on fait une revue attentive du ciel, en le comparant avec les catalogues, on trouve que beaucoup d'étoiles manquent; et, même en tenant compte des erreurs des catalogues, on doit regarder comme certain que plusieurs étoiles ont réellement disparu.

Répartition des étoiles dans l'espace. — Les 3 ou 4 premières classes d'étoiles paraissent assez uniformément sur la voûte céleste. Mais, en tenant compte de toutes celles qui sont visibles à l'œil nu, on s'aperçoit que les nombres éprouvent un rapide accroissement quand on approche des bords de la *voie lactée*, bande d'une couleur blanchâtre qui sillonne le ciel dans presque toute sa longueur. Bien plus: l'accumulation des étoiles télescopiques le long de cette zone et des deux branches dans lesquelles elle se divise, surpasse l'imagination; tellement qu'en réalité la lumière de la voie lactée n'est que le résultat de cette accumulation prodigieuse d'étoiles dont la grandeur moyenne peut être rapportée à la dixième ou onzième grandeur. Au contraire, les régions du ciel correspondant aux extrémités d'un axe perpendiculaire à la voie lactée, dans le voisinage de la Chevelure de Bérénice et de l'Atelier du Sculpteur, sont extrêmement pauvres en étoiles. Les choses se passent à peu près comme si les étoiles étaient agglomérées dans un espace de forme lenticulaire, dont nous occuperions le centre, et dans l'immensité duquel notre soleil, avec tout son système planétaire, se trouve comme perdu.

Le nombre des étoiles doit être considéré comme réellement infini dans le sens littéral de ce mot. Le 22 août 1792, W. Herschel, muni de son réflecteur de 6 mètres de foyer, ne vit pas moins de 258 000 étoiles traverser le champ de ce télescope en 41 minutes de temps; et l'on peut considérer comme certain que nous ne voyons que la portion du ciel la plus rapprochée de nous. Que serait-ce donc si nous pouvions augmenter encore la puissance de nos instruments!

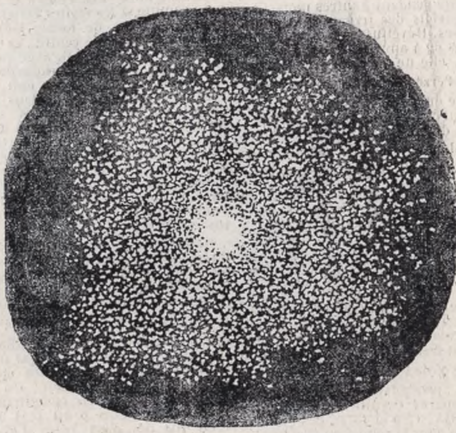
Nébuleuses. — On distingue en divers points du ciel des taches lumineuses de forme plus ou moins régulière, dont quelques-unes rappellent d'une manière frappante la constitution de notre voie lactée. Tel est le cas de la *nébuleuse* qui se trouve près de l'étoile ν de la constellation d'Andromède. Elle est visible à l'œil nu, et les personnes qui ne sont pas familiarisées avec l'aspect du ciel la prennent toujours pour une comète. On en aura une idée assez nette en imaginant que la comète de la figure 6 ait pris une forme symétrique des deux côtés d'un axe perpendiculaire à cette figure dans le sens de sa longueur, et que l'intensité de la lumière de cette figure aille en décroissant du centre vers les bords. Simon Marius, qui l'a signalée en 1612, la compare avec assez de justesse à une chandelle vue à travers de la corne. Elle a près d'un demi-degré de longueur sur 15 à 20 minutes de largeur. M. Littrow regarde comme probable que cette nébuleuse et toutes celles qui ont une forme analogue sont composées d'amas d'étoiles placées à une distance prodigieuse de nous. Quelques-unes d'entre elles sont probablement 10 000 fois plus éloignées que les étoiles les plus voisines de notre soleil, et par conséquent leur lumière n'emploie pas moins de 92 500 ans à nous parvenir. A cette distance, notre voie lactée occuperait à peine un espace d'un tiers de seconde sur la voûte céleste, et serait par conséquent tout à fait invisible pour nous.

Les nébuleuses ont une grande variété d'aspect. Parmi les plus remarquables on distingue celle d'Orion découverte par Huygens en 1656, et celle que Lacaille a découverte près de l'étoile η dans la constellation australe le Chêne de Charles. La première consiste en petites masses ou flocons nébuleux, qui semblent adhérer vers leurs bords à une foule de petites étoiles, et notamment à une étoile considérable entourée d'une atmosphère nébuleuse remarquable par son étendue et par la singularité de sa figure. Quelques astronomes, et notamment ceux du collége romain, en comparant cette nébuleuse avec les diverses figures qui en ont été données, en ont conclu qu'elle éprouvait dans sa forme des changements sensibles et quelquefois même assez rapides; mais MM. Arago et Herschel sont loin de regarder ce fait comme certain et sont disposés à attribuer aux variations atmosphériques et à d'autres causes semblables les différences signalées.

Il est à remarquer qu'à mesure que l'on

emploie des instruments d'un pouvoir amplifiant plus considérable, on trouve plus de nébuleuses *résolubles*, c'est-à-dire où l'on distingue des amas d'étoiles. La figure 7 représente la treizième des cent trois nébuleuses dont Messier a donné la liste dans la Connaissance des temps pour 1784, et qui après avoir été décrite par lui comme une nébuleuse sans

7



13e *Nébuleuse de Messier*

étoiles, a été vue, telle que nous la donnons, par M. J. Herschel avec le réflecteur de 6 mètres. Cette belle nébuleuse, signalée pour la première fois par Halley en 1714, est visible à l'œil nu entre les étoiles η et ζ d'Hercule. Dans une lunette ordinaire de nuit elle ressemble à une petite comète ronde.

Parmi les nébuleuses non résolubles, W. Herschel distingue : 1° les nébuleuses planétaires ; 2° les nébuleuses stellaires ; 3° les étoiles nébuleuses.

Les nébuleuses planétaires sont des objets très-étranges, auxquels leurs disques ronds ou légèrement ovales, quelquefois nettement terminés, dans d'autres cas un peu brumeux vers leurs bords, donnent une certaine ressemblance avec les planètes. La lumière est parfaitement uniforme ou très-peu nuancée, et parfois elle approche, pour l'éclat, de celle des planètes véritables. Ces objets atteignent des dimensions énormes. Un d'entre eux, dont le diamètre apparent est d'environ 20″, se voit près de ν du Verseau ; un autre, dans Andromède, a un disque de 12″ parfaitement rond et bien tranché. En admettant qu'ils soient à la même distance de nous que les étoiles, leur diamètre réel serait au moins égal à celui de l'orbite d'Uranus. Si l'éclat intrinsèque de leurs surfaces n'est pas emprunté, il doit être de beaucoup inférieur à celui du Soleil. Car ces objets sont au plus visibles à l'œil nu, tandis que si le Soleil était reculé à une distance telle que son diamètre apparent fût de 20″, il donnerait une lumière égale à celle de cent pleines lunes.

Les nébuleuses stellaires sont analogues à celle de ν d'Andromède ; leur figure est ronde ou ovale, et la lumière va en augmentant d'intensité depuis les bords jusqu'au centre, de manière à offrir l'apparence d'une étoile pâle ou légèrement voilée.

Les étoiles nébuleuses, au contraire, offrent le beau phénomène d'une étoile nette et brillante, entourée d'un disque parfaitement circulaire, ou d'une atmosphère quelquefois faiblement lumineuse et décroissant insensiblement en tous sens, d'autres fois brusquement terminée. Telles sont l'étoile 55 d'Andromède, ε et ι d'Orion.

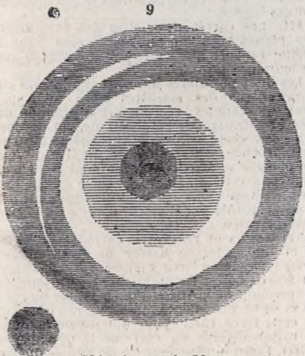
Parmi les nébuleuses douées d'une symétrie de forme évidente, les plus remarquables, sont la 27e et la 51e du catalogue de Messier, représentées dans nos figures 8 et 9. La première, qui se trouve dans la constellation du

8

27e *Nebuleuse de Messier.*

Renard, consiste en deux nébuleuses brillantes, rondes ou légèrement ovales, dans un haut degré de condensation, enveloppées par une atmosphère nébuleuse plus obscure, dont la figure est celle d'une ellipse circonscrite. La seconde, dans la tête du Chien de Chasse septentrional, consiste en une nébulosité globulaire, large et brillante, entourée d'un

9



51ᵉ *Nébuleuse de Messier.*

anneau divisé sur les deux cinquièmes environ de sa circonférence en deux lames, dont l'une semble inclinée sur le plan de l'anneau. Une autre petite nébuleuse ronde, semblable à un satellite, est dans le voisinage de l'anneau.

Notre Soleil lui-même semble devoir être rangé dans la classe des étoiles nébuleuses. C'est ce qui résulte de l'existence de la *lumière zodiacale*, qui se montre par les très-beaux temps aussitôt après le coucher du Soleil, vers les mois d'avril et de mai, ou immédiatement avant le lever de cet astre dans la saison opposée, en forme de lentille dont la direction est, en général, celle de l'équateur solaire. La distance angulaire apparente du Soleil au sommet varie, de 40 à 90° ; et la largeur de la base perpendiculaire à l'axe, de 8 à 30°. Cette lumière est extrêmement faible et mal terminée dans nos climats, mais on la voit beaucoup mieux dans les régions qui avoisinent l'équateur terrestre.

ÉTOILES DOUBLES ET MULTIPLES. — Beaucoup d'étoiles, lorsqu'on les examine au télescope, sont *doubles* ou *multiples*, c'est à dire se résolvent en deux ou plusieurs étoiles très rapprochées. Parmi les étoiles des 6 premières grandeurs, on en rencontre une double pour 10 simples; de la 6ᵉ à la 9ᵉ grandeur, une double sur 26; et dans les grandeurs inférieures, une double sur 43. Les régions du Ciel les plus pauvres en étoiles simples, le sont aussi le plus en étoiles doubles. Cependant les constellations de Persée, du bélier, de la Mouche, des Gémeaux, et surtout celle d'Orion, qui sont en dehors de la voie lactée, sont très-riches en étoiles.

10

Mizar, β de la Grande-Ourse.

11

Rigel, ζ d'Orion.

Parmi les étoiles triples on en distingue une, dans Orion, composée de 2 étoiles de la septième, et d'une de la dixième grandeur; une dans le Lynx; ζ de l'Écrevisse; ξ de la Balance, deux dans le Taureau; ψ de Cassiopée, etc.

12

Vega α de la Lyre.

Dans Orion, θ est quadruple, et les quatre étoiles forment un carré presque régulier. M. Struve a découvert récemment dans le milieu du carré une cinquième petite étoile qui, depuis, est devenue si lumineuse, qu'elle peut être facilement aperçue maintenant par tout observateur muni d'un bon télescope. Il est donc certain que cette étoile n'a commencé à exister que dans ces derniers temps, et qu'elle est maintenant en voie d'accroissement.

M. Struve a aussi reconnu que σ d'Orion, immédiatement au-dessous de la plus basse des trois étoiles désignées sous le nom de Bâton de Jacob, est composée de *seize autres étoiles*.

L'observation a fait reconnaître que la plupart des étoiles multiples forment réellement des groupes à part, et ne sont pas rapprochées par un simple effet d'optique; car les distances angulaires de ces étoiles, la direction de leur alignement par rapport à la verticale, varient de telle sorte que l'une décrit autour de l'autre une ellipse dont la première occupe un des foyers. C'est à M. Savary, dont la science déplore la perte récente et prématurée, que l'on doit la première méthode de calcul pour la détermination des orbites des étoiles doubles. L'application de cette méthode a conduit cet habile astronome à assigner une période de 61 ans environ à la durée de la rotation d'une des étoiles autour de l'autre pour ξ de la Grande-Ourse. Un autre procédé de calcul a donné à M. Encke, directeur de l'Observatoire de Berlin, une orbite décrite en 80 ans environ, pour 70 d'Ophiucus.

La longueur des périodes de quelques-uns de ces astres n'est pas moins remarquable que la brièveté de celles que nous venons de citer. Ainsi, dans γ du Lion, la révolution ne s'accomplit qu'en 1200 années.

Le plus souvent les deux étoiles dont se compose une étoile double sont d'inégale grandeur. Telles sont les étoiles représentées sur les fig. 10, 11 et 12. La première se résout en deux étoiles, l'une de troisième, l'autre de quatrième grandeur; la seconde en deux étoiles de première et de dixième grandeur; la troisième en deux étoiles de première et de quinzième grandeur. Quelquefois aussi les deux étoiles sont de grandeur presque égale. Telles sont celles de Castor (fig. 13), toutes deux de troisième; celles de γ du Bélier, toutes deux de cinquième grandeur (fig. 14).

Un grand nombre d'étoiles doubles offrent de curieux contrastes de couleurs. Ordinairement la plus grande des deux est de couleur rouge ou orangée, tandis que la petite paraît bleue ou verte. Si ces contrastes ne résultent pas uniquement d'une illusion d'optique, quel magnifique spectacle doivent offrir aux planètes qu'ils éclairent, ces Soleils rouges et verts, tantôt paraissant sur le même horizon, tantôt se succédant l'un à l'autre!

13

14

Castor. *Mesarthim, γ du Bélier.*

Étoiles filantes. — On appelle ainsi ces feux clairs et rapides qui s'allument tout à coup au milieu des ténèbres et qui semblent autant d'étoiles se détachant de la voûte céleste pour tomber dans différentes directions vers la surface de la Terre. Le nom de *Bolides* est donné à ceux qui ont un diamètre assez considérable pour offrir l'apparence d'un globe de feu. Un sillon lumineux marque fréquemment la route que le météore a suivie.

La périodicité de certaines apparitions d'étoiles filantes est aujourd'hui bien constatée. Les époques les plus remarquables sont du 10 au 15 novembre, aux approches du 10 août, le 7 décembre, etc. Il est arrivé plus d'une fois, notamment aux deux premières époques, que l'on a observé de véritables *pluies d'étoiles filantes*. Telle est celle que l'illustre voyageur, M. de Humboldt, observa en Amérique dans la nuit du 11 au 12 novembre 1799. Mais le plus souvent on peut constater l'apparition du phénomène sans qu'il atteigne cette intensité. Suivant M. Quételet, le nombre des étoiles filantes est de 8, moyennement par heure, aux yeux d'un observateur isolé ou de plusieurs observateurs dont l'attention est dirigée vers une même région du ciel. Ce nombre est double si les observateurs se partagent l'examen de la voûte céleste. Pour une apparition extraordinaire, M. J. Herschel pense que le nombre d'étoiles doit être au moins double, c'est à dire de plus de 32 pour tout le Ciel.

On attribue généralement les étoiles filantes à la même cause que les *aérolithes* ou pierres tombées du ciel; on pense qu'elles proviennent de myriades d'astéroïdes qui se meuvent autour du Soleil, dont les orbites coupent celle de la Terre dans les environs des points où la Terre se trouve vers les trois époques ci-dessus désignées. Il résulte du catalogue le plus complet de chutes d'aérolithes que le plus grand nombre de ces pierres météoriques tombe en novembre, surtout vers le 10.

On doit signaler les analogies remarquables que divers observateurs et physiciens, tels que Cassini, de Mairan, MM. Biot, Quételet, etc., ont signalé entre ces groupes d'astéroïdes, la lumière zodiacale, les taches du Soleil et les aurores boréales. Nous ajouterons que l'on pourrait peut-être attribuer à la même cause l'apparition si controversée d'un prétendu satellite de Vénus. Car si la lumière zodiacale, qui s'étend au delà des orbites de Mercure et de Vénus, est formée, comme le pensait Cassini, par une multitude d'astéroïdes, il peut y en avoir qui se soient trouvés dans le voisinage de Vénus, et qui aient offert l'apparence d'un satellite de cette planète en présentant la même phase.

§ 2. *Lois des mouvements réels des astres.*

Lois de Képler. — I. Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et les rayons vecteurs menés de leurs centres au centre du Soleil, décrivent autour de cet astre des aires proportionnelles au temps.

II. Les orbites décrites par les centres des planètes, sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.

III. Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont dans le même rapport que les cubes des grands axes de leurs orbites.

Les deux premières lois sont applicables aux mouvements des satellites aussi bien qu'à ceux des planètes, si l'on fait abstraction des *perturbations* qui résultent de causes dont il va être question. Mais la troisième loi n'est qu'approchée; elle serait en défaut si les masses des planètes n'étaient pas infiniment petites par rapport à celle du Soleil, de sorte qu'elle doit être modifiée pour les satellites qui ont une masse sensible par rapport à celle de la planète principale.

Attraction ou pesanteur universelle. — De la première loi de Képler on peut déduire l'existence d'une force dirigée vers le centre du Soleil. La loi du mouvement elliptique, ou l'expression de la vitesse qui se déduit de cette loi et de la précédente, montre que l'intensité de cette force varie, pour une même planète, en raison inverse du carré de la distance au Soleil. Enfin la troisième loi de Képler montre qu'à égalité de distance au centre du Soleil, l'intensité de la force motrice est proportionnelle à la masse de chaque planète et indépendante de la nature particulière de cette planète.

Telles sont les conséquences que Newton a démontrées synthétiquement dans ses *Principes*, et sur lesquelles il a fondé la théorie de la pesanteur universelle, son plus beau titre de gloire.

Tous les corps de la nature s'attirent mutuellement en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance. Telle est la grande loi que Newton a mise hors de doute, non-seulement par les déductions tirées des lois de Képler, mais encore par une démonstration directe. En effet, en admettant ce principe, on en conclut, par les méthodes employées dans la mécanique, des lois générales dont celles de Képler ne sont que des cas particuliers.

Newton a d'abord démontré que, quand deux corps sphériques sont sollicités par une semblable force attractive, chacun d'eux décrit autour de l'autre, considéré comme immobile, et tous deux décrivent autour de leur centre commun de gravité des courbes concaves qui sont une des trois sections coniques, et dont un des foyers est occupé par ce centre commun de gravité. La courbe sera, dans chaque cas particulier, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon les rapports de vitesse, de distance et de direction; et les excentricités pourront avoir des valeurs quelconques, d'après les mêmes circonstances. Dans tous les cas, la vitesse angulaire avec laquelle se meut la ligne qui joint les centres sera en raison inverse du carré de leur distance mutuelle, et les aires décrites par cette ligne seront égales en temps égaux. Enfin le rapport du carré du temps de la révolution d'un des deux corps au cube du grand axe, dans le cas du mouvement elliptique, sera égal à une quantité constante divisée par la somme des masses des deux corps. Ce rapport sera donc sensiblement constant si l'une des deux masses est toujours extrêmement petite par rapport à l'autre. C'est ce qui a lieu pour le système solaire, où la masse la plus forte, celle de Jupiter, n'atteint pas un millième de celle du Soleil.

Les mouvements des comètes ont lieu, pour quelques-unes, sur des orbites hyperboliques et paraboliques; dans ceux des étoiles doubles, on observe la proportionnalité des aires aux temps: la loi de l'attraction peut donc, à bon droit, être proclamée *universelle,* puisqu'elle est constatée jusqu'aux confins de l'univers visible.

Perturbations. — Mais les corps célestes agissent les uns sur les autres et sur le Soleil lui-même, et de ces attractions diverses il résulte, dans leurs mouvements, des perturbations que les observations font entrevoir.

Les perturbations du mouvement elliptique des planètes sont de deux espèces : 1° les *inégalités séculaires* qui affectent les éléments du mouvement elliptique, et croissent avec une extrême lenteur; 2° les *inégalités périodiques* dont les périodes sont beaucoup plus courtes que celles des inégalités séculaires, et qui, dépendant de la configuration des planètes, soit entre elles, soit à l'égard des points principaux de leurs orbites, se rétablissent toutes les fois que ces configurations deviennent les mêmes.

Tous les éléments des ellipses planétaires sont variables. Ces ellipses s'approchent ou s'éloignent insensiblement de la forme circulaire; leurs inclinaisons sur un plan fixe et sur l'écliptique augmentent ou diminuent; leurs *périhélies*, c'est-à-dire les points de leurs orbites les plus rapprochés du Soleil, et leurs *nœuds*, c'est-à-dire les points où les plans de leurs orbites coupent l'écliptique, sont en mouvement. Mais Lagrange a démontré que les moyens mouvements des planètes et que leurs distances moyennes au Soleil, ou que les grands axes de leurs orbites sont invariables; et la constance de ces éléments est un des phénomènes les plus remarquables du système du monde.

Laplace et Lagrange ont démontré aussi que, quelles que soient les masses des planètes, par cela seul qu'elles se meuvent dans le même sens et dans des orbes peu excentriques et peu inclinés les uns aux autres, leurs inégalités séculaires sont périodiques et renfermées dans d'étroites limites; en sorte que le système planétaire ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très-petite quantité. Les calculs récents de M. Le Verrier, poussés à un degré d'approximation beaucoup plus considérable que ceux de Laplace, ont pleinement confirmé ces lois admirables et providentielles en vertu desquelles le globe terrestre sera à jamais préservé de variations considérables de température moyenne qui pourraient nuire au libre développement de l'espèce humaine.

Les plus remarquables des perturbations éprouvées par le globe terrestre, produisent la *précession des équinoxes* et la *nutation.* La première consiste dans une rétrogradation continuelle des nœuds de l'équateur terrestre sur l'écliptique, et est due à la combinaison du mouvement de rotation de la terre autour de son axe avec l'action perturbatrice du Soleil et de la Lune sur les couches matérielles accumulées autour de l'équateur terrestre et sans lesquelles la Terre aurait une forme parfaitement sphérique. La rétrogradation est de 50",10 par an, et elle parcourt le tour entier de l'écliptique dans une période de 25 868 ans. La nutation de l'axe terrestre est un petit mouvement giratoire subordonné à la précession, en vertu duquel, s'il existait seul, le pôle décrirait dans l'intervalle d'environ 19 ans une petite ellipse dont le grand axe serait de 18", 5 et le petit axe de 13", 74; le grand axe étant dirigé vers le pôle de l'écliptique, et le petit dans la direction perpendiculaire.

Loi de Bode. — On désigne sous le nom de Bode, astronome de Berlin, une loi très-remarquable que l'on a observée entre les différentes distances des planètes au Soleil. En ajoutant aux nombres.

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

dont la loi est facile à saisir, le nombre constant 4, on obtient la série

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196

qui exprime les distances du Soleil aux planètes Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Cérès, Jupiter, Saturne et Uranus. A l'époque où cette loi fut signalée, on remarquait une lacune entre Mars et Jupiter, et on avait conjecturé qu'il pouvait bien exister une planète dans cet intervalle. Cette prévision reçut une confirmation singulière lorsque l'on découvrit 4 nouvelles planètes au lieu d'une que l'on soupçonnait. On remarqua ensuite que les distances de ces planètes étant exprimées par les nombres 24, 27, 28, et 28, sont peu différentes les unes des autres, et que leurs orbites comme leur configuration, semblent indiquer qu'elles proviennent d'une planète unique que quelque cause inconnue a brisée en fragments dans l'espace. La découverte d'Uranus, est aussi postérieure à celle de la loi de Bode, et en a donné une confirmation non moins singulière.

Les satellites de Jupiter sont arrangés suivant une loi analogue. Car en ajoutant 3 aux nombres de la série 3, 6, 12, 24, on trouve 6, 9, 15, 27 qui expriment les distances de ces satellites à la planète. Ce qu'il y a d'assez remarquable, c'est qu'en diminuant d'un tiers chacun des nombres qui expriment les distances exactes à la planète, on trouve la suite 4, 7, 10, 18 qui ne diffère que par le dernier nombre de la suite 4, 7, 10, 16 déjà connue.

Pour les satellites de Saturne, on prendra la série 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, et on augmentera chacun des termes de 3 unités, ce qui donnera 3, 4, 5, 7, 11, 19, 35, 67, qui sont précisément les distances des satellites à la planète, sauf l'avant dernier 35, auquel correspond une lacune entre le 6e et le 7e satellites

§ 3. *Mouvements apparents des corps célestes.*

Mouvements diurnes du ciel. — En vertu du mouvement uniforme de rotation de la Terre autour de son axe, tous les astres semblent décrire sur la voûte céleste des arcs de cercle perpendiculaires à cet axe. Les plus rapprochés du pôle décrivent des circonférences de rayons plus petits. Ceux qui sont à 90° du pôle décrivent la circonférence du plus grand rayon. Mais les distances respectives des étoiles entre elles restent les mêmes, comme si ces étoiles étaient invariablement fixées à la voûte céleste, et les déplacements angulaires qu'elles éprouvent en tournant avec celle-ci sont d'une parfaite uniformité.

Les astres qui ont un mouvement propre tels que les planètes, le Soleil, la Lune, etc. tout en participant à la rotation diurne, par un effet combiné de leur mouvement avec cette rotation, s'écartent plus ou moins de la route parfaitement circulaire et uniforme qu'ils auraient suivie sans cette cause particulière.

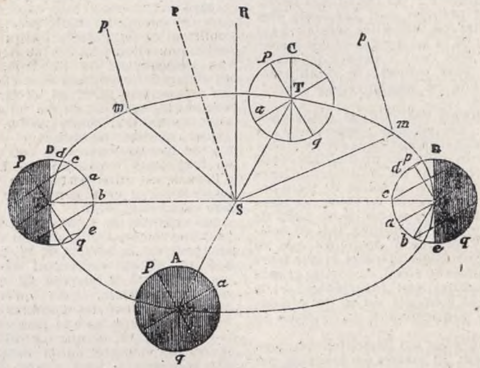
Tous les lieux qui sont situés entre le pole et l'équateur ont la *sphère oblique,* c'est-à-dire que l'axe de la Terre est oblique par rapport à leur *horizon.* On appelle ainsi un grand cercle passant par le centre de la Terre, perpendiculairement au rayon qui joint le point que l'on considère au centre de la sphère. Dans la sphère oblique, les étoiles circompolaires dont la distance angulaire au pôle est moindre que l'inclinaison de l'axe terrestre sur l'horizon, ou que la distance angulaire du lieu à l'équateur, ne passent jamais au-dessous de l'horizon. Toutes les étoiles dont la distance au sud de l'équateur excède le complément de la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon sont invisibles, et ne s'élèvent jamais au-dessus.

Les points de l'équateur terrestre ont la *sphère droite,* c'est-à-dire que toutes les étoiles y sont visibles et qu'elles décrivent des demi-circonférences dont les plans sont perpendiculaires à l'horizon.

A chacun des deux pôles terrestres, la *sphère* est dite *parallèle,* parce que les étoiles d'un des deux hémisphères seulement sont visibles et qu'elles décrivent des cercles parallèles à l'horizon.

Mouvement annuel. — La combinaison du mouvement de progression annuelle de la terre dans son orbite, avec son mouvement de rotation, eu égard à l'inclinaison de l'axe, donne l'explication des saisons. Représentons (fig. 15) par S le Soleil, et par A, B, C, D quatre positions de la Terre autour de son orbite, à 90° de distance l'une de l'autre. On voit facilement, d'après la figure, comment un grand cercle perpendiculaire au rayon vecteur ST, sépare toujours la partie éclairée de celle qui ne l'est pas

15



Explication des saisons.

Dans les positions A et C, qui correspondent respectivement au 21 mars et au 21 septembre ou à l'*équinoxe de printemps* et à l'*équinoxe d'automne,* le Soleil se trouvant à l'intersection de l'équateur T*a* et de l'écliptique, il fait jour à la fois sur une moitié de chacun des deux hémisphères *boréal* et *austral* (nord et sud); et l'arc diurne décrit par le Soleil étant une demi-circonférence, le jour est égal à la nuit sur toute la Terre.

Après l'équinoxe de printemps, la Terre passant en B au *solstice d'été,* le Soleil semble décrire, le 21 juin, un petit cercle qui est éloigné de l'équateur d'une distance angulaire *ac* égale au complément de l'inclinaison de l'axe de la Terre sur le plan de l'écliptique. Ce cercle porte le nom de *tropique du cancer.* Le jour est alors le plus long possible, parce que la portion de ce cercle, qui est à gauche du plan B*e* de séparation entre l'hémisphère éclairé et l'hémisphère obscur, est un maximum.

Les jours, qui ont été en augmentant pour l'hémisphère septentrional de A en B, vont en diminuant de la même manière de B en C. La hauteur du Soleil diminue aussi pour cet hémisphère, comme elle avait augmenté précédemment.

De C en D, le Soleil passe au sud de l'équateur, et décrit des arcs de plus en plus petits pour l'hémisphère boréal, tandis qu'ils sont de plus en plus grands pour l'hémisphère austral. En D le cercle décrit par le Soleil est perpendiculaire à l'axe *pq* de la Terre et mené par le point *b* à une distance *ab* de l'équateur égale à *ac* et de 23° 28'. Ce cercle est le *tropique du capricorne,* et correspond au *solstice d'hiver.* Alors le Soleil atteint sa moindre hauteur pour toutes les contrées de l'hémisphère boréal. Les jours vont donc en diminuant constamment pour cet hémisphère de C en D, depuis le 21 septembre jusqu'au 21 décembre.

De D en A, du 21 décembre au 21 mars, les jours et la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon augmentent de nouveau, comme ils avaient diminué de C en D.

Pour toutes les régions de l'hémisphère austral les mêmes phénomènes se présentent dans un ordre inverse. Mais il y a lieu d'observer qu'en vertu de l'excentricité de l'orbite terrestre, la distance ST étant plus grande lorsque la Terre est en B que lorsqu'elle est en D, en vertu de la première loi de Képler, le temps qu'elle emploie pour aller de A en B et de B en C est plus considérable que pour aller de C en D et de D en A. Notre printemps et notre été réunis sont donc plus longs que l'automne et l'hiver, et le Soleil séjourne quelques jours de plus dans notre hémisphère que dans l'hémisphère austral.

Pour compléter l'intelligence de tous les détails de la figure 15, nous ajouterons que SR représente un axe perpendiculaire à l'écliptique, et SP une droite faisant avec cet axe un angle de 23° 28'. L'axe de la Terre, dans toutes les positions possibles *mp* est constamment parallèle à SP. Si les arcs *pd*, *qe* sont égaux à ce même angle, les petits cercles tracés sur la surface du globe perpendiculairement à l'axe *pq*, sont appelés *cercles polaires ; arctique* dans l'hémisphère boréal, *antarctique* dans l'hémisphère austral.

Pour tous les pays de la Terre, compris entre un des tropiques et le cercle polaire le plus voisin, les jours et les nuits sont inégaux, si ce n'est aux équinoxes; le jour et la nuit les plus longs sont de moins de 24 heures, et il y a d'autant moins d'inégalité entre les plus longs et les plus courts que l'on est plus voisin du tropique.

Dans les régions que comprennent les deux tropiques, il y a toujours peu d'inégalité entre les jours. Le Soleil à midi atteint une grande hauteur, et deux fois par an il passe au *zénith*, c'est-à-dire au point du ciel où aboutit la verticale ou perpendiculaire à l'horizon menée par le centre de la Terre.

Aux tropiques le passage du Soleil au zénith n'a lieu qu'une fois par an.

Sur tous les points de l'équateur les jours sont constamment égaux aux nuits.

Aux cercles polaires la plus longue nuit et le plus long jour sont de 24 heures.

Entre chaque cercle polaire et son pôle, la longueur du jour vers l'un des solstices, et des nuits vers l'autre solstice, va en augmentant sans cesse. Enfin au pôle un jour et une nuit d'environ six mois se partagent l'année à peu près également.

Du mouvement de la Terre autour du Soleil, résulte un mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, de telle sorte que celui-ci semble parcourir sur l'écliptique un espace angulaire précisément égal et opposé par le sommet à celui que la Terre décrit réellement.

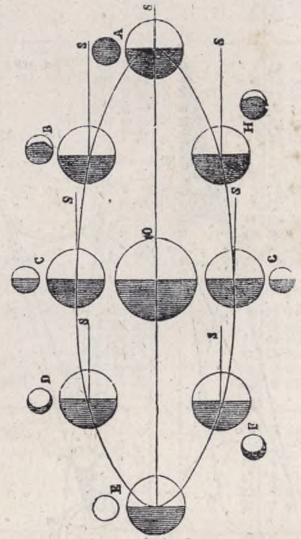
Le phénomène de l'*aberration* est une conséquence du mouvement de la terre. Il consiste en ce que toutes les étoiles paraissent décrire annuellement, autour de leur position moyenne, une petite ellipse, et il est dû à la composition de la vitesse de la lumière avec celle de la terre sur son orbite, qui est environ 10 000 fois moindre que la première.

Les *stations* et *rétrogradations* des planètes s'expliquent aussi facilement par la combinaison de leurs mouvements avec celui de la terre. Les planètes inférieures, Mercure et Vénus, ne s'éloignent jamais beaucoup du Soleil. Leur plus grande *élongation*, ou distance angulaire à cet astre, ne surpasse pas 29° pour Mercure, et 47° pour Vénus.

PHASES DE LA LUNE ET DES PLANÈTES. — La rotation de la Lune autour de la Terre, et le grand éloignement du Soleil par rapport à l'une et à l'autre, expliquent parfaitement les phases de la Lune. Sur la figure 16, O représente la Terre, et A, B, C, D, E, F, G, H sont diverses positions de la Lune dans son orbite. Au-dessus du globe lunaire on a représenté à une échelle plus petite les diverses apparences ou *phases* qui correspondent à ces positions.

Les rayons solaires peuvent être considérés comme sensiblement parallèles à une même direction S, parce que le Soleil est presque 400 fois plus éloigné de la Terre que la Lune. L'hémisphère tourné vers le soleil, c'est-à-dire à droite de la figure, sera donc éclairé en tous les points de l'orbite, et l'hémisphère opposé restera obscur. Dans la position A, lorsque la Lune est en *conjonction* avec le soleil, l'hémisphère obscur est complétement tourné vers la Terre, la Lune est *nouvelle* et invisible. Au bout de 3 jours et demi, la Lune étant en B, une portion de l'hémisphère éclairé devient visible. En C ou au *premier quartier*, nous apercevons la moitié de cet hémisphère; en D, les trois quarts; en E, la Lune est en *opposition* et *pleine*. Aux points F, G, H, elle présente successivement les mêmes apparences qu'aux points D, C, B, et elle redevient invisible en A

16



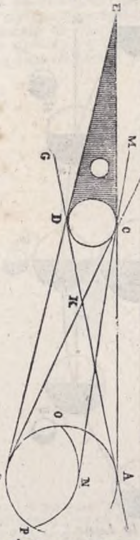
Phases de la Lune.

Pour déterminer la partie visible dans chacune de ces positions, il faut imaginer dans le globe lunaire un grand cercle perpendiculaire au rayon recteur mené du centre de la Terre au centre de la Lune. La portion éclairée de l'hémisphère placé en avant de ce plan sera seule aperçue de la Terre. On comprend facilement alors pourquoi le croissant a toujours les *cornes* à l'opposé du Soleil.

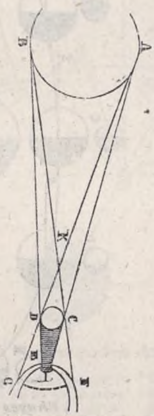
On comprend aussi pourquoi les planètes inférieures, Mercure et Vénus, sont les seules qui aient des phases complètes, et comment l'éloignement des planètes supérieures qui viennent après Mars rend insensibles les variations de grandeur dues aux phases.

ECLIPSES. — Les figures 17 et 18 donnent l'explication des éclipses. Soit AB un corps sphérique lumineux, tel que le Soleil, et CD un autre corps sphérique opaque, la Terre dans la fig. 17, la Lune dans la fig. 18. Comme on peut toujours mener à deux cercles deux systèmes de tangentes communes, savoir, l'un ECA,EDB où le croisement a lieu au delà des deux cercles; l'autre DKA,CKB, où le croisement a lieu entre les deux cercles, les points E et K sont les sommets de deux cônes tangents aux deux surfaces sphériques à la fois. La sphère CD porte vers le sommet E du premier cône une partie tout à fait obscure qui constitue l'*ombre* proprement dite, et d'aucun point de laquelle on ne peut apercevoir le corps éclairant AB. Mais entre la pointe conique qui termine cette ombre et l'autre surface conique qui a pour arêtes DG, CF, il y a un espace appelé *pénombre*, qui ne sera éclairé que par une portion du corps lumineux d'autant plus grande que l'on se rapprochera davantage des bords extérieurs de cette pénombre. Ainsi un spectateur placé en M verra la portion AONP du disque solaire, et la portion BONP lui sera cachée.

17



18



Éclipse de Lune. *Éclipse de Soleil.*

Les éclipses de Lune ne peuvent être que *totales* ou *partielles*. Celles de Soleil peuvent en outre être *annulaires*, lorsque le sommet E du cône d'ombre n'atteint pas la surface de la terre. Alors un observateur, situé dans le voisinage du prolongement de l'axe de ce cône, verra le disque entier de la Lune sur le Soleil, qui le dépassera de toutes parts.

Les éclipses reviennent à très-peu près dans le même ordre et avec les mêmes grandeurs au but de 223 *lunaisons* ou de 6585 j., 78 ou de 18 ans et 10 j. environ.

Parallaxe et réfraction. — La moitié de l'angle sous lequel le globe terrestre serait vu d'un astre, est ce que l'on appelle la *parallaxe* de cet axe. La connaissance de la parallaxe et du rayon terrestre suffit pour déterminer la distance d'un astre à la Terre. Mais à mesure que cette distance augmente, la détermination de la parallaxe présente de plus grandes difficultés. Pour le Soleil elle n'est que de 8'', 6 à un dixième de seconde près. Pour les étoiles fixes, elle est absolument insensible, non pas seulement lorsque l'on prend pour base le rayon de la Terre, mais même lorsque cette base devient le grand axe de l'orbite terrestre, qui a plus de 300 millions de kilomètres. Cependant on doit à M. Bessel la mesure de la parallaxe annuelle de la 61e du Cygne, qu'il a trouvée de 0'',3483. Cette parallaxe correspond à la distance effrayante de 592 200 fois le rayon de l'orbite terrestre, distance que la lumière ne franchit qu'en 9 ans un quart, à raison de 300000 kilomètres environ par seconde.

Pour les astres les plus rapprochés de nous, pour la Lune surtout, l'effet de la parallaxe est de les faire paraître sur l'*horizon sensible* d'un observateur placé à la surface de la Terre, moins élevés qu'ils ne le sont sur l'*horizon rationnel* passant par le centre de la Terre, et auquel les astronomes rapportent tous leurs calculs. Par un effet contraire, les rayons lumineux qui émanent de l'astre éprouvent, en entrant dans l'atmosphère terrestre, une inflexion que l'on nomme *réfraction*, en vertu de laquelle ils paraissent plus élevés sur l'horizon qu'ils ne le sont réellement. On a construit des tables à l'aide desquelles on peut corriger les hauteurs apparentes des astres au-dessus de l'horizon des effets de la parallaxe et de la réfraction.

C'est à la réfraction atmosphérique qu'est dû le *crépuscule*, qui dure tant que le Soleil n'est pas à plus de 18° au-dessous de l'horizon. A Paris, au solstice d'été, il n'y a pas de nuit à proprement parler, parce que le Soleil ne descend pas à plus de 18 ° au-dessous de l'horizon.

§ 4. *Astronomie pratique et tables astronomiques.*

Points remarquables, cercles et mesures a la surface de la sphère. — On a imaginé à la surface de la sphère, soit terrestre, soit céleste, différents points, cercles ou arcs de cercle remarquables dont l'énumération va suivre.

1° Les *pôles* ou extrémités de l'*axe terrestre* (col. 299), qui est aussi appelé quelquefois l'*axe du monde*, puisque la Terre peut être considérée comme occupant sensiblement le centre du monde stellaire. Les pôles du Ciel sont les points où l'axe du monde rencontre la sphère céleste.

2° Le *zénith* (col. 325) et le *nadir*, qui est le point diamétralement opposé. Ces deux points sont les pôles de l'*horizon rationnel* (col. 323).

3° Les *cercles verticaux* ou *azimuthaux*, ou simplement les *verticaux*, qui sont tracés à la surface de la sphère céleste en passant par le zénith et par le nadir, et qui sont par conséquent perpendiculaires à l'horizon. On mesure sur ces cercles les *hauteurs* angulaires des corps célestes au-dessus de l'horizon. Les compléments de ces hauteurs s'appellent les *distances zénithales*.

4° L'*équateur terrestre* (col. 300) dont le plan prolongé détermine dans le ciel l'*équateur céleste*, ou *cercle équinoxial*. Il partage aussi la terre en deux *hémisphères :* le *boréal*, où est située l'Europe, et l'*austral*.

5° Les *méridiens terrestres*, grands cercles passant par l'axe de la terre. Leurs prolongements dans le ciel déterminent les *méridiens célestes*, ou *cercles horaires*, dont les angles entre eux s'appellent *angles horaires*. Le méridien d'un lieu est perpendiculaire à l'horizon, et passe par le zénith. L'intersection du méridien avec un plan horizontal donne une *ligne méridienne*, dont les extrémités sont dirigées vers les points *nord* et *sud* de l'horizon (col. 299). La distance angulaire entre le point nord et le vertical d'un objet est *l'azimuth* de cet objet : dans l'hémisphère austral, c'est la distance au point sud.

6° On détermine la position d'un point à la surface de la Terre au moyen de sa *latitude* ou de sa distance à l'équateur, et de sa *longitude* ou de l'angle que son méridien fait avec un autre méridien pris pour point de départ. La latitude se compte de 0 à 90°; la longitude de 0 à 180° vers l'est ou vers l'ouest, ou de 0 à 360° en allant toujours vers l'ouest. On compte aussi la longitude en temps à raison de 24 heures pour 360°, de 15° par heure, de 15' de degré par minute de temps, de 15" de degré par seconde de temps, etc. Le méridien que nous prenons pour point de départ est celui qui passe par l'Observatoire de Paris.

7° La *déclinaison* et l'*ascension droite* sont, sur la sphère céleste, les arcs qui correspondent respectivement à la latitude et à la longitude terrestre. L'ascension droite se compte en arcs ou en temps, à partir du point de l'équateur céleste qui correspond à l'*équinoxe du printemps* (col. 323), et toujours vers l'*est*.

Les petits cercles parallèles à l'équateur sont appelés *parallèles* sur la surface du globe et *cercles de déclinaison* sur la voûte céleste.

8° Les astronomes emploient aussi les expressions de *latitude* et de *longitude célestes* pour les distances angulaires des astres à l'écliptique et à un grand cercle passant par les pôles de l'écliptique et par l'équinoxe du printemps.

Diverses espèces de temps et de révolutions. — Le *temps sidéral* est mesuré par le mouvement de rotation diurne apparent d'une étoile, ou plutôt de l'équinoxe du printemps. Cette rotation étant d'une parfaite uniformité, il en résulte que le *jour sidéral* est une unité de temps très-commode pour les astronomes. Ce jour se partage en 24 heures, divisées à leur tour en 60 minutes et 3600 secondes. Une pendule sidérale est celle qui, marchant d'un mouvement uniforme, est réglée de manière à marquer toujours 0 h. 0 m. 0 s., lorsque l'équinoxe passe au méridien.

L'intervalle entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien n'est pas constant comme pour les étoiles. D'abord il est sensiblement plus long que le jour sidéral; ensuite il varie de manière à être, vers le 21 décembre, d'une demi-minute plus long, et vers le 21 septembre d'une demi-minute environ plus court que sa propre durée moyenne. Ces variations dans la marche diurne apparente du Soleil tiennent à deux causes, savoir: à l'inégalité réelle de vitesse du mouvement de translation de la Terre dans son orbite, et à l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur. Le *jour vrai* n'est donc pas constant. Aussi a-t-on adopté pour les usages civils le *temps moyen*, dans lequel on donne au jour une durée constante égale à la moyenne de celle du jour solaire vrai.

Les astronomes comptent le jour soit sidéral, soit moyen, de 0 à 24 heures sans interruption. Le jour vrai commence au passage du Soleil au méridien.

Le jour sidéral exprimé en temps moyen n'est que de 23 h. 56 m. 4 s., 093; et le jour solaire moyen, exprimé en temps sidéral, est de 24 h. 3 m. 56 s., 555. Les étoiles passent donc au méridien chaque jour 3 m. 55 s., 907 (en temps moyen) plus tôt que la veille.

Pour convertir en temps moyen un intervalle exprimé en temps sidéral, il faut donc retrancher 9 s., 829 par heure de temps moyen; et réciproquement il faut ajouter 9 s., 856 par heure pour convertir en temps sidéral un nombre exprimé en temps moyen.

Table pour la conversion du temps sidéral en temps moyen.

		h. m.			h. m.
Janvier.	1	5 18	Juillet.	5	17 9
	6	5 0		10	16 48
	11	4 39		15	16 29
	16	4 18		20	16 10
	21	3 59		25	15 50
	31	3 20		30	15 30
Février.	5	3 0	Août.	4	15 10
	10	2 40		9	14 51
	15	2 20		14	14 31
	20	2 0		19	14 11
	25	1 41		24	13 51
Mars	2	1 21		29	13 32
Mars	7	1 1	Septembre.	3	13 12
	12	0 42		8	12 53
	17	0 23		13	12 33
	22	0 2		18	12 13
	27	23 43		23	11 53
Avril.	1	23 23		28	11 34
Avril	6	23 3	Octobre	3	11 16
	11	22 44		8	10 54
	16	22 24		13	10 34
	21	22 4		18	10 15
	26	21 45		23	9 55
Mai.	1	21 25		28	9 35
Mai.	6	21 5	Novembre.	2	9 16
	11	20 46		7	8 57
	16	20 26		12	8 37
	21	20 6		17	8 17
	26	19 46		22	7 57
	31	19 27		27	7 37
Juin.	5	19 7	Décembre.	2	7 17
	10	18 47		7	6 58
	15	18 27		12	6 38
	20	18 7		17	6 18
	25	17 47		22	5 58
	30	17 28		27	5 37
				32	5 17

La table que nous donnons ici renferme, pour différents jours de l'année, les nombres que l'on doit ajouter au temps sidéral donné au midi moyen, pour obtenir le temps moyen. Ces nombres diminuent d'environ 4 minutes par jour. Ils ne conviennent proprement qu'aux années telles que 1830, 1834, etc. dont le chiffre est pair, sans être divisible par 4. Pour les années qui viennent immédiatement après ces dernières, il faut diminuer tous les nombres d'une minute; pour les années qui viennent auparavant, il faut augmenter d'une minute; enfin pour les années *bissextiles* elles-mêmes, dont le rang est un nombre divisible par 4, on augmente de deux minutes les nombres des deux premiers mois, et on diminue d'autant les nombres de tous les autres mois.

Cette table montre, par exemple, que dans l'année 1834, au *midi moyen* du 12 mars, le temps moyen était de 42 minutes en avance sur le temps sidéral, et que par conséquent le temps sidéral était de 23 h. 18 m. à cette époque. Le 24 août, à midi moyen, le temps sidéral était de 10 h. 9 m.

Table d'équation du temps.

Janvier.	1	3′,8	Juillet.	5	4′,1
	6	6,1		10	4,9
	11	8,2		15	5,5
	16	10,0		20	5,9
	21	11,6		25	6,1
	31	13,7		30	6,1
Février.	5	14,3	Août.	4	5,8
	10	14,6		9	5,2
	15	14,5		14	4,5
	20	14,0		19	3,4
	25	13,4		24	2,2
Mars.	2	12,4		29	0,8
Mars.	7	11,3	Septembre.	3	— 0,7
	12	10,0		8	— 2,3
	17	8,6		13	— 4,0
	22	7,1		18	— 5,8
	27	5,6		23	— 7,6
Avril.	1	4,0		28	— 9,3
Avril.	6	2,5	Octobre.	3	—10,9
	11	1,1		8	—12,6
	16	— 0,2		13	—13,3
	21	— 1,3		18	—14,7
	26	— 2,3		23	—15,5
Mai.	1	— 3,1		28	—16,1
Mai.	6	— 3,6	Novembre.	2	—16,2
	11	— 3,9		7	—16,2
	16	— 3,9		12	—15,7
	21	— 3,8		17	—14,9
	26	— 3,4		22	—13,7
	31	— 2,8		27	—12,2
Juin.	5	— 2,0	Décembre.	2	—10,4
	10	— 1,1		7	— 8,4
	15	0,0		12	— 6,1
	20	1,0		17	— 3,7
	25	2,1		22	— 1,2
	30	3,1		27	1,2
				32	3,7

L'*équation du temps* est la différence qui existe entre le temps moyen et le temps vrai. Nous donnons une table où on la trouvera exprimée à un dixième de minute près pour tous les jours de l'année, de 5 en 5. Elle n'est exacte que pour les années telles que 1830, 1834, etc., qui tombent à égale distance de deux années bissextiles; mais pour les autres années l'erreur n'est que d'un petit nombre de secondes. Les nombres placés dans la 3e et dans la 4e colonne de la table doivent être ajoutés à 12 h. ou retranchés lorsqu'ils sont précédés du signe —, et le résultat de l'opération indique le temps moyen au midi vrai du jour dont il s'agit. Ainsi, au 1er janvier le temps moyen à midi vrai est 12 h. 3 m. 48 s.; au 1er mai il est de 23 h. 56 m. 54 s. Quatre fois l'an le temps moyen et le temps vrai sont égaux, et l'équation du temps est nulle : cela a lieu les 15 avril, 15 juin, 1er septembre et 25 décembre.

La route apparente du Soleil sur le Ciel étoilé est parcourue par cet astre dans une période, nommée *année sidérale*, dont la durée est de 365 j. 6 h. 9 m. 9 s., 6, en temps solaire moyen, ou de 366 j. 6 h. 9 m. 9 s., 6, en temps sidéral : c'est-à-dire qu'au bout de cet intervalle de temps le Soleil est revenu dans la même position par rapport aux étoiles.

On a donné le nom de *zodiaque* à une bande de 9° de largeur au-dessus et au-dessous de la route apparente du Soleil sur le Ciel et on l'a partagée en 12 *signes* de 30° chacun. Il ne faut pas confondre ces signes avec les constellations qui portent le même nom, mais qui n'occupent plus aujourd'hui la même place dans le Ciel.

Les passages apparents du Soleil à l'équinoxe, et son séjour alternatif dans les deux hémisphères nord et sud, déterminent nos saisons. En raison de la précession des équinoxes (col. 321), l'équinoxe rétrograde sur l'écliptique, et le Soleil le rencontre dans son mouvement progressif avant d'avoir complété sa révolution sidérale. L'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs au même équinoxe est ce que l'on appelle l'*année tropique ;* il est de 365 j. 5 h. 48 m. 49 s., 7 ou de 20 m. 19 s., 9, plus court que l'année sidérale

Le grand axe de l'ellipse décrite par la Terre a un mouvement direct de 11", 8 par an. L'intervalle entre deux retours consécutifs au périhélie est donc plus long que l'année sidérale, et porte le nom d'*année anomalistique ;* il est de 365 j. 6 h. 13 m. 49 s., 3.

Pour les autres planètes, on distingue aussi les révolutions sidérale et tropique; et l'on donne le nom de *révolution synodique* à l'intervalle de temps nécessaire pour que la planète revienne dans une même direction avec la Terre par rapport au Soleil.

QUELQUES AUTRES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES. — Le *nœud ascendant* est celui où un astre passe pour aller du sud au nord de l'écliptique.

L'*époque* est le lieu d'une planète sur son orbite, pour un instant déterminé quelconque. Ordinairement on choisit le commencement d'une année. Si par exemple la longitude de Vénus au midi moyen de Vienne, le 1er janvier 1836, est de 332 degrés, ce nombre est l'époque de Vénus pour l'année 1836.

Le mot *aphélie* indique, par opposition à *périhélie*, le point où une planète s'éloigne le plus du Soleil dans son orbite. Les deux points sont compris sous la dénomination d'*apsides*.

Les mots *apogée* et *périgée* désignent aussi la plus grande et la plus petite distance à la Terre.

On distingue certains éléments *héliocentriques* des éléments *géocentriques ;* les premiers ont le Soleil, et les seconds la Terre pour centre.

Ces définitions, et celles qui précèdent, sont plus que suffisantes pour comprendre les Tables où nous avons réuni une foule d'éléments épars dont les valeurs numériques ont été empruntées à l'ouvrage de M. Littrow, intitulé : *Die Wunder des Himmels.* Nous avons substitué les mesures métriques aux mesures anciennes, et nous avons fait disparaître la dénomination vague de *lieue*, qui peut être attribuée à bien des longueurs différentes. (Col. 335 et suiv.).

Instruments et observations. — La mesure exacte du temps est de la plus haute importance en astronomie. Les astronomes emploient à cet usage des pendules ou montres construites avec des perfectionnements particuliers, et qui portent le nom de *chronomètres*.

19

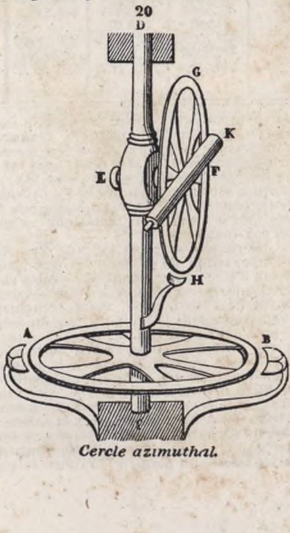
Lunette méridienne.

La *lunette méridienne* ou *instrument des passages*, représentée dans la fig. 19, sert à constater l'intervalle de temps marqué par un chronomètre entre deux retours consécutifs des mêmes étoiles au méridien, et par conséquent à connaître la marche du chronomètre par rapport au temps sidéral ou au temps moyen. Cette lunette est mobile autour d'un axe parfaitement horizontal et perpendiculaire au plan du méridien; elle ne peut donc se mouvoir que dans le méridien, et sert à observer l'instant précis où les astres atteignent le point culminant de leur cercle diurne, et par suite leurs ascensions droites.

Une simple lunette *murale*, c'est-à-dire assujettie invariablement à un mur inébranlable, peut servir à constater l'intervalle de temps écoulé entre les passages consécutifs d'une même étoile dans un cercle vertical du lieu de l'observation, et à connaître par conséquent la marche d'un chronomètre.

La fig. 20 représente le *cercle azimuthal*,

20



Cercle azimuthal.

l'un des instruments les plus employés en astronomie. La lunette K est adaptée au cercle vertical GFH, qui est mobile autour de son axe EF, et qui peut aussi tourner dans tous les azimuths autour de l'axe vertical CD. Un vernier (col. 25), placé en H, sert à lire les hauteurs observées au-dessus de l'horizon. Un cercle horizontal, fixé invariablement sur l'axe CD, donne la valeur de l'azimuth dans lequel l'observation a été faite. La lecture se fait sur ce cercle avec le vernier B.

Si l'axe CD est placé parallèlement à l'axe du monde, l'instrument prend le nom d'*équatorial*. Il peut alors servir à observer directement les ascensions droites et les déclinaisons.

Le *secteur zénithal* et le *théodolite* sont des modifications du cercle azimuthal. Le premier, destiné à des observations très-exactes des étoiles dans le voisinage du zénith, a un rayon d'une grande longueur, et un limbe d'un petit nombre de degrés. Le second est spécialement destiné aux mesures angulaires à la surface de la Terre.

Le *cercle mural*, qui ne peut tourner que dans le plan du méridien, sert à observer les plus grandes hauteurs des astres, et par suite leurs déclinaisons.

Sur mer, où les observateurs ne peuvent disposer d'un appui solide, on emploie les *instruments à réflexion*, qui jouissent de la propriété remarquable de faire connaître, par une seule observation, la distance angulaire de deux objets. La fig. 21 représente un *sextant*. F est une lunette fixée invariablement sur la branche CA. La branche mobile CE porte un miroir perpendiculaire à son plan. La branche fixe CB porte aussi un miroir D perpendiculaire au plan de l'instrument, et dont la partie supérieure est une simple glace qui laisse passer les rayons lumineux. Lorsque la branche CE est sur CA, et le vernier E à zéro, sur le limbe AB, le miroir en C est parallèle au miroir en D. Si l'on veut observer l'angle de deux objets P et Q, on fait tourner la branche mobile CE jusqu'à ce que l'œil appliqué à la lunette F voie à la fois par double réflexion l'objet P, dont l'image s'est réfléchie sur les deux miroirs, et l'objet Q, qui envoie directement ses rayons à la lunette. Alors l'angle AE est précisément la moitié de l'angle que font les rayons P et Q, de sorte que si le limbe est gradué en demi-degrés numérotés comme des degrés, la lecture donnera immédiatement l'angle observé.

21

Sextant à réflexion.

Dans tous ces instruments, l'axe de la lunette est déterminé par des fils croisés que l'on dispose convenablement à l'intérieur du tube.

Table des éléments

	SOLEIL.	MERCURE.	VÉNUS.	LA TERRE.
Diamètre, celui de la Terre étant 1. . . .	109.25	0,34	0,95	1,00
Diamètre, celui du Soleil étant 1.	1,00	0,003	0,009	0,009
Diamètre, en 1000 kilomètres.	1391	4,3	12,1	12,7
Superficie, celle de la Terre étant 1. . . .	119,36	0,12	0,90	1,00
Superficie, celle du Soleil étant 10000. . .	10000	0,1	0,7	0,8
Volume, celui de la Terre étant 1.	1304100	0,04	0,85	1,00
Volume, celui du Soleil étant 1000000. . . .	1000000	0,03	0,7	0,7
Aplatissement.	»	»	»	1:300
Masse, celle de la Terre étant 1.	355000	0,16	0,92	1,00
Masse du Soleil, celle de la planète étant 1 .	1	2025810	405871	355000
Densité, celle de la Terre étant 1.	0,25	3.61	1,07	1,00
Densité, celle de l'eau étant 1.	1,22	17,7	5,2	4,9
Chute des corps à la surface dans la première seconde, en mètres.	139,68	4,58	5,16	4,91
Diamètre apparent vu de la Terre, maximum. . .	32′34″,6	11″,6	65″,6	»
Diamètre apparent vu de la Terre, minimum. . .	31′30″,0	4″,0	9″,6	»
Vitesse moyenne par seconde du mouvement de translation, en mètres	»	49521	36228	30811
Vitesse moyenne par seconde du mouvement de rotation à l'équateur, en mètres. . .	»	163,7	464,5	461,9
Espace angulaire parcouru sur l'orbite autour du Soleil en 88 jours.	»	360°	140°,9	86°,7
Chute vers le Soleil dans une seconde de temps, en millimètres, ...	»	19,2	5,4	2,9
Demi-grand axe ou distance moyenne au Soleil.	»	0,38710	0,72333	1,00000
Distance au Soleil en millions de kilomètres, maximum. .	»	72	113	157
Distance au Soleil en millions de kilomètres, minimum. .	»	55	111	152
Distance à la Terre en millions de kilomètres, maximum. .	»	222	259	»
Distance à la Terre en millions de kilomètres, minimum. .	»	74	37	»
Excentricité.	»	0,2056	0,0068	0,0168
Inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique.	»	7° 0′,00	3° 23′,47	»
Longitude du périhélie en 1810.	»	74° 30′,23	128° 44′,30	99° 39′,37
Variation tropique séculaire du périhélie. .	»	4°,09238	1°,60217	0°,98568
Longitude du nœud ascendant en 1810. . .	»	46° 4′,02	74° 57′,30	»
Variation tropique séculaire du nœud. . .	»	1°,18	0°,88	»
Durée de la révolution sidérale, en jours. .	»	87,9693	224,7008	365,2564
Id. id. tropique, id. . .	»	87,9684	224,6955	365,24225
Id. id. synodique, id. . .	»	115,87	583,92	»
Époque 1810.	»	293° 32′,32	236° 16′,25	99° 29′,03
Mouvement tropique diurne.	»	4°,09238	1°,60217	0°,98568
Durée de la rotation sur l'axe.	25 j., 5	24 h. 5′,5	23 h. 21′,8	23 h. 56′,07

On fait usage, avec les cercles complets, du principe si simple et si utile de la répétition des angles. Le *cercle répétiteur à réflexion*, dû à Borda, est un des instruments les plus utiles aux navigateurs.

PROBLÈMES URANOGRAPHIQUES. — La trigonométrie sphérique sert à résoudre la plupart des questions que l'on peut se proposer sur les positions vraies ou apparentes des corps célestes, en supposant connues les lois de leurs mouvements réels.

Par exemple, connaissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, en déduire sa longitude et sa latitude célestes? Il s'agit de résoudre un triangle sphérique dans lequel on connaît un côté, qui est la distance des pôles de l'écliptique et de l'équateur, égale à l'obliquité de l'écliptique ; un autre côté, qui est la distance polaire ou le complément de la déclinaison : l'angle compris, égal à l'ascension droite augmentée de 90°. Le troisième côté de ce triangle est le complément de la latitude cherchée, et la longitude demandée est le complément de l'angle sphérique opposé à la distance polaire.

Cet exemple suffira pour indiquer la manière de résoudre les questions analogues d'uranographie qui dépendent de la trigonométrie sphérique. Elles offriront, pour la plupart, peu de difficulté, si l'on a soin de se conformer à cette règle pratique : « Considérer les pôles des grands cercles auxquels les questions se rapportent, plutôt que les cercles eux-mêmes. »

La détermination de la latitude d'un lieu par l'observation de la hauteur méridienne du Soleil n'exige qu'un calcul très-simple et la connaissance de la déclinaison du Soleil au moment de l'observation. Cette déclinaison est renfermée dans la table du lieu du Soleil pour tous les jours de l'année. Le signe — indique une déclinaison australe. La latitude du lieu est égale au complément de la hauteur méridienne du centre du Soleil, augmenté de la déclinaison prise avec son signe. Pour avoir la hauteur du centre, on prend la demi-somme des hauteurs des bords supérieur et inférieur du Soleil. Lorsque l'on veut opérer avec plus d'exactitude, il faut observer le thermomètre et le baromètre au moment de l'observation, *des planètes.*

MARS.	VESTA.	JUNON.	CÉRÈS.	PALLAS.	JUPITER.	SATURNE.	URANUS.
0,56	0,03	0,18	0,20	0,26	11,00	9,76	4,23
0,005	0,003	0,001	0,002	0,002	0,100	0,091	0,040
7,1	0,4	2,3	2,5	3,3	140	124	53,9
0,32	0,001	0,03	0,04	0,07	121,12	95,17	17,92
0,3	0,001	0,03	0,03	0,05	106	72	15
0,18	0,00004	0,005	0,008	0,017	1333	928	76
0,12	»	»	»	»	1100	600	60
»	»	»	»	»	1:13	1:11	»
0,13	»	»	»	»	340	93	17
2546320	»	»	»	»	1054	3512	21000
0,70	»	»	»	»	0,25	0,20	0,25
3,3	»	»	»	»	1,1	0,5	1,0
2,05	»	»	»	»	12,60	4,91	4,74
27″,5	0″,5	3″,3	2″,3	4″,2	49″,2	21″,5	4″,3
3″,7	0″,2	0″,7	0″,9	1″,0	29″,9	15″,5	3″,5
24961	20043	18854	18524	18516	13510	9976	7033
259,2	»	»	»	»	12691,5	10882,1	7032,8
46°,1	23°,9	19°,9	18°,8	18°,8	7°,3	2°,9	1°,0
1,1	0,45	0,45	0,45	0,45	0,11	0,023	0,007
1,52369	2,3632	2,6704	2,7672	2,7683	5,20116	9,53781	19,18318
258	398	518	462	533	843	1558	3105
214	333	308	394	323	766	1392	2829
400	533	652	600	667	963	1652	3141
52	170	141	230	156	585	1193	2578
0,0932	0,1838	0,2544	0,0785	0,2440	0,0482	0,0562	0,0467
1° 51′,08	7° 7′,78	13° 4′,43	10° 37′,50	34° 37′,47	1° 18′,85	2° 29′,63	0° 46′,43
332° 33′,82	250° 19′,00	53° 16′,0	146° 44′,0	121° 22′,0	11° 17′,80	89° 15′,18	167° 29′,62
0°,52407	0°,27120	0°,22591	0°,21414	0°,21400	0°,08313	0°,03350	0°,01177
48° 3′,8	103° 10′,2	171° 9′,83	80° 56′,92	172° 33′,9	98° 30′,07	112° 0′,92	73° 53′,58
0°,75	1°,39	1°,39	1°,39	1°,39	0°,96	0°,77	0°,39
686,9796	1327,7	1593,8	1681,4	1682,5	4332,5963	10758,9698	30688,7127
686,9297	1327,4	1593,6	1681,1	1682,2	4330,6105	10746,7324	30589,3573
779,88	505,0	474,0	466,5	466,5	398,8	378,0	369,7
346° 28′,58	105° 44′,90	95° 21′,20	61° 12′,53	49° 9′,38	25° 24′,03	244° 37′,53	216° 27′,98
0°,52407	0°,27120	0°,22591	0,21414	0°,21400	0°,08313	0°,03350	0°,01177
24 h. 39′,3	»	»	»	»	9 h. 55′,7	10 h. 16′,0	»

et tenir compte de l'effet de la réfraction diminué de celui de la parallaxe. — La table (Col. 343) que nous empruntons à M. Littrow se rapporte au midi de Vienne; on la modifiera facilement pour un lieu quelconque dont on connaîtra la position par rapport à cette ville. Il faut aussi remarquer que cette table ne s'applique qu'aux années, telles que 1827, 1831, etc., qui précèdent immédiatement les bissextiles. Pour les années telles que 1830, 1834, etc., il faut augmenter tous les nombres de la table de 0s,3. Pour les années qui suivent immédiatement les bissextiles, comme 1829, 1833, etc., il faut augmenter les nombres de 0s,5. Pour les bissextiles elles-mêmes, comme 1832, 1836, etc., il faut diminuer de 0s,3 les nombres des deux premiers mois, et augmenter de 0s,8 ceux des mois suivants. Enfin, dans la dernière colonne, au lieu des corrections 0s,3, 0s,5, 0s,8, il faut substituer, dans le même ordre, 1 m., 2 m. et 3 m.

GNOMONIQUE. — On désigne ainsi l'art de tracer les cadrans solaires sur une surface quelconque.

Le style, destiné à projeter l'ombre doit être parallèle à l'axe de la terre, et, par conséquent, il est situé dans le méridien du lieu et fait avec l'horizon un angle égal à la latitude. Une fois cette position donnée au style, le problème se réduit à chercher les intersections de 24 plans passant par cet axe et également inclinés entre eux, avec la surface sur laquelle on veut tracer le cadran. Il dépend donc de la géométrie descriptive (voy. col. 177). Nous donnerons seulement ici le tracé du cadran horizontal, l'un des plus usités et des plus simples.

On commencera par tracer une méridienne. Pour cela, on fixera une tige verticale sur un plan horizontal bien dressé; on tracera des cercles de différents rayons sur ce plan, en prenant le pied de la tige comme centre, et on marquera sur chacun de ces arcs les deux points où l'ombre de l'extrémité de la tige y aura été projetée avant et après midi, aux environs des solstices. La droite qui passe par le pied de la tige et par la position moyenne entre les milieux de tous ces arcs est la méridienne cherchée.

Cela posé, soit (fig. 22) CS′ cette méridienne, CS le rabattement du style sur le plan hori-

Table des éléments des satellites de Jupiter.

Désignation des satellites à partir de la planète.	I	II	III	IV
	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.
Durée des révolutions tropiques.	1 18 27,55	3 13 13,70	7 3 42,55	16 16 32,15
Distances moyennes au centre de Jupiter — en rayons de l'orbite de la Terre. . . .	0,00258	0,00410	0,00654	0,0115
Distances moyennes au centre de Jupiter — en rayons de Jupiter. .	5,698	9,066	14.462	25,436
Inclinaison des orbites sur celle de Jupiter. .	3° 18′	3° 46′	3° 26′	2° 36′
Longitude du nœud ascendant sur l'écliptique.	314° 40′	313° 45′	314° 24′	316° 39′
Vrai diamètre en kilomètres.	4148	3408	6000	4193
Diamètre apparent — du centre de Jupiter. . .	33′ 16″	17′ 13″	19′0″	7′32″
Diamètre apparent — moyen vu de la terre. . .	1″,4	1″,1	2″,0	1″.4
Masse, celle de Jupiter étant 1.	0,00002	0,00002	0,00009	0,00004
Densité, celle de Jupiter étant 1.	0,7	1,7	1,2	1,7
Chute des corps à la surface dans la première seconde en mètres.	0.26	0,52	0,65	0,62
Chute vers Jupiter en une seconde, en mètres.	3,64	1,43	0,55	0,19
Chemin parcouru dans une heure, sur l'orbite, en kilomètres.	65190	51855	40743	31113

Table des éléments des satellites de Saturne.

Désignation des satellites.		II	III	IV	V	VI	VII
	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.
Durée de la révolution tropique.	0 22 37,5	1 8 53,1	1 21 18,4	2 17 44,8	4 12 25,2	15 22 41,2	79 7 53,7
Distance moyenne au centre de Saturne — en rayons de l'orbite terrestre. . .	0,00132	0,00170	0,00201	0,00259	0,00361	0,00832	0,02416
Distance moyenne au centre de Saturne — en rayons de Saturne.	3,185	4,088	4,833	6,222	8,666	20,000	58,050
Inclinaison de l'orbite sur celle de Saturne. . . .	28° 34′	28° 34′	28° 34′	28° 34′	28° 34′	28° 34′	22° 42′
Diamètre en kilomètres. .	—	—	770	770	1896	5037	2874

Table des éléments des satellites d'Uranus.

Désignation des satellites	I	II	III	IV	V	VI
	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.	j. h. m.
Durée de la révolution tropique. . .	5 21 25	8 17 1	10 23 4	13 11 5	38 1 49	107 16 40
Distance moyenne au centre d'Uranus — en rayons de l'orbite terrestre. .	0,00237	0,00308	0,00358	0,00411	0,00823	0,01608
Distance moyenne au centre d'Uranus — en rayons d'Uranus.	13,131	17,039	19,861	22,776	45,550	89,043

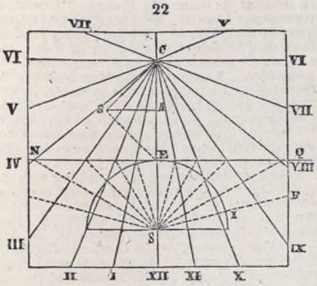
zontal, de telle sorte que l'angle SCA est égal à la latitude, SE perpendiculaire à CS, NQ, perpendiculaire à CS′, ES′ égal à ES. On divise en 12 parties égales la demi-circonférence qui a pour centre S′ et pour rayon S′E′; par les points de division, on mène des sécantes que l'on prolonge jusqu'à la tangente NQ; les lignes horaires C I, C II, C III, etc., partent toutes du point C et aboutissent et passent par les points où les sécantes aboutissent à cette tangente.

Ainsi, lorsque le style CS aura été redressé dans le plan méridien, son ombre, à 5 heures du soir, sera sur la ligne marquée C V, à gauche de la figure; à cinq heures du matin elle sera sur le prolongement de la même ligne, à droite de la figure.

§ 5. *Indications historiques et bibliographiques.*

Plus de 2000 ans avant notre ère, l'astronomie était cultivée en Chine comme la base des cérémonies religieuses.

22



Cadran solaire horizontal.

Les Chaldéens avaient, dit-on, des observations remontant à 19 siècles avant Alexandre, et qu'Aristote, si l'on en croit Simplicius, se fit communiquer par Callisthènes. La période de 223 mois lunaires qu'ils appelaient *Saros* n'a pu être découverte par eux qu'après une longue série d'observations.

C'est vers le quatorzième siècle avant l'ère chrétienne que les Grecs partagèrent le Ciel en constellations.

On ignore l'époque à laquelle ont été donnés les noms aux constellations des signes du zodiaque. Ces noms sont contenus dans les deux vers suivants :

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

et leurs significations françaises sont le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, l'Ecrevisse ou le Cancer, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons.

Ces dénominations semblent se rapporter, les unes au mouvement du Soleil, les autres à l'agriculture et au climat du peuple chez lequel le zodiaque a pris naissance.

L'Egypte et l'Inde ont eu des connaissances avancées en astronomie, mais dont on ignore l'origine.

Thalès, né à Milet 640 ans avant J.-C., fut le premier Grec qui prédit et expliqua les éclipses du Soleil et de la Lune. Il avait puisé une partie de son savoir chez les prêtres égyptiens.

Pythagore, né à Samos vers l'an 590 avant notre ère, fut d'abord disciple de Thalès, et visita ensuite l'Egypte et l'Inde. Il fonda une école célèbre où il enseigna le double mouvement de la Terre, que son disciple Philolaüs exposa publiquement. Les Pythagoriciens connaissaient le vrai système du monde, le mouvement des comètes autour du Soleil, etc., etc.

Méton et Euctémon observèrent le solstice d'été l'an 432 avant J.-C. Cette observation, celle que Pythéas de Marseille fit, avec un gnomon, vers le temps d'Alexandre, et celles de Tcheou-Kong en Chine 1100 ans avant notre ère (faites aussi avec un gnomon), prouvent la diminution de l'obliquité de l'écliptique.

L'école d'Alexandrie est célèbre par ses astronomes, savoir : Aristille et Timocharis, qui fleurirent 300 ans avant notre ère ; Aristarque de Samos, qui essaya de déterminer, par un procédé ingénieux, mais inexact en pratique, le rapport des distances du Soleil et de la Lune ; Eratosthènes, qui tenta de mesurer la Terre ; dans le 2e siècle avant J.-C., Hipparque, le plus habile astronome de l'antiquité, qui découvrit la précession des équinoxes, une partie des inégalités des mouvements apparents du Soleil et de la Lune ; Sosygène que Jules César fit venir d'Alexandrie pour la réforme du calendrier romain ; enfin, vers l'an 130 de notre ère, Ptolémée qui, dans son grand ouvrage intitulé *Almageste*, essaya de donner un système complet d'astronomie. Suivant lui, la Terre est au centre de l'univers, et tous les astres tournent autour d'elle, d'abord chaque jour, ensuite dans des espaces de temps égaux à ceux de leurs révolutions apparentes, suivant des courbes épicycloïdales, uniquement engendrées par des cercles qui roulent les uns sur les autres. Ce système a subsisté pendant 14 siècles ; aujourd'hui même, l'Almageste doit être considéré comme un dépôt précieux des connaissances de l'antiquité.

L'école d'Alexandrie subsista encore pendant 5 siècles après Ptolémée, mais sans rien ajouter à ses découvertes.

Les Arabes cultivèrent l'astronomie avec succès. M. Sédillot a prouvé récemment que, dès l'an 975, Aboul-Wéfa avait constaté à Bagdad l'inégalité lunaire connue sous le nom de *variation*, et dont la découverte est généralement attribuée à Tycho-Brahé.

Les Mexicains et les Péruviens observaient avec soin les ombres du gnomon aux solstices et aux équinoxes. Les premiers connaissaient l'année tropique plus exactement qu'Hipparque, et on est porté à croire que cette détermination leur est venue de l'ancien continent.

C'est à Copernic, né à Thorn en Pologne le 19 février 1473, que commencent la rénovation astronomique et l'exposition du véritable système du monde consignées dans le beau livre *De revolutionibus orbium cœlestium*. Copernic ne jouit pas du succès de son ouvrage, et mourut presque subitement à l'âge de 71 ans, après en avoir reçu le premier exemplaire.

Galilée, né à Pise en 1564, mort près de Florence en 1642, fut, en Italie, l'un des plus ardents promoteurs du système de Copernic. Ayant construit une lunette d'approche, sur le récit qui lui avait été fait de cette invention récente, il découvrit les satellites et les bandes de Jupiter, les phases de Vénus, les taches du Soleil, etc. Les persécutions qu'il eut à endurer de la part de l'inquisition, qui regardait mal à propos le mouvement de la Terre comme contraire à la Bible, troublèrent les dernières années de ce grand homme.

Tycho-Brahé, Norvégien, mort à Prague en 1601, fut l'un des plus grands observateurs des temps modernes. Il fut moins heureux dans le système du monde où il essaya de combiner les idées de Ptolémée avec celles de Copernic.

Képler, célèbre à si juste titre par la découverte des lois qui portent son nom, naquit en 1571 dans le duché de Wurtemberg. Il vécut et mourut dans la misère, supérieur à son siècle, peu compris de ses contemporains. C'est de lui que sont ces sublimes paroles. « Je publie mon livre ; il sera lu par l'âge présent ou par la postérité, peu m'importe : il pourra attendre son lecteur ; Dieu n'a-t-il pas attendu six mille ans un contemplateur de ses œuvres ! »

Huygens suivit de près Képler et Galilée ; il découvrit ou plutôt expliqua les apparences de l'anneau de Saturne et un des satellites de cette planète.

Table du lieu du soleil pour tous les jours de l'année.

JOUR.		LONGITUDE.	DÉCLINAISON.	ASCENSION DROITE. EN ARC.	ASCENSION DROITE. EN TEMPS.
					h. m.
Janvier.	1	280°,3	−23°,1	281°,2	18 45
	11	290 ,6	−21 ,9	292 ,2	19 29
	21	300 ,7	−20 ,0	302 ,9	20 12
	31	310 ,9	−17 ,5	313 ,3	20 53
Février.	10	320 ,9	−14 ,5	323 ,4	21 34
	20	331 ,1	−11 ,1	333 ,1	22 12
Mars.	2	341 ,1	− 7 ,4	342 ,6	22 50
	12	351 ,0	− 3 ,5	351 ,8	23 27
	22	1 ,0	0 ,4	1 ,0	0 4
Avril.	1	10 ,9	4 ,3	10 ,0	0 40
	11	20 ,7	8 ,1	19 ,2	1 17
	21	30 ,5	11 ,7	28 ,4	1 54
Mai.	1	40 ,2	14 ,9	37 ,8	2 31
	11	49 ,8	17 ,7	47 ,4	3 10
	21	59 ,5	20 ,1	57 ,3	3 49
	31	69 ,1	21 ,8	67 ,4	4 30
Juin.	10	78 ,7	23 ,0	77 ,7	5 11
	20	88 ,2	23 ,4	88 ,1	5 52
	30	97 ,7	23 ,2	98 ,5	6 34
Juillet.	10	107 ,2	22 ,3	108 ,8	7 15
	20	116 ,8	20 ,8	118 ,9	7 56
	30	126 ,3	18 ,7	128 ,8	8 35
Août.	9	136 ,0	16 ,0	138 ,5	9 14
	19	145 ,3	13 ,0	147 ,9	9 52
	29	155 ,2	9 ,6	157 ,1	10 28
Septembre.	8	164 ,9	5 ,9	166 ,1	11 5
	18	174 ,6	2 ,1	175 ,1	11 41
	28	184 ,4	− 1 ,9	184 ,1	12 17
Octobre.	8	194 ,3	− 5 ,7	193 ,2	12 53
	18	204 ,2	− 9 ,4	202 ,5	13 30
	28	214 ,2	−12 ,9	212 ,0	14 8
Novembre.	7	224 ,2	−16 ,1	221 ,8	14 47
	17	234 ,3	−18 ,9	231 ,9	15 28
	27	244 ,4	−21 ,0	242 ,5	16 10
Décembre.	7	254 ,5	−22 ,6	253 ,3	16 53
	17	264 ,7	−23 ,4	264 ,3	17 37
	27	274 ,9	−23 ,3	275 ,4	18 22

Newton, par sa découverte de la pesanteur universelle, publiée en 1687 dans ses *Philosophiæ naturalis Principia mathematica*, donne le germe des méthodes les plus parfaites de l'astronomie moderne.

L'ancienne Académie des Sciences de Paris, où brillent les noms de Picard, d'Auzout, de Dominique Cassini, de Lacaille, de Lemonnier, de Bouguer, de La Condamine, de Clairaut, de d'Alembert, de Lalande, de Borda, etc. a rendu de grands services à l'astronomie; en Angleterre, Flamsted, Halley, Bradley, W. Herschell; en Allemagne, Tobie Mayer, se sont illustrés par leurs découvertes. Mais c'est à la France surtout, et notamment à Lagrange et à Laplace, que les lois de la mécanique céleste doivent leurs développementc les plus utiles et les plus approfondis.

Sans nous arrêter aux travaux plus recents, nous citerons, sur l'astronomie, les ouvrages élémentaires de M. Biot (3e édit.), de Delambre, de M. Francœur, de M. J. Herschel (traduction de M. Cournot), de Littrow (*les Merveilles du Ciel*, en allemand), et les notices dont M. Arago a enrichi l'*Annuaire des Longitudes*. Lalande et Delambre ont publié, chacun en 3 vol. in-4°, des traités spéciaux fort estimés. L'*Exposition du Système du Monde* et la *Mécanique céleste* de Laplace peuvent, dans des genres différents, être citées en première ligne. Le premier de ces ouvrages contient une histoire de l'astronomie. Bailly et Lalande ont aussi écrit sur l'histoire de cette science; et la *Bibliographie astronomique* que celui-ci a publiée est un répertoire unique en son genre. Enfin, pour ce qui concerne les travaux les plus récents, nous renverrons aux journaux scientifiques, et notamment à la *Correspondance* de M. de Zach, aujourd'hui terminée, et aux *Astronomische Nachrichten* dont la publication a toujours lieu sous la direction de M. Schumacher, habile astronome, à Altona.

Table des éléments de la Lune.

Révolution sidérale..	27 j. 7 h. 43, m. 192
— tropique..	27 7 43, 078
— synodique.	29 12 44, 047
Inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique..	5° 8',78
Parallaxe horizontale moyenne à l'équateur.	0° 57',01
Révolution sidérale des nœuds.	6793 j. 6 h. 51 m., 65
— tropique des nœuds.	6798 4 44, 93
Diamètre moyen apparent { vu de la Terre.	0° 31' 8",0
Diamètre moyen apparent { vu du Soleil.	0° 0' 9",3
Révolution sidérale des apsides.	3232 j. 13 h. 37 m., 25
— tropique des apsides.	3231 11 4, 12
Diamètre moyen apparent de la Terre vu de la Lune..	1° 54', 02
Excentricité de l'orbite en parties du demi-grand axe.	0,0550
— en kilomètres	30,500
— en rayons terrestres.	4,791
Distance moyenne au centre de la Terre en rayons terrestres.	60,296
— en kilomètres.	383,856
— en rayons de l'orbite terrestre.	0.00251

Rapport de la Lune à la Terre :

En diamètre.	3 : 11
En superficie.	1 : 14
En volume.	1 : 50
En masse..	1 : 70
En densité.	2 : 3

Chute des corps à la surface de la Lune dans la première seconde. . . . . 0^m, 866

VIII. MÉTÉOROLOGIE ET PHYSIQUE DU GLOBE.

PRÉLIMINAIRES. — La météorologie s'occupe des phénomènes de l'atmosphère; la physique du globe, de ceux de la terre qui sont en relation avec les lois de la physique. Ces derniers se rattachant presque tous aux phénomènes météorologiques, nous présenterons simultanément l'ensemble des faits positifs qui sont du domaine de ces deux sciences.

L'atmosphère se compose d'air, de vapeur d'eau et d'autres gaz.

L'air est principalement composé de deux gaz, l'*oxygène* et l'*azote*. Il résulte des belles recherches publiées récemment par MM. Dumas et Boussingault que les proportions de ces deux gaz sont constantes à toutes les hauteurs et de 2301 d'oxygène en poids pour 7699 d'azote; ou bien de 2081 d'oxygène en volume, pour 7919 d'azote.

L'air contient aussi un peu d'acide carbonique dont la quantité varie entre 0,04 et 0,08 pour cent, suivant les saisons et même suivant l'heure du jour : elle est toujours plus notable en été, suivant Th. de Saussure.

MM. Dalton, de Humboldt et Boussingault ont découvert un peu d'hydrogène dans l'atmosphère; Driesen et Baruel, des traces d'acide chlorhydrique.

La quantité de vapeur d'eau est extrêmement variable, suivant une foule de circonstances; elle est souvent très-considérable.

D'après les calculs de M. Biot, la hauteur de l'atmosphère ne saurait dépasser 40000 mètres.

Son poids moyen, au niveau de la mer, est égal à celui d'une colonne de mercure longue de $0^{m},762$.

En prenant pour unité la densité de l'air, les poids proportionnels de ses différents composants sont, d'après Berzelius,

Azote,	572^{mm}, 70.
Oxygène,	176 , 50.
Acide carbonique,	0 , 90.
Vapeur d'eau,	7 , 90.
Hauteur bar. moyenne,	758^{mm}, 00.

§ 1. *Température de l'air.*

MESURE DE LA TEMPÉRATURE. — Le soleil est le grand agent qui modifie la température de l'air, non-seulement suivant les saisons, mais encore suivant l'heure du jour. La température propre de la terre a une action très-faible, et que nous pouvons complétement négliger.

On mesure la température de l'air au moyen d'un thermomètre à mercure à très-petite cuvette, que l'on suspend en plein air, à l'ombre. Si l'on veut obtenir un résultat plus exact, on a soin de le tourner en fronde.

Le thermomètre n'indique la température de l'air que d'une manière approximative; les rayonnements de la terre, des nuages, des corps voisins, de celui même de l'observateur, modifient les indications de l'instrument, qui ne marque jamais que la moyenne de toutes ces influences.

La température variant à chaque instant du jour, on appelle *moyenne diurne* le nombre obtenu quand on divise la somme des degrés par le nombre des observations faites pendant l'intervalle de vingt-quatre heures.

MARCHE DIURNE DE LA TEMPÉRATURE. — Le minimum de la variation diurne a lieu quelques instants (environ une demi-heure) avant le lever du soleil.

Le maximum est vers deux heures de l'après-midi : en été un peu plus tôt, en hiver un peu plus tard. Lorsque le soleil est au-dessus de l'horizon, il échauffe la terre et les couches d'air qui sont en contact avec elle. Une partie de cette chaleur pénètre dans le sol, l'autre rayonne vers les espaces célestes. Tant que le soleil n'a pas dépassé le méridien, la terre reçoit à chaque instant une quantité de chaleur supérieure à celle qu'elle perd par le rayonnement, et sa température augmente même après que le soleil a passé par le méridien; mais quand cet astre commence à se rapprocher de l'horizon, alors la quantité de chaleur perdue par le rayonnement est supérieure à celle qu'elle reçoit, la terre se refroidit. Dès que le soleil est couché, la source calorifique n'agissant plus, la terre rayonne vers les espaces planétaires, la température baisse jusqu'à ce que le matin ramène le soleil sur l'horizon.

Pour estimer la moyenne diurne, on peut se dispenser d'observer d'heure en heure ; il suffit de noter la température à quatre heures du matin et du soir et à dix heures du soir et du matin. La moyenne de ces quatre observations diffère très-peu de la moyenne réelle de vingt-quatre heures. On peut aussi choisir les heures de six heures du matin, deux heures de l'après-midi et dix heures du soir.

Le *thermométrographe* ou *thermomètre à index* nous fournit un moyen plus simple pour déterminer cette température moyenne. Puisqu'il nous donne chaque jour le maximum et le minimum de la température, il suffit de prendre la différence de ces deux quantités, de les multiplier par un coefficient qui varie dans chaque mois de l'année et qui nous est donné dans la table suivante, et d'ajouter le produit à la température minimum.

Table pour calculer la température moyenne du jour d'après les indications du thermométrographe.

MOIS.	FACTEUR CONSTANT.
Janvier,	0,507
Février,	0,476
Mars,	0,475
Avril,	0,466
Mai,	0,459
Juin,	0,453
Juillet,	0,462
Août,	0,451
Septembre,	0,433
Octobre,	0,447
Novembre,	0,496
Décembre,	0,521

Je suppose qu'on veuille connaître la température moyenne d'un jour du mois d'août. Le thermométrographe indique comme maximum 22°,32, comme minimum 10°,26 ; la différence est 12°,06.

$$\text{Or } 12°,06 \times 0,451 = 5°,44$$

d'où la température moyenne sera

$$10°,26 + 5°,44 = 15°,70.$$

La moyenne mensuelle s'obtient en divisant les moyennes diurnes par le nombre des jours de chaque mois.

Marche annuelle de la température. — En comparant les moyennes mensuelles du même mois dans différentes années, on reconnaît qu'elles diffèrent sensiblement entre elles. Mais la moyenne de l'année qu'on obtient en divisant par 12 la somme des moyennes mensuelles, ne diffère guère dans un lieu donné.

Hors des tropiques, la marche annuelle de la température est la suivante. Depuis le milieu de janvier elle s'accroît d'abord lentement, ensuite rapidement en avril et mai, et atteint son maximum vers la fin de juillet. Puis elle baisse d'abord insensiblement, plus vite en septembre et octobre, et elle atteint son minimum vers le milieu de janvier.

Cette marche si régulière est une conséquence de la longueur des jours, de la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon et des changements plus ou moins rapides de sa déclinaison.

Tant que la terre s'échauffe plus pendant le jour qu'elle ne se refroidit pendant la nuit, la température est croissante: le maximum a lieu après le solstice d'été lorsque la perte et le gain se compensent.

Saisons météorologiques. — La division météorologique des saisons diffère de la division astronomique : elle se règle d'après la température moyenne des mois. La voici :

Hiver. (Décembre, janvier, février.)
Printemps. (Mars, avril, mai.)
Été. (Juin, juillet, août.)
Automne. (Septembre, octobre, novembre.)

§ 2. *Des Vents.*

Définition. — Tant que la densité de l'air est égale partout, l'équilibre n'est point troublé et l'air ne se met point en mouvement. Mais s'il devient plus léger sur un point, il s'élève; et les couches plus denses qui se précipitent pour remplir le vide ainsi formé, donnent naissance à des *courants aériens* connus sous le nom de *vents*.

On désigne les vents suivant le point de l'horizon d'où ils viennent, et on divise l'horizon en huit parties. Nord (N.), nord-est (N.-E.), est (E.), sud-est (S.-E.), sud (S.), sud-ouest (S.-O.), ouest (O.) et nord-ouest (N.-O.) (voyez les figures). On peut subdiviser chacune de ces parties pour désigner plus rigoureusement la direction du vent. Ainsi, si le vent souffle d'un point intermédiaire entre le nord et le nord-est, on dira que le vent vient du nord-nord-est, ce qui s'écrit N.-N.-E. S'il souffle entre l'ouest et le sud-ouest, c'est un vent de l'ouest-sud-ouest ou O.-S.-O.

Veut-on une indication encore plus précise, alors on fait usage des divisions sexagésimales du cercle. Ainsi lorsqu'un vent part d'un point de l'horizon situé à 24° du nord vers l'ouest (voy. la fig. 1), on écrira N. 24 O.

Les girouettes nous indiquent la direction des courants inférieurs ; les nuages, celle des vents élevés.

Vitesse du vent. — Notre expérience journalière nous apprend qu'elle varie beaucoup. Il y a tous les degrés intermédiaires entre un doux zéphyr et un ouragan.

Il est difficile de la mesurer exactement: ordinairement c'est au moyen de la pression contre un ressort, soit en comptant le nombre de révolutions des ailes d'un petit moulin dans un temps donné. Ces instruments se nomment des *anémomètres*.

Voici les différents degrés de vitesse des vents qu'on distingue en marine, et le nombre de milles marins (1850 m.) qu'ils parcourent en une heure.

Vitesse du vent.

NOM DU VENT SUIVANT SA FORCE.	MILLES PARCOURUS EN UNE HEURE.
Petite brise,	4,5
Jolie brise,	8,0
Brise fraîche,	16,0
Grand frais,	36,0
Coup de vent,	62,0
Tempête,	88,0
Ouragan,	120,0

La tempête du 29 novembre 1836, une des plus violentes dont on ait gardé le souvenir, était à Londres à dix heures du matin, à La Haye à une heure, à Emdem à quatre heures, à Hambourg à six heures, et à Stettin à neuf heures et demie du soir. Elle parcourait environ 36 mètres par seconde. Un ouragan a parcouru 3 000 milles en six jours; un autre 2 300 dans le même espace de temps. La direction dans laquelle un ouragan souffle n'est souvent pas la même que celle dans laquelle il se meut. L'ouragan du 23 décembre 1811, qui désola les États-Unis, avançait du sud au nord, et le vent soufflait du nord.

Les météorologistes ont admis, pour la force du vent, quatre degrés, qu'ils désignent par les chiffres 1, 2, 3, 4, suivant que le vent agite seulement les feuilles des arbres, qu'il courbe les petites branches, qu'il fait fléchir les grosses branches, et enfin qu'il les brise et déracine les arbres. La vitesse des courants élevés peut s'estimer par la rapidité avec laquelle l'ombre d'un nuage court sur le sol.

Le même vent ne règne pas dans toute la hauteur de l'atmosphère. Ainsi on a vu les nuages rester immobiles ou suivre une direction contraire à celle du vent qui régnait à la surface de la terre.

Direction moyenne du vent. — Pour l'obtenir, on compare le rapport des vents d'est (N.-E., E., S.-E) aux vents d'ouest (N.-O., O., S.-O), et celui des vents du sud (S.-O., S., S.-E.) aux vents du nord (N.-O., N., N.-E.). On a trouvé de cette manière, pour nos contrées, les rapports suivants.

Fréquence relative des vents en Europe.

	RAPPORT DES VENTS O. AUX VENTS E.	RAPPORT DES VENTS S. AUX VENTS N.
Angleterre,	1,77	1,33
France et Pays-Bas,	1,52	1,03
Sud de l'Allemagne,	1,69	1,18
Nord de l'Allemagne,	1,69	1,32
Danemarck,	1,54	1,31
Suède,	1,61	1,44
Russie et Pologne,	1,66	0,97

Quant aux saisons, MM. Schouw et Kæmtz ont trouvé pour l'Europe les résultats suivants : 1° en hiver, la direction du vent est plus méridionale que dans les autres saisons; 2° les vents d'est se font sentir en mars et en avril; 3° en été les vents soufflent principalement de l'ouest et tournent souvent au nord; 4° en automne les vents du sud deviennent dominants, surtout en octobre.

Causes des vents. — Les vents sont un effet de la différence de température sur deux points du globe. De deux contrées voisines, si l'une est plus échauffée que l'autre, il y a un vent inférieur qui va des parties plus froides vers le point échauffé, et un courant supérieur qui se dirige du point échauffé vers les parties plus froides.

Ouvrez, en hiver, une chambre échauffée qui donne dans une pièce froide, et placez deux bougies allumées au bas et au haut de la porte, la direction des flammes fera voir qu'il y a un courant inférieur d'air froid qui entre dans la chambre, et un courant supérieur d'air chaud qui en sort.

Dans les pays de montagnes, les vents sont plus violents; de même que l'eau d'un fleuve offre, à pente égale, des courants plus rapides sur un lit hérissé de rochers que sur une surface unie.

Brises de terre et de mer. — Sur les côtes, lorsqu'il n'y a point de vents généraux, il s'élève une brise de mer vers dix ou onze heures du matin, et une brise de terre après le coucher du soleil. Leur effet est augmenté ou diminué si des vents généraux soufflent dans le même sens ou en sens contraire.

Vents alisés. — A 30 degrés de distance de chaque côté de l'équateur terrestre, on trouve des vents inférieurs constants qui soufflent du N.-E. dans l'hémisphère boréal, du S.-E. dans l'hémisphère austral; leur force diminue à mesure qu'on s'approche de la ligne. Ainsi, dans l'Océan Pacifique le vent de N.-E. règne du 2e au 25e degré de latitude boréale; celui de S.-E., du 2e au 21e de latitude australe. Dans la mer Atlantique, le vent de N.-E. va de 8° lat. N. à 28 ou 30 lat. N.: celui de S.-E., de 3° lat. N. à 28° lat. S. Ces limites varient suivant les saisons. Entre ces courants on trouve la région des calmes. Voici un tableau des limites voisines de l'équateur.

Limites des vents alisés.

	Limite du vent alisé boréal.	Limite du vent alisé austral.	Largeur de la zone intermédiaire.
Hiver. . .	5° 45' N.	2° 25' N.	3° 20'
Printemps.	5° 47'	1° 45'	4° 2'
Eté . . .	11° 20'	3° 15'	8° 5'
Automne .	9° 55'	3° 15'	6° 40'
Année. . .	8° 12'	2° 20'	5° 52'

Dans la région supérieure de l'air entre les tropiques il règne un vent de S.-O. constant; ce vent règne presque constamment sur le pic de Ténériffe. De la poussière volcanique lancée dans une éruption a été transportée de l'ouest à l'est, de l'île Saint-Vincent à la Barbade. Le 25 février 1835, les rues de Kingston (Jamaïque) furent remplies par les cendres projetées par le volcan de Cosiguina, dans l'état de Guatimala, qui est au S.-O. de l'île.

Vers le 30° de latitude, le courant de S.-O. s'abaisse à la surface de la terre, et il en résulte ce vent presque constant qui favorise les voyages des États-Unis en Europe: 23 jours sont, d'après une moyenne de 6 années, le temps nécessaire pour aller de New-York à Liverpool; pour aller de Liverpool à New-York la moyenne est de 40 jours. Sur la ligne de contact de ce vent et de l'alisé il y a souvent des calmes, des vents changeants et des coups de vent. Ce courant se propage jusqu'en Europe, et cause la prédominance des vents de S.-O. qu'on y remarque (Voy. le Tableau, colonne 348). Après eux, ce sont ceux de N.-E. qu'on observe le plus souvent dans les latitudes moyennes.

Les moussons sont des vents qui règnent dans l'Océan Indien et dont la direction varie dans les différentes saisons. Un tableau dressé par M. Kæmtz, d'après de longues séries faites à Calcutta, nous donne les résultats suivants:

Fréquence relative des vents dans l'Inde et l'Océan Indien.

	Rapport des vents d'ouest à ceux d'est.	Rapport des vents du sud à ceux du nord.
Janvier,	1, 89	0, 25
Février,	1, 34	0, 63
Mars,	1, 29	3, 48
Avril,	1, 95	12, 88
Mai,	0, 84	11, 11
Juin,	0, 85	10, 10
Juillet,	0, 75	14, 29
Août,	0, 64	6, 63
Septembre,	0, 58	4, 43
Octobre,	2, 16	0, 42
Novembre,	2, 82	0, 07
Décembre,	3, 47	0, 03

On voit qu'en hiver ce sont les vents du N.-O. qui dominent dans l'Inde. Mais en mars, les vents du S. sont plus fréquents que ceux du N., et vers le solstice d'été le vent souffle du S.-S.-E., direction diamétralement opposée à celle de l'hiver.

Vents de la Méditerranée. — En été le sol brûlant du désert de Sahara détermine un vent de N. presque constant; en hiver, c'est le contraire, parce que le sable du désert rayonnant plus que la mer se refroidit aussi plus vite qu'elle.

Vents changeants dans l'Europe moyenne. — Ils sont liés à des différences de température dans des pays voisins, et leur combinaison entre eux et avec les vents régnants amène des directions qui peuvent être dans tous les azimuths possibles.

A Paris, les vents de S.-O. sont plus communs en hiver, ceux de N.-E. en été.

Propriétés des vents. — Elles tiennent au pays d'où ils proviennent. 1° *Vents froids:* le vent du nord appelé *bora* en Dalmatie, *gallego* en Espagne, *bise* dans les vallées du Rhône; le vent du S. connu sous le nom de *mistral* dans le midi de la France. 2° *Vents chauds:* le *samun* de la Perse et de l'Arabie vient du désert de Sahara; sa chaleur est souvent de + 50° cent., et il chasse devant lui le sable brûlant du désert. A la Louisiane, au Chili et dans les grandes plaines de l'Orénoque, à la Nouvelle-Hollande, les vents de terre sont très chauds. Il en est de même du *sirocco* de l'Italie et du *solano* de la Péninsule ibérique.

§ 3. *Des météores aqueux.*

Nous désignons sous ce nom avec M. Kæmtz tous les phénomènes de l'atmosphère dans lesquels l'eau joue un rôle quelconque, qu'elle soit à l'état liquide, solide ou aériforme.

Hygrométrie. — Le météorologiste déterminera d'abord la quantité de vapeur d'eau dans l'air. On sait que l'humidité que nous sentons dépend 1° de la quantité de vapeur d'eau que l'air contient, 2° de sa température. En hiver l'air nous paraîtra humide, quoiqu'il contienne moins de vapeur d'eau que l'air qui nous paraîtra sec en été.

Les hygromètres de Saussure et Daniell sont sujets à de graves inconvénients dans la pratique de la météorologie. L'instrument qu'on doit préférer actuellement, c'est le *psychromètre* d'August, quoiqu'il ne soit pas à l'abri de toute critique. Il consiste en deux thermomètres aussi semblables que possible et exactement comparés, portant des divisions assez grandes pour qu'on puisse bien estimer un dixième de degré ; la cuvette de l'un des thermomètres est entourée d'un linge, ou mieux d'une mousseline. On humecte cette gaze avec de l'eau avant l'observation ; l'eau en s'évaporant fait baisser le thermomètre qui finit par rester stationnaire. On note le degré où il s'est arrêté, puis celui de l'autre thermomètre. Appelons t le degré marqué par le thermomètre sec : t' le degré indiqué par le thermomètre humide en degrés centig.; b la hauteur du baromètre en milli. soit de plus e l'élasticité de la vapeur à la température t'; soit enfin E la tension de la vapeur exprimée par la hauteur en millimètres de la colonne mercurielle à laquelle elle fait équilibre; on a :

$$E = e' - 0{,}000804\,(t-t')\,b.$$

Si la boule du thermomètre mouillé est couverte de glace la formule devient

$$E = e' - 0{,}000705\,(t-t')\,b.$$

Maintenant, si l'on veut estimer, seulement approximativement, la quantité de vapeur d'eau correspondant à une tension donnée, on se rappellera que le nombre qui donne la tension de la vapeur en millimètres exprime aussi très-approximativement en grammes le poids de la quantité de vapeur correspondante contenue dans un mètre cube d'air.

VARIATION DIURNE DE L'ÉTAT HYGROMÉTRIQUE DE L'AIR. — La science ne possède pas un grand nombre d'observations sur ce sujet ; celles qui existent sont dues à MM. Neuber, Kuppfer et Kæmtz. Ce dernier, qui observait à Halle, a déduit des siennes les résultats suivants.

C'est au lever du soleil que la quantité de vapeur d'eau est la plus petite dans l'air. Ce minimum vient un peu plus tard que celui de la température (voy. col. 346) ; mais celle-ci étant fort basse, l'air est très-humide.

A mesure que le soleil s'élève, l'air devient plus sec, quoiqu'il se charge toujours de nouvelles vapeurs; le maximum coïncide à peu près avec celui de la température. En hiver, c'est dans l'après-midi, puis lorsque le thermomètre baisse, la vapeur se condense à l'état liquide autour des corps froids.

En été, la quantité de vapeur augmente dans la matinée; mais le maximum a lieu avant midi, un peu plus tôt, un peu plus tard, suivant les mois. Puis elle diminue pendant toute l'après-midi jusqu'au moment du maximum de la température.

Elle augmente de nouveau à partir de cet instant, et atteint un second maximum vers le coucher du soleil; puis elle va en diminuant assez régulièrement jusqu'au lever du soleil.

Au bord de la mer, la quantité de vapeur d'eau va en augmentant assez régulièrement depuis le matin jusque dans l'après-midi, où se trouve le maximum.

Sur les montagnes, l'accroissement de la quantité de vapeur dans la journée et la diminution le soir sont très-rapides, ainsi que M. Kæmtz l'a observé sur le Rigi (1800 mèt.) et sur le Faulhorn (2683 m.

VARIATION ANNUELLE DE LA QUANTITÉ DE VAPEUR D'EAU. — C'est en janvier que cette quantité est la plus faible, quoique l'humidité relative ne soit inférieure qu'à celle de décembre. Cette quantité va en augmentant de janvier d'abord lentement, puis plus rapidement en mai et juin. En juillet, la quantité de vapeur est aussi grande que possible, quoique, grâce à la température élevée de ce mois, l'air soit presqu'aussi sec qu'en août, où il atteint son maximum de sécheresse. Puis la quantité de vapeur va en décroissant jusqu'au mois de janvier, où il atteint son minimum.

Le tableau suivant donne une idée de cette marche à Halle, dans le centre de l'Allemagne, pendant les années 1838 et 1839. Partout où on a étudié jusqu'ici l'état hygrométrique de l'air, on a trouvé une marche analogue, même à Benarès dans l'Inde, où Prinsep a fait une longue série d'observations.

Tension de la vapeur d'eau, et humidité relative dans les différents mois.

	TENSION DE LA VAPEUR D'EAU.	HUMIDITÉ RELATIVE.
Janvier.	4,mm 509	85,0
Février.	4, 749	79,9
Mars.	5, 107	76,4
Avril.	6, 247	71,4
Mai.	7, 836	69,1
Juin.	10, 843	69,7
Juillet.	11, 626	66,5
Août.	10, 701	66,1
Septembre.	9, 560	72,8
Octobre.	7, 868	78,9
Novembre.	5, 644	85,3
Décembre.	5, 599	86,2

CONDITIONS HYGROMÉTRIQUES DE DIFFÉRENTS POINTS SUR LA TERRE. — Après celles des températures, il n'en est point qui aient une plus grande influence sur la vie des végétaux et des animaux.

La quantité de vapeur d'eau diminue en allant de l'équateur au pôle. Sur mer, l'air est presque toujours voisin du point de saturation, c'est-à-dire qu'il suffit que la température s'abaisse de quelques degrés pour que cette vapeur passe à l'état liquide. A mesure qu'on s'avance dans les terres, la quantité de vapeur est moindre.

La sécheresse de l'air est extrême dans les steppes de la Russie, les plaines de l'Orénoque, l'intérieur de la Nouvelle-Hollande et les déserts de l'Afrique.

CONDITIONS HYGROMÉTRIQUES SUIVANT LA HAUTEUR. — Il est évident *à priori*, et l'expérience prouve que la densité de la vapeur diminue à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Il s'agit donc uniquement de l'humidité relative de l'atmosphère.

On admet généralement que l'air est plus sec dans les régions supérieures. Par un temps serein, il est vrai que la sécheresse de l'air est extrême sur les hautes montagnes; la neige s'évapore sans mouiller la terre; mais lorsque ces mêmes montagnes sont entourées de nuage, l'air est sursaturé de vapeur d'eau, et en somme il est au moins aussi humide que dans les plaines. Pendant un séjour de 9 semaines sur le Rigi, l'air contenait, en moyenne, 84,3 pour cent de la quantité de vapeur nécessaire pour le saturer, et à Zurich seulement 74,6. Après 11 semaines d'observations sur le Faulhorn, le rapport avec Zurich était comme 74,4 est à 74,8, c'est-à-dire aussi humide en moyenne dans la plaine que sur la montagne. En 1833, qui fut une année pluvieuse, l'humidité fut de 85,5 sur le Faulhorn, et seulement de 75,3 à Zurich. Ces phénomènes, étudiés par M. Kæmtz, sont liés à ceux du décroissement de la température, qui est plus rapide par les temps couverts que par les temps sereins.

INFLUENCE DES VENTS SUR LES CONDITIONS HYGROMÉTRIQUES DE L'ATMOSPHÈRE. — On sait, en thèse générale, que les vents du nord et de l'est sont secs. Voici les rapports exacts de leur sécheresse relative, d'après quatre années d'observations de M. Kæmtz à Halle. Les chiffres indiquent la force élastique moyenne de la vapeur d'eau pour chacun d'eux.

Sécheresse relative des vents.

Nord,	6mm,69
Nord-Est,	6 ,56
Est,	6 ,90
Sud-Est,	7 ,31
Sud,	7 ,82
Sud-Ouest,	7 ,46
Ouest,	7 ,26
Nord-Ouest,	6 ,90

A Paris, les vents d'ouest doivent être plus chargés d'humidité qu'en Allemagne, à cause de la proximité de la mer. Malgré la moindre quantité de vapeur que contiennent les vents du nord, ils sont néanmoins plus humides, parce que leur température est moins élevée.

En hiver, c'est le vent d'est qui est le plus humide, et le vent d'ouest qui est le plus sec. En été, c'est précisément le contraire.

Lorsque la température de l'air s'est abaissée pendant la nuit, alors il ne peut plus tenir en dissolution la même quantité de vapeur d'eau que pendant le jour, et celle-ci se dépose sous forme de gouttelettes sur les plantes et les autres corps dont la température est très-basse.

La rosée se dépose surtout pendant les nuits calmes et sereines sur des corps isolés, et en plus grande quantité sur les uns que sur les autres. Ainsi, elle est plus abondante sur les plantes que sur la terre, sur du sable meuble que sur de la terre solide, sur du verre que sur des métaux; en un mot, sur tous les corps dont la température peut s'abaisser notablement par les rayonnements.

La rosée dépose pendant toute la nuit. Elle est très-abondante dans les pays voisins de la mer, et inconnue dans les déserts de l'Asie et de l'Afrique.

Un abri quelconque qui s'oppose au rayonnement diminue aussi la quantité de rosée qui se dépose sur un objet; pour la même raison, les corps munis de petites aspérités étant ceux qui rayonnent le moins, sont aussi ceux où elle se dépose le plus abondamment.

La rosée est d'autant plus abondante, toutes choses égales d'ailleurs, que l'air est plus humide.

La Gelée blanche n'est qu'une rosée congelée sur le sol dont la température est descendue au-dessous de zéro; ses effets sont souvent funestes, au printemps, aux végétaux délicats. On les préservera en les couvrant d'une toile, de paille ou de tout autre abri. Il suffit même d'allumer de grands feux. La fumée s'oppose suffisamment au rayonnement pour empêcher les plantes de geler.

La gélée blanche se forme aussi lorsqu'à la suite d'une longue série de jours très-froids, un vent plus chaud élève la température de l'air presque jusqu'à zéro; alors les édifices en pierre, qui ne sont point encore réchauffés, se couvrent de gelée blanche, de même que les cordages des navires qui sont ornés de festons réguliers.

Brouillards. — Quand la vapeur d'eau se condense et devient visible, elle prend le nom de brouillard à la surface de la terre, et de nuage lorsqu'elle est à une certaine hauteur dans l'atmosphère.

Le brouillard se compose d'une foule de petites sphérules probablement creuses, d'où le nom de *vapeur vésiculaire* que de Saussure lui a donné. Leur diamètre moyen est, d'après les observations de M. Kæmtz, de 0mm,0001865. Ce diamètre est deux fois plus grand en hiver qu'en été; c'est pendant le beau temps qu'il est le plus petit. Si l'air est plus froid que le sol, et qu'il soit en même temps chargé de vapeur d'eau, il y aura formation de brouillard. C'est dans ces circonstances qu'on voit des vapeurs s'élever au-dessus des rivières et des sources. Quand une colonne de vapeur d'eau surmonte le volcan de Stromboli, les habitants annoncent qu'il pleuvra bientôt.

Les pays tels que Terre-Neuve et l'Angleterre, où l'air est froid et humide en automne, en hiver et au printemps, tandis que la mer est relativement chaude à cause des courants équatoriaux, sont souvent enveloppés d'épais brouillards.

La rencontre d'un vent chaud chargé de vapeur d'eau avec un vent froid, les produit aussi fréquemment.

Nuages. — Un nuage est un brouillard élevé. Ceux qu'on observe si souvent autour des montagnes sont formés par la collision de deux vents opposés qui se rencontrent au sommet. Ceux qui se forment au-dessus des plaines sont dus à la même cause ou à la condensation des vapeurs lorsqu'elles atteignent les régions élevées et froides de l'atmosphère.

On a établi les distinctions suivantes parmi les nuages, suivant leur forme.

Le *stratus* est une couche de nuages limitée par deux plans horizontaux. On les observe souvent au coucher du soleil et près de l'horizon.

Les *cumulus* sont ces gros nuages d'été toujours plus ou moins arrondis, simulant des montagnes, et que les marins nomment *balles de coton*.

Les *cirrhus* (*queues de chat* des matelots) se composent de filaments ténus, et ressemblent à des plumes légères semées sur la voûte du ciel.

En combinant ces trois noms deux à deux, on peut exprimer tous les états intermédiaires. On appellera *cirrho-cumulus* ces petits nuages arrondis qui occupent souvent le zénith; apparence qu'on désigne dans quelques pays sous le nom de *ciel moutonné*.

Les *cirrhus* sont les plus élevés de tous les nuages. M. Kæmtz estime leur hauteur moyenne à 6500 mètres, d'après des mesures qu'il a faites à Halle; jamais il ne les a vus au-dessous du sommet du Finsterarhorn qui s'élève à 3900 mètres au-dessus de la mer. Il les croit composés de particules glacées, d'après certains phénomènes optiques que nous examinerons plus tard (voir *Parhélies*).

Ces nuages précèdent les changements de temps; ils annoncent la pluie en été et le froid ou le dégel en hiver. On les voit souvent venir du S.-O., puis se convertir en cirrho-stratus qui se résolvent en pluie.

Les cirrho-cumulus se présentent dans des circonstances semblables; ils sont très-transparents, donnent lieu à des couronnes et annoncent en général la chaleur.

Les cumulus se forment le matin dans les beaux jours d'été; ils s'élèvent alors, puis s'abaissent dans l'après-midi, et retombent sur la terre avant le coucher du soleil. On observe très-bien ces phénomènes sur les montagnes; ils sont dus aux courants d'air ascendants qui entraînent les vapeurs vers les régions supérieures.

Souvent, le matin, le ciel étant couvert de strato-cumulus, la pluie tombe en abondance, mais, vers 9 heures, le soleil dissipe les nuages en élevant la température de l'air. Dans d'autres circonstances l'air est humide, mais le ciel reste clair pendant toute la matinée; bientôt des *cumulus* se forment, se convertissent en *cumulo-stratus*, et il pleut dans l'après-midi.

PLUIE ET NEIGE. — Quand les vésicules des nuages grossissent, elles deviennent plus lourdes et tombent; si l'air est sec, elles s'évaporent en partie pendant leur chute, et il tombe plus d'eau sur les parties élevées que sur la terre; si l'air est chargé de vapeurs, les gouttes d'eau les condensent autour d'elles pendant leur chute, grossissent, et alors la pluie est moins abondante en haut qu'en bas.

En comparant les quantités de pluie tombée pendant l'année 1835 dans la cour et sur la terrasse de l'Observatoire de Paris, on trouve qu'elles sont dans le rapport de 11 à 10 pour une différence de niveau de 28 mètres. On mesure la quantité de pluie au moyen des *pluviomètres* ou *ombromètres*. Le plus parfait est celui de M. Horner à Zurich; il consiste en un entonnoir au-dessous duquel est un petit bateau divisé en deux compartiments. Ce bateau bascule avec une extrême facilité; et dès qu'un centimètre cube d'eau est dans l'un des compartiments, il s'abaisse, se vide, et l'autre compartiment vient se présenter à l'extrémité inférieure de l'entonnoir. Une roue dentée communiquant avec une aiguille donne le nombre des oscillations et par conséquent le nombre de centimètres d'eau qui sont tombés (Voyez Kæmtz, Traité de météorologie, t. 1, p. 413.)

Quelquefois les gouttes de pluie tombent gelées, c'est ce que l'on nomme des *giboulées*. Si elles gèlent en touchant le sol, elles forment du *verglas* : ces deux phénomènes annoncent le dégel.

Quand l'air est à une température voisine de zéro, la pluie tombe à l'état de neige; mais plus le thermomètre descend au-dessous du point de congélation, moins elle est abondante, parce que la quantité de vapeur d'eau dans l'air diminue à proportion.

La neige est formée par la cristallisation tranquille de gouttes d'eau; ces cristallisations de forme très-variée peuvent se ramener à cinq types environ. Ils ont été surtout étudiés par Scoresby. C'est par un temps calme et un air pur que se forment les plus belles cristallisations.

Par un grand froid, lorsque le ciel est serein, on remarque souvent de petites particules glacées qui flottent dans l'air et brillent aux rayons du soleil, ce sont des vapeurs qui s'élèvent de la terre et qui se congèlent. M. de Humboldt et d'autres ont vu de la pluie tomber d'un ciel serein; c'est que des vapeurs se sont condensées sans passer par l'état vésiculaire.

La quantité de pluie qui tombe en une seule fois est souvent très-considérable. En cinq heures de temps, l'illustre voyageur que nous venons de nommer a vu tomber près du Rio-Negro 47 millimètres de pluie; une autre fois, en trois heures, 31mm,5 : à Bombay, il tomba chaque jour, pendant un certain temps, 108mm d'eau. L'amiral Roussin a observé à Cayenne que pendant une pluie qui dura de 8 heures du soir jusqu'à 6 heures du matin, il tomba 280mm de pluie.

Dans les latitudes septentrionales les pluies ne sont plus aussi abondantes. Toutefois, il tomba une fois à Joyeuse en un jour une pluie de 250mm, et à Genève de 162mm en trois heures.

PLUIES ENTRE LES TROPIQUES. — En mer, elles sont nulles dans la région des vents alisés, le ciel est toujours serein; mais il pleut souvent dans la région des calmes.

Dans les terres où les vents alisés ne soufflent pas aussi régulièrement, il y a deux saisons: celle des pluies et celle de la sécheresse. Voici, suivant M. de Humboldt, la succession des phénomènes dans cette partie de l'Amérique du Sud qui se trouve au nord de l'équateur. Le ciel est serein depuis décembre jusqu'en mars, l'air est sec, et les plantes sont privées de leurs feuilles. Les vents sont à l'E ou à l'E.-N.-E. Vers la fin de mars le ciel est moins serein, l'hygromètre annonce plus d'humidité dans l'air; les arbres commencent à pousser des bourgeons; une légère brume voile quelquefois le soleil; le vent alisé souffle moins fort et est interrompu par des calmes; de gros nuages, semblables à des montagnes, s'entassent dans le S.-S.-O.; des orages fréquents se montrent dans le S.; la quantité d'électricité atmosphérique augmente surtout au coucher du soleil, et la saison des pluies commence vers la fin d'avril. Alors le ciel est gris; il y a des orages tous les soirs; et bientôt, lorsque le soleil est au zénith, ils commencent dès le matin. Dans la plupart des contrées, la nuit est sereine; mais il en est où il pleut aussi pendant que le soleil est sous l'horizon.

L'air est alors si humide, même en Afrique, que les vêtements, les souliers sont imbibés d'eau, et les habitants se trouvent dans un bain de vapeur permanent. C'est aussi la saison des fièvres et des autres maladies endémiques. La saison des pluies coïncide, pour chacun de ces pays, avec la présence du soleil au zénith.

En Afrique, près de l'équateur, elle commence en avril; dix degrés plus au nord, sur les bords du Sénégal, elle commence en juin, et elle dure jusqu'en septembre. En Amérique, les pluies surviennent, à Panama, au commencement de mars; à Saint-Vélas de Californi, au milieu de juin.

Dans la presqu'île de l'Inde, la saison des pluies est pendant la mousson de S.-O. sur la côte occidentale; pendant celui de N.-E., sur la côte orientale. Les vapeurs poussées par ces vents se condensent sur les sommets des Gates et retombent à l'état de pluie. La quantité d'eau qui tombe dans une seule de ces saisons est très-supérieure à celle qui tombe chez nous pendant toute l'année, elle s'élève souvent à 190 et même 325 centimètres.

PLUIES DANS DES LATITUDES PLUS ÉLEVÉES. — A mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, l'alternance régulière d'une saison de pluies avec une saison sèche disparaît; ainsi, déjà sous la latitude de Madère, il pleut pendant toute l'année et plus abondamment en hiver qu'en été, tandis que c'est le contraire entre les tropiques.

VENTS PLUVIEUX EN EUROPE. — On peut, sous ce point de vue, distinguer trois climats en Europe: celui de l'Angleterre et de la France occidentale, qui s'étend très-loin dans l'intérieur du continent; celui de la Suède et de la Finlande, et enfin celui des côtes septentrionales de la Méditerranée. Dans cette portion de l'Europe, qui est au nord des Alpes et des Pyrénées, les vents du S.-O sont chargés de vapeurs qui s'élèvent sur la mer; arrivés dans des latitudes plus froides, ces vapeurs se précipitent. M. de Buch a fait un relevé de 100 pluies tombées a Berlin, et il a trouvé le rapport suivant :

Fréquence des pluies par les différents vents.

VENTS.	NOMBRE DES PLUIES.
N.	4,1
N.-E.	4,0
E.	4,9

VENTS.	NOMBRE DES PLUIES.
S.-E.	4,9
S.	10,2
S.-O	32,8
O.	24,8
S.-O.	14,4

On trouve le même rapport en tenant compte de la fréquence relative des vents. C'est en hiver que les vents du nord amènent quelquefois une pluie à larges gouttes et de courte durée, tandis que celles produites par les vents de S.-O. sont fines et continues.

En Scandinavie il pleut pendant des journées entières; sur toute la côte de Norwége, les vents de S.-O. accumulent sans cesse les nuages qui s'arrêtent sur la crête des Alpes scandinaves. Pendant ce temps le ciel est serein en Suède et il y tombe à peine quelques gouttes de pluie.

Dans ce dernier pays il pleut par des vents d'est qui amènent les vapeurs de la Baltique et du golfe de Bothnie. A Saint-Pétersbourg enfin, il pleut par tous les vents.

QUANTITÉ DE PLUIE DANS LES DIVERSES SAISONS. — Elle diminue à mesure qu'on s'avance dans l'intérieur des continents. Sur la côte occidentale de l'Angleterre, elle est de 94 centimètres par an ; sur la côte orientale et à l'intérieur, de 34. Sur la côte de France et de Hollande, elle est de 67 ; de 65 dans l'intérieur de ces deux pays. Dans les plaines de l'Allemagne 54; et à Pétersbourg et Bude, seulement 35 à 37. Le nombre des jours de pluie qu'on compte dans l'année confirme ce résultat.

Nombre des jours de pluie.

Angleterre et France occidentale,	152
Centre de la France,	147
Allemagne centrale,	141
Bude (Hongrie),	112
Kasan,	90

Si nous exprimons par 100 la quantité totale de pluie qui tombe dans le cours d'une année, nous aurons, pour chaque saison, les proportions suivantes :

Quantité relative de pluie dans les diverses saisons.

	HIVER.	PRINTEMPS.	ÉTÉ.	AUTOMNE.
Angleterre occidentale,	26,4	19,7	23,0	30,9
Intérieur de l'Angleterre,	23,0	20,6	26,0	30,4
France occidentale,	23,4	18,3	25,1	33,3
France orientale,	19,5	23,4	29,8	27,3
Allemagne,	18,2	21,6	37,1	23,2
Petersbourg,	13,6	19,4	36,5	30,5

Bergen est la ville de l'Europe où il pleut le plus. La quantité d'eau qui y tombe dans un an s'élève à 224 centimètres.

DE LA PLUIE SUR LES BORDS DE LA MÉDITERRANÉE. — Sur les bords de la mer, dans la vallée du Rhône, la quantité totale de pluie est à peine supérieure à celle de l'Allemagne, mais sa distribution dans les différentes saisons de l'année est très-différente. En été, il tombe à peine 10 p. 100 de la quantité annuelle, mais en automne 40 p. 100. A mesure qu'on remonte le fleuve, la quantité des pluies d'été augmente incessamment; néanmoins on trouve encore à Genève des traces de la constitution météorologique méditerranéenne. Sous le point de vue de la quantité absolue de pluie, M. Schouw divise l'Italie septentrionale en bande alpine, bande transpadane et bande cispadane. Cette quantité diminue à mesure qu'on va du nord au sud, elle est plus considérable sur la côte orientale que sur les rives de l'Adriatique. Dans le nord ce sont les vents de N. et de N.-O. qui condensent et précipitent des vapeurs que les vents de S.-O. ont amenées et accumulées sur les Alpes. A Rome, il pleut par les vents du sud et du nord, rarement avec les vents intermédiaires. En Syrie il pleut à peine en été, mais beaucoup en hiver; il en est de même sur tout le pourtour du bassin méditerranéen.

§ 4. *De la distribution de la chaleur à la surface du globe.*

DEUX SOURCES DE CHALEUR. — Le soleil est la source calorifique qui tend sans cesse à élever la température du globe terrestre et celle de l'atmosphère qui l'environne.

Si le soleil n'existait pas, le globe et son atmosphère rayonneraient sans cesse vers les espaces planétaires dans lesquels ils se meuvent, et leur température irait en s'abaissant continuellement jusqu'à ce qu'elle fût la même que celle de l'espace céleste.

Moins le soleil est élevé au-dessus de l'horizon, et plus son action échauffante est faible, parce que ses rayons traversent une plus grande épaisseur d'atmosphère, et que la plupart rasent la surface de la terre sans la toucher. De là la basse température des régions polaires pendant toute l'année, et celle de nos climats en hiver.

L'*héliothermomètre* de Saussure nous donne un moyen de mesurer cet affaiblissement graduel de la chaleur des rayons solaires. Il se compose d'une boîte noircie et formée de corps mauvais conducteurs; cette boîte est percée d'une petite fenêtre composée d'une ou plusieurs lames de verre bien transparentes derrière lesquelles est un thermomètre à boule noircie. On expose cet instrument au soleil de manière à ce que ses rayons tombent perpendiculairement sur la fenêtre, et échauffent le thermomètre.

Toutefois, il faut apporter une petite correction à ces résultats. En effet, ce thermomètre s'échauffe par les rayons du soleil, mais aussi par l'action du milieu ambiant dont la chaleur pénètre toujours un peu à travers les parois de la boîte. Pour apprécier cette quantité on interpose, pendant une minute, entre le soleil et l'instrument, un corps opaque tel qu'une planchette de bois. Le thermomètre monte, je suppose, de 0°, 3 ; on en lève l'écran, et, pendant une minute, il monte sous l'influence des rayons solaires de 1°, 5. On replace l'écran, il monte de nouveau de 0°, 1 en une minute.

Il est évident que, dans la seconde minute, pendant qu'il était exposé à l'action des rayons solaires, il est monté, en vertu de la température du milieu ambiant de $\frac{0,3+0,1}{2}$ et par conséquent seulement de $1°,5-0°,2=1°,3$, en vertu de l'action des rayons solaires. Par un jour serein, voici les résultats qu'on obtient en exposant l'instrument à l'action du soleil pendant qu'il s'abaisse sur l'horizon.

Tableau de l'action calorifique du soleil à différentes hauteurs.

HAUTEUR DU SOLEIL.		VARIATIONS DE L'HÉLIOTHERMOMÈTRE.	
40°	30'	2°	16
37	35	2	03
24	30	1	77
21	30	1	50

L'atmosphère absorbe une grande partie des rayons solaires, et l'on peut admettre que pendant tout le cours d'une journée sereine, la moitié seulement des rayons solaires arrive à la terre. ~~r conséquent, en comptant les jours couverts ı en résulte qu'un petit nombre des rayons solaires contribue à échauffer le sol. Il est vrai de dire aussi que les nuages et la vapeur d'eau s'opposent au rayonnement, et par conséquent au refroidissement de la terre.

Outre la chaleur qu'elle reçoit du soleil, la terre en a une qui lui est propre. A mesure qu'on s'enfonce dans un puits vertical, cette température va en augmentant. Les résultats obtenus jusqu'ici pour la valeur de cet accroissement sont assez divergents. On peut admettre environ un degré centigrade d'accroissement pour 30 mètres.

Les résultats qui méritent la plus grande confiance sont ceux que M. Walferdin a obtenus au moyen de ses thermomètres à déversement dans les puits artésiens du bassin de Paris. Car ces instruments étaient garantis de la pression, et il en a toujours employé plusieurs simultanément. Leur accord souvent merveilleux garantissait l'exactitude de leurs indications. En voici quelques-unes.

Accroissement de la température avec la profondeur.

PUITS FORÉS.	PROFONDEUR.	TEMPÉRATURE.	ACCROISSEMENT D'UN DEGRÉ C. POUR
Ecole-Militaire	173m	16°, 40	30m, 85
Saint-André (Eure).	253	17 , 95	30 , 95
A Grenelle.	400	23 , 50	31 , 50
	400	23 , 75	30 , 87
	505	26 , 43	31 , 90
	Moyenne.		31 , 21

Pour avoir la loi de l'accroissement dans la troisième colonne, on a pris pour point de départ la température constante de 11°, 7 que donne le thermomètre situé à 28 mètres de profondeur dans les caves de l'Observatoire. Ainsi, l'on peut dire que dans la formation crayeuse et les argiles des bassins de Paris, et entre 170 et 500 mètres, l'accroissement de température est sensiblement uniforme.

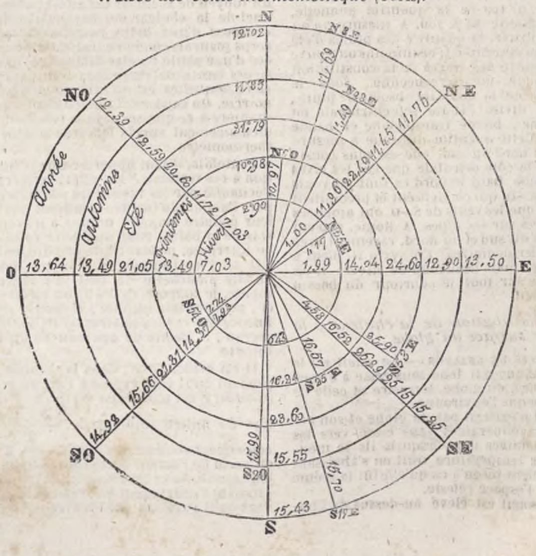
INFLUENCE DES HYDROMÉTÉORES SUR LA TEMPÉRATURE. — En été, les journées sereines sont plus chaudes que les jours couverts. En hiver, c'est le contraire.

Pendant l'été lorsqu'il pleut, l'eau tombant des régions élevées de l'atmosphère, refroidit l'air en absorbant sa chaleur, et le sol en s'évaporant : de là l'abaissement de température qu'on remarque après les pluies d'orage.

Ces phénomènes sont surtout très-marqués entre les tropiques, où la saison des pluies coïncide souvent avec le moment où le soleil est au zénith.

En hiver, au contraire, les pluies sont souvent chaudes relativement à la température de l'air et du sol.

1. *Rose des vents thermométrique* (Paris).



Influence des vents sur la température.— Cette influence, la plus marquée de toutes, est connue de tout le monde. La rose des vents thermométrique qui précède donne la température moyenne qui accompagne chaque vent à Paris.

Elle fait voir que le vent le plus froid est le N.-18°-E.; le plus chaud, le S.-17°-E. C'est en hiver que la différence est le plus marquée. En hiver, c'est le S.-54°-O, en été le S.-E. qui sont les plus chauds.

Ces résultats s'expliquent facilement, car c'est dans le N.-E. que sont situés les pays les plus froids, dans le S.-S.-E. les mers et les terres les plus chaudes. L'état du ciel et des circonstances locales mettent quelquefois ces lois générales en défaut. Dans d'autres pays, la rose des vents thermométrique est un peu différente. A Stockholm, c'est le vent du N.-20°-E. qui est le plus froid, celui de S.-26°-O. qui est le plus chaud. A Londres, le vent du nord est le plus froid, celui de S.-12°-E. le plus chaud. A Pesth, en Hongrie, le vent le plus froid est celui de N.-16°- O.

Températures extrêmes de divers lieux. — La table suivante peut en donner une idée.

Table des températures extrêmes observées dans divers lieux.

LIEUX.	MINIMA.	MAXIMA.
Surinam.	21°,3	32°,3
Pondichéry.	21,6	44,7
Madras.	17,3	40,0
Martinique.	17,1	35,0
Le Caire.	9,1	40,2
Bagdad.	— 5,0	»
Bassora.	»	45,3
Rome.	— 5,0	31,3
Cambridge(Et. unis).	— 24,4	33,5
Padoue.	— 15,6	36,3
Prague.	— 27,5	35,4
Londres.	— 11,4	»
umberland-House.	— 42,2	»
Copenhague.	— 17,8	33,7
Moscou.	— 38,8	32,0
Pétersbourg.	— 34,0	33,4
Fort-Reliance.	— 56,7	»
Eyafiord (Islande).	»	20,9
Port-Elisabeth.	— 50,8	16,7

La température la plus élevée qu'un homme ait jamais éprouvée en plein air a été observée par Burckhard à Esné, dans la Haute-Egypte: elle était de 47°,4, la plus basse a été notée par Back, qui traversait l'Amérique du nord pour chercher à rejoindre par terre le capitaine Ross: elle était de —56°,7. La différence est de 104°.

L'homme peut donc supporter des différences de température plus grandes que celles qui existent entre l'eau bouillante et la glace fondante.

On voit aussi qu'il y a une différence beaucoup plus grande entre les températures les plus basses qu'entre les plus élevées. Ainsi, entre les *maxima* d'Esné et de l'île Melville, il y a une différence de 31°,8 seulement, tandis qu'elle est de 78,3 entre les minima de Pondichéry et du Fort-Reliance. C'est donc surtout le froid de l'hiver qui abaisse la moyenne des régions boréales.

Remarquons aussi que c'est dans l'intérieur des continents qu'on observe les extrêmes de température.

Jamais, en pleine mer, on n'a signalé des chaleurs supérieures a + 31°.

Différence entre les climats marins et les climats continentaux. — Plus on s'éloigne des côtes et plus la différence entre la température moyenne de l'été et celle de l'hiver augmente. Le tableau suivant donne les moyennes de l'été et de l'hiver, et leur différence pour plusieurs lieux situés au bord la mer dans les Iles Britanniques.

Températures moyennes de l'hiver et de l'été pour divers points des côtes d'Angleterre.

LIEUX.	HIVER.	ÉTÉ.	DIFFÉRENCE.
Feroe.	3°,90	11°,60	6°,70
Ile Unst (Shetland).	4,05	11,92	7,87
Aberdeen (Ecosse).	3,39	14,57	11,18
Edimbourg.	3,47	14,07	10,60
Ile de Man.	5,59	15,08	9,49
Lancaster.	3,58	15,32	11,74
Londres.	3,22	16,75	13,53
Penzance.	7,04	15,83	8,79

On voit que dans aucun de ces lieux, même aux Feroe qui sont sous le 62e de latitude, la moyenne de l'hiver ne descend au-dessous de zéro; mais les étés sont sans chaleur. Il en est de même de Penzance, sous le 50e de latitude.

A Londres, qui est un peu dans l'intérieur des terres, la différence entre la moyenne des deux saisons est déjà de 13°,5.

Les vents de S.-O., si fréquents en hiver, amènent en Angleterre les chaudes vapeurs de l'océan Atlantique qui s'opposent au rayonnement de la terre et dégagent, en se précipitant sur le sol, une énorme quantité de chaleur latente; de là l'extrême douceur des hivers en Irlande et sur la côte occidentale de l'Angleterre.

Examinons maintenant le climat des villes situées un peu plus dans l'intérieur des terres.

Températures moyennes de l'hiver et de l'été dans différentes villes du continent situées non loin de la mer.

LIEUX.	HIVER.	ÉTÉ.	DIFFÉRENCE.
Amsterdam.	2°,67	18°,79	16°,12
Maestricht.	2,84	18,12	15,28
Bruxelles.	2,56	19,01	16,45
La Haye.	3,46	18,63	15,17
St-Malo.	5,67	18,90	13,23
Dunkerque.	3,56	17,68	14,12
La Rochelle.	4,78	19,22	14,44
Paris.	3,59	18,01	14,42

Nous trouvons dans ces lieux une température moyenne hibernale qui n'est pas supérieure à celle du nord de l'Angleterre; mais les vents d'est qui soufflent en été chassent les nuages; une série de jours sereins se succèdent sans interruption, et les rayons du soleil échauffent l'atmosphère et le sol. Aussi la différence entre les deux saisons s'élève-t-elle dans quelques points jusqu'à 16 degrés.

Pénétrons dans l'intérieur du continent, et ces différences seront encore plus grandes, comme on le voit sur le tableau suivant.

Températures moyennes de l'été et de l'hiver dans diverses villes continentales.

LIEUX.	HIVER.	ÉTÉ.	DIFFERENCE.
Tubingue.	—0°,02	17°,01	17°,03
Augsbourg.	—1,08	16,80	17,88
Berlin.	—1,01	17,18	18,19
Dresde.	—1,20	17,21	18,41
Munich.	+0,12	17,96	17,84
Prague.	—0,44	19,93	20,37
Vienne.	+0,18	20,36	20,18
Pétersbourg.	—8,70	15,96	23,66
Moscou.	—10,22	17,55	27,77
Kasan.	—13,66	17,35	31,11
Irkutzk.	—17,88	16,00	33,88

Ces chiffres parlent d'eux-mêmes et font voir que la rigueur des hivers et la chaleur des étés augmentent à mesure qu'on pénetre dans le continent européen. Cette loi est générale, car elle se reproduit dans la presqu'île scandinave et sur le continent méricain.

Isochimènes et Isothères. — Concevons une ligne passant par tous les points de la terre qui ont la même température moyenne en été, ce sera une *ligne isothère*. Celle qui passera par tous les points ayant la même température moyenne en hiver prendra le nom d'*Isochimène*. Ces courbes seront loin de coïncider avec les parallèles qui passent par tous les lieux équidistants de l'équateur; dans l'ouest de l'Europe les Isochimènes s'abaissent vers l'équateur et dans l'est elles s'élèvent vers le pôle; c'est le contraire pour les isothères. On conçoit l'influence de ces lignes sur la végétation et l'existence des animaux. Ainsi, l'élan, le plus grand des cerfs, se trouve encore en Suède par 65° de latitude; dans l'intérieur de la Sibérie il ne dépasse pas 55°. Le hêtre (*Fagus sylvatica*) s'avance en Norvége jusqu'à Bergen par 60° 24'; en Lithuanie jusqu'au 55e, et dans les montagnes de la Crimée jusqu'au 45e environ.

Température moyenne de l'année. — La table de la col. 1550 du supplément donne la température moyenne d'un grand nombre de lieux sur la terre, rangés dans l'ordre de ces températures. Tous les points dont l'élévation n'est point indiquée, sont situés au niveau ou très-peu au-dessus du niveau de la mer.

Différence de température à latitude égale. — En général la température va en croissant du pôle à l'équateur; toutefois il y a une foule d'exceptions qui infirment cette règle. Elles reconnaissent les causes suivantes :

1° Les vents. Ils rafraîchissent l'air des pays situés près de l'équateur et rechauffent celui des régions septentrionales.

2° Le voisinage des grandes mers produit un effet analogue. En effet, les vents alizés de l'Atlantique déterminent dans la mer un grand courant qui se dirige vers l'ouest et se sépare en deux branches au niveau de la Floride orientale; l'une descend vers le sud, l'autre se précipite avec impétuosité dans le canal de Bahama, où elle a une température de 27°; puis elle remonte, sous le nom de *Gulf-Stream*, le long de la côte est de l'Amérique du nord en augmentant de largeur et en diminuant de vitesse.

A la hauteur de Terre-Neuve, le Gulf-Stream se dirige dans l'est pour redescendre le long des côtes d'Afrique, dont il tempère le climat brûlant; mais il envoie une branche dans le nord qui emporte sur les côtes occidentales de l'Ecosse des graines, des fruits d'Amérique et les débris des naufrages qui ont lieu près des Antilles.

Ce courant s'élève encore plus haut dans le nord, car j'ai trouvé, moi-même, des graines de *Mimosa scandens* au cap Nord, et la température élevée de la surface de la mer entre le Spitzberg et le cap Nord (+ 3°) ne saurait s'expliquer autrement.

Déjà, en 1780, Blagden et Francklin recommandaient aux navigateurs de s'assurer par le thermomètre, s'ils étaient dans les eaux du *Gulf-Stream*, et entre 40° et 41° de lat. M. de Humboldt a trouvé sa température de 22°,5, tandis qu'elle n'était que de 17°,5 en dehors du courant.

Les Florides ont une température supérieure à celle des Canaries, qui sont sous la même latitude; mais le *Gulf-Stream* quittant l'Amérique vers le 50° de lat., la température décroît plus rapidement sur les côtes orientales du nouveau continent que sur les côtes occidentales de l'Europe, comme le montre le petit tableau suivant :

TEMPÉRATURE MOYENNE.	COTE E. D'AMÉRIQUE.	COTE O. D'EUROPE.
15°	38°,24' lat.	41°,33' lat.
10	41, 30	52, 3
5	44, 51	63, 23
0	51, 57	70, 56

C'est l'influence combinée du Gulf-Stream et des vents de S.-O. qui adoucit le climat de la Norvége, au point de produire une différence de température de 10° à latitude égale avec la côte de l'Amérique.

Ainsi, en Amérique on trouve une température annuelle moyenne, de 0° par 52° lat. N., et en Norvège, par 71° lat. N.

Température de l'équateur. — M. de Humboldt l'a fixée à 27°,5. Elle est probablement plus forte dans l'intérieur des terres. Le peu d'observations que nous possédons sur celle de l'Afrique continentale, portent à croire qu'elle est de 29°, même à 300 m. au-dessus du niveau de la mer.

Isothermes. — Si on réunit par des lignes tous les points du globe dont la température moyenne est la même, les courbes qui en résultent prennent le nom d'*isothermes*, que M. de Humboldt leur a donné, en traçant leur direction sur l'hémisphère boréal. Voici le parcours de quelques-unes d'entre elles :

L'isotherme de 25° commence sur la côte ouest de l'Amérique, (lat. 16°,50), un peu au nord d'Acapulco, passe par Vera-Cruz, au nord de la Havane, descend vers l'embouchure du Sénégal, coupe les extrémités septentrionales de la mer Rouge et du golfe Persique, pour finir au nord de l'île Luçon, par 17° lat. N.

Isotherme de 20°. En Californie elle se trouve vers 28° lat. N. et marche à peu près parallèlement à la précédente, passe entre Madère et Ténériffe, un peu au nord d'Alger, entre le Caire et l'île de Crête, et se termine en Chine, près de Nankin.

L'isotherme de 15° coupe la côte O. de l'Amérique, près de San-Francisco (lat. 37°,48), passe dans l'état de Délawaré, entre 37° et 38 lat.: puis s'élève vers le nord, atteint la frontière septentrionale du Portugal, passe un peu au nord de Rome, descend vers la Turquie septentrionale et se termine au Japon méridional, par 32°,45 lat. environ.

L'isotherme de 10° est au niveau de l'embouchure de la Colombia, sur la côte occidentale d'Amérique; elle descend ensuite dans le nord de l'état de l'Ohio, passe à New-York, puis s'élève brusquement, atteint presque la ville de Londres, coupe la côte de France près de Dunkerque; puis redescend dans l'est, passe près de Prague, suit le nord de la mer Noire, et se termine probablement à l'île Nipon, dans le Japon.

Isotherme de 5°. Sur la côte ouest de l'Amérique, elle se trouve par 58° environ, coupe le lac Michigan, traverse l'état du Maine, passe au sud de Terre-Neuve, au nord des Féroe, coupe la côte de Norvège à Drontheim, redescend vers le sud de l'autre côté des Alpes scandinaves, se dirige au nord de Stockholm et au sud de Moscou, vers la côte asiatique qu'elle atteint au niveau de la chaîne des Kuriles.

L'isotherme de 0° doit se trouver par la latitude du Labrador; puis elle coupe la pointe sud de l'Islande, s'élève jusqu'au cap Nord ou la Norvége, descend parallèlement à la chaîne Laponne, passe au nord du golfe de Bothnie, au nord de Kasan, et vient couper la côte est du Kamtschatka, vers le 56° de latitude.

Ces lignes sont les seules qui fassent le tour du globe. Celles au-dessous de zéro s'étendent de l'Amérique septentrionale au nord de la Sibérie et reviennent sur elles-mêmes. Elles ne sont pas encore bien connues.

La température du pôle boréal est de — 8° à 10°, suivant toutes les probabilités.

POLES DU FROID. — Ils ne coïncident pas avec les pôles terrestres. Il y en a deux dans l'hémisphère boréal : l'un au nord de l'Amérique, vers 78° latitude et 90° longitude ouest; l'autre au nord de la Sibérie, par 79° latitude et 70° à 110° longitude est.

TEMPÉRATURE DE L'HÉMISPHÈRE AUSTRAL. — Elle est beaucoup moins connue. Un seul fait paraît hors de doute, c'est qu'à latitude égale, le climat est plus froid que dans l'hémisphère boréal; aussi la calotte des glaces polaires australes occupe-t-elle une bien plus grande surface que celle de l'hémisphère opposé. Le soleil séjournant environ 6 jours de plus dans l'hémisphère boréal (col. 324), on comprend que celui-ci s'échauffe davantage. L'absence d'un grand courant équatorial allant vers le pôle austral, si elle était constatée, compléterait cette explication.

TEMPÉRATURE DU SOL.—Imaginons une série de thermometres enfoncés dans le sol à des profondeurs différentes; si on lit tous les jours leurs indications, on trouvera que ceux qui ne sont enfoncés qu'à 2 décimètres ou moins indiquent encore la variation diurne de la température; à 6 décimètres ils ne donnent plus que la moyenne diurne; plus profondément, à 3 mètres environ, la moyenne mensuelle; enfin à 10 mètres environ, une température qui s'écarte peu de la moyenne annuelle.

En outre, la marche de ces thermomètres n'est pas la même que celle des instruments exposés à l'air libre; plus ils sont profondément enfoncés, plus leurs maxima viennent long-temps après ceux de l'air, à cause du temps que la chaleur atmosphérique met à se propager jusqu'à leur cuvette. Ainsi à Bruxelles, un thermomètre enfoncé de 3 m. 88 avait son maximum en septembre, son minimum en avril, tandis que le maximum de l'air est en juillet, le minimum en janvier.

Le thermomètre placé dans la cave de l'Observatoire de Paris, à 28 mètres au-dessous de la surface du sol, marque constamment 11°,7. Les faits précédents résultent des expériences faites à Paris par M. Arago et à Bruxelles par M. Quetelet.

Dans l'Amérique tropicale, où la variation annuelle est très-faible, il suffit, comme l'a fait M. Boussingault, d'enfoncer le thermomètre à 5 ou 6 décimètres pour trouver la température constante.

Au moyen des températures du sol, le même savant a déterminé la température moyenne de 128 points situés entre 11° lat. N., et 5° lat. S. En adoptant 1°,5 comme température moyenne de la limite des neiges éternelles à une hauteur de 4 800 mètres, sur la mer, on trouve que le décroissement de la température est de 1° pour 176 mètres, nombre qui n'excède que de 8 mètres celui trouvé par M. de Humboldt en étudiant les lois du décroissement de la température de l'air.

M. Bischoff a fait des observations analogues dans le Siebengebirge et dans les Alpes au moyen d'une bouteille d'eau plongée au fond d'un trou de 13 décimètres de profondeur, dans lequel il enfonce une caisse en forme de prisme à base carrée. Après avoir laissé séjourner la bouteille pendant plusieurs semaines, il la retire et prend la température de l'eau au moyen d'un thermomètre très-sensible. Il s'est assuré de cette manière que la loi de M. Boussingault se vérifiait au moins jusqu'au 51e de lat. N., et il a trouvé qu'entre 48° 10′ et 46° 12′ lat. N., la température moyenne de l'année est 0° à une hauteur de 1983 mètres; et qu'en adoptant 2665 comme la limite moyenne des neiges éternelles, on trouve que la température moyenne de l'air à cette hauteur est de —3°, 7.

TEMPÉRATURE DES SOURCES. — Les sources sont entretenues par les eaux pluviales qui s'infiltrent lentement dans des couches de la terre dont elles prennent la température. Si ces eaux se réunissent dans des réservoirs situés assez profondément pour n'être plus influencés par des variations diurnes et mensuelles, elles auront, en sortant, une température qui se rapprochera de celle de l'année Elle sera au-dessous, si ces sources proviennent de sommets élevés; au-dessus, si elles viennent d'une grande profondeur. On peut déduire les résultats suivants des travaux de MM. de Humboldt, Wahlenberg, de Buch, Erman, Kuppfer et Bischoff.

Dans l'Europe occidentale, la température des sources est à peu près égale à la moyenne annuelle. Dans le centre du continent, au nord des Alpes, leur température est plus élevée. En Italie et entre les tropiques, elle est plus basse.

M. de Buch a fait voir que ces différences étaient en rapport avec les quantités relatives de pluie qui tombent dans chaque saison. En Angleterre, où il pleut autant en hiver qu'en été, la température des sources est celle de la moyenne annuelle. En Allemagne, où il pleut davantage en été, elle lui est supérieure; enfin elle lui est inférieure en Italie et entre les tropiques, où il ne pleut que dans la saison froide. Les puits couverts peuvent aussi donner une estimation approximative de la moyenne de l'année, si leur profondeur totale est comprise entre 15 et 25 mètres, et celle de l'eau entre 5 et 10.

SOURCES THERMALES. — Toute source dont la température est de plusieurs degrés au-dessus de la moyenne de l'année peut être considérée comme thermale, puisque sa température ne dépend pas uniquement de celle de l'atmosphère.

On les trouve dans des plaines et sur de hautes montagnes; cependant c'est dans les grandes chaînes qu'elles sont surtout nombreuses. Beaucoup d'entre elles ont une température comprise entre 20 et 40°. Un plus petit nombre dépassent 50 ou 60°. La liste suivante donne l'indication de quelques-unes. Il y a presque toujours plusieurs sources chaudes dans un même lieu ; nous indiquons toujours celles dont la température est la plus élevée ; car, chez les autres, on est en droit de supposer que leur chaleur est moindre à cause de leur mélange avec des filets d'eau froide.

Température de quelques sources thermales.

Courmayeur (Piémont).	34°,44
Saint-Gervais (Savoie).	36°,66
Barèges (France).	48°,88
Louèche (Suisse).	52°,22

Cauterets (France).	55°,00
Bagnères (France).	58°,88
Aix-la-Chapelle (Prusse).	61°,66
Borset (Prusse).	70°,00
Carlsbad (Bohême).	73°,89
La Trinchera (Amérique).	90°,13
Reckum (Islande).	100°,00
Geyser, au fond (Islande).	124°,00

Température des lacs. — Par ses expériences sur la température des lacs de la Suisse, de Saussure avait été conduit à conclure que la température de la surface variait en raison de celle de l'air et de celle des affluents ; mais qu'au fond, lorsque la profondeur dépassait 60 à 70 mètres, elle oscillait entre 4° et 5°, c'est-à-dire autour de la température à laquelle l'eau atteint son maximum de densité. De Saussure se servait d'un thermomètre entouré de corps mauvais conducteurs et non d'un instrument à index mobiles non garanti de la pression, et ses résultats sont à l'abri de toute critique. Des expériences semblables, faites avec un thermomètre entouré de corps mauvais conducteurs, pendant l'été de 1841, sur le lac de Brienz, m'ont donné pour la température du fond du lac, à des profondeurs variant entre 155 et 263 mètres, une température constante de 5°,04. Les extrêmes ont été 5°,14 et 4°,97. On peut donc admettre cette température comme constante, puisque les limites extrêmes de ses variations sont comprises entre deux dixièmes de degré. Ces résultats se rapprochent singulièrement de ceux obtenus par M. de la Bêche : sur le lac de Thun, il a trouvé, à partir de 80 mètres de profondeur, 5°,27; et sur celui de Zug, 5°,00 à partir de 40 mètres.

Température de la mer. — A la surface la température de la mer varie avec les saisons ; elle-même est complétement différente de ce que l'on pourrait croire en examinant la courbure des lignes isothermes, à cause des courants qui la sillonnent. Il y a plus, le maximum de densité de l'eau salée étant au-dessous de son point de congélation, on trouve des lois entièrement différentes de celles qu'on a constatées dans les lacs. Ainsi, dans le voisinage des glaciers de Magdalena-Bay, au Spitzberg, j'ai trouvé par 65 et 135 mètres que la température de la couche d'eau la plus profonde variait entre — 1°,66 et — 1°,91. Les instruments ont été corrigés des effets de la pression.

Une table donnée (col. 1548) au supplément renferme les températures observées dans l'océan Atlantique et dans la mer Glaciale pendant les campagnes de la *Vénus* et de la *Recherche ;* elle donnera une idée du décroissement de la température avec la latitude et avec la profondeur, près de l'équateur et près du pôle. Les observations faites entre 45° l. S. et 4° l. N. appartiennent à la *Vénus*, les autres à la *Recherche*. On possède peu d'observations des latitudes intermédiaires, et elles doivent être accueillies avec une extrême réserve, parce que les instruments employés n'étaient pas toujours garantis contre la pression de la colonne liquide qui fausse tous les résultats. Des erreurs de ce genre entachent les températures obtenues par des navigateurs célèbres, dans les mers du nord.

Sur la *Vénus* on s'est servi de thermométrographes placés dans un tube de cuivre. Sur la *Recherche* on a fait usage des thermomètres à minima de M. Walferdin (col. 410), enfermés dans un tube de verre scellé à ses deux extrémités à la lampe à alcool.

Décroissement de la température avec la hauteur. — En général, à mesure qu'on s'élève sur une montagne ou dans un aérostat, la température baisse. Ce décroissement varie à chaque heure du jour et dans chaque saison.

Il résulte des observations faites par de Saussure sur le col du Géant, à 3430 mètres au-dessus du niveau de la mer, et de celles de M. Kaemtz sur le Rigi, que ce décroissement est plus rapide le jour que la nuit ; c'est vers 5 heures de l'après-midi qu'il atteint son maximum, et c'est au lever du soleil qu'il est le plus lent. On a observé de même qu'il était moins rapide en hiver qu'en été. Aussi entre Genève et le Saint-Bernard, pour avoir un décroissement d'un degré, il faut s'élever :

Au printemps, de	179 m.
En été, de	185
En automne, de	210
En hiver, de	232

Il résulte de ce décroissement inégal dans les diverses saisons, que la différence de température entre l'été et l'hiver va toujours en diminuant à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère.

M. Arago avait soupçonné qu'en hiver la température devait souvent être croissante avec la hauteur. Dans les régions septentrionales, MM. Bravais et Lottin ont trouvé, à Bosecop sous le 70° de latitude, que par un temps calme et à des hauteurs de 450 m., cet accroissement pouvait aller jusqu'à 6°.

M. Fournet a réuni récemment un grand nombre d'observations semblables.

Sur le Ventoux en Provence, j'ai trouvé le décroissement égal à 129 m. en été, 188 en hiver, 144 en moyenne. Dans nos climats on peut admettre en moyenne le nombre 160 pour 1°.

La largeur des massifs des montagnes, la rapidité de leurs pentes exercent aussi une grande influence sur la rapidité du décroissement. Il est plus lent sur les plateaux successifs qui s'élèvent en étage que le long des flancs escarpés d'un pic isolé. Ainsi, les Andes jusqu'à la hauteur où elles sont habitées forment des plateaux immenses, et depuis la mer jusqu'au village de Calpi le décroissement est de 1° pour 258 mètres, mais depuis ce point il est de 1° pour 160 mètres le long des flancs escarpés du Chimboraço. Cette loi se confirme au Mexique et dans l'Himalaya. De toutes ses observations entre les tropiques, M. de Humboldt conclut un décroissement moyen de 1° pour 168 mètres.

On remarque aussi que plus on s'élève, plus les différences de température observées dans un temps donné deviennent petites et plus le climat se rapproche des climats marins. Toutefois il faudrait s'élever à une hauteur plus grande que celles des plus hautes montagnes pour trouver une température uniforme, car la neige fond quelquefois un peu sur les sommets les plus élevés des Alpes.

Le décroissement de la température avec la hauteur s'explique par la moindre densité et la plus grande capacité pour le calorique de l'air raréfié et le rayonnement plus actif de la terre et de l'air.

Limite des neiges éternelles. — Il est rare qu'il pleuve sur les hautes montagnes, même en été. Les pluies des plaines y tombent à l'état de neige. Jusqu'à une certaine hauteur, cette neige est fondue par les chaleurs de l'été, mais, passé cette hauteur, la neige ne fond plus.

On donne le nom de *ligne des neiges éternelles* à la limite inférieure de ces champs continus de neiges.

Différente dans chaque localité, cette limite ne varie cependant pas tellement sous une latitude donnée qu'on ne puisse la considérer comme une ligne courbe qui va en s'abaissant de l'équateur au pôle, comme on le voit dans la table suivante.

PAYS.		LATITUDE.	LIMITE.
Amérique du sud.		0° 0 O.	4870 m.
Chili (versant E. des Andes.)		16 0 S.	5300
Mexico.		19 0 N.	4580
Hymalaïa	Versant sud.	30 0	3900
	Versant nord.	31 0	5090
Ararat.		39 30	4320
Pyrénées (moy).		42 45	2730
Caucase.		43 0	3330
Alpes.		45 30	2630
Norvège.		60 0	1660
Norvège.		63 15	1570
Norvège.		67 0	1330
Norvège.		70 0	1070
Norvège.		71 10	715
Spitzberg.		79 30	0

La latitude n'est pas le seul élément qui détermine la limite des neiges éternelles. La chaleur et la durée des étés, la quantité de neige tombée en hiver, la configuration de chaînes de montagnes, la direction des vents élevés ont aussi une influence immense sur leur fonte annuelle et sur leur persistance à une certaine hauteur.

GLACIERS. — Les neiges perpétuelles sont soumises, pendant l'été, à une fusion incomplète qui les convertit en glace légère appelées *névés* (*Firne* all.). Ces névés émettent, dans les couloirs ou les vallées étroites, des *glaciers* qui descendent d'autant plus au-dessous de la ligne des neiges perpétuelles que les montagnes sont plus élevées et le climat plus froid. En Savoie et en Suisse, les glaciers qui descendent le plus bas sont ceux des Bossons, de la Brenva, d'Aletsch et de Grindelwald; ils proviennent du mont Blanc, du mont Rose et des Alpes bernoises. En moyenne, leur extrémité inférieure est à 1230 m. au-dessus du niveau de la mer.

Dans le nord, l'abaissement de la température compense la hauteur des montagnes. Ainsi, en Norvège, sous le 61e de lat., les glaciers descendent à 400 m., et au Spitzberg on les trouve au bord de la mer.

La puissance des glaciers de la Suisse est de 10 à 40 m; celle des glaciers du Spitzberg, de 30 à 120 m. Dans l'un et l'autre pays ils contribuent à restituer à l'Océan une partie de l'eau qui s'en évapore continuellement pour tomber à l'état de pluie ou de neige sur le continent.

En été, les glaciers du Spitzberg s'écroulent sans cesse dans les flots qui fondent leur base à mesure qu'elle se trouve en contact avec eux; de là le nombre immense de glaces flottantes qui couvrent les mers polaires.

Les glaciers de la Suisse donnent naissance à de grands fleuves, tels que le Rhône, le Rhin, le Tésin, qui vont se jeter dans l'Océan ou la Méditerranée.

Les glaciers sont animés d'un mouvement de progression qui fait sans cesse avancer leur extrémité inférieure. En été ces glaciers fondent à leur extrémité inférieure, et il s'établit un équilibre plus ou moins parfait entre la fusion et la progression.

De nombreuses crevasses, les unes larges et béantes, les autres capillaires, sillonnent les glaciers. Au Spitzberg, ils sont adhérents au sol; en Suisse, l'action simultanée des sources et de la chaleur atmosphérique les fond et donne naissance à ces belles voûtes qui font l'admiration des voyageurs.

Si on pénètre sous un glacier, on voit qu'il n'est pas en contact immédiat avec la roche sous-jacente; il en est séparé par des cailloux et des graviers provenant des parties supérieures de la montagne. Au-dessous de ces graviers, on trouve que la roche en place est polie et striée. Les stries sont parallèles au grand axe du glacier; elles sont d'autant plus marquées que la roche est plus tendre.

Dans le voisinage des glaciers on trouve aussi des roches arrondies, polies et striées.

La plupart des glaciers portent à leur surface des blocs de pierre qui sont tombés des montagnes voisines, et dans leur mouvement de progression ils les entraînent avec eux et finissent par les déposer à leurs pieds. Ces blocs ont été désignés sous le nom de *blocs erratiques*. Quand ils sont disposés en grand nombre à la surface du glacier, ils constituent les *moraines médianes;* accumulés sur ses bords, les *moraines latérales;* déposés à son extrémité inférieure, la *moraine terminale*. Quelquefois ces blocs sont élevés au sommet d'un piédestal de glace. On les nomme des *tables des glaciers*, parce que le niveau général des glaciers a baissé par la fusion et l'évaporation, tandis que le bloc a préservé de ces influences la glace qu'il recouvrait.

Jamais on ne trouve de corps étranger dans l'intérieur des glaciers de la Suisse; toutes les pierres qui tombent dans les crevasses sont, en apparence, rejetées au dehors; mais, en réalité, c'est le niveau du glacier qui baisse et arrive à celui de la pierre qui se trouve alors à la surface.

Dans les glaciers du Spitzberg et dans les névés de la Suisse, on voit des blocs enchâssés dans l'épaisseur de la glace.

On ne trouve pas seulement des blocs erratiques autour des glaciers. Les plaines de la Suisse et le Jura sont couverts de blocs granitiques qui proviennent des Alpes. Dans les plaines de l'Allemagne, de la Russie, des Pays-Bas, sur les côtes d'Angleterre et d'Écosse, on rencontre des blocs originaires des Alpes scandinaves. Ces masses ont été transportées soit par des glaces flottantes détachées des glaciers, soit par les glaciers eux-mêmes. Les deux opinions sont également soutenables.

Près de l'embouchure de la Léna, en Sibérie, on a trouvé conservé dans la glace un éléphant d'une espèce qui n'existe plus à la surface du globe. Il était couvert de poils et de chair parfaitement conservée, qui a servi de nourriture à un grand nombre d'animaux. Son squelette et sa peau se trouvent dans le Muséum d'histoire naturelle de Pétersbourg.

§ 5. *Baromètre.*

On mesure la pesanteur de l'air en lui faisant équilibre, au moyen d'une colonne de mercure d'une longueur et d'une densité connues. (Voyez col. 387.)

VARIATION DIURNE DU BAROMÈTRE. — La hauteur du baromètre n'est pas la même à chaque heure du jour; il monte et baisse régulièrement dans le cours de vingt-quatre heures; mais ses oscillations sont d'autant moins régulières qu'on s'éloigne davantage de l'équateur.

Dans nos latitudes en particulier, la variation diurne est masquée par des variations accidentelles qui n'ont point lieu sous l'équateur. Toutefois, la variation diurne suit une marche sensiblement uniforme dans les différents climats.

A partir de midi, le baromètre baisse et atteint son minimum entre 3 et 5 heures du soir; puis il remonte et arrive à son maximum entre 9 et 11 heures du soir. Il baisse de nouveau et présente un second minimum vers 5 heures du matin, pour s'élever de nouveau jusqu'à 10 heures. Voici la moyenne des heures critiques entre l'équateur et St-Pétersbourg, en comptant de 0 h. (midi), jusqu'à 23 h. (11 h. du matin) du lendemain :

Minimum du soir.	4 h.	5 m
Maximum du soir.	10	11
Minimum du matin.	15	45
Maximum du matin.	21	37

Ces heures varient un peu dans les différentes saisons. M. Kaemtz a déduit ces variations d'une série de 12 années faite à Halle.

En hiver, les minima et les maxima se rapprochent de midi; ils ont lieu plus tôt dans l'après-midi, et plus tard le matin.

Étendue des oscillations diurnes. — Elle est dépendante de la latitude; ainsi, à Cumana (lat. 10° 28') et La Guayra (lat. 10° 36'), la différence moyenne entre la hauteur du baromètre à 10 heures du matin et à 10 heures du soir est de 2mm 40. A Pétersbourg, et à Abo elle n'est plus que de 0mm 11.

Pour obtenir la *variation diurne moyenne* on soustrait la moyenne des deux minima de celle des deux maxima. A Halle c'est en hiver qu'elle est le plus faible, savoir : de 0mm 46. Elle va en augmentant jusqu'en été, où elle est de 0mm 57.

L'élévation au-dessus du niveau de la mer a aussi une influence sur l'étendue des extrêmes de la variation diurne; elle était de 0mm 64 à Zurich, et seulement de 0mm 24 sur le Rigi, à 1800 au-dessus de la mer. Les observations correspondantes de Zurich et de Genève ont donné comme valeur de la variation diurne moyenne de ces deux villes 0mm 898, et sur le Faulhorn (2672m) seulement 0mm 269: on voit qu'elle est moindre à une grande hauteur, et il est probable qu'à une certaine élévation dans l'atmosphère elle doit disparaître complètement.

Les maxima et les minima n'ont pas lieu aux mêmes heures sur les montagnes et dans la plaine. Ainsi, le minimum du soir était entre 3 et 4 heures à Zurich, et entre 5 et 6 heures sur le Rigi; à Zurich le maximum était à 8 heures du matin, sur le Rigi à midi environ. On conçoit l'importance de ces faits pour la mesure des hauteurs par le baromètre.

Variations diurnes a différentes latitudes. — En les réduisant au bord de la mer, on obtient pour les différentes latitudes les nombres suivants.

LATITUDE.		OSCILLATION.	
0°	0'	2mm	28
5	26	2	26
17	52	2	03
23	55	1	80
29	28	1	58
34	26	1	35
39	4	1	13
43	34	0	90
48	1	0	67
52	33	0	45
57	17	0	23
62	25	0	00

Causes de toutes les oscillations barométriques. — Elles indiquent seulement un changement de la pression atmosphérique dans le lieu où se trouve l'instrument.

M. Kaemtz, en dépouillant un grand nombre d'observations, en conclut que toutes ces variations sont dues à des changements de température qui déplacent les couches d'air supérieures. Car, en général, quand le baromètre baisse, le thermomètre monte, et *vice versâ*. Dans le premier cas le lieu où se trouve le baromètre est plus chaud que les contrées voisines; c'est le contraire quand il monte.

Hauteur barométrique moyenne diurne. — Celle de chaque jour se trouve en général entre midi et une heure; on l'obtient aussi en prenant la moyenne arithmétique des observations, de 7 heures du matin, 2 et 9 heures du soir.

Hauteur barométrique moyenne au niveau de la mer. — Schouw a fait voir le premier qu'elle n'était point la même à différentes latitudes.

En moyenne elle est de	771mm	, 34
A l'équateur, de	767	, 95
De 30° à 40 lat. N., de	772	, 50
Vers 60° lat. N. de	757	, 90

Hauteur barométrique dans les diverses saisons. — MM. de Buch et Dove ont trouvé qu'entre les tropiques elle était d'autant moindre que le soleil était moins distant du zénith.

Pour les lieux situés au nord de l'équateur, la pression va en diminuant à partir de janvier jusqu'en juin, puis en augmentant depuis cette époque jusqu'en hiver.

A Calcutta, où l'on avait huit années d'observations consécutives, la différence entre le maximum et le minimum s'est élevée à plus de 16 millimètres. La même loi se retrouve dans les régions septentrionales.

C'est à l'époque des équinoxes qu'on observe en général la hauteur moyenne. La liaison qui existe entre la température et la hauteur du baromètre se remarque encore ici.

Oscillations irrégulières du baromètre. — Elles sont d'autant plus considérables qu'on s'éloigne davantage de l'équateur.

On le prouve en prenant la différence entre la plus petite et la plus grande hauteur de la colonne mercurielle dans chaque mois, et, divisant par 12 la somme de ces différences, on obtient ainsi l'oscillation annuelle moyenne.

Voici un petit tableau qui montre ces rapports.

Oscillation barométrique moyenne annuelle.

Batavia,	2mm	, 97
La Havane,	6	, 37
Madère,	10	, 44
Marseille,	17	, 68
Paris,	23	, 66
Copenhague,	27	, 69
Stockholm,	29	, 82
Christiania,	33	, 04

Quand on compare ces différences pour un grand nombre de lieux, on reconnaît aussi l'influence de la longitude; ainsi, à latitude égale, les oscillations sont plus grandes sur la côte est de l'Amérique que sur la côte ouest de l'Europe; et elles diminuent encore à mesure qu'on pénètre dans l'intérieur du continent européen.

En faisant passer une ligne par tous les points où l'oscillation barométrique moyenne est la même, nous obtenons des *lignes isobarométriques*. M. Kaemtz conclut de leur examen qu'elles sont en rapport avec les différences de température qui sont d'autant plus grandes pour une même distance en latitude, qu'on s'éloigne davantage de la ligne équinoxiale.

Rose des vents barométrique. — Les anciens observateurs avaient déjà reconnu l'immense influence des vents sur la hauteur du baromètre. Mais ce n'est qu'en 1771 que Lambert indiqua le véritable moyen de l'apprécier, savoir: de prendre la moyenne de toutes les hauteurs barométriques observées chaque fois pendant qu'un certain vent soufflait quelque temps sans interruption.

La figure fait voir quelle est à Paris la hauteur barométrique moyenne pour chacun des différents vents pendant l'année et dans les diverses saisons. La plus grande hauteur du baromètre s'observe en hiver par le vent du nord. La plus basse aussi en hiver, par celui du sud. Le maximum annuel existe par le vent de N.-24°-E.; le minimum par le vent de S.-3°-O.

A Londres, le minimum annuel a lieu par le vent du sud, le maximum par le vent de N.-47°-E.

A Berlin, le maximum annuel existe par le vent de N.-58°-E.; le minimum par celui de S.-12°-O. La hauteur barométrique moyenne coïncide presque avec le diamètre E.-O.

Nous avons vu que les vents étaient les grands arbitres de la pluie ou du beau temps; ce n'est donc point la pluie ou le beau temps que le baromètre annonce lorsqu'il baisse ou lorsqu'il monte. Il indique uniquement que la direction du vent n'est plus la même; mais, comme cette direction changeant, le temps change *le plus souvent* avec elle, on en a conclu que le baromètre devait l'annoncer et on l'a accusé d'infidélité, quand, le vent ayant changé, le temps est resté le même. Or, ce n'est pas le baromètre, c'est le vent qu'il faut accuser de n'avoir point chassé les nuages comme à son ordinaire, ou de ne les avoir point rassemblés et précipités sous forme de pluie.

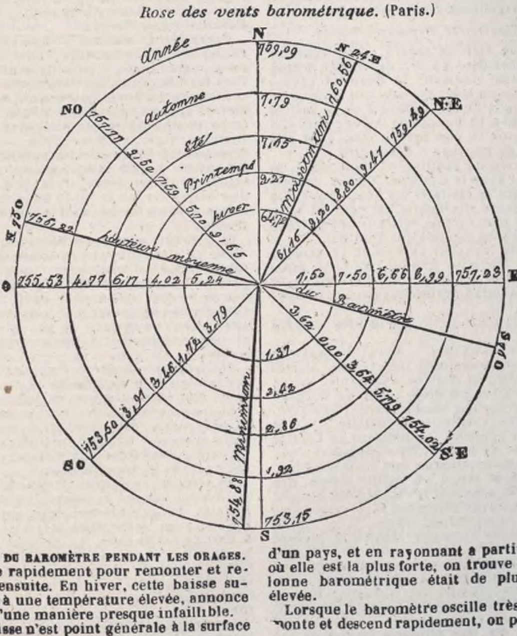
Le baromètre est élevé pendant les vents du N. et du N.-E. qui règnent pendant le beau temps; et bas, par ceux de l'O. et du S.-O. qui amènent la pluie.

Quand le baromètre monte dans un lieu, il monte aussi dans des lieux peu éloignés; mais à de grandes distances, il peut arriver qu'il monte dans un endroit pendant qu'il baisse dans l'autre. La pression se fait toujours sentir d'abord dans le lieu d'où le vent doit venir. Ainsi, supposons que le baromètre de Paris et de Lille soient à la même hauteur, si celui de Lille monte avant celui de Paris, on doit s'attendre à des vents du nord, et à des vents de sud si c'est l'inverse.

Hauteur du baromètre avant la pluie. — Elle est au-dessous de la moyenne du lieu d'environ 4 millimètres.

Quand la pluie est continue, le baromètre se tient plus bas qu'il ne se tiendrait avec le même vent, si le temps était beau; mais lorsque la pluie tombe, il commence à monter un peu.

Rose des vents barométrique. (Paris.)



Hauteur du baromètre pendant les orages. — Il baisse rapidement pour remonter et redescendre ensuite. En hiver, cette baisse subite, jointe à une température élevée, annonce un orage d'une manière presque infaillible.

Cette baisse n'est point générale à la surface d'un pays, et en rayonnant à partir du point où elle est la plus forte, on trouve que la colonne barométrique était de plus en plus élevée.

Lorsque le baromètre oscille très-vite, qu'il monte et descend rapidement, on peut en conclure que les conditions climatériques d'une partie de la terre sont singulièrement bouleversées.

Vers Noël 1821, le baromètre se tint très-bas dans presque toute l'Europe; aussi à Paris et dans l'Europe occidentale, la température de janvier et de février fut-elle supérieure de plusieurs degrés à la moyenne; tandis que l'hiver fut très-rigoureux aux Etats-Unis, en Perse où de la neige couvrit les plaines du Kordofan. L'été suivant fut très-chaud et très-sec à Paris. Dans l'Inde, au contraire, des vents de mer violents et humides régnèrent pendant tout l'été, et à Bombay on vit tomber 84 centimètres d'eau de plus que la moyenne.

Il existe d'autres observations semblables. Ainsi, l'hiver si doux en Europe de 1833 à 1834 a été d'une rigueur extrême dans toute l'étendue des Etats-Unis et en Perse; l'été suivant fut d'une sécheresse remarquable en Europe, mais la crue du Nil fut plus considérable que de coutume, et des pluies abondantes tombèrent en Chine et dans la presqu'île de l'Inde.

Les mêmes différences se remarquent souvent sur les deux versants des Alpes ou entre le nord et le midi de la France : ainsi les premiers mois de 1838 furent très-froids en Angleterre, en Allemagne, en Russie et dans le nord de la France, tandis que le printemps semblait avoir remplacé l'hiver dans le midi de la France et en Italie au delà des Apennins. En deçà, c'est-à-dire dans la Lombardie, l'hiver fut rigoureux comme dans le nord.

§ 6. *Électricité atmosphérique.*

Lorsque le ciel est serein, l'électromètre de Volta, placé dans un lieu découvert, accuse de l'électricité positive; la quantité varie : elle est faible au lever du soleil et augmente à mesure qu'il s'élève jusqu'à 6 ou 7 heures en été, et 10 à 12 heures en hiver; puis elle diminue jusqu'au coucher du soleil, où elle commence de nouveau à s'accroître.

Cette électricité positive va sans cesse en augmentant avec la hauteur. On ne saurait rien conclure de ces faits sur l'état électrique de l'atmosphère elle-même, car cette électricité positive peut être de l'électricité terrestre entraînée par les vapeurs qui montent.

Électricité pendant la rosée, le brouillard et la pluie. — Elle est très-forte, positive, et, suivant Schubler, plus forte en hiver qu'en été. Kaemtz a néanmoins souvent observé le contraire.

Pendant la pluie, elle est le plus souvent positive.

Formation des orages. — Avant un orage le temps est ordinairement très-calme, le ciel d'un bleu pâle, la chaleur étouffante, parce que l'évaporation est nulle, sans que le thermomètre accuse une température très-élevée. Des *cumulus* s'élèvent de quelque point de l'horizon, se gonflent, augmentent de volume sans changer de place et finissent par se réunir; des *cumulo-stratus* fort épais semblent les réunir à la terre; en même temps, des *cirrus* légers couvrent le ciel et vont bientôt se réunir en nuage principal. Il est rare qu'un seul nuage engendre un orage.

La hauteur des nuages orageux varie, suivant les calculs de M. Arago, entre 214 et 8080 mètres : les hauteurs les mieux constatées l'ont été, dans les Alpes et les Pyrénées, par MM. Kaemtz, Peytier et Hossard; ils ont trouvé que les orages étaient entre 3200 et 4500 mètres.

Un éclair est une étincelle électrique qui met deux nuages ou un nuage et la terre en communication. Les éclairs se dessinent ordinairement sous la forme d'une ligne brisée en zigzag ordinairement simple, mais qui se bifurque quelquefois à son extrémité. D'autres éclairs sont des lueurs qui embrassent une partie de l'horizon; ils sont beaucoup plus communs que les premiers. D'autres enfin, sous la forme de masses lumineuses arrondies, traversent l'atmosphère où l'œil peut les suivre pendant plusieurs secondes. M. Arago en a réuni un grand nombre d'exemples. Les éclairs partent de la partie inférieure, mais aussi de la partie supérieure des nuages.

Une chapelle, située sur le sommet du mont Sainte-Ursule, en Styrie, fut foudroyée par un éclair parti d'un nuage qui était vers le milieu de la hauteur de la montagne.

Le bruit du tonnerre succède d'autant plus vite à l'éclair que le spectateur est plus rapproché. Tantôt il ressemble à la détonation d'une ou de plusieurs armes à feu, tantôt il forme un roulement dont la durée peut aller jusqu'à 47 secondes, même dans un pays de plaines.

L'intervalle qui s'écoule entre l'éclair et le tonnerre varie de 0,5 à 72 secondes.

Dans les pays chauds, il y a des éclairs sans tonnerre. Ce phénomène paraît être rare en Europe.

Les éclairs sont souvent accompagnés d'une odeur sulfureuse très-marquée. Ils combinent l'azote et l'oxygène de l'air et donnent naissance à une certaine quantité d'acide azotique dont M. Liebig a démontré la présence dans les pluies d'orage.

Effets de la foudre. — Elle suit en général les corps conducteurs, fond souvent les corps métalliques, vitrifie la surface des roches fusibles ou forme dans les sables quartzeux des tubes longs quelquefois de plusieurs mètres appelés *fulgurites*. Elle enflamme les corps combustibles et transporte des poids énormes. Ainsi, à Manchester, le tonnerre déplaça d'un mètre une muraille dont le poids fut estimé à 2600 kilogrammes; et dans le comté de Cornouailles il lança à 55 mètres une pierre du poids de 75 kilog. Souvent les objets qu'elle a frappés sont percés de plusieurs trous.

Si la foudre atteint des boussoles, elle renverse les pôles, diminue ou même détruit leur magnétisme; d'autre part, du fer non magnétique le devient après avoir été frappé par la foudre. Cette seule cause suffit pour changer sur un navire la direction de la boussole, altérer la marche de ses chronomètres, et par conséquent compromettre sa navigation.

Pendant les orages des flammes paraissent quelquefois à la surface de la terre ou des eaux. Plus souvent encore de petites flammes, connues sous le nom de *feux de Saint-Elme*, se montrent à l'extrémité de corps métalliques aigus et élevés, tels que les mâts de navires, les lances des soldats, ou même à l'extrémité des cheveux ou des chapeaux.

En 1696, M. de Forbin vit plus de 30 feux de Saint-Elme sur son vaisseau; il ordonna à un matelot d'aller chercher celui qui était à la girouette du grand mât, et qui avait plus de 5 decimètres de long. Le matelot, arrive en haut, entendit un bruit semblable à celui que fait de la poudre mouillée qui brûle; il enleva la girouette, mais immédiatement le feu la quitta pour se placer au sommet du grand mât.

Les orages ont une violence extraordinaire entre les tropiques, surtout dans la région des calmes ; ils sont accompagnés d'ouragans terribles qui ont quelquefois lancé des navires à plusieurs mètres au-dessus des points les plus élevés que les eaux aient atteints. Ils ont lieu le jour; mais, dans l'intérieur des terres, il y a aussi des orages nocturnes.

Cependant il est des pays où il ne tonne jamais; par exemple, à Lima, au Pérou. Au Caire, les orages sont très-rares, tandis qu'ils sont presque journaliers de novembre en avril à la Jamaïque.

Dans les latitudes moyennes, les orages sont moins violents et distribués inégalement dans les différentes saisons.

Si nous désignons par 100 le nombre total des orages dans l'année, nous aurons la distribution suivante dans les différentes contrées de l'Europe.

	HIVER.	PRINTEMPS.	ÉTÉ.	AUTOMNE.
Europe occidentale	8,9	17,7	52,5	20,9
Suisse.	0,4	20.6	69,0	10,0
Allemagne	1,4	24,4	66.0	8,2
Europe centrale.	0	15,7	79,3	5,0

Les orages sont communs dans le nord de l'Italie. En Grèce, on en compte, année moyenne, quarante de plus qu'en Allemagne; mais en Sicile leur nombre diminue.

Dans le nord ils sont très-rares. Scoresby, pendant le cours de ses nombreux voyages, n'a entendu le tonnerre que deux fois, passé le 65° de latitude; Thorstensen, en Islande, une fois ; M. Hans Ulich, marchand qui habite depuis fort long-temps à Havoe-Sund, près du cap Nord, m'a dit n'y avoir vu qu'un seul orage, le 16 juillet 1838.

Déjà dans le midi de la Suède et de la Norvège, aux Shetland et aux Féroe, ils sont peu communs, et éclatent le plus souvent en hiver.

Les indications de l'électromètre sont très-variables pendant les orages, et nullement en rapport avec leur durée, leur éloignement ou leur intensité.

Des personnes ont été tuées, des objets foudroyés sans qu'on ait vu d'éclair ni entendu de coup de tonnerre rapprochés. C'est l'effet du *choc en retour.*

Voici ce que Brydone raconte à cet égard : «Le 19 juillet 1785, après une matinée sereine, on vit des éclairs éloignés. Ils étaient accompagnés de coups de tonnerre qui les suivaient à l'intervalle de 25 à 30 secondes. Tout à coup Brydone entendit un bruit semblable à la décharge de plusieurs coups de fusil, mais sans éclair. A peu de distance de sa maison, un homme, qui conduisait un chariot, fut tué avec ses deux chevaux, et on trouva, dans la trace de la roue, un trou de 4 centimètres de diamètre. Un berger qui gardait les moutons près de là éprouva une commotion, et vit un agneau tomber mort au même instant. Une femme qui coupait de l'herbe dans le voisinage fut renversée, et un homme sentit la terre trembler sous ses pieds. »

Les hautes montagnes arrêtent la marche des orages qui s'y arrêtent et y éclatent. Souvent aussi elles changent leur direction.

La plupart des orages nous sont amenés par des vents de S. O. De là, la baisse extraordinaire du baromètre. Souvent ils résultent du combat des vents d'est contre les vents d'ouest. C'est surtout le cas en hiver.

Les éclairs sans tonnerre connus sous le nom d'éclairs de chaleur, et qu'on observe souvent à l'horizon dans les beaux jours de l'été, ne sont que le reflet des éclairs d'orages éloignés qui sont situés au-dessous de notre horizon. On s'en est assuré positivement. Le 16 août 1832, M. Kaemtz vit ainsi que tous les membres de la société de physique de Genève, des éclairs dans le nord, et peu de journées après les journaux étaient remplis de nouvelles des désastres que les orages avaient causés dans le Wurtemberg, la Bavière et le pays de Bade.

Du gresil et de la grêle. Les orages sont souvent accompagnés de la chute de petites masses de glace connues sous le nom de *grêle.* Lorsque ces masses ne dépassent pas la grosseur d'un petit pois, on les nomme *grésil*, mais le grésil et la grêle sont une seule et même chose. Le grésil des hautes régions se métamorphose en grêlons à mesure qu'il tombe dans des régions inférieures de l'atmosphère. Parfois les grêlons ont la forme de secteurs sphériques à trois côtés, d'après les observations de MM. Delcros et Noeggerath.

Ils ont souvent un poids considérable. Les observations de grêlons pesant 100 et 200 grammes ne sont pas rares. On admettra avec plus de réserve celles où l'on prétend qu'ils pesaient un et même deux kilogrammes, à moins de supposer que ces masses étaient formées de grêlons qui se sont fondus partiellement, et ensuite réunis après avoir touché le sol.

C'est au moment de la plus grande chaleur diurne que la grêle tombe en général ; il grêle rarement pendant la nuit. Le grésil est d'autant plus commun qu'on se rapproche plus des côtes de l'Océan ; la grêle, au contraire, devient plus fréquente à l'intérieur du continent.

C'est au printemps et en hiver que le grésil tombe en France et en Angleterre, tandis que la grêle se montre pendant l'été en Allemagne et en Russie.

La grêle tombe plus communément dans les plaines que sur les montagnes ou les plateaux ; certaines localités voisines de sommets élevés sont privilégiées à cet égard, d'autres presque régulièrement ravagées tous les ans. En effet, souvent la pluie ne se transforme en grêle que dans les régions inférieures, et d'autres fois elle fond avant d'arriver dans les vallées.

Ce fléau est rare entre les tropiques, inconnu à Cumana et à la Martinique ; mais si l'on s'élève dans les montagnes il se montre souvent. Le 17 août 1830, il tomba tant de grêle à Mexico que les chevaux en avaient à mi-jambe dans la rue.

La grêle se forme souvent pendant un combat des vents du sud avec les vents du nord : la température des régions inférieures est alors très-élevée; mais elle décroît rapidement avec la hauteur, et s'abaisse au-dessous de zéro dans une zone inférieure à celle des nuages orageux.

Volta a fait remarquer avec raison qu'il y avait toujours deux couches de nuages lorsque la grêle se formait, et chacun des grains n'est probablement composé que d'un noyau de neige ou du grésil grossi par la vapeur d'eau des nuages inférieurs qui se condense à la surface.

Trombes. — Elles se montrent sur terre et sur mer, mais toujours dans le voisinage des terres, et se composent d'une colonne d'eau qui unit un nuage avec la mer ou les eaux d'un lac. Les uns les considèrent comme formées par des tourbillons de vent : M. Peltier n'y voit qu'un effet de nuage fortement électrisé; quoi qu'il en soit, elles produisent les effets les plus désastreux. La trombe qui ravagea le village de Chatenay, près Paris, en juin 1839, renversa des murs, fendit et déracina des arbres et tua les poissons d'un vivier.

Le docteur Mercer en vit une dans le port de Saint-Jean d'Antigoa, qui enleva une petite maison et la transporta à 12 mètres de distance.

En Siberie, une trombe enleva toute la toile mouillée qui était à blanchir sur un pré, la tordit, la mêla, puis la roula autour d'un pieu, et enleva cette masse, dont le poids était de 250 kilogrammes, à 13 mètres de hauteur, et la lança à 150 pas de distance. Il fallut plusieurs heures pour démêler cette masse semblable à un immense écheveau de fil embrouillé.

§ 7. *Phénomènes optiques de l'atmosphère.*

TRANSPARENCE DE L'AIR. — Quoique l'air soit un des milieux les plus transparents qui nous soient connus, il absorbe une partie des rayons lumineux qui le traversent. Ainsi, lorsque la Lune et le Soleil passent au méridien, leur lumière est éblouissante, tandis qu'on peut fixer même le Soleil quand il est à l'horizon; cela tient uniquement à ce que, dans le second cas, la lumière traverse une plus grande épaisseur d'atmosphère que dans le premier.

La transparence de l'air varie beaucoup, suivant une foule de circonstances: elle est singulièrement accrue lorsque l'atmosphère est chargée de vapeur aqueuse. Quand l'air occupe un grand volume, il réfléchit surtout le rayon bleu, comme un verre coloré en bleu: de là la couleur azurée du ciel. Ainsi, quand en hiver le soleil est à l'horizon, les rayons bleus du spectre sont tous réfléchis avant que la lumière n'arrive jusqu'à nous, et l'astre nous paraît rouge. Hassenfratz a constaté, par des expériences positives, que le spectre solaire (col. 402), formé par un prisme, était d'autant moins large que le soleil est plus bas.

CRÉPUSCULE. — Quand le soleil se couche, le ciel se teint dans l'occident de couleurs rouges et jaunes; dans l'orient, on remarque une teinte rougeâtre qui atteint son maximum lorsque le soleil descend sous l'horizon; lorsqu'il a disparu, on remarque dans l'est un segment bleu foncé bordé d'une teinte rouge, qui monte peu à peu vers le zénith, tandis que dans l'occident la teinte rouge est de plus en plus foncée. Quelques étoiles deviennent alors visibles, et l'on remarque à l'occident un segment de lueur blanchâtre, que Brandes a désigné sous le nom de *lueur crépusculaire*. Celle-ci s'éteint à son tour et même les étoiles de sixième grandeur deviennent visibles: c'est la fin du crépuscule astronomique.

Dans les pays chauds, il n'y a pas de crépuscule. En Dalmatie, il fait nuit une demi-heure après le coucher du soleil; au Chili, au bout d'un quart d'heure, et à l'équateur après quelques minutes, suivant M. de Humboldt.

Le crépuscule dure au contraire très-longtemps dans les pays froids où la lumière est réfléchie par les particules aqueuses et glacées qui nagent dans l'atmosphère. Chacun sait que, dans un même lieu, les apparences de l'aurore et du crépuscule varient d'une saison et même d'un jour à l'autre.

Lorsqu'après le coucher du soleil, le ciel est couvert d'une teinte pourprée, on peut prédire le beau temps pour le lendemain; c'est le contraire, lorsque la teinte est blanchâtre et jaunâtre, surtout lorsque cette teinte est assez vive pour que le soleil paraisse blanchâtre.

SCINTILLATION DES ÉTOILES. Elle est beaucoup plus sensible dans les étoiles fixes que dans les planètes. On la remarque principalement quand elles s'inclinent vers l'horizon, et, suivant Kaemtz, lorsque des vents violents règnent dans les régions supérieures de l'atmosphère.

Entre les tropiques, cette scintillation est presque nulle; suivant Humboldt et La Condamine, elle paraît due à ce que la densité des couches atmosphériques varie à chaque instant, ce qui fait varier en même temps la réfraction des rayons stellaires. Les changements dans l'intensité et la couleur de ces rayons sont dus, comme M. Arago l'a prouvé, à des phénomènes d'interférence (col. 405).

MIRAGE. — Quand l'air est calme, des objets éloignés, examinés à travers un télescope, paraissent osciller; s'ils sont petits, ils paraissent doubles, triples et même quadruples. Le même phénomène se produit dans les couches échauffées par un terrain sablonneux; des arbres, des hommes paraissent se réfléchir dans une eau tranquille: telles sont les illusions du mirage qui tourmentent les voyageurs altérés dans les déserts brûlants de l'Afrique.

Si la terre est plus froide que l'atmosphère, les objets paraissent élevés au-dessus de leur position; c'est ainsi que Scoresby, M. Bravais et d'autres ont observé que les côtes paraissent souvent élevées dans le nord au-dessus de leur position. Les objets sont déformés et accompagnés d'une image dont les proportions sont moindres; enfin l'image renversée des navires, qui sont au-dessous de l'horizon apparent, se dessine sur le ciel avec une exactitude scrupuleuse.

DES HALOS EN GÉNÉRAL. — Lorsque la lumière provenant d'un astre quelconque est réfléchie par des particules d'eau et de glace, il en résulte des halos. Ceux-ci se distinguent suivant leur grandeur et leurs causes en *couronnes* et en *halos* proprement dits. Les *couronnes* se montrent lorsque des nuages légers ou des brouillards passent devant le soleil. Elles sont plus faciles à apercevoir autour de la lune qu'autour du soleil, dont la lumière éblouit le plus souvent le spectateur. On ne peut observer ces dernières qu'à travers un verre noirci à la fumée. Les plus belles couronnes solaires se forment dans les brouillards qui s'élèvent pendant la nuit du fond des vallées, ou au milieu de cirrocumulus légers et mal circonscrits. Ces couronnes se composent de plusieurs cercles concentriques de couleurs différentes. On voit, à partir du soleil, un premier cercle composé de bleu, de blanc et de rouge; un second, de rouge foncé, bleu, vert, jaune pâle et rouge; un troisième, de bleu pâle et de rouge faible.

Lorsque le soleil est près de l'horizon et que l'ombre de l'observateur tombe sur de l'herbe, des champs de blé, une surface couverte de rosée, un nuage ou un brouillard, on remarque autour de l'ombre une lumière particulière fort vive, surtout dans le voisinage de la tête. Ce phénomène est commun dans les mers polaires. Un observateur placé dans la hune du mât de misaine voit souvent 4 à 5 cercles dessinés sur la brume.

Bouguer dans les Cordillières, Ramond dans les Pyrénées, de Saussure et Kaemtz dans les Alpes, ont fait des observations analogues.

Halos, Parhélies et Cercles parhéliques. — Ils n'existent que lorsque l'air est rempli de particules glacées. On remarque d'abord un grand cercle vertical dont le soleil est le centre. Ce cercle, appelé *halo*, est coupé par un autre cercle horizontal qui passe par le centre du premier ; au point d'intersection des deux cercles sont des surfaces irrégulières lumineuses appelées *parhélies*. Ce cercle horizontal est toujours blanc. Souvent on observe plusieurs parhélies placées sur ce cercle à des distances variables du halo blanc; puis des portions de cercle tangentes à la partie supérieure du halo, et enfin des cercles circum-zénitaux colorés.

Il est plus rare de voir des cercles verticaux passant par le soleil.

Ces phénomènes sont souvent suivis de mauvais temps et d'orages.

L'Arc-en-ciel paraît lorsque les rayons du soleil à l'horizon viennent frapper sur des gouttes de pluie. Il se compose ordinairement de deux arcs : l'un, extérieur, est formé de haut en bas des couleurs suivantes : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge. Dans l'arc intérieur qui est moins visible, les couleurs se suivent dans un ordre inverse.

Le centre de l'arc-en-ciel est toujours placé sur la ligne qui passe par le centre du soleil et l'œil de l'observateur.

§ 8. *Magnétisme terrestre.*

Observation de l'aiguille aimantée. — Une aiguille magnétique librement suspendue par un fil de cocon de ver à soie finit par se placer de manière à ce que l'une de ses extrémités se dirige sensiblement vers le nord. On nomme *déclinaison* ou *variation* l'angle que l'aiguille aimantée fait avec le méridien astronomique de lieu : toutefois il est certains points sur le globe où sa direction coïncide rigoureusement avec celle du méridien astronomique; ces points réunis par des lignes constituent les *lignes sans déclinaison.*

La déclinaison varie aussi dans la série des siècles : ainsi, à Paris, elle était de 11°,30′ à l'est en 1580, nulle en 1663, et maintenant elle est de 20° à l'ouest. Au Groenland, l'aiguille se dirige exactement vers l'ouest; sa déclinaison est donc de 90°. Si l'on examine une aiguille magnétique d'heure en heure ou de cinq minutes en cinq minutes, on verra qu'elle change constamment d'azimuth en s'écartant de sa position ; ces déviations sont à Paris de 16' au plus, de 8' au moins ; c'est ce qu'on nomme la *variation diurne.*

MM. Gauss et Weber ont imaginé un appareil au moyen duquel les plus petites variations peuvent être mesurées. Il se compose d'une grande aiguille magnétique très-lourde, suspendue à un fil attaché au plafond d'une grande chambre ; cette aiguille porte un miroir, qui réfléchit une règle divisée, placée devant une pile. L'observateur lit les divisions réfléchies par le miroir, au moyen d'un théodolite placé sur la pile. Cette aiguille, qu'on suspend dans une salle bien close ou dans une cave, a le grand avantage de n'être pas influencée par les courants d'air et de pouvoir être observée de loin, sans que le corps de l'observateur ou le fer qu'il porte accidentellement sur lui puisse contrarier l'action du magnétsime terrestre.

A des époques fixes on observe cet instrument de cinq minutes en cinq minutes pendant 36 heures dans un grand nombre de villes, et on a aussi obtenu des courbes de *variation diurne* qui diffèrent peu entre elles depuis Milan jusqu'à Upsal. Mais plus au nord, l'influence des aurores boréales se fait sentir d'une manière très-énergique, et altère le parallélisme de ces courbes.

Si l'on perce une aiguille magnétique par le milieu et qu'on y introduise un axe horizontal bien uni, on verra que dans nos contrées elle ne sera pas parallèle à l'horizon, mais le pôle nord plongera, et l'aiguille formera avec lui un angle de 70° environ. C'est ce qu'on nomme l'*inclinaison magnétique*. Elle varie aussi suivant les pays, et devient plus forte à mesure qu'on s'avance vers le nord.

Près de l'équateur on trouve une ligne sans inclinaison, presque parallèle à la ligne équinoxiale terrestre, et qu'on nomme *équateur magnétique.*

Au sud de cette ligne, c'est le pôle sud de l'aiguille qui s'abaisse.

La terre est donc un gros aimant qui agit sur notre aiguille et dont les pôles paraissent situés non loin des pôles géographiques, sans toutefois coïncider avec eux.

L'intensité de la force qui détermine l'inclinaison et la déclinaison magnétiques, varie avec la distance aux pôles magnétiques. Pour la mesurer, on opère comme pour la pesanteur. On dévie une aiguille magnétique de sa direction et l'on estime la rapidité de ses oscillations par le nombre d'oscillations qu'elle fait en un temps donné; cette aiguille, transportée dans différents lieux, donne (en supposant que son magnétisme soit toujours resté le même) le rapport qui existe entre l'intensité de la force magnétique dans ces différentes localités.

Si l'on réunit par des lignes les points où cette intensité est la même, on obtiendra des lignes isodynamiques qui, d'après M. Duperrey, suivent à peu près la direction des lignes isothermes.

Aurores boréales. — Dans nos contrées on en voit assez rarement : dans le nord elles sont très-communes ; sous le 70e degré de latitude, il est rare qu'une nuit claire se passe sans qu'il y ait au moins quelques lueurs.

Du 12 septembre 1838 au 18 avril 1839, M. Bravais en a compté 153, qui ont été vues à Bosekop en Laponie.

Pour qu'elles soient visibles, il faut que le soleil ait une dépression de 8 à 9 degrés au-dessous de l'horizon.

Elles se présentent sous deux aspects différents, l'arc et le rayon. L'arc est séparé de l'horizon par un segment qui paraît d'une couleur très-foncée. L'arc est d'un blanc brillant, passant quelquefois au bleuâtre ou jaunâtre nuancé de vert ; son bord inférieur est nettement dessiné, tandis que le supérieur se confond avec la lueur qui éclaire tout le ciel.

Souvent l'aurore se montre sous forme de grands rayons blancs qui montent de l'horizon vers le zénith, qui se divisent ou se montrent sous forme de draperies étincelantes qui paraissent agitées par le vent.

Il se forme souvent aussi des couronnes zénithales ornées des plus belles couleurs et d'où les rayons semblent s'élancer.

Le nombre des aurores boréales paraît n'être pas le même à toutes les époques: ainsi on en a peu vu depuis 1752 jusqu'en 1820; mais depuis cette époque, elles sont devenues très-communes.

D'après les observations parallactiques des membres de la commission du nord qui ont passé l'hiver de 1838 à 1839 à Bosekop, sous le 70° de latitude, ce phénomène se passe aux limites de l'atmosphère.

Aucun bruit n'accompagne les aurores boréales, quoiqu'on ait dit généralement le contraire. Les aurores boréales exercent une grande influence sur l'aiguille aimantée; elles la dévient de sa direction habituelle. A Bosecop, cette déviation a été de 4° 30' vers l'ouest le 22 février 1839.

La déviation est en rapport avec l'intensité de l'aurore, et toutes les perturbations de l'aiguille sont probablement dues à cette cause.

L'intensité magnétique augmente aussi avant et pendant les aurores. Tout prouve donc que ce phénomène est intimement lié au magnétisme terrestre.

§ 9. *Indications bibliographiques.*

La météorologie est une science toute moderne et dont les éléments sont dispersés dans une foule de recueils scientifiques. Les ouvrages où l'on trouve le plus de documents utiles et dignes de confiance sont: les *Voyages dans les Alpes*, par de Saussure; les *Études sur les modifications de l'atmosphère*, par Deluc; les *Voyages au Nord* de Scoresby Ross et Parry; ceux de M. de Humboldt en Amérique, et son *Mémoire sur les lignes isothermes;* les Mémoires de Ramond; les Notices si lucides publiées par M. Arago dans les *Annuaires du bureau des longitudes;* les travaux de M. de Buch et Dove, qui font partie de ceux de l'académie de Berlin; le *Voyage autour du monde* de M. Erman fils; les *Traités de physique* de MM. Pouillet et Peclet; les *Éléments de physique du Globe et de météorologie* de M. Lecoq; les *Observations sur les trombes* de M. Peltier; le grand *Traité de météorologie*, en trois volumes, de Kaemtz; et enfin le *Cours complet de météorologie*, en un volume, du même auteur, auquel nous avons emprunté la presque totalité des faits que nous avons rapportés, dont M. Paulin publie la traduct. faite par nous.

IX. PHYSIQUE.

§ 1. *Préliminaires.*

But et divisions. — La physique (du grec *phusis*, nature) a pour but l'étude des propriétés des corps et des actions qu'ils exercent les uns sur les autres, lorsque ces actions n'altèrent pas leur nature intime.

Les lois générales de l'équilibre et du mouvement peuvent donc être considérées comme une dépendance de la physique générale; mais comme elles ont été exposées dans la mécanique, nous n'avons plus à les examiner qu'en ce qui concerne leurs applications aux divers modes d'existence des corps (solides, liquides ou gazeux).

La matière agit sur nous de manière à produire des impressions essentiellement distinctes, qui peuvent toutes se rapporter aux cinq *sens*, du *toucher*, de l'*ouïe*, de la *vue*, du *goût* et de l'*odorat*. Les phénomènes qui agissent sur les trois premiers sens sont les seuls qui puissent être définis et analysés rigoureusement sinon directement, au moins par quelques-uns de leurs effets, et dont nous sachions mesurer et comparer les causes. On ne possède encore aucun moyen exact ni même approché pour comparer les odeurs ni les saveurs; de sorte que les phénomènes qui se rattachent exclusivement à ces deux sensations se trouvent en dehors du domaine de la physique, dans l'état actuel de la science.

Parmi les divers modes d'action de la matière, il y en a qui s'adressent à un seul de nos sens: telles sont les sensations de la *chaleur* pour le toucher, du *son* pour l'ouïe, de la *lumière* pour la vue. L'*électricité* agit principalement sur le toucher, en donnant lieu à des commotions parfois si violentes qu'elles déterminent la mort; elle peut aussi produire du bruit, de la lumière, des saveurs et même des odeurs particulières. Le *magnétisme* de l'aimant paraît exercer dans quelques cas une action très-faible, mais appréciable, sur le système nerveux de certains individus: nous n'entendons pas parler ici du *magnétisme animal*.

Quelle que soit la manière dont ces différentes propriétés de la matière affectent *directement* chacun de nos sens, elles produisent *indirectement* des effets qu'il est possible de définir géométriquement et de mesurer avec exactitude. C'est uniquement sous ce rapport que la physique considère la chaleur, l'électricité, le magnétisme, le son et la lumière, qui forment autant de branches distinctes de cette science.

Propriétés générales des corps. — La *divisibilité* est la propriété que possèdent tous les corps de pouvoir être partagés en fragments de plus en plus petits jusqu'à une limite inférieure variable, et dont la petitesse étonne l'imagination dans certains cas.

C'est ainsi que Wollaston a fait des fils de platine de 1/1200 de millimètre de diamètre. Or les diamètres des brins de laine ordinaire, de mérinos et de soie sont respectivement de 5/100, de 2/100 et de 1/100 de millimètre. Aussi, quoique le platine soit le plus pesant de tous les corps connus, 100 kilomètres de longueur d'un tel fil ne pèsent guère plus qu'une pièce d'un franc (5 grammes).

Les bulles de savon n'ont ordinairement que 1/10000 de millimètre d'épaisseur auprès de leur sommet, et cette épaisseur se réduit à 1/100 000 quand elles laissent voir une tache noire quelques instants avant d'éclater.

Les ailes transparentes des insectes ne sont guère plus épaisses.

Une goutte d'un millimètre cube de sang humain suspendue à la pointe d'une aiguille contient près d'un million de globules qui nagent dans le *sérum* (col. 510).

Par *porosité*, on désigne une propriété qui paraît essentielle à la matière, et qui consiste en ce que les particules les plus petites qui la constituent sont séparées par des vides ou *pores*, dont une foule de phénomènes manifestent l'existence, même dans des cas où ces pores échappent à la vue.

C'est ainsi qu'une pierre siliceuse appelée *hydrophane*, translucide dans son état ordinaire, laisse dégager des bulles d'air lorsqu'on la plonge dans l'eau et devient presque aussi transparente que le verre lorsqu'elle est imbibée d'eau.

Il y a une autre expérience curieuse faite en 1661, par l'académie *del cimento* à Florence. Une sphère d'or ayant été exactement remplie d'eau, fut comprimée de manière à prendre une forme aplatie. Comme la surface de la boule d'or restait la même, et que la sphère est, de tous les corps solides de même surface, celui qui renferme le plus grand volume, l'eau, soumise à une énorme compression par le fait seul du changement de volume, s'échappa, sans crever la boule, en laissant apercevoir, sur tous les points de la surface, des gouttelettes semblables à celles de la rosée.

Les propriétés qui se rapportent aux changements de volume des corps sont la *compressibilité*, l'*élasticité*, la *dilatabilité*. Les gaz jouissent au plus haut degré de ces trois propriétés à la fois. Les corps solides les possèdent tous à des degrés divers. Enfin les liquides dans l'état ordinaire ne sont que très-peu compressibles et élastiques ; mais il y a des circonstances où on peut les soumettre à une dilatation très-considérable sans qu'ils cessent d'être liquides.

Actions moléculaires. — Il faut mettre au premier rang de celles-ci la *capillarité* et les phénomènes qui en dépendent. Les tubes *capillaires*, c'est-à-dire, de très-petit diamètre intérieur, jouissent de la propriété, lorsqu'on les plonge dans un liquide par leur extrémité inférieure, de donner lieu à une ascension ou à une dépression du liquide au-dessus ou au-dessous de son niveau, suivant qu'ils sont de nature à mouiller ou à ne pas mouiller la substance de ce tube. Ainsi, pour un tube de verre plongé dans l'eau, il y a ascension; et dépression si le tube est plongé dans le mercure.

Les longueurs des colonnes soulevées ou déprimées sont en raison inverse des diamètres des tubes. Cette longueur, pour de l'eau à 8°,5 . dans un tube de 0 m. 00129 de diamètre intérieur, a été trouvée de 0 m. 02316.

Suivant qu'il y a ascension ou dépression, le sommet de la colonne liquide dans le tube est terminé par un *ménisque* ou calotte sphérique concave ou convexe.

C'est à la capillarité qu'est due l'ascension de l'eau dans un morceau de sucre que l'on y plonge seulement par sa partie inférieure, et celle de l'huile dans les mèches de lampe.

L'attraction ou la répulsion que des corps éprouvent à la surface des liquides sur lesquels ils flottent; la propriété que possèdent certains corps, plus denses que l'eau, d'y surnager, dans certaines circonstances, comme cela a lieu pour des aiguilles très-fines et bien polies, dépendent de la même cause.

On doit à M. Dutrochet la découverte d'un ordre de faits des plus curieux, qu'il a caractérisés par le nom d'*endosmose* (col. 511 et 512), et qui paraissent se rattacher à une modification de l'action capillaire. Le phénomène fondamental consiste en ce qu'un tube terminé à sa partie inférieure par un entonnoir contre lequel on a applique exactement une cloison formée d'une membrane de vessie, par exemple, étant rempli d'alcool et plongé dans un vase qui contient de l'eau au-dessus de l'origine de l'entonnoir sans que la cloison touche le fond du vase, l'eau s'infiltre au travers de cette cloison, malgré la pression qui agit en sens contraire, elle se mêle à l'alcool et le fait remonter dans le tube jusqu'à un niveau de beaucoup plus élevé que ne pourrait le faire l'attraction capillaire du tube dans les circonstances ordinaires.

Il y a endosmose, c'est-à-dire production d'un phénomème analogue, de l'eau à l'eau gommée, à l'acide acétique, à l'acide nitrique et surtout à l'acide hydrochlorique.

Diverses substances animales et végétales ou même minérales, mais à un beaucoup moindre degré, jouissent de la propriété de la vessie qui sert de membrane.

§ 2. *De l'équilibre et du mouvement des liquides et des gaz.*

Hydrostatique. — On appelle ainsi la partie de la mécanique où l'on considère les conditions d'équilibre des liquides.

Le principe fondamental qui régit ces conditions est celui de l'*égalité de pression*. Il consiste en ce que les liquides transmettent également dans tous les sens les pressions que l'on exerce en l'un quelconque des points de leur surface. Il est facile de conclure de là que, pour qu'un liquide soit en repos, il faut, 1° que la surface supérieure de ce liquide soit en chacun de ses points perpendiculaire à la résultante des forces qui le sollicitent; 2° qu'un point quelconque à l'intérieur du liquide éprouve dans tous les sens des pressions égales et contraires.

C'est en vertu de la première de ces conditions que la surface des eaux tranquilles est, dans chaque lieu de la terre, sensiblement plane et perpendiculaire à la direction du fil à plomb, soit dans le même vase, soit dans des vases communiquant librement entre eux.

Le principe d'égalité de pression conduit aussi à des conséquences remarquables pour la mesure des pressions exercées par les liquides sur les parois des vases qui les renferment. Ainsi, la pression de haut en bas qu'éprouve la paroi d'un vase est tout à fait indépendante de la forme de ce vase et toujours égale au poids d'une colonne de même liquide ayant pour base la paroi et pour hauteur la hauteur du niveau supérieur.

De là une expérience curieuse. Un tonneau est rempli d'eau ; à la bonde on adapte et on lute un tube cylindrique de quelques centimètres seulement de diamètre, dans lequel on verse encore de l'eau. Lorsque le niveau supérieur du liquide, dans ce tube, a atteint quelques mètres, le tonneau crève, absolument comme s'il était surmonté d'un tube dont le diamètre fût égal à celui du tonneau lui-même.

Le *centre de pression* est le point d'application de la résultante de toutes les pressions exercées en chacun des points d'une des parois du vase. Il est toujours plus bas que le centre de gravité avec lequel il ne coïncide que dans le cas d'une paroi horizontale.

On peut, à la rigueur, comprendre dans l'hydrostatique l'équilibre des gaz ou *aérostatique*. Il n'y a, pour ces fluides soumis à l'action de la pesanteur, qu'une seule condition d'équilibre, savoir que leur *force élastique* soit la même dans toute l'étendue d'une couche de *niveau*, c'est-à-dire parallèle à la surface du sphéroïde terrestre.

Cette force élastique ou *tension* est la mesure de la pression que le gaz éprouve en chaque point: elle est due à la propriété fondamentale des gaz dont les molécules tendent à s'éloigner sans cesse les unes des autres. Elle donne une idée très-nette du principe de mécanique que : « la réaction est toujours » égale à l'action.»

Pour la stabilité de l'équilibre des gaz et des liquides, il faut encore que les couches les plus denses soient placées au-dessous des couches plus légères.

L'air que nous respirons et au milieu duquel nous vivons se manifeste à nous par la résistance qu'il oppose aux mouvements brusques, par la couleur d'un beau bleu qu'il réfléchit lorsqu'il est pur et non voilé par des nuages; par son poids même, lorsqu'on compare le poids d'un ballon suffisamment grand qui en est plein, au poids du même ballon vide.

C'est à Galilée qu'est due la première idée de la pesanteur de l'air. Des fontainiers de Florence, ayant remarqué avec surprise que l'eau ne voulait pas s'élever dans un corps de pompe qui avait plus de 10 m. 30 de hauteur, avaient consulté ce grand homme auquel l'explication fondée sur la prétendue horreur du vide que manifeste la nature ne pouvait suffire. Galilée supposa donc que la pesanteur de l'air était la véritable cause du phénomène. Torricelli le prouva en plongeant dans une cuvette de mercure l'extrémité inférieure d'un tube de verre d'environ 1 mètre de hauteur, qu'il avait complétement rempli du même métal et dont l'extrémité supérieure était bouchée. Ce liquide, qui est 13 fois et demie environ plus dense que l'eau, ne descendit dans le tube qu'à une hauteur telle que la différence du niveau supérieur au niveau dans la cuvette fût de 0 m. 76, ou d'environ 13 fois et demie moindre que la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre au poids de l'atmosphère.

L'appareil de Torricelli est le *baromètre* d'un si grand usage dans la MÉTÉOROLOGIE (voy. col. 370). Pascal confirma les idées de Galilée et de Torricelli par sa fameuse expérience du Puy-de-Dôme. La hauteur barométrique fut trouvée décroissante depuis la base jusqu'au sommet de la montagne, tandis qu'une vessie à moitié remplie d'air se gonflait de plus en plus. L'un et l'autre effet étaient dus à la diminution de hauteur et par conséquent de poids de la colonne atmosphérique comprimante.

On a donné différentes formes aux baromètres, on en fait *à cadran, à siphon, à cuvette fixe* et *à cuvette mobile*. Le baromètre de M. Gay-Lussac, avec une modification ingénieuse due à M. Bunten, est le moins imparfait des baromètres portatifs à siphon. Mais les baromètres à cuvette mobile, dans le système Fortin, sont bien préférables sous le rapport de l'exactitude et de la facilité du transport en voyage. M. le commandant Delcros, juge compétent en pareille matière, affirme que les baromètres du système Fortin modifié, tels que les exécute aujourd'hui l'habile artiste Ernst, sont les meilleurs qui aient jamais été faits. Leur prix n'est que de 120 à 130 francs.

On a cru longtemps que les fluides élastiques soumis à des pressions variables se dilatent ou se contractent tous suivant une loi connue sous le nom de *loi de Mariotte*, et qui consiste en ce que les volumes d'une même masse de gaz sont en raison inverse des pressions qu'ils supportent. MM. Dulong et Arago l'ont constatée, pour l'air, jusqu'à la pression de 24 atmosphères. On peut encore l'énoncer en disant que les densités des gaz sont proportionnelles aux pressions qu'ils supportent. Mais cette loi remarquable est démentie par des expériences récentes pour un certain nombre de gaz, notamment pour le gaz acide sulfureux, pour le gaz sulfhydrique, pour le gaz acide carbonique, etc.

Tout corps solide plongé dans un fluide est poussé de bas en haut avec une force égale au poids du volume de fluide qu'il déplace. Tel est le *principe d'Archimède*, dont la découverte causa, dit-on, tant de joie à ce grand géomètre, qu'il sortit du bain où il était, et courut dans les rues de Syracuse en criant : *Euréka! euréka!* (j'ai trouvé! j'ai trouvé!)

Ce principe a plusieurs conséquences importantes. Il explique d'abord l'ascension des *aérostats*, dont le père Lana avait indiqué la possibilité en 1670, et que nos habiles compatriotes Montgolfier et Charles ont inventés de nouveau et exécutés d'une manière si remarquable. La *montgolfière* se composait d'un globe de papier ou de taffetas vernis, ouvert à sa partie inférieure et portant un réchaud léger en fils métalliques, où brûlait soit de la paille hachée, soit du papier. L'air chaud étant beaucoup plus léger que l'air froid, à volume égal, lorsque le globe atteint des dimensions suffisantes, la différence de pression détermine l'ascension de la montgolfière et des poids qui y sont attachés. C'est Charles qui a eu l'idée de remplacer l'air chaud par de l'hydrogène, gaz 14 fois plus léger que l'air. Un globe de 1000 m. cubes rempli d'hydrogène peut enlever un poids de 1209 kilo., 699.

Il y a deux conditions d'équilibre pour les corps flottants comme pour les corps plongés dans un fluide : 1° le poids du corps doit être égal au poids du fluide déplacé; 2° le centre de gravité du corps et celui du fluide déplacé doivent se trouver sur une même verticale. Seulement, dans le cas des corps plongés, pour que l'équilibre soit stable, il faut que le premier centre de gravité soit au-dessous du second; et dans le cas des corps flottants, il suffit que le centre de gravité du corps soit au-dessous du *métacentre*, point qui est situé à la rencontre de la ligne passant par les deux centres de gravité dans la position d'équilibre, avec la verticale menée par le centre de gravité du nouveau volume de liquide déplacé, lorsque l'on vient à écarter un peu le solide de sa première position d'équilibre.

HYDRODYNAMIQUE. — On appelle ainsi la partie de la mécanique ou de la physique où il est question du mouvement des fluides.

Des considérations théoriques ont conduit Torricelli à établir ce principe fondamental : « Les molécules en sortant d'un orifice en « mince paroi ont une vitesse proportion- « nelle à celles qu'elles auraient si elles « étaient tombées librement dans le vide, « d'une hauteur égale à la hauteur du niveau « au-dessus du centre de l'orifice, ou plus « généralement d'une hauteur égale à la dif- « férence des niveaux extérieurs ou intérieurs « du liquide pressant sur l'orifice.» D'où il suit que, pour un même liquide, les vitesses d'écoulement sont comme les racines carrées de ces différences de niveau.

La *vitesse théorique* d'écoulement v est celle d'un corps tombant dans le vide d'une hauteur h égale à la différence de niveau susdite ou à la *charge* sur le centre de l'orifice. Cette vitesse est donnée par la formule

$$v = \sqrt{2gh}, \text{ d'où } h = \frac{v^2}{2g}$$

on a $g = 9$ m., 8089. La table de la colonne 1519 du SUPPLÉMENT donne les vitesses théoriques et les hauteurs correspondantes entre des limites assez étendues.

La *dépense théorique* ou la quantité de liquide écoulé pendant une seconde est égale au produit de v par la surface de l'orifice. Mais un phénomène curieux, connu sous le nom de *contraction de la veine fluide*, complique les résultats, et la dépense réelle s'obtient en multipliant la dépense théorique par un certain coefficient dont la valeur varie avec la grandeur de l'orifice ou de l'ajutage et avec la charge au-dessus du centre de l'orifice. La moyenne de ce coefficient est de 0,62 environ, ou de 3/5 en nombres ronds.

Les ajutages cylindriques donnent une dépense plus considérable que les orifices en mince paroi ; le coefficient est d'environ 0,8.

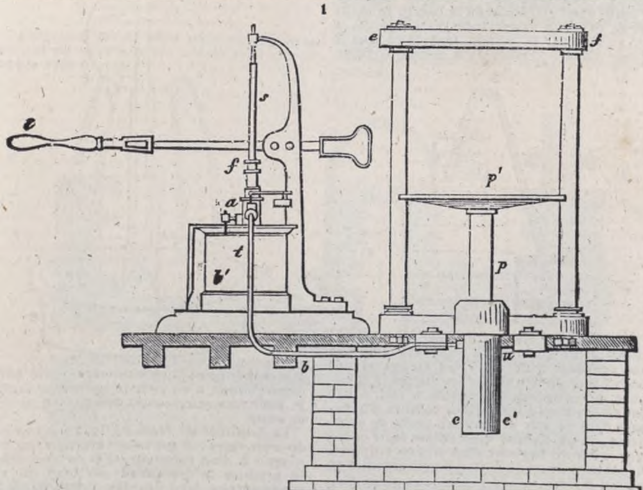
Les ajutages coniques légèrement convergents donnent lieu à un coefficient encore plus fort ; sa valeur, pour un angle de convergence de 12°, a été trouvée de 0,95.

De tous les ajutages, ceux qui donnent la plus grande dépense sont des troncs de cône adaptés au réservoir par leur petite base. Cette propriété était si bien connue des anciens Romains, que quelques-uns des citoyens auxquels on avait concédé des prises d'eau dans les réservoirs publics trouvaient le moyen d'accroître le produit de leur concession par l'emploi de ces ajutages. La fraude devint telle qu'une loi en défendit l'usage ; à moins qu'ils ne fussent placés à 15 m. du réservoir.

APPLICATIONS DIVERSES DES PRINCIPES D'HYDROSTATIQUE ET D'HYDRODYNAMIQUE. — Ces applications sont très-nombreuses, surtout lorsque l'on a égard aux phénomènes qui ont lieu sous l'influence de la pression atmosphérique.

La *presse hydraulique*, dont l'idée première est due à notre célèbre Pascal, et qui a été réalisée par le mécanicien anglais Bramah, est fondée sur le principe d'égalité de pression des liquides. En vertu de ce principe, une pression d'un kilogramme par centimètre carré, exercée sur la surface d'un liquide dans un vase, se fera sentir sans altération sur tous les points de la surface du même liquide dans un autre vase communiquant avec le premier. Donc, si la surface du niveau dans le second vase est centuple de ce qu'elle est dans le premier, les pressions seront dans le même rapport ; et avec un effort d'un kilogramme on en obtiendra un de cent. La fig. 1 représente l'élévation générale de la presse de Bramah ; *s* est le piston qui agit dans le petit corps de pompe ou tube cylindrique *f* ; *p* est le piston qui se meut dans le grand corps de pompe *cc'* : *atbu* est un tube de communication entre les deux corps de pompe. Le levier du second genre *l* étant soulevé, soulève aussi le piston *s*, et l'eau de la bâche *b'* est aspirée dans le corps de pompe *f*. Lorsque l'on abaisse le levier *l*, une soupape qui se ferme empêche l'eau de redescendre dans la bâche *b'*, et la force, en passant par le tube *tbu*, à agir à l'extrémité inférieure du piston *p*, auquel est adapté le plateau *p'*. *ef* est un autre plateau contre lequel les objets à comprimer sont poussés par *p'*. Un homme pouvant exercer facilement un effort de 300 kilogrammes sur le piston *s*, au moyen du levier *l*, si la surface de *p* est 100 fois celle de *s*, l'effort exercé en *p'* sera de 30 000 kilogrammes.

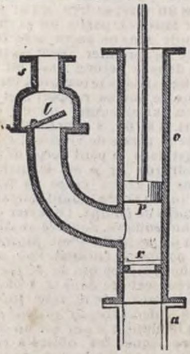
1



Parmi les *pompes* qui sont les machines les plus usitées pour l'élévation de l'eau, on distingue la *pompe foulante*, la *pompe noyée*, la *pompe aspirante*, la *pompe des prêtres* ou à *soufflet*, la *pompe de Lahire*, la *pompe de Bramah*, et enfin la *pompe aspirante et foulante* représentée dans la fig. 2 ; *a* est un tuyau d'aspiration plongé dans l'eau. Lorsqu'on fait marcher de bas en haut le piston *p*, mobile dans le corps de pompe *c*, la soupape *r* se soulève et l'eau monte dans le tube *a*. Lorsque le piston redescend, la soupape *r* s'abaisse, et l'eau qui est au-dessus de cette soupape est refoulée dans le tube latéral, soulève à son tour la soupape *l* et passe dans le tuyau d'ascension *s*.

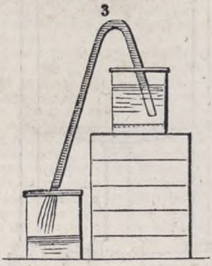
La *machine pneumatique* est une véritable pompe à air au moyen de laquelle on fait le vide sous une cloche disposée à cet effet sur un plateau.

2



Le *siphon* (fig. 3) est un tube recourbé dont les deux branches sont inégales. S'il a été amorcé, c'est-à-dire rempli de liquide par un moyen quelconque, et qu'on ne débouche l'extrémité de la longue branche qu'après que l'extrémité de la courte branche plonge dans un vase rempli d'un liquide, le vase se vide par le siphon jusqu'à ce que le liquide affleure l'orifice de la courte branche.

3



Le siphon est très-usité dans les manipulations chimiques. Il a aussi été employé avec avantage pour vider des étangs et des bassins sans endommager les digues. L'ignorance de cet appareil si simple a fait croire tout récemment à un certain nombre d'habitants d'un de nos principaux ports de commerce, qu'un moteur quelconque était caché dans la courte branche d'un siphon employé, par les ingénieurs du port, à l'épuisement d'un *bassin à flot.*

Les *vases de Tantale,* représentés dans les fig 4 et 5, offrent un jeu qui est une spirituelle application du siphon. Le liquide que l'on verse dans ces verres, montant peu à peu dans les siphons intérieurs qu'ils contiennent, amorce ces siphons. A peine a-t-il dépassé les sommets, que les verres se vident par les siphons, dont l'orifice inférieur est ouvert aussi bien que l'orifice supérieur.

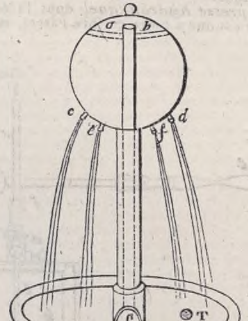
La *fontaine intermittente* (fig. 6) de nos cabinets de physique sert à expliquer d'une manière assez plausible le secret des intermittences de certaines sources. La partie

4

5

supérieure de l'appareil est un réservoir rempli d'eau jusqu'au niveau *ab.* Un tube vertical a son orifice supérieur ouvert au-dessus du liquide *ab*, et son orifice inférieur est aussi ouvert. Le fond est double, et l'orifice T permet à l'eau qui tombe dans le premier de s'écouler dans le second AB avec moins de vitesse qu'elle n'arrive par les ajutages *c, e, f, d.* L'écoulement du réservoir supérieur a lieu jusqu'à ce que cette eau obstruant l'orifice C du tube vertical, la pression en *ab* devient moindre que la pression

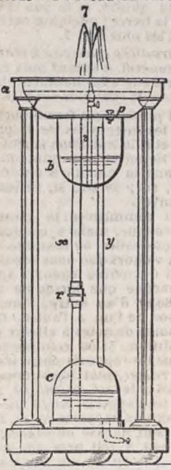
6



atmosphérique : il recommence après que le dégorgement a eu lieu au moyen de l'orifice T, pour être interrompu de nouveau, et ainsi de suite.

La *fontaine de Héron* (fig. 7) se compose de trois vases : d'un vase supérieur *a*, d'un moyen *b*, d'un inférieur *c* ; et de trois tubes : le premier *x* descendant du fond du vase supérieur au fond du vase inférieur, le second *y* s'élevant du sommet du vase inférieur au-dessus du vase moyen, et le troisième *z* s'élevant du fond du vase moyen jusqu'à 2 ou 3 décimètres au-dessus du vase supérieur; c'est celui-ci qui forme le jet de la fontaine de Héron. On met de l'eau dans le vase *b* au moyen du bouchon *p* que l'on ferme ensuite ; on met pareillement de l'eau dans le vase *a* ; on ouvre le robinet *r*, et le liquide s'élance jusqu'à un point qui est autant élevé au-dessus du niveau du vase moyen que le niveau du vase supérieur est lui-même élevé au-dessus du niveau du vase inférieur.

7

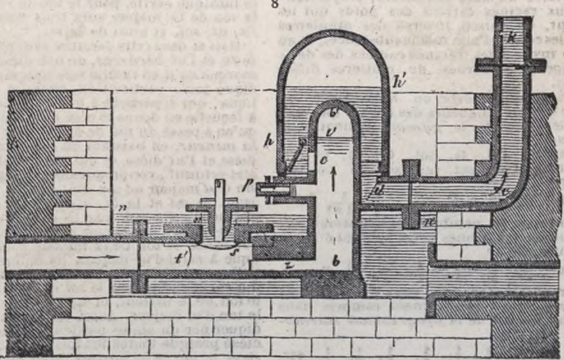


Cette pression est en effet celle que supporte l'air qui est enfermé dans le vase inférieur et dans le vase moyen.

Le principe de la fontaine de Héron a été utilisé dans beaucoup de circonstances. Une machine d'épuisement employée aux mines de Schemnitz en Hongrie, la machine de Detrouville, le mécanisme des lampes Girard, etc., ne sont que des variétés de cet appareil.

Le *bélier hydraulique*, inventé par Montgolfier en 1797, est l'une des machines d'épuisement les plus remarquables parmi celles où la force motrice est empruntée à une chute d'eau. Elle est fondée sur ce principe que si, deux tubes verticaux communiquant par un tube horizontal, l'eau tombe d'une certaine hauteur dans le premier, et que l'on vienne à fermer brusquement l'issue placée à l'extrémité du tube horizontal au delà du second tube vertical, l'eau refoulée brusquement dans celui-ci y montera à un niveau plus élevé que celui qu'elle occupe dans le premier. *tt'* (fig. 8) est le tuyau horizontal dans lequel se meut l'eau d'une source avec une vitesse dépendant de la hauteur de la chute. Cette eau tend à s'écouler par l'orifice *v* qui la met en communication avec le niveau naturel *n* au-dessous de la chute. Mais la force de la chute ferme la soupape *s*, et l'eau ne pouvant alors trouver issue en *v*, suit le tube *z*, monte en *t'*, soulève le clapet *c*, et de l'intervalle entre les deux cloches en fonte *b'*, *hh'* elle monte dans le tube vertical *dek* à un niveau plus élevé que celui de la source. Arrive un moment où le clapet *c* retombe ainsi que la soupape *s*, de sorte que l'eau de la source communique avec le niveau inférieur *n*. Mais bientôt la force de la chute soulève de nouveau la soupape *s*, et le mouvement d'ascension dans le tuyau *dek* recommence.

8



par un milieu solide, liquide ou aériforme.

On distingue l'*intensité*, le *ton* et le *timbre* des sons. L'intensité tient à l'amplitude des mouvements vibratoires; le ton dépend du nombre de vibrations dans un temps donné, et non de leur amplitude; on ne connaît pas bien les circonstances qui influent sur le timbre.

Le son ne se transmet pas dans le vide. Son intensité augmente ou diminue en même temps que la densité du milieu qui le transmet. De Saussure raconte qu'au sommet du Mont-Blanc un coup de pistolet ne fait pas plus

§ 3. *Acoustique.*

Propagation du son. — Le nom de cette branche de la physique vient du grec *akouô*, j'entends. Elle a pour objet de déterminer les lois du *son* et les phénomènes qui s'y rapportent.

Les sons diffèrent des *bruits* en ce que les sensations produites par ceux-ci ne sont pas exactement comparables entre elles.

Tout son ou bruit a pour cause première un mouvement vibratoire particulier excité dans la matière pondérable, et transmis à l'oreille de bruit qu'un coup de fouet dans la plaine. A 7000 mètres de hauteur, au point le plus élevé qu'aucun homme ait jamais atteint, M. Gay-Lussac a constaté, dans sa célèbre ascension aérostatique, que l'intensité de sa voix était extrêmement affaiblie. C'est en parlant avec de l'air plus ou moins raréfié que les *ventriloques* produisent des illusions parfois si surprenantes.

Chaque vibration d'un corps sonore excite dans l'air une ondulation d'une longueur déterminée.

Tous les sons se propagent avec la même vitesse, dans un même milieu. Cette vitesse est de 340 m. environ par seconde dans l'air a la température de 16°. Nous donnons au Supplement les vitesses du son dans divers liquides et solides.(col. 1528).

L'intensité du son, dans un milieu indéfini, décroît en raison inverse du carré de la distance. Lorsque les ondes sonores passent d'un milieu dans un autre, ou qu'elles rencontrent un obstacle fixe, elles éprouvent une réflexion dirigée de telle sorte que l'*angle de réflexion* soit égal à l'*angle d'incidence.* C'est sur cette propriété et sur la valeur numérique de la vitesse du son dans l'air qu'est fondée l'explication des *échos*.

On observe souvent, à la mer, que les nuages et *à fortiori* que les voiles d'un bâtiment éloigné, lorsqu'elles sont très-tendues, forment des échos assez parfaits. Il y a des échos multiples qui répètent plusieurs fois la même syllabe ou le même mot.

Le *porte-voix*, si usité à bord des navires, est encore fondé sur la réflexion du son.

Vibrations sonores et intervalles musicaux. — Les nombres de vibrations des cordes dérangées de la position d'équilibre sont en raison inverse de leurs longueurs, proportionnels aux racines carrées des poids qui les tendent, en raison inverse des diamètres (pour les cordes d'une même substance), et en raison inverse des racines carrées des densités (pour les cordes de matières différentes).

Avec le *sonomètre* ou *monocorde* on trouve que les longueurs des cordes qui rendent les sons de la *gamme* ordinaire en *majeur*,

ut, ré, mi, fa, sol, la, si, ut

sont respectivement représentées par les nombres

$$1 \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{2}$$

de sorte que les nombres de vibrations correspondant aux mêmes notes peuvent être représentés par

$$1 \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{15}{8}, \quad 2.$$

Ces rapports, et mêmes ceux de la *gamme mineure*, sont implicitement compris dans ceux des termes de la *progression harmonique* (col. 141).

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}, \quad \text{etc.}$$

Car le rapport des 2 premiers termes de cette progression donne 2 ou l'*octave ;* du deuxième au troisième, 3/2 ou la *quinte ;* du troisième au quatrième, 4/3 ou la *quarte ;* du quatrième au cinquième, 5/4 ou la *tierce majeure ;* du cinquième au sixième, 6/5 ou la *tierce mineure ;* du huitième au neuvième, 9/8 ou le *ton majeur ;* du neuvième au dixième, 10/9 ou le *ton mineur.*

Il est très-important de faire observer que tous les sons harmoniques existent simultanément dans les vibrations d'une seule corde. Une oreille exercée saisit, outre le *son fondamental* rendu par une corde de violon ou de basse vibrant sous l'archet, les sons 2 et 4 (octave et double octave), le son 3 ou l'octave de la quinte, et le son 5 ou la double octave de la tierce ; quelques personnes même entendent les sons 6 et 7.

Les *intervalles musicaux* entre deux notes sont, en général, d'autant plus agréables que les rapports entre les nombres de vibrations correspondants sont plus simples.

L'*accord parfait* est formé par trois cordes telles que les intervalles de la première à la deuxième et à la troisième soient respectivement une tierce et une quinte majeures. Il y a donc dans la gamme 3 accords parfaits ; 1° ut, mi, sol ; 2° sol, si, ré (octave) ; 3° fa, la, ut (octave).

On peut commencer la gamme par une note quelconque, mais à condition d'altérer certains intervalles de manière à les rendre égaux aux valeurs que nous avons données ci-dessus, ou du moins égaux à 1/81 près ; car on a remarqué que lorsqu'un intervalle est égal aux 80/81 d'un autre, l'oreille tolère la substitution de l'un à l'autre. On aura donc plus ou moins de notes à altérer pour remplir cette condition. Si on commence par le *sol*, on voit que les rapports entre les 6 notes *sol, la, si, ut, ré, mi*, sont identiques (à 1/81 près) à ceux des 6 notes *ut, ré, mi, fa, sol, la ;* mais pour que les rapports *mi-fa, fa-sol* deviennent égaux aux rapports *la-si, si-ut*, il faut que le *fa* soit haussé ou *diésé ;* ce que l'on obtient aussi à 1/81 près en le multipliant par 25/24. Le *ton* du *sol majeur* ne diffère donc du *ton* d'*ut majeur* qu'en ce que le *fa* ou *note sensible* est diésé. On passera de même du ton de *sol* au ton de *ré* en diésant l'*ut*, ce qui donnera deux dièses *à la clef*, sur la musique écrite, pour le ton de *ré* majeur ; le ton de *la* majeur aura trois dièses, savoir *fa, ut, sol,* et ainsi de suite.

Mais si dans cette dernière gamme on prend le *fa* et l'*ut bécarres*, ou non diésés, on remarque qu'il en résulte une impression mélodique toute particulière, triste et mélancolique, qui appartient à une gamme nouvelle à laquelle on donne le nom de *mineure.* Puisqu'on a passé du ton de *la majeur* au ton de *la mineur*, en baissant ou *bémolisant* le *fa* dièse et l'*ut* dièse, ce qui les a rétablis à leur état primitif, réciproquement on passera du ton d'*ut* majeur au ton d'*ut* mineur en bémolisant le *mi* et le *la*, sans toucher à d'autres notes. On voit par là combien est peu fondé l'usage d'indiquer à la clef de la musique écrite le ton de *la* mineur comme identique à celui d'*ut* majeur. Ils diffèrent essentiellement d'abord par les impressions produites, et ensuite par le *sol* qui est diésé dans le ton de *la* mineur, et qui est bécarre dans le ton d'*ut* majeur. Aussi est-on obligé d'indiquer par un signe particulier que le *sol* est diésé presque toutes les fois qu'il se présente dans le ton de *la* mineur. Nous disons *presque*, car il est vrai que le bécarre peut se présenter accidentellement, sans que l'on cesse de se trouver sous l'influence et le charme du ton mineur.

Les airs primitifs de presque tous les pays, surtout dans le nord, sont dans le mode mineur.

On donne le nom d'*onde sonore* à la courbe qui représente la série de tous les mouvements de contraction et de dilatation que subit chacune des molécules d'un corps qui rend un son pendant une oscillation entière de la lame vibrante à laquelle on peut attribuer la cause première du son. Cette courbe est une *sinusoïde* (dont l'équation est $y = \sin x$), et qui se compose d'une *onde condensante* et d'une *onde dilatante* égales entre elles. Sa longueur totale s'obtient en multipliant la vitesse du son dans la substance que l'on considère par la durée d'une vibration entière correspondant au ton que l'on produit.

Dans un tuyau prismatique ou cylindrique, où l'air est soumis à des vibrations sonores, il y aura une tranche *nodale*, c'est-à-dire immobile, à une extrémité fermée, tandis qu'à une extrémité ouverte il y aura un *ventre de vibration* ou tranche qui éprouvera les plus grands déplacements dans le mouvement vibratoire. Il en résulte que les tuyaux ouverts par les deux bouts ne peuvent produire que les sons représentés par les nombres 1, 2, 3, 4, etc.; et que les tuyaux dont un bout seulement est fermé engendrent la suite des sons 1, 3, 5, 7, etc. Il en résulte aussi que lorsque deux tuyaux, absolument semblables, mais l'un ouvert par les deux bouts, l'autre par un bout seulement, rendent chacun le son le plus grave dont ils sont susceptibles, ou *son fondamental*, le premier est à l'octave aigu du second.

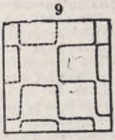
Les nombres de vibrations transversales d'une même tige à laquelle on donne successivement diverses longueurs vibrantes, sont en raison inverse des carrés de ces longueurs.

On est parvenu aussi à produire des vibrations longitudinales et des vibrations tournantes dans des verges ou lames de diverses substances.

L'existence des surfaces nodales se manifeste dans une foule de circonstances par l'agglomération des corps légers, tels que la poussière en certains points de ces surfaces. Ainsi, en saupoudrant de lycopode bien pulvérisé des plaques métalliques que l'on met en vibration avec un archet, après les avoir fixées en quelque point, on observe que cette substance s'agglomère suivant des lignes de formes bizarres qui varient avec la position de point fixe, avec la nature et l'étendue de la plaque, etc.

Les fig. 9, 10, 11 et 12 représentent les formes de quelques-unes de ces lignes sur des plaques carrées.

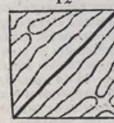
9



10

11

12



Nombres absolus de vibrations. — La loi des vibrations longitudinales des tiges, combinée avec l'usage du monocorde, a servi d'abord à la détermination des nombres absolus de vibrations qui correspondent à un son connu. On s'est ensuite servi, pour le même but, de l'ingénieuse *sirène*, imaginée par M. Cagniard de la Tour. Dans cet instrument, ce sont les chocs produits par le mouvement de l'eau qui engendrent le son, et un compteur permet d'évaluer très-exactement le nombre de ces chocs, qui est moitié du nombre absolu de vibrations.

Le savant M. Savart, enlevé trop tôt à des études qu'il poursuivait avec tant de succès, a imaginé de produire le son par les chocs de roues dentées contre un obstacle fixe, ce qui permet aussi de compter directement les vibrations. Il résulte des expériences faites avec cet appareil et avec d'autres analogues que l'oreille de l'homme peut percevoir des sons dont les nombres de vibrations varient depuis 15 jusqu'à 48 000 par seconde.

Le *diapason* de l'Opéra de Paris donne le *la* qui correspond à 880 vibrations.

La voix d'homme s'étend en général sur deux octaves, de *sol* en *sol*, et les nombres de vibrations correspondants sont 396 et 1584. La voix de femme monte du *ré* à l'octave aigu d'*ut*, notes auxquelles correspondent 594 et 2112 vibrations.

§ 4. *Optique.*

On donne le nom d'*optique*, du grec *optomai* (je vois), à la partie de la physique qui traite de la lumière et de tout ce qui peut affecter le sens de la vue.

Propagation de la lumière. — Dans un milieu homogène la lumière se propage toujours en ligne droite; dans un milieu hétérogène elle se propage en ligne courbe.

La *réfraction* est la déviation que la lumière éprouve en passant d'une couche homogène dans une couche voisine de densité différente.

La vitesse de la lumière est de 310 200 kilomètres par seconde.

L'intensité de la lumière décroît en raison inverse du carré de la distance.

C'est sur cette propriété qu'est fondée la *photométrie* ou l'art de comparer les intensités lumineuses. Ainsi, pour comparer deux lumières, on les place à des distances telles que l'œil de l'observateur n'aperçoive aucune différence entre les intensités de ces lumières ou plutôt des ombres qu'elles font projeter à un même corps. Le rapport entre les carrés des distances des lumières à la surface translucide sur laquelle la projection a lieu est égal au rapport des intensités des sources éclairantes. Ce procédé a fait connaître les résultats suivants. L'intensité de la lumière fournie par une chandelle bien mouchée étant 100, descend à 39 au bout de 11 minutes, n'est plus que de 16 au bout d'une demi-heure, et remonte à 100 lorsqu'on mouche de nouveau. Les variations d'intensité d'une bougie sont comprises entre 100 et 60. Une lampe d'Argant ordinaire, à mèche cylindrique creuse, donne, lorsqu'elle brûle dans tout son éclat, autant de lumière que 9 chandelles bien mouchées.

Quant aux résultats que divers physiciens ont donnés pour la comparaison des intensités lumineuses de divers astres, ils paraissent entachés de beaucoup de causes d'erreur. Suivant Leslie, le pouvoir éclairant d'une bougie est 12000 fois moindre que celle d'une portion de même dimension à la surface du soleil; le pouvoir éclairant de la lune serait 94500 fois plus faible que celui du soleil. Bouguer était arrivé à un résultat environ 3 fois moindre, et Wollaston à un résultat 8 fois et demie plus fort dans la comparaison des pouvoirs éclairants des deux astres.

De chaque point lumineux émanent dans

tous les sens une infinité de *rayons;* un *pinceau* est la réunion de plusieurs rayons voisins; un *faisceau* est la réunion de plusieurs rayons ou de plusieurs pinceaux voisins ou séparés.

Les corps, relativement à leur propriété de transmettre la lumière, peuvent être distingués en corps *opaques*, comme le bois, les métaux, etc.; corps *diaphanes* ou *transparents*, tels que l'air, l'eau, le verre, etc.; corps *translucides*, comme le papier mince et le verre dépoli.

On appelle *ombre* la portion de l'espace où tous les rayons lumineux émanant d'un corps de forme quelconque sont interceptés par la présence d'un autre corps opaque, et *pénombre* la portion où une partie seulement des rayons éclairants sont interceptés. Le *problème général des ombres* consiste dans la détermination des lignes qui limitent l'ombre et la pénombre projetées sur une surface quelconque pour des formes connues du corps lumineux et du corps opaque. Si l'on imagine un plan dont la position varie, mais de telle sorte qu'il reste toujours à la fois tangent aux deux corps, les intersections du plan dans ses positions successives détermineront une *surface développable* (col. 165) tangente à ces deux corps. Cette surface aura généralement plusieurs nappes dont la plus extérieure déterminera les limites extrêmes de la pénombre, et la plus intérieure les limites de l'ombre proprement dite. Les intersections de ces nappes avec une surface quelconque donneront les contours de l'ombre et de la pénombre *portées* sur la surface. Toutes ces constructions s'effectueront dans chaque cas particulier, d'après les principes de la géométrie descriptive (col. 176 et suiv.).

Les éclipses de soleil et de lune (col. 326 et 327) offrent une application très-importante de ces principes.

Catoptrique. — On appelle ainsi la partie de l'optique qui traite de la réflexion de la lumière.

Quand un rayon lumineux vient à rencontrer une surface polie quelconque, il se réfléchit dans un plan normal à cette surface, de telle sorte que l'*angle de réflexion* qu'il forme d'un côté de la normale, à la surface au point où il tombe, soit égal à l'*angle d'incidence* de l'autre côté de la même normale.

La réflexion d'un point lumineux sur un miroir plan se fait donc de telle sorte, que le rayon réfléchi est dirigé comme si le point lumineux était placé en arrière du miroir à la même distance à laquelle il se trouve en avant. L'image est parfaitement *symétrique* de la forme de l'objet, comme une gravure l'est par rapport à la planche qui l'a fournie.

La réflexion dans deux miroirs, pour un œil placé près de leur interjection commune et à une distance suffisante du corps éclairant, donne lieu à un nombre d'images qui dépend de l'angle de ces miroirs. Pour un angle droit, il y a 3 images, pour un angle de 60° il y en a 5; 7 si l'angle est de 45°; et comme on aperçoit aussi directement l'objet, il en résulte 4, 6, ou 8 répétitions de la même figure, qui produisent les effets les plus agréables. Tel est le principe du *kaléidoscope* imaginé par M. Brewster.

Les rayons qui émanent d'un point lumineux placé au foyer d'un paraboloïde de révolution creux et poli intérieurement, se réfléchissent en un faisceau parallèle à l'axe du paraboloïde. Cette propriété est mise à profit dans certains *phares* pour l'éclairage nocturne du littoral.

Les rayons lumineux qui tombent d'un point quelconque situé sur l'axe d'un miroir en forme de calotte sphérique, tendent à se réunir en un autre point situé sur cet axe. Le point lumineux et le point de convergence sont des *foyers conjugués* l'un de l'autre. Ils marchent toujours en sens contraires. Le *foyer principal* est celui qui résulte de la convergence de rayons parallèles à l'axe. Il est situé à une distance du sommet de la calotte égale à la moitié du rayon de courbure du miroir.

On appelle *foyer virtuel* celui qui, tendant à se former derrière le miroir, n'existe réellement pas. Le foyer d'un miroir convexe, pour une position quelconque du point lumineux, est toujours virtuel.

Un observateur placé au delà du centre d'un miroir concave se voit plus petit et renversé. S'il se rapproche du miroir, son image renversée s'agrandit. Elle disparaît lorsqu'il atteint et dépasse le centre jusqu'à ce qu'il soit arrivé au foyer principal. Enfin, lorsqu'il est entre le point et le miroir, il se voit plus grand et droit.

Quand on se regarde dans un miroir convexe, on se voit toujours plus petit et droit.

Les miroirs coniques et cylindriques prêtent à un jeu assez singulier connu sous le nom d'*anamorphoses*. Comme ces miroirs déforment les objets que l'on y aperçoit par réflexion, réciproquement ils peuvent transformer en une image régulière des figures tracées d'une manière bizarre, en apparence, mais qui réellement ont été déterminées, d'après le principe de la réflexion de la lumière.

On appelle *caustique par réflexion*, une surface courbe à laquelle sont tangentes tous les rayons qui se sont réfléchis sur une surface courbe après être partis d'un même point lumineux.

Cette surface a deux nappes dont la courbe d'intersection donne un maximum de lumière réfléchie, pour un œil placé de manière à le recevoir. Un foyer n'est autre chose que cette courbe dans le cas où elle se réduit à un point. La détermination des caustiques a beaucoup exercé la sagacité des géomètres.

Plusieurs instruments d'optique sont exclusivement fondés sur la réflexion de la lumière. Tels sont le *goniomètre* de Wollaston, pour la mesure des angles dièdres des corps polis et particulièrement des cristaux; le sextant et le cercle à réflexion (col. 334), l'*héliostat* de S'Gravesande, et celui de Gambey, destinés à réfléchir les rayons solaires dans une même direction pendant un jour entier, malgré le mouvement incessant du soleil.

Dioptrique. — C'est la partie de l'optique qui traite de la *réfraction*, ou de la déviation qu'un rayon lumineux éprouve en passant d'un milieu dans un autre de densité différente.

Les deux lois fondamentales de la réfraction consistent en ce que: 1° le *plan de réfraction* coïncide toujours avec le *plan d'incidence*; 2° le rapport des sinus d'incidence et de réfraction est constant pour les mêmes milieux. Ce rapport est ce que l'on appelle l'*indice de réfraction*.

Il en résulte que pour deux milieux contigus, pour l'eau et l'air, par exemple, il y a toujours une valeur de l'angle d'incidence des rayons qui traversent l'eau à partir de laquelle aucun rayon ne passe plus dans l'air. C'est ce qu'on appelle la *réflexion totale*, parce que les rayons ne peuvent plus que se réfléchir. Cette valeur est de 48° 85 pour le passage de l'eau à l'air. C'est en observant directement l'angle sous lequel a lieu la réflexion totale que l'on a pu calculer les indices de réfraction de substances opaques.

On appelle *puissance réfractive* d'une substance le carré de son indice de réfraction diminué de l'unité ; et *pouvoir réfringent* le quotient de la puissance réfractive par la densité. MM. Biot et Arago ont trouvé que le pouvoir refringent d'un gaz est constant à toute température et à toute pression. M. Dulong s'est aussi beaucoup occupé de ce sujet et il est arrivé à des résultats fort curieux.

La brisure apparente que présente un bâton plongé dans une carafe à moitié remplie d'eau ; les déformations de certains objets près de l'horizon ; l'arc-en-ciel, et une foule d'autres phénomènes optiques sont dus à la réfraction.

Les lentilles sont des corps diaphanes terminés par des surfaces ordinairement planes ou sphériques. Les rayons lumineux qui émanent d'un point placé sur l'axe d'une lentille se réfractent ordinairement en un point unique placé sur le même axe et appelé foyer. Le point de convergence et le point lumineux sont, comme pour le cas des miroirs, des foyers conjugués l'un de l'autre, c'est-à-dire que si le point lumineux est transporté au point de convergence, les rayons convergent, après la réfraction, au point d'où ils émanaient d'abord. Le foyer principal est le point de convergence des rayons incidents parallèles à l'axe de la lentille.

Le *centre optique* de la lentille est un point placé à l'intérieur, dans une position telle que, à cause de la petite épaisseur de la lentille, tout rayon lumineux qui passe par ce centre reste en ligne droite.

Pour des axes secondaires, passant par ce centre et faisant de très-petits angles avec l'axe principal, il existe des systèmes de foyers conjugués unis par les mêmes relations que ceux de cet axe.

Le *champ* d'une lentille est proportionnel à l'angle que peuvent faire les axes secondaires sans cesser de donner des images suffisamment exactes. L'*ouverture* de la lentille est l'angle sous lequel elle est vue du foyer principal : lorsque cet angle dépasse 10 à 12°, il y a, en général, *aberration de sphéricité*, c'est-à-dire que les rayons qui tombent vers les bords de la lentille ne concourent plus exactement avec ceux qui passent près du centre.

Dans le cas d'une lentille *biconvexe*, si l'objet est très-éloigné, l'image vue par réfraction est, presque au foyer principal, très-petite et renversée. Si l'objet se rapproche de la lentille, l'image, toujours renversée, s'éloigne et s'agrandit ; elle devient égale en grandeur à l'objet, lorsque celui-ci est éloigné de la lentille du double de la distance focale principale; plus grande que lui, si l'objet se rapproche encore. Lorsque l'objet se trouve placé entre la lentille et son foyer principal, l'image est droite, virtuelle, et toujours plus petite que l'objet.

Dans le cas d'une lentille *biconcave* l'image est toujours virtuelle et droite.

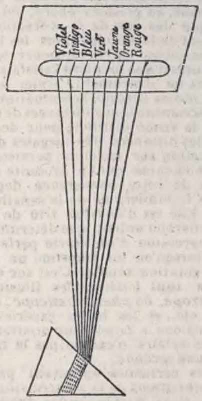
Il y a des caustiques par réfraction tout à fait analogues aux caustiques par réflexion.

Fresnel a imaginé d'appliquer à l'éclairage des phares des lentilles *à échelons*, c'est-à-dire composées de segments sphériques de rayons inégaux, tels que leurs foyers principaux coïncident. On obtient, par ce moyen, des lentilles de très-grande ouverture, sans aberration de sphéricité.

La lumière n'est pas homogène; car un faisceau de rayons solaires qui traverse un prisme en sort sous la forme de rayons plus ou moins refractés et de couleurs différentes. Ce phénomène est appelé *dispersion de la lumière*.

Telle est l'origine du *spectre solaire*, représenté dans la figure 13. Un faisceau de rayons solaires introduit par une ouverture circulaire pratiquée dans le volet d'une chambre obscure, après avoir traversé un prisme triangulaire de verre placé entre le volet et un écran, projette sur cet écran une image oblongue composée des sept *couleurs primitives*. Chacune de ces couleurs est indécomposable lorsqu'on la soumet à l'épreuve d'un nouveau prisme ; et leur ensemble reconstitue la lumière blanche, lorsqu'on réunit au foyer d'une lentille ou d'un miroir concave le faisceau divergent qui forme le spectre.

13



Le célèbre opticien Frauenhofer a décrit avec le plus grand détail un phénomène fort curieux, connu sous le nom de *raies du spectre*. Ce sont des bandes verticales noires et très-étroites, très-inégalement répandues dans l'intérieur des couleurs et plus ou moins obscures. Leur nombre est d'environ 600 dans le spectre solaire. Leurs distances relatives varient avec la matière du prisme. Les spectres fournis par les planètes ont les mêmes raies que le spectre solaire. Mais la lumière des étoiles de première grandeur et celle des corps éclairants artificiels offrent des raies noires distribuées d'une manière toute différente. Enfin la lumière électrique présente des bandes brillantes au lieu de raies noires.

L'action calorifique va en augmentant du violet au rouge sur le spectre solaire, et elle s'étend même au delà, mais en décroissant de nouveau.

L'inégale réfrangibilité des couleurs, qui constitue la lumière blanche, empêche que, dans les lentilles, la convergence ait réellement lieu en un point unique. Il y a autour du foyer une petite image colorée due à cette *aberration de réfrangibilité*.

On appelle *coefficient de dispersion* la différence entre les indices de réfraction des deux couleurs extrêmes du spectre solaire. Ce coefficient varie d'une substance à l'autre, sans être proportionnel à l'indice de réfraction, comme Newton l'avait cru, en se fondant sur des expériences incomplètes ou inexactes. Euler, n'admettant pas l'idée de Newton, à ce sujet établit le premier, par la théorie, la possibilité d'*achromatiser* les lentilles, ce que Dollond exécuta plus tard (col. 13).

Deux couleurs sont dites *complémentaires*, lorsque superposées elles reproduisent la lumière blanche. La plupart des verts ont pour couleurs complémentaires des violets plus ou moins rougeâtres.

Vision et instruments qui l'aident ou la modifient. — Nous renvoyons à l'Anatomie (col. 522) pour la description de l'organe de la vue.

Quoique le phénomène physique de la vision paraisse, au premier abord, un résultat très-simple des lois de la refraction et du mouvement de la lumière dans les lentilles, on n'a pas encore pu en expliquer toutes les circonstances d'une manière satisfaisante.

L'œil est un instrument, sinon parfaitement, du moins presque achromatique.

L'œil s'accommode aux distances de manière à rendre la vision distincte pour des objets placés à des distances très-inégales de nous.

La sensation sur la rétine persiste même après que la cause qui l'a produite a cessé. La durée de cette persistance dépend de l'éclat de la lumière et de la sensibilité de l'organe. Elle est d'environ 1/10 de seconde pour le charbon ardent, que détermine dans l'œil l'impression d'un cercle parfaitement continu, lorsqu'on lui imprime un mouvement de rotation rapide. C'est sur ce principe que sont fondées les illusions du *thaumatrope*, du *phénakisticope*, du *fantascope*, etc., et les belles expériences que M. Wheatstone a faites pour prouver que la durée des éclairs n'excède pas la millième partie d'une seconde.

Quelques personnes éprouvent parfois le phénomène curieux de la *semi-vision*. On ne voit plus alors que la moitié droite ou la moitié gauche des objets.

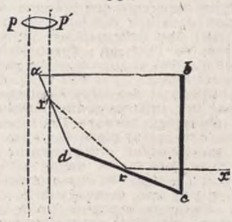
M. Chevreul a trouvé des lois remarquables sur le *contraste des couleurs* ou sur l'influence mutuelle que peuvent exercer deux couleurs différentes placées l'une à côté de l'autre. C'est ainsi qu'une étoffe rouge nous paraît d'autant plus éclatante qu'elle est entourée d'une bordure d'un vert plus franc. Les meubles d'acajou doivent donc être garnis en vert plutôt qu'en rouge.

Il y a sur la rétine un point insensible à la lumière. Pour le prouver, on place sur un fond noir deux petits disques de papier dont les centres sont distants de 7 à 8 centimètres ; et l'on regarde en avant à 30 ou 35 centimètres, en tenant l'œil droit vis-à-vis du disque de gauche, l'œil gauche étant fermé. Il y a une position unique pour laquelle le disque à droite disparaît entièrement.

On est *presbyte*, on est *myope*, suivant que la vision distincte s'opère à une distance plus grande ou moindre que la distance moyenne. On remédie à ces inconvénients à l'aide de *bésicles*, qui doivent porter des verres convergents dans le premier cas et divergents dans le second.

La *chambre claire* de Wollaston, représentée dans la fig. 14, sert à dessiner exactement les contours des objets. Les rayons lumineux horizontaux, tels que rx arrivent à la pupille pp', après avoir éprouvé deux fois la réflexion totale en r et en x', sur les deux faces cd, da du prisme rectangulaire $abcd$ dans lequel l'angle de d est de 135°. En plaçant l'œil de manière à voir aussi directement la pointe d'un crayon en arrière du bord a du prisme, on pourra suivre avec cette pointe, sur un papier, tous les contours des objets que l'on veut dessiner.

14



La *chambre noire* portative de la fig. 15 sert aussi à dessiner. Les rayons lumineux, après avoir été réfléchis sur un miroir incliné placé à la partie supérieure de l'appareil, traversent une lentille convergente, et viennent peindre les images redressées des objets sur le papier du dessinateur.

15

Le *microscope solaire* se compose d'un système de verres pour éclairer un objet et d'un système de lentilles d'un court foyer pour en donner une image réelle. Cet instrument, un des plus curieux de l'optique, fait voir sur un tableau de toile blanche tendue *ad hoc*, les images amplifiées d'une foule d'objets ou de phénomènes qui échappent à la vue simple.

Le *mégascope* en diffère peu : il sert à prendre des copies réduites ou amplifiées des gravures, des bas-reliefs, etc.

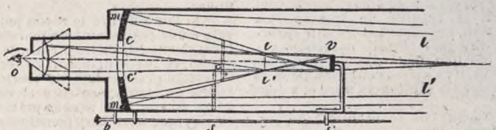
La *lanterne magique* repose sur les mêmes principes.

Le *microscope simple* ou *loupe* n'est autre chose qu'une lentille biconvexe, destinée à amplifier les images des objets vus de très-près.

Le *microscope composé* remplit la même destination, avec des moyens d'exécution plus savants et plus parfaits

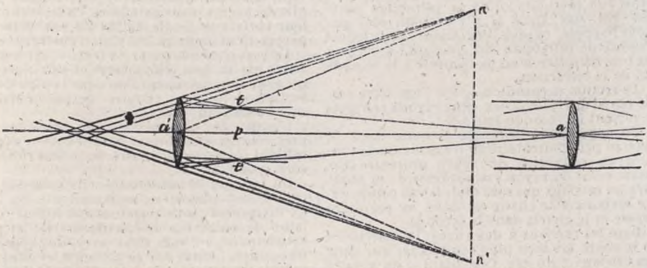
Le *télescope à réflexion*, système de Grégory, est représenté dans la fig. 16. Les rayons incidents f' se réfléchissent sur le grand miroir concave mm, et viennent former en tt' une image réelle et renversée de l'objet. Un autre petit miroir concave v redresse l'image, la transmet par l'ouverture cc' pratiquée au centre du premier miroir et au travers d'une lentille convergente qui l'amplifie encore, à l'œil o de l'observateur. Le bouton b sert à avancer ou à reculer le miroir v au moyen de la tige ss'

16



La figure 17 explique le mouvement de la lumière dans la *lunette astronomique*, réduite à sa plus grande simplicité. Les rayons lumineux, partant d'un objet très-éloigné, donnent en tt' une image renversée de l'objet, après avoir traversé l'*objectif* a; l'*oculaire* a' n'est qu'une loupe qui sert à regarder cette image que l'on voit amplifiée en nn' et encore renversée.

17



La *lorgnette* de spectacle est construite d'après la lunette de Galilée. La *lunette terrestre* ordinaire redresse les images des objets au moyen de quatre verres convergents convenablement disposés.

Le procédé le plus simple pour mesurer au moins approximativement le grossissement d'une lunette, consiste à regarder directement avec un œil ouvert un objet que l'on observe de l'autre œil à travers la lunette. Les deux images peuvent être vues à la fois très-facilement : et si l'objet est divisé en parties égales, on verra combien de fois l'image amplifiée d'une de ces parties contient l'image directe.

Diffraction et interférence. — On appelle *franges diffractées* de petites bandes alternativement sombres et diversement colorées qu'on peut observer avec une loupe, et que la lumière produit dans quatre cas : 1° lorsqu'elle passe au bord d'un écran; 2° lorsqu'elle est en partie interceptée par un corps étroit ; 3° lorsqu'elle passe par une ouverture étroite ; 4° lorsqu'elle est réfléchie par les bords d'une surface polie.

Ces bandes sont symétriquement placées de part et d'autre de l'obstacle qui produit la diffraction ; elles affectent la forme de courbes hyperboliques.

Leur cause réside dans un mode particulier d'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres, et auquel on a donné le nom d'*interférence*. Grimaldi d'abord, le docteur Young et Fresnel ensuite ont prouvé, par différents moyens, qu'il y a des cas où de la lumière ajoutée à de la lumière produit de l'obscurité.

Le principe général des interférences consiste en ce que deux faisceaux de lumière homogène émanés d'une même source et se rencontrant sous une petite obliquité, ajoutent leur éclat s'ils ont parcouru des chemins dont la différence est nulle, ou égale à un nombre pair de fois une certaine longueur très-petite; la rencontre de ces faisceaux produit au contraire de l'obscurité, destruction de lumière, si la différence des chemins qu'ils ont parcourus est égale à un nombre impair de fois cette même longueur, dont les valeurs la plus faible et la plus forte sont de 203 et de 322 millioniènes de millimètre. Elles ont lieu respectivement pour le violet et pour le rouge extrêmes.

C'est aux interférences des rayons lumineux qu'il faut attribuer les anneaux colorés que l'on aperçoit à la surface des bulles de savon ou au contact d'un verre plan avec un verre convexe. Certains phénomènes curieux que l'on produit en dirigeant l'objectif d'une lunette, préalablement recouvert d'un réseau à mailles rondes ou carrées, vers la lumière solaire introduite par un trou de volet dans une chambre obscure ; les apparences obtenues au foyer des lunettes dirigées sur les étoiles, lorsque l'on place devant l'objectif des diaphragmes de différentes formes ; une partie de la scintillation des étoiles elles-mêmes, n'ont pas d'autre cause.

Double réfraction. — On appelle ainsi la propriété que possèdent certains cristaux transparents, notamment le carbonate de chaux (variété connue sous le nom de spath d'Islande), de donner deux images d'un objet placé derrière eux. Ainsi, un trait unique tracé en noir sur un papier blanc paraît double lorsqu'on le regarde au travers d'un rhombe de spath. Cependant il y a une direction appelée *axe* pour laquelle la double réfraction n'a pas lieu. Dans d'autres cristaux, tels que le mica, il y a même deux axes. De là, la distinction entre les substances à un et à deux axes.

Dans les cristaux de la première espèce, l'axe cristallographique coïncide avec l'axe de réfraction simple; c'est la droite qui joint les sommets des trièdres obtusangles pour le spath calcaire.

On appelle *section principale*, par rapport à chacune des faces, le plan mené par l'axe perpendiculairement à cette face. Pour tout faisceau lumineux qui tombe dans une section principale, les deux rayons réfractés restent dans le plan d'incidence et satisfont ainsi à la première loi de la réfraction simple (col. 400); mais il n'y a qu'un seul des deux, appelé *rayon ordinaire*, pour lequel l'indice de réfraction soit constant : le *rayon extraordinaire* n'est pas soumis à la seconde loi de la réfraction.

La section perpendiculaire à l'axe offre ceci de remarquable que les deux rayons réfractés y suivent la seconde loi.

On appelle *négatifs* les cristaux dans la section perpendiculaire à l'axe desquels l'indice de réfraction du rayon ordinaire surpasse celui du rayon extraordinaire, et *positifs* les cristaux qui sont dans le cas contraire. Le carbonate de chaux est dans la première classe et le quartz dans la seconde.

Dans les cristaux à deux axes, la marche de la lumière est bien plus compliquée que dans les cristaux à un axe. Cependant si on appelle *ligne moyenne* une droite qui divise en deux parties égales l'angle aigu des axes, on trouve que dans la section menée par cette droite perpendiculairement au plan des axes, un des deux rayons est soumis aux lois de la réfraction, et que l'autre rayon est soumis aussi à ces lois dans la section perpendiculaire à la ligne moyenne.

C'est sur la double réfraction du quartz ou cristal de roche qu'est fondé le *micromètre à double image*, instrument extrêmement ingénieux imaginé par Rochon pour mesurer les plus petits diamètres apparents des objets éloignés, tels que ceux des planètes et de leurs satellites, etc., et qui sert par conséquent à trouver la distance d'un objet lorsque l'on en connaît la grandeur réelle et réciproquement.

Polarisation de la lumière. — On appelle ainsi les propriétés particulières que les rayons lumineux acquièrent lorsqu'ils ont été soumis à certaines influences.

Un faisceau réfléchi sur une glace de verre, sous un angle de 35° 25′ est *polarisé*. Voici les propriétés caractéristiques dont il jouit.

1° Si on le reçoit sur un prisme bi-réfringent de spath calcaire achromatisé avec du verre, on voit en général deux images, dont une disparaît, l'autre étant au maximum d'intensité, quand la section principale du prisme est dans le plan de réflexion ou lui est perpendiculaire; les deux images sont également intenses lorsque la section principale fait un angle de 45° avec le plan de réflexion; enfin dans les positions intermédiaires, l'intensité de l'une va croissant tandis que celle de l'autre diminue.

2° Le rayon polarisé qui vient à tomber sur une seconde glace, sous l'angle de 35° 25′, n'est plus réfléchi si le plan d'incidence et de réflexion de la seconde glace est perpendiculaire au plan d'incidence et de réflexion de la première.

3° Si l'on observe le rayon polarisé au travers d'une petite lame de tourmaline dont les faces soient parallèles à l'axe de réfraction du cristal, ce rayon disparaît entièrement quand la section principale de la tourmaline est parallèle au plan d'incidence et de réflexion; il passe au contraire avec le maximum d'intensité lorsque la section principale de la tourmaline est perpendiculaire à ce même plan. L'intensité de l'image polarisée va en augmentant de la première à la dernière position.

On appelle *plan de polarisation* d'un rayon lumineux, celui qui est parallèle à l'axe de la tourmaline, lorsque l'image, vue au travers de cette tourmaline, disparaît entièrement.

Un faisceau lumineux qui pénètre dans une pile de verres plans parallèles, en faisant avec leur surface un angle de 35° 25′, est polarisé perpendiculairement au plan d'émergence.

Le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire qui sortent d'un cristal bi-réfringent à un axe, sont polarisés, l'un dans le plan de la section principale, l'autre perpendiculairement à ce plan.

L'angle de polarisation par réflexion est précisément égal à celui pour lequel le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté correspondant.

Un faisceau de lumière blanche polarisée se colore des plus vives nuances toutes les fois qu'il traverse, sous certaines conditions, une lame de substance bi-réfringente taillée parallèlement à l'axe. C'est avec un appareil très-simple, fondé sur ce principe, et imaginé par M. Arago, que l'on peut reconnaître la polarisation d'une partie de la lumière des nuées.

18

Les lames cristallisées peuvent aussi donner lieu à des anneaux colorés. La fig. 18 représente le phénomène que l'on aperçoit lorsqu'une lame d'un cristal à deux axes, taillée perpendiculairement à la ligne moyenne, est placée entre deux tourmalines.

La *polarisation circulaire*, observée d'abord par M. Arago, a été pour M. Biot un sujet fécond d'observations curieuses sur la composition intime des corps.

§ 5. *De la chaleur.*

On désigne, sous le nom de *calorique*, le principe qui produit la chaleur. La *température* d'un corps est la quantité plus ou moins grande de chaleur *apparente* qu'il renferme.

THERMOMÈTRES. — La chaleur dilate tous les corps. Cette propriété fournit le moyen de comparer entre elles les températures au moyen des *thermomètres*, où certains liquides, tels que le mercure et l'alcool, se dilatent beaucoup plus que l'enveloppe solide et transparente de verre où ils sont renfermés. Pour que les thermomètres soient comparables entre eux, il faut qu'ils soient gradués en rapport avec des températures qui soient constamment les mêmes, toutes choses égales d'ailleurs. C'est ce qui a lieu pour les températures de la glace fondante et pour celle de l'ébullition de l'eau lorsque ce liquide est parfaitement pur et que la pression atmosphérique ne varie pas. La première de ces températures est prise pour le zéro de l'échelle, la seconde donne le 100e degré dans le *thermomètre centigrade*, et le 80e dans le *thermomètre Réaumur*. On fait précéder du signe — les chiffres qui expriment les températures au-dessous de zéro. Nous employons exclusivement le premier de ces instruments pour toutes nos mesures et données thermométriques, à moins que nous n'avertissions spécialement du contraire.

Le thermomètre de Farenheit, usité en Allemagne et en Angleterre, marque 32° à la glace fondante, et 212° à l'ébullition.

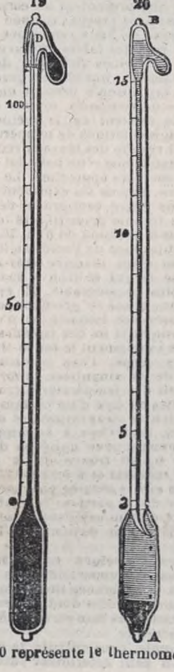
Pour convertir un nombre de degrés centigrades en degrés Réaumur, il faut de ce nombre retrancher son cinquième; et pour convertir un nombre de degrés Réaumur en centigr., il faut à ce nombre ajouter son quart.

On convertit un nombre de degrés Farenheit en centigr., ou en Réaum., en retranchant 32 de ce nombre et en multipliant le reste par 5/9 ou par 4/9. Et réciproquement on convertit un nombre de degrés, soit centig., soit Réaumur, en degrés Farenheit, en ajoutant à 32, soit les 9/5, soit les 9/4 du nombre de degrés donné.

On doit à M. Walferdin des thermomètres extrêmement ingénieux, à l'aide desquels on obtient, avec la plus grande exactitude, les *maxima* et les *minima* des températures que l'on ne peut pas observer immédiatement, telles que celles de l'Océan, des lacs ou des puits à de grandes profondeurs. Le thermomètre à maxima, représenté dans la fig. 19, a la forme d'un thermomètre à mercure ordinaire, avec cuvette cylindrique; seulement son extrémité supérieure est terminée par une panse dans laquelle le canal du tube s'ouvre par une pointe très-fine D. L'instrument est divisé en un certain nombre de parties égales, dont chacune équivaut à une fraction connue du degré centigrade.

Pour mesurer une certaine température que l'on sait *à priori* n'être pas inférieure à 28°, par exemple, on commence par chauffer le mercure de la cuvette cylindrique jusqu'à ce qu'il atteigne l'extrémité du tube; on incline alors l'instrument de droite à gauche, de manière que la pointe du tube intérieur plonge dans le mercure du réservoir; puis on refroidit jusqu'à une température un peu inférieure à 28°, jusqu'à 20°, par exemple. Le mercure rentre du réservoir dans le tube, et de là dans la cuvette. On redresse l'appareil, et en donnant une petite secousse le mercure de réserve quitte la pointe et tombe dans la panse. L'appareil étant enfermé dans son étui, on le fait alors descendre dans le lieu dont on veut avoir la température. Dès que l'on est arrivé à une couche où cette température dépasse 20°, le mercure, en se dilatant, sort par l'extrémité du tube, et tombe dans la panse supérieure. L'équilibre de température étant supposé établi, on donne une secousse pour faire tomber la petite bulle de mercure qui, sans cela, resterait à la pointe du tube, et on remonte l'appareil. Lorsque l'on retire le thermomètre de sa boîte, il s'est refroidi, et le sommet du mercure est plus ou moins éloigné de la pointe. On n'a plus alors qu'à le plonger dans un bain à une température observée à l'aide d'un bon thermomètre pris pour étalon; si cette température est de 25°, par exemple, et que le mercure du thermomètre à *maxima* soit distant de l'extrémité effilée du tube d'un nombre de divisions équivalant à 4°, 6, la somme 29°, 6 sera précisément le maximum des températures que l'instrument a éprouvées.

19 20



La fig. 20 représente le thermomètre à m *nima*, dû aussi à M. Walferdin. Les parties teintées fortement en noir indiquent du mercure et les hachures de l'alcool. Par le refroidissement, le retournement et l'échauffement, on fait passer dans le tube une colonne de mercure qui y occupe une longueur d'un nombre de degrés. 10 à 15° ; et on note la division correspondant au sommet de la colonne de mercure, l'appareil étant plongé dans un bain de température connue, de 12°, par exemple, supérieure au minimum présumé, que nous supposerons de 6°. Lorsque l'appareil est soumis au refroidissement, le mercure tombe en gouttelettes dans la cuvette A ; et pour savoir la valeur de ce refroidissement en degrés au dessous de 12°, il suffit de lire sur le tube à quel point remonte le mercure, le thermomètre étant de nouveau plongé dans un bain à 12°.

Le *thermomètre de Bréguet* est fondé sur l'inégale dilatation du platine et de l'argent. C'est le plus sensible des thermomètres métalliques.

Pour la mesure des hautes températures, on a eu long-temps recours au *pyromètre de Wedgewood*, instrument fondé sur le retrait que prend l'argile soumise à divers degrés de cuisson ; mais on doit préférer de beaucoup le *pyromètre à air*, au moyen duquel M. Pouillet a déterminé en degrés centigrades toutes les températures jusqu'à la fusion de l'or, et les différentes nuances lumineuses que présentent les corps à partir du rouge naissant (voyez colonne 1527).

Dilatations. — Nous renvoyons aussi à la col. 1525 pour les tables relatives aux valeurs des dilatations linéaires de diverses substances solides, liquides ou gazeuses.

On avait cru jusqu'à présent que tous les gaz simples ou composés, soumis à la même pression, se dilatent de la même quantité pour des augmentations de températures égales; mais il résulte des travaux remarquables de M. Regnault, que cette belle loi n'est vraie que d'une manière approchée. Le coefficient de dilatation, d'après ses expériences, a varié, pour chaque degré centigrade, de 0,00366 à 0,003685 du volume primitif à la température de 0 et sous la pression de 0 m. 76. « Le coefficient de dilatation de l'acide sulfureux va en augmentant d'une manière très-marquée, à mesure que le gaz se trouve soumis à une pression plus considérable. Il est probable que la même chose se présente pour tous les gaz composés sur lesquels on n'observe pas rigoureusement la loi des volumes, ou qui ne suivent pas exactement la loi de Mariotte. »

Plusieurs corps, l'eau particulièrement, jouissent de la singulière propriété de se dilater pour des températures croissantes ou décroissantes au delà d'un certain point pour lequel a lieu le *maximum de densité*. Ce point a lieu, pour l'eau, à la température de 4°,1. En prenant pour unités la densité et le volume à 0, on trouve qu'ils deviennent égaux à 1,00010824 et à 0,99989177 pour 4°,1 ; à 0,9960993 et à 1,0039160 pour 30°.

L'alliage de 4 parties de bismuth, 1 de plomb et 1 d'étain se dilate en se congelant. Il a un maximum de densité à l'état solide vers 44°.

Pesanteur spécifique ou densité. — On appelle ainsi le rapport du poids au volume d'un corps. Cette donnée importante s'obtient par plusieurs procédés dont les résultats doivent constamment être corrigés de l'influence de la température.

Par exemple, pour obtenir la densité d'un liquide, on peut déterminer successivement les poids p et p' des quantités d'eau et du liquide proposé qui remplissent un même flacon aux températures t et t'. Pour ramener le rapport $\frac{p'}{p}$ à ce qu'il aurait été si le flacon avait eu constamment la capacité correspondante à 0°, si le liquide avait eu cette température, et que l'eau eût été au maximum de condensation, on emploiera la formule

$$\frac{p'\,(1+d')\,(1+kt)}{p\,(1+d)\,(1+kt')}$$

dans laquelle d et d' représentent les dilatations cubiques de l'eau de 4°,1 à $t°$, et du liquide de 0° à t' degrés ; et k la dilatation cubique du verre.

Le principe d'Archimède (col. 388) peut servir à observer la densité d'un corps solide. Il suffit de déterminer le poids P de ce corps dans l'air, et la perte de poids p qu'il éprouve lorsqu'on le pèse dans l'eau à $t°$. k étant le coefficient de dilatation cubique du corps de 0 à t degrés, et d la dilatation totale de l'unité de volume de l'eau de 4°,1 à $t°$, l'expression de la densité cherchée sera

$$\frac{P\,(1+kt)}{p\,(1+d)}.$$

Pourvu que les températures et les forces élastiques des gaz restent les mêmes, les rapports de leurs densités restent constants, quelle que soit leur température commune.

Les *aréomètres* sont des instruments qui donnent immédiatement les densités des liquides dans lesquels ils flottent.

Voir la col. 1521 pour les tables des densités des corps solides, liquides et gazeux.

Changements d'état des corps. — Un certain nombre de corps sont susceptibles d'être successivement solides, liquides ou gazeux. L'eau, la cire, le mercure, l'alcool, le zinc, etc., sont dans ce cas. C'est aux variations de température pour un volume déterminé qu'il faut en attribuer la cause.

Il est probable qu'il n'y a pas de corps essentiellement infusible. M. Gaudin est parvenu à fondre en verre le grès qui forme le pavé de nos rues, et même à l'étirer en fils flexibles. On appelle cependant *réfractaires* les substances qu'il a été impossible de liquéfier jusqu'à présent. On trouvera à la col. 1527 une table des degrés de fusion de diverses substances.

On doit distinguer des *gaz* proprement dits les *vapeurs* produites par l'évaporation des liquides avec lesquels ces vapeurs communiquent; car celles-ci remplissent, dans ce cas, *à saturation*, la portion de l'espace où elles se trouvent, eu égard à la température, et elles ont le *maximum de tension*. La température ne variant pas, leur tension et leur densité ne changent pas non plus lorsque leur volume varie. Au contraire, la densité et le volume des gaz varient en raison inverse du volume pour la même masse et la même température. Mais il n'y a aucune différence entre une vapeur et un gaz assez comprimé pour qu'il y ait un commencement de précipitation de liquide, non plus qu'entre un gaz et une vapeur qui n'étant plus en contact avec le liquide qui l'a produite ne sature pas l'espace où elle est renfermée.

Tout passage de l'état solide à l'état liquide, ou de ce dernier à l'état gazeux, est accompagné d'une absorption considérable de calorique, dont le thermomètre n'accuse pas la moindre partie, et qui pour cela prend le nom de *calorique latent*.

Ainsi, un kilog. de glace, à la température de 0°, et un kilog. d'eau à la température de 75°, donnent, après leur mélange et après la fusion complète de la glace, deux kilog. d'eau à 0°. De même un kilog. de vapeur à 100°, en se transformant en eau, élèverait d'un degré la température de 643 kilog. d'eau. La chaleur latente de l'eau est donc de 75, et celle de la vapeur d'eau de 543. Dans la pratique, on adopte ordinairement 550, bien que le premier nombre, obtenu par le savant M. Dulong, soit très-probablement plus exact que le second, proposé par Southern. (Voir l'applic. aux chaudières à vapeur, col. 789.)

La vaporisation de certains liquides donne lieu à un refroidissement si considérable qu'il détermine la congélation. C'est ce qui a lieu pour l'acide carbonique liquéfié au moment de son expansion dans l'air : il se produit alors des flocons d'acide carbonique liquide. M. Thilorier est l'auteur de cette remarquable expérience.

L'ébullition d'un liquide commence lorsque la pression de la vapeur qu'il développe surpasse la pression atmosphérique. Elle a donc lieu à des températures qui varient considérablement avec la pression atmosphérique elle-même, comme on peut le voir dans une table donnée col. 1526. Elle est aussi retardée par la présence de sels en dissolution dans l'eau. Ainsi, l'eau saturée de chlorure de calcium ne bout qu'à 179°, 5. (V. le SUPPLÉMENT. col. 1525).

PROPAGATION DE LA CHALEUR. — Quelle que soit la nature et la cause du calorique, cet agent ne manifeste pas seulement son influence au contact, mais bien à distance, soit à travers le vide, soit à travers des milieux quelconques. Cette propriété est ce que l'on appelle le *rayonnement* du calorique.

Le *pouvoir émissif* ou *rayonnant* appartient à tous les corps indistinctement. Constamment, de tous les points de l'espace, quelle que soit leur température, partent des rayons calorifiques en quantité proportionnelle à cette température, de sorte que l'état thermométrique d'un corps dépend de celui de tous les corps au rayonnement desquels il peut être soumis.

Le *pouvoir absorbant* est la propriété dont jouissent aussi les corps d'absorber une partie de la chaleur qu'ils perçoivent. Mais ils en réfléchissent aussi une autre partie. Leur *pouvoir réfléchissant* est complémentaire du pouvoir absorbant, c'est-à-dire que la somme des quantités de chaleur absorbées et réfléchies doit toujours reproduire exactement la totalité de la chaleur incidente.

L'intensité de la chaleur rayonnant d'un point central varie en raison inverse du carré de la distance à ce point. Elle est aussi proportionnelle au cosinus de l'angle que les rayons calorifiques font avec la normale à un élément rayonnant.

La chaleur se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Aussi bien que la lumière, la chaleur éprouve une réfraction en passant d'un milieu dans un autre.

On appelle *athermanes* les substances qui arrêtent la chaleur rayonnante, comme les corps opaques arrêtent la lumière ; et *diathermanes* celles qui jouissent de la propriété contraire. La diathermanéité n'est pas en raison de la diaphanéité, ni l'athermanéité en raison de l'opacité. Ainsi, le sel gemme est très-diathermane et l'est également pour toutes les sources de chaleur : l'alun, au contraire, l'est excessivement peu et d'autant moins que la température de la source est moindre. Le verre noir et le quartz enfumé ont une diathermanéité très-étonnante si on la compare à leur opacité, mais elle diminue aussi avec la température de la source.

L'expérience prouve que la quantité de chaleur réfléchie perpendiculairement sur les deux faces d'une plaque diathermane, est à très-peu près constante et égale à 1/13 de la chaleur incidente.

Le nom de *diathermansie* a été donné par M. Melloni à la propriété que possèdent les substances différentes de choisir dans la chaleur des éléments différents pour les absorber. Ainsi, lorsque la chaleur a été *epurée* ou *thermanisée* par son passage à travers une certaine substance, elle devient plus apte à traverser une autre plaque de la même substance, et n'éprouve plus de sa part que de très-faibles absorptions, si bien que la nouvelle plaque agit sur le faisceau thermanisé presque comme le sel gemme agit sur toute espèce de chaleur, ou comme un verre rouge agit sur de la lumière colorée qui vient de traverser un autre verre rouge.

Tout semble indiquer qu'il n'y a réellement aucune lumière chaude ni aucune chaleur lumineuse ; car, en combinant convenablement des substances thermanisantes, comme par exemple le verre vert et l'alun, on arrive à absorber presque toute la chaleur, presque sans atténuer l'éclat de la lumière ; et, au contraire, avec des verres noirs ou du cristal de roche enfumé, on absorbe toute la lumière du soleil, en laissant passer une portion considérable de sa chaleur.

Les lois du refroidissement ont été établies pour la première fois d'une manière exacte par les illustres physiciens Dulong et Petit. Quand l'excès de température du corps qui se refroidit dans le vide n'est pas trop considérable, on peut adopter la loi de Newton, de laquelle il résulte que les vitesses de refroidissement sont proportionnelles aux excès de température.

La *conductibilité* est la propriété dont jouissent les corps d'absorber la chaleur et de la répandre dans leur masse; si elle est *extérieure*, elle prend le nom de *pénétrabilité* ; *intérieure*, elle s'appelle *perméabilité*. Les rapports numériques des conductibilités intérieures de divers corps peuvent être ainsi établis :

Or.	1000	Etain.	303
Platine.	981	Plomb.	180
Argent.	973	Marbre.	23?
Cuivre.	898	Terre cuite.	12?
Fer.	374	Porcelaine	11?
Zinc.	363	Eau.	9?

L'air et les gaz sont de très-mauvais conducteurs. Il en est de même des corps déliés et divisés, tels que les poudres même métalliques. Nos vêtements ne sont nullement chauds par eux-mêmes ; mais, à raison de leur mauvaise conductibilité, ils empêchent le passage de la chaleur.

De là le proverbe espagnol à l'appui des vêtements amples si bien appropriés aux nuits fraîches et aux journées brûlantes de la Péninsule : « Ce qui est bon contre le chaud est également bon contre le froid. »

Les vêtements blancs à poils soyeux jouissent au plus haut degré de cette double propriété.

CALORIMETRIE. — On appelle *capacité pour la chaleur*, ou *chaleur spécifique* d'une substance, la quantité de chaleur qu'un poids déterminé de substance exige pour que sa température augmente d'une certaine température. On prend pour unité de chaleur spécifique la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'un poids d'eau égal au poids du corps dont on veut évaluer la capacité.

Les recherches de Dulong et Petit ont encore été long-temps pour ce sujet les plus précises et les plus fécondes en résultats. C'est à eux que l'on doit cette loi extrêmement remarquable : « Les *atomes* de tous les corps simples ont exactement la même capacité pour la chaleur. » Par atomes, on entend ici des particules intégrantes de même nature que le corps, et pour lesquelles toute division, soit chimique, soit même mécanique, est impossible (voir la CHIMIE, col. 430).

Un jeune physicien, dont les premiers pas dans cette carrière ont été signalés par les plus brillants succès, M. Regnault, a recommencé, avec des soins et des procédés particuliers, de longues séries d'expériences pour la détermination des chaleurs spécifiques des corps simples et composés. Il est parvenu aux résultats suivants :

1° La loi de Dulong et Petit représenterait probablement les résultats de l'expérience d'une manière tout à fait rigoureuse, si l'on pouvait prendre la chaleur spécifique de chaque corps à un point déterminé de son échelle thermométrique, et si l'on pouvait débarrasser cette chaleur de toutes les causes étrangères qui la modifient dans l'observation.

2° La chaleur spécifique des alliages, à une distance un peu grande de leur point de fusion, est exactement la moyenne des chaleurs spécifiques des métaux qui les composent.

3° Dans les corps composés, de même composition atomique et de constitution chimique semblable, les chaleurs spécifiques sont en raison inverse des poids atomiques.

Ces lois ne sont vraies qu'entre certaines limites, et il n'est pas étonnant qu'il en soit ainsi, « car la capacité calorifique des corps se compose de leur chaleur spécifique proprement dite et de la chaleur que ces corps absorbent à l'état de chaleur latente en augmentant de volume. Le résultat donné par l'expérience est donc un résultat complexe dans lequel, heureusement, la chaleur spécifique proprement dite domine assez pour que la loi élémentaire ne soit pas complétement voilée. »

§ 6. *Du magnétisme et de l'électricité.*

MAGNÉTISME PROPREMENT DIT. — Les Grecs désignaient la pierre d'aimant sous le nom de *magnès ;* telle est l'étymologie du mot *magnétisme.*

L'aimant est une substance minérale (fer xydule) qui a la propriété d'attirer le fer, l'acier, le cobalt, le nickel, le chrôme et le manganèse, substances qui, pour cette raison, portent le nom de *magnétiques.* C'est M. Pouillet qui a fait connaître la propriété curieuse dont jouit le manganèse de n'être magnétique qu'à 20 ou 25° au-dessous de zéro.

M. Dove, de Berlin, vient de constater la propriété magnétique dans tous les métaux par un mode d'expérimentation nouveau.

La limaille de fer s'attache à l'aimant que l'on y roule ; elle se porte principalement vers deux points appelés *pôles,* qui semblent être des centres d'attraction plus puissants et qui sont vers les extrémités. La fig. 21 représente l'apparence singulière que la limaille prend ordinairement autour d'un barreau d'aimant, lorsque l'on imprime à la table sur laquelle ce barreau est posé de petites secousses pour amener les particules ferrugineuses dans leur position d'équilibre.

21

Il y a plusieurs procédés pour transmettre la vertu magnétique d'un aimant à une substance magnétique. Le plus simple consiste à passer plusieurs fois, dans le même sens, un des pôles d'un aimant naturel ou artificiel lui-même sur la barre que l'on veut aimanter. La *force coërcitive* avec laquelle le barreau retient la vertu magnetique qu'on lui a donnée artificiellement est presque nulle dans le fer doux, beaucoup plus considérable dans l'acier, et elle augmente avec la dureté de la trempe de celui-ci. Le choc, l'écrouissage, la torsion accroissent aussi cette force ; le fer doux passé à la filière acquiert une force coërcitive sensible. Mais aussi un corps magnétique est d'autant plus difficile à aimanter qu'il retient mieux la vertu magnétique.

Tous les aimants naturels ou artificiels ont la propriété de se diriger constamment dans le même sens, à la même époque et dans le même lieu, lorsqu'on les suspend par leurs centres de gravité. De là l'inclinaison et la déclinaison magnétique (col. 381 et 382).

Dans deux aimants quelconques les pôles de mêmes noms se repoussent et les pôles de noms différents s'attirent.

La terre agit sur l'aiguille aimantée comme pourrait le faire un grand aimant naturel. Une expérience bien remarquable prouve son influence. Si on prend une barre de fer et qu'on la tienne parallèle à la direction de l'aiguille aimantée suspendue librement, c'est-à-dire inclinée d'environ 70° à l'horizon, dans un plan faisant un angle d'environ 22° à l'ouest avec le méridien, cette barre acquiert deux pôles et les propriétés magnétiques. ces données sont applicables à Paris.

On donne le nom de *boussole* à l'appareil qui renferme une aiguille aimantée soumise à l'action du magnétisme terrestre. On distingue la boussole de *déclinaison* et celle d'*inclinaison.*

L'aiguille *astatique* est celle que l'on a placée dans un plan perpendiculaire à la direction que prend l'aiguille d'inclinaison dans le méridien magnétique. Elle est alors en équilibre dans une quelconque des positions qu'elle peut occuper autour de son axe.

L'action du fer sur les boussoles employées pour diriger la marche des navires peut être corrigée par le procédé du *compensateur magnétique* dû à M. Barlow.

Coulomb a constaté, à l'aide de son ingénieuse *balance de torsion*, que les attractions et les répulsions magnétiques sont en raison inverse du carré de la distance.

Electricité proprement dite. — Le mot grec *electron* signifie ambre ou succin. Or cette substance est la première dans laquelle on ait reconnu que le frottement développe la propriété d'attirer des corps légers, tels que de la sciure de bois, de la moelle de sureau, des barbes de plume, etc. La cause de ce phénomène, bien autrement général que les Grecs ne le soupçonnaient, a pris de là le nom d'*électricité*.

Certains corps deviennent électriques par le frottement, c'est-à-dire qu'ils acquièrent plus ou moins la propriété d'attirer à leur surface les corps légers; ils portent le nom d'*idio-électriques*. Tels sont l'ambre, la gomme laque, les résines, le soufre, le verre, etc. Les métaux, au contraire, sont *anélectriques*, c'est-à-dire qu'ils ne prennent pas d'électricité par le frottement direct; mais ils acquièrent la vertu électrique lorsqu'on les met en contact avec les autres corps préalablement frottés.

Les corps idio-électriques sont mauvais *conducteurs* de l'électricité, c'est-à-dire qu'ils jouissent de la propriété de retenir plus ou moins long-temps la vertu électrique développée en un des points de leur surface. Les corps anélectriques, au contraire, sont bons conducteurs, c'est-à-dire que la vertu ou le *fluide* électrique développé en un de leurs points se transmet instantanément sur toute l'étendue de leur superficie.

Cette distinction ne doit pas, néanmoins, être entendue d'une manière absolue, et il faut admettre que tous les corps sont plus ou moins bons conducteurs.

Les oxydes métalliques, le charbon ordinaire, les gaz et notamment l'air atmosphérique sont assez mauvais conducteurs; l'eau, la vapeur, les liquides, à l'exception des huiles, le charbon calciné (braise de boulanger), les corps des animaux, etc., conduisent assez bien l'électricité.

Le globe terrestre absorbe entièrement et rend insensible toute l'électricité développée sur une surface avec laquelle il est en contact; c'est à raison de cette propriété qu'on lui donne le nom de *réservoir commun*, et que les corps non-conducteurs sont *isolants* comme interceptant toute communication avec le globe ou entre les corps électrisés et ceux qui ne le sont pas.

On appelle *électroscopes* les instruments propres à faire connaître l'électricité. Le plus simple de tous consiste dans une boule de moelle de sureau suspendue à un fil de soie ou de métal très-fin, fixé à une tige isolante. Tout corps électrisé doit attirer la boule à une certaine distance. Mais lorsque cette boule a été en contact avec le corps et qu'elle a pris une certaine partie de son électricité, elle est repoussée. Deux boules semblables se repoussent mutuellement lorsqu'elles ont été électrisées par de la résine ou par du verre frottés avec de la laine; mais elles s'attirent lorsque l'une d'elles a été en contact avec la résine et l'autre avec le verre.

On conclut de là qu'il y a deux espèces d'électricités auxquelles on a donné respectivement les noms de *vitrée* et de *résineuse*, ou de *positive* et de *négative*. Leurs types sont les électricités développées respectivement sur le verre poli et sur la résine frottés avec de la laine, laquelle prend toujours l'électricité contraire à celle qu'elle développe. Les électricités de même nom se repoussent donc, et celles de noms contraires s'attirent. Leur combinaison constitue le *fluide neutre* ou l'état naturel des corps.

Les substances dont voici les noms s'électrisent positivement lorsqu'elles sont frottées avec celles qui les suivent, et négativement quand elles le sont avec celles qui les précèdent: peau de chat, verre poli, laine, plumes, bois, papier, soie, gomme laque, verre dépoli.

Une *machine électrique* est un appareil au moyen duquel on peut développer de l'électricité en quantité indéfinie. Elle se compose ordinairement d'un plateau de verre vertical mobile autour d'un axe horizontal, qui, dans le mouvement de rotation qu'on lui imprime autour de cet axe, frotte entre des coussins rembourrés de crins et de laine et enduits d'une couche d'or mussif (deuto-sulfure d'étain), ou d'amalgame de zinc et d'étain. Des conducteurs métalliques creux, cylindriques ou en fer à cheval, soutenus sur des pieds de verre enduits d'une couche de vernis à la gomme laque, et terminés par des boules métalliques placées à proximité du plateau, se chargent d'électricité positive lorsque les coussins sont en communication avec le réservoir commun par des corps suffisamment conducteurs.

Un appareil de ce genre donne lieu aux phénomènes les plus curieux. D'abord lorsqu'on approche des tubes conducteurs une substance conductrice, on en soutire des étincelles à une distance qui varie avec la puissance de la machine et qui atteint parfois jusqu'à 3 et 4 mètres. Ces étincelles sont accompagnées d'une détonation qui peut égaler celle d'un petit pétard. Les hommes et les animaux ressentent toujours une commotion plus ou moins forte lorsqu'ils soutirent l'étincelle. L'éther et l'alcool sont enflammés par le passage de cette étincelle, aussi bien que la mèche encore chaude d'une bougie qui vient d'être éteinte. Un mélange de deux volumes d'hydrogène et d'un d'oxygène détone et forme de l'eau sous l'influence de cette étincelle. Dans le *pistolet de Volta* l'explosion chasse au loin un bouchon placé sur l'orifice d'un petit tube de cuivre où s'opère la combinaison.

Une personne placée sur un gâteau de résine bien sec ou sur un isoloir à pieds de verre, ne reçoit aucun choc de la machine avec laquelle elle communique, tandis que le mouvement y développe de l'électricité; seulement elle éprouve sur la peau, et surtout à la figure, l'impression d'un souffle léger; ses cheveux se hérissent et laissent échapper des aigrettes de lumière. Si on vient alors à la toucher, on en tire des étincelles dont l'intensité dépend de la charge électrique que l'on a accumulée sur elle.

La *danse des pantins* est un jeu singulier qui a suggéré à Volta une ingénieuse explication de la formation de la grêle. De petits pantins de liége sont placés sur un plateau métallique communiquant avec le sol, tandis qu'un autre plateau placé à 12 ou 15 centimètres au-dessus communique avec le conducteur de la machine. Si l'on met celle-ci en mouvement, on voit les pantins sauter contre le plateau supérieur et retomber alternativement en faisant des oscillations répétées.

On dit qu'un corps conducteur est électrisé *par influence* lorsqu'il est soumis à l'action d'un corps électrisé. Ce corps revient à son état primitif dès que l'influence cesse. *L'électrophore* imaginé par Volta est un instrument très-simple et très-facile à construire, qui repose sur cette propriété. Il se compose d'un gâteau de résine, coulé dans une boîte plate et circulaire et terminé par un plan; d'un disque de bois à rebords arrondis, recouvert d'une feuille d'étain, dont le diamètre est inférieur de 4 à 5 centimètres à celui du gâteau, et qui porte à son centre un manche isolant en verre. On bat toute la surface de la résine avec une peau de chat, ce qui y développe l'électricité résineuse; on pose sur cette surface le disque en le tenant par son manche isolant, et avec le doigt on soutire l'électricité résineuse qui s'y est développée. Si on enlève alors de nouveau le disque par son manche, on le trouve chargé d'électricité vitrée, et on peut en tirer une étincelle.

Tout appareil composé essentiellement de deux lames conductrices séparées par une lame non conductrice, est ce que l'on appelle un *condensateur*. Si l'une des deux lames est de plus en plus chargée d'électricité, l'autre s'électrise aussi par influence, mais l'électricité de l'appareil est plus ou moins dissimulée. Pour recomposer le fluide neutre par la combinaison des deux électricités, il suffit de mettre les deux lames en communication au moyen d'un *excitateur*.

La *bouteille de Leyde* ou *jarre électrique* est l'un des condensateurs les plus simples et les plus faciles à construire. C'est une simple bouteille ou jarre de verre, revêtue extérieurement sur une partie de sa hauteur d'une feuille d'étain, et remplie intérieurement de feuilles de clinquant avec lesquelles communique une tige métallique fixée au goulot par un bouchon et terminée à son autre extrémité par une boule ou bouton. Pour charger la bouteille, il faut tenir l'*armature* extérieure en communication avec le sol, pendant que le bouton soutire les étincelles fournies par la machine électrique ou par l'électrophore. L'électricité dissimulée se recompose ensuite avec une explosion plus ou moins forte, lorsque l'on vient à faire communiquer, par un corps conducteur, le bouton avec l'armature extérieure.

Les *batteries électriques* sont un assemblage de bouteilles de Leyde dont toutes les armatures extérieures communiquent entre elles, parce qu'elles reposent sur une lame de plomb, et dont les boutons sont aussi tous réunis par des tiges métalliques transversales. L'explosion d'une batterie médiocrement chargée peut tuer des animaux de grande taille; et en accumulant des quantités convenables d'électricité, on fond et on volatilise les métaux, on brise les pierres, en un mot, on produit les effets les plus surprenants.

L'analogie de ces effets avec ceux de la foudre est manifeste. Aussi est-il bien constaté aujourd'hui, que la foudre n'est autre chose qu'une étincelle électrique d'une grande puissance (col. 376). De là, l'utilité des *paratonnerres*, inventés par le célèbre Franklin. La pointe métallique qui termine la tige soutire l'électricité en excès des nuages qui passent au-dessus et la transmet au réservoir commun à l'aide d'un bon conducteur, sans solution de continuité, plongeant assez avant dans le sol, soit au milieu d'un puits, soit dans une caisse remplie de braise de boulanger.

Un électrophore et une bouteille de Leyde, appareils que tout le monde peut construire ou se procurer à peu de frais, servent à une foule d'expériences curieuses et faciles à répéter.

Ainsi, après avoir chargé la bouteille au moyen de l'électrophore, on trace avec le bouton, puis avec l'armature de la bouteille, divers caractères sur le gâteau de résine. Si l'on saupoudre ensuite le gâteau avec un mélange de fleur de soufre et de minium (oxyde rouge de plomb), on voit apparaître en jaune les caractères tracés par le bouton, et en rouge ceux qu'a tracés l'armature. C'est ce que l'on appelle l'expérience des *figures de Leichtenberg*.

Le *perce-carte* offre encore un phénomène curieux. Deux pointes métalliques sont placées dans une même verticale, mais séparées par une certaine lacune. Une carte est placée aussi à peu près verticalement entre elles, de telle sorte que les deux pointes correspondent à des faces différentes. Chaque pointe étant mise en communication avec une des faces de la bouteille, l'étincelle part et la carte est percée d'un trou plus grand que celui d'une épingle. Des deux côtés du trou on observe un petit bourrelet et des filaments tirés en dehors.

Avec la bouteille de Leyde on peut encore enflammer les liqueurs spiritueuses, et même du coton roulé dans du lycopode et dans de la résine pulvérisée.

La pression, la chaleur et le *clivage* des cristaux développent aussi de l'électricité dans certaines circonstances. (col. 449).

Il résulte des expériences remarquables de M. Wheatstone que l'électricité se transporte sur un fil de laiton de 0 m., 002 de diamètre avec une vitesse d'environ 460 000 kilom. par seconde, c'est-à-dire une fois et demie plus considérable que celle de la lumière.

ÉLECTRICITÉ VOLTAÏQUE OU GALVANISME. « Le tableau détaillé des grands résultats qui ont été amenés par de très-petites causes ne serait pas moins piquant peut-être, » dit M. Arago, « dans l'histoire des sciences que dans celle des nations... On peut prouver, en effet, que l'immortelle découverte de la *pile* se rattache de la manière la plus directe à un léger rhume dont une dame bolonaise fut attaquée en 1790, et au bouillon aux grenouilles que le médecin prescrivit comme remède. Quelques-uns de ces animaux, déjà dépouillés par la cuisinière de madame Galvani, gisaient sur une table, lorsque, par hasard, on déchargea au loin une machine électrique. Les muscles, quoiqu'ils n'eussent pas été frappés par l'étincelle, éprouvèrent, au moment de sa sortie, de vives contractions. » Galvani, savant anatomiste, mais peu au fait de l'électricité, trouva ce phénomène très-surprenant. Il en fit le sujet d'expériences qu'il varia de mille manières, et il eut enfin l'occasion d'observer que les membres d'une grenouille décapitée, même depuis plusieurs heures, éprouvent des contractions très-intenses, sans l'intervention d'aucune électricité étrangère, lorsque l'on interpose une lame métallique, ou, mieux encore, deux lames de métaux dissemblables entre un muscle et un nerf.

Galvani crut alors avoir trouvé le fluide vital et lui assigna une nature électrique. Mais l'illustre physicien Volta prouva que le contact seul de deux métaux de nature différente produit de l'électricité; et il donna le nom de *force électro-motrice* à cette force nouvelle, qui décompose l'électricité naturelle de deux corps hétérogènes en contact.

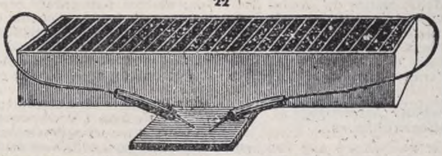
Guidé par ses vues théoriques, Volta imagina de former une longue colonne en superposant successivement une rondelle de cuivre, une de zinc et une de drap mouillé, avec l'attention de ne jamais intervertir cet ordre. « Cette masse en apparence inerte est, quant à la singularité des effets, » dit encore M. Arago, « le plus merveilleux instrument que les hommes aient jamais inventé, sans en excepter le télescope et la machine à vapeur. » Les deux extrémités de la pile sont, l'une une plaque de zinc à laquelle correspond le *pôle positif*, l'autre une plaque de cuivre à laquelle correspond le *pôle négatif*. Si deux fils métalliques sont attachés à ces deux plaques extrêmes, au moment où on les touche tous deux on ressent une commotion dont la force dépend de celle de la pile. Le fil qui part du pôle zinc étant appuyé sur le bout de la langue, et le fil du pôle cuivre sur un autre point, on sent une saveur acide très-prononcée. Pour que cette saveur devienne alcaline, il suffit de changer les deux fils de place.

En appliquant le bout de l'un des fils sur le front, sur les joues, sur le nez, sur le menton et même sur la gorge, à l'instant où l'on saisit l'autre fil avec la main, on aperçoit, les yeux fermés, un éclair dont la vivacité et la forme varient. Sous l'action combinée des deux fils, les cadavres de personnes mortes depuis quelques heures se sont dressés, ont gesticulé et ont éprouvé d'horribles contorsions. Quoique chacun des fils, considéré isolément, se montre à la température ordinaire, dès qu'on les met en contact, de manière à fermer le circuit, ils s'échauffent subitement; si les extrémités sont suffisamment tenues et la pile forte, les fils rougissent et même fondent et se volatilisent.

L'eau, les acides, les oxydes, les sels, et tous les corps composés, pour peu qu'ils soient conducteurs, sont décomposés par la pile lorsqu'on les place dans le *courant*, c'est-à-dire lorsqu'on les dispose entre les pôles, de telle sorte qu'ils forment une partie du circuit. L'un des éléments se rend au pôle positif et l'autre au pôle négatif. Le courant va toujours du pôle zinc au pôle cuivre.

On a donné à la pile un grand nombre de formes différentes. La fig. 22 en represente

22

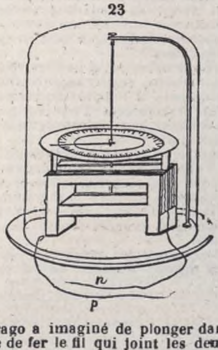


une des plus usitées, la *pile à auges*. C'est une caisse en bois, divisée en compartiments ou cases par des cloisons composées chacune de deux plaques cuivre et zinc soudées ensemble, et qui s'engagent dans des rainures pratiquées sur les parois de la caisse, revêtues d'un mastic non conducteur. Les intervalles des plaques consécutives forment de petites auges de 5 à 6 millim. d'épaisseur, dans lesquelles on met de l'eau acidulée. Les extrémités des fils peuvent être garnies de manchons de verre, afin de préserver l'expérimentateur de tout danger de commotion.

Électro-magnétisme. — Lorsque l'on approche d'un fil conducteur traversé par le courant de la pile une aiguille aimantée librement suspendue, le courant tend toujours à tourner l'aiguille en croix avec lui, le pôle austral à gauche. Telle est la découverte fondamentale faite par le professeur Œrsted à Copenhague en 1820. MM. Biot et Savart ont démontré que l'intensité de l'action du courant est en raison inverse de la simple distance.

Le *multiplicateur* ou *galvanomètre*, imaginé par M. Schweiger, est un instrument fondé sur cette propriété et d'une sensibilité merveilleuse pour découvrir les moindres traces de l'électricité en mouvement, notamment les phenomenes *thermo-électriques*, dus à une simple différence de temperature entre les parties d'un circuit composé de métaux. La fig. 23 représente le galvanomètre perfectionné par Nobili. Deux aiguilles aimantées de forces presque égales sont montées en sens contraires sur un même axe, de manière que leur ensemble ne conserve plus qu'une force directrice très-faible. De plus, un circuit est formé par un fil métallique très-fin et très-long, enduit d'une substance isolante, et enroulé autour d'un cadre rectangulaire, de manière que l'aiguille supérieure passe au-dessus de la base supérieure, et l'aiguille inférieure entre les deux bases de ce rectangle. L'aiguille supérieure tourne sur un cadran divisé en 360 degrés. Les deux fils *p* et *n* étant mis en contact avec le plus faible courant galvanique, les déviations de l'aiguille accuseront l'existence de ce courant et sa direction.

23



M. Arago a imaginé de plonger dans de la limaille de fer le fil qui joint les deux pôles d'une pile : à l'instant la limaille s'enroule autour du fil et y adhère tant que dure le courant; mais elle se détache dès que le circuit est rompu.

Une aiguille d'acier est aimantée lorsqu'elle est placée dans un tube de verre autour duquel est enroulé en hélice un fil métallique communiquant avec les deux pôles de la pile.

Réciproquement, l'influence d'un corps aimanté peut faire naître un courant dans un corps fermé, ainsi que l'ont prouvé les ingénieuses expériences de M. Faraday. C'est à cet ordre de faits que se rapporte le *magnétisme de rotation,* dont la connaissance est due à M. Arago. Ce phénomène important consiste en ce qu'un mouvement de rotation suffisamment rapide, imprimé à un disque de cuivre rouge très-pur, au-dessous d'une aiguille aimantée, communique à celle-ci un mouvement semblable dans le même sens.

ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE. — C'est ainsi que l'on appelle une branche de la science due presque entièrement aux travaux de l'illustre Ampère, et dont les bases sont démontrées expérimentalement à l'aide d'un appareil extrêmement ingénieux.

On voit d'abord, au moyen de cet appareil, que deux courants parallèles s'attirent ou se repoussent, suivant qu'ils marchent dans le même sens ou en sens contraire. Ensuite, deux courants croisés tendent toujours à devenir parallèles pour marcher dans le même sens. Enfin, la terre agit en chaque lieu, sur un courant voltaïque, comme un aimant dont l'axe serait parallèle à l'aiguille d'inclinaison, ou comme une série de courants électriques, tous dirigés de l'est à l'ouest, qui existeraient à la surface ou dans l'intérieur du globe, et dont l'intensité irait en croissant du pôle à l'équateur.

§ 7. *Indications historiques et bibliographiques.*

La physique est une science que l'on peut regarder comme entièrement de création moderne. Les anciens n'ont connu ni les lois de la pesanteur, ni la pression atmosphérique, ni les lois du mouvement des liquides.

C'est à Pythagore que l'on attribue la première idée de rapports simples entre les principaux intervalles musicaux.

Archimède trouva les conditions d'équilibre des solides plongés dans un liquide.

Ctésibius et Héron d'Alexandrie, son disciple, qui vivait au deuxième siècle avant l'ère chrétienne, furent les auteurs d'une foule d'appareils ingénieux mis en jeu par l'air et par l'eau.

Les anciens Romains, si habiles dans l'art des constructions, surent aussi conduire les eaux nécessaires à l'approvisionnement des villes, et pratiquèrent l'hydraulique avec quelque bonheur, sans en connaître les principes théoriques.

La catoptrique, celle des parties de l'optique qui s'appuie le plus immédiatement sur les principes de géométrie, fut assez avancée chez les anciens. Euclide, Archimède, Ptolémée, la cultivèrent avec succès. Elle fit même quelques progrès entre les mains des Arabes.

La connaissance des propriétés des lentilles et des miroirs semblait devoir conduire à l'invention des télescopes plus tôt qu'on n'y est réellement arrivé. Galilée est le premier qui ait construit, d'après des principes théoriques, une lunette à réfraction, un peu après avoir appris qu'une invention venait d'avoir lieu à ce sujet en Hollande.

C'est au seizième siècle, si remarquable dans l'histoire de l'esprit humain, que la physique commença à sortir des langes où elle était restée ensevelie jusqu'alors.

Le dix-septième et le dix-huitième siècle furent signalés par des progrès encore plus grands; Galilée, Descartes, Snellius, Torricelli, Pascal, Otto de Guericke, le P. Kircher, Boyle Huygens, Hooke, Newton, Mariotte, Amontons, Hauksbée, les Bernouilli, Clairaut, D'Alembert, OEpinus, Franklin, Galvani, Volta, Coulomb Borda, etc., firent avancer simultanément la connaissance des lois de la mécanique, des fluides, de l'optique, de la chaleur, de l'acoustique, du magnétisme et de l'électricité. Enfin, les travaux de notre siècle tendent de plus en plus à rattacher à des théories certaines les faits épars dont se composent encore la majeure partie des branches qui traitent des fluides impondérables. C'est à la France surtout que la physique mathématique doit ses plus grands progrès. Lagrange, Laplace, Legendre, Fourier, Poisson et Ampère, appliquaient le calcul aux phénomènes de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de l'optique, tandis que Malus, Petit, Fresnel et Dulong découvraient avec une sagacité merveilleuse et mesuraient avec une exactitude jusque-là sans exemple, les résultats qui servent de base à la physique moderne. Sans vouloir citer ici spécialement aucun auteur vivant, il nous suffira de dire que nous avons encore de dignes représentants dans les diverses branches de la physique expérimentale et mathématique. Ces études, momentanément négligées en France, semblent reprendre une vigueur nouvelle, et l'on a vu de jeunes savants mériter, par la profondeur et la perfection de leurs travaux, de prendre place auprès des anciens émules et collaborateurs des hommes illustres dont les noms viennent d'être cités.

Parmi les ouvrages destinés à l'enseignement de la physique, nous citerons les *Eléments de physique* de M. Pouillet, auxquels nous avons emprunté la substance de notre résumé, et qui se distinguent par la richesse des faits d'expérience qui y sont relatées, aussi bien que par la clarté de l'exposition et par la belle exécution des planches; le savant *Cours de physique de l'école Polytechnique*, par M. Lamé; le *Traité élémentaire* de physique de M. Despretz; celui de M. Peclet, etc., etc. Les *Annales de chimie et de physique* de MM. Gay-Lussac et Arago, qui ont aujourd'hui pour collaborateurs MM. Chevreul, Dumas, Pelouze, Boussingault et Regnault, et les *Annalen der Chemie und Physik* de Poggendorf sont les recueils scientifiques les plus importants à consulter pour l'étude approfondie et pour la connaissance de l'histoire de la science moderne.

X. CHIMIE.

§ 1. *Principes fondamentaux.*

Nature des actions chimiques. — La chimie a pour but l'examen des phénomènes qui se rattachent à la constitution intime des corps, et surtout de ceux où cette constitution est altérée d'une manière permanente de manière à donner lieu à de nouveaux produits.

Lorsque l'on brise un morceau de bois à l'aide d'un maillet et d'un coin, quelque petits que soient les fragments dans lesquels le bois est divisé, ils sont toujours de la même nature que le morceau dont ils proviennent; on n'a donc exercé là qu'une action physique. Mais si ce bois est soumis à l'action du feu, il se dessèche, s'échauffe, s'enflamme, et brûle en donnant un dégagement de fumée et en laissant pour résidu de la cendre. Dans ce second cas, il y a altération des principes constituants du bois, et par conséquent action chimique.

On doit considérer tous les corps de la nature comme composés d'un certain nombre d'*éléments* que l'on sépare les uns des autres par des procédés qui constituent l'*analyse chimique;* réciproquement, la recomposition d'un corps au moyen de ses principes constituants est ce que l'on appelle sa *synthèse.*

Lorsqu'un des éléments qui entrent dans la composition des corps n'a pu être décomposé en d'autres principes, que toutes les actions chimiques auxquelles on l'a soumis n'ont abouti qu'à le combiner avec d'autres corps, sans qu'on en ait jamais tiré d'élément d'une autre nature, on dit que cet élément est un *corps simple.*

Les quatre prétendus éléments des anciens, l'eau, l'air, la terre et le feu n'existent plus pour la chimie moderne. L'eau est le résultat de la combinaison de deux gaz simples, l'*oxygène* et l'*hydrogène;* l'air est un mélange d'*oxygène* et d'un autre gaz simple, l'*azote* (col. 345); il y a autant de terres que de mélanges possibles de matières minérales, végétales et animales, et rien n'est plus varié ni plus complexe que leur composition; enfin le feu n'est pas un corps, mais le résultat d'un ébranlement moléculaire particulier de la matière. (col. 409.)

On compte aujourd'hui 55 corps simples, ou que du moins on est convenu d'appeler ainsi, dans l'état actuel de la science. Rien ne peut autoriser à penser aujourd'hui que l'on parvienne jamais à les décomposer en éléments plus simples; cependant, comme leur nombre augmente tous les jours et qu'il existe un certain nombre de phénomènes d'où ressort la possibilité, pour ces corps eux-mêmes, de divers modes d'agrégation des molécules, il est rationnel de croire que le nombre des véritables éléments est beaucoup plus restreint.

Quoi qu'il en soit, tous les corps connus de la nature peuvent être considérés comme le résultat de la combinaison de deux ou d'un plus grand nombre de ces corps simples.

Combinaisons chimiques. — Il est essentiel de distinguer une *combinaison* d'un simple *mélange.* Lorsque l'on vient à triturer ensemble de la limaille de cuivre et de la limaille de fer, quelque parfaite que soit cette trituration, le résultat ne sera jamais qu'un mélange; mais si on fait fondre dans un creuset, à une température convenable, un mélange de soufre et de fer, ce mélange se transforme en une véritable combinaison qui n'est plus ni du fer ni du soufre; c'est un *sulfure de fer*, corps composé dont les propriétés et l'apparence diffèrent essentiellement de celles des corps dont il est formé.

On appelle *affinité* la force qui porte les corps à se combiner les uns avec les autres. Elle diffère de la *cohésion* ou *attraction moléculaire* (col. 385) qui a lieu au contact ou à de très-petites distances entre des substances de même nature. L'affinité est modifiée par les proportions relatives des corps mis en présence, par les combinaisons dans lesquelles ils peuvent être déjà engagés, par la cohésion elle-même, par l'état calorifique et électrique des corps, par leurs densités, par la pression à laquelle ils peuvent être soumis, etc.

En considérant le nombre des corps simples, il semble que de leurs combinaisons 2 à 2, 3 à 3, dans des proportions variées à l'infini, devrait résulter un nombre illimité de corps composés; mais il n'en est pas ainsi. C'est un fait fondamental que quand deux corps se combinent ensemble, leur combinaison a toujours lieu dans des proportions parfaitement déterminées; et si les mêmes corps donnent lieu à plus d'une combinaison, à 2, à 3, à 4, à 5, par exemple, la quantité de l'un d'eux restant la même, la proportion de l'autre croît suivant une série de rapports simples, tels que 1, 2, 3, 4, 5; ou 1. 1 1/2, 2, 2 1/2, 3, 3 1/2, etc..

Prenons, pour exemple, les 5 combinaisons que le gaz azote peut former avec le gaz oxygène. Un volume du premier combiné successivement avec un demi, un, un et demi, deux, deux et demi volumes du second, forme les 5 composés connus sous le nom de protoxyde d'azote, deutoxyde d'azote, acide hypo-azoteux, acide azoteux, acide azotique.

Il est très-rare, du reste, que deux corps puissent se combiner en autant de proportions différentes.

Le nombre des composés binaires est donc déjà incomparablement plus restreint qu'il ne semblerait devoir l'être au premier abord. Si l'on ajoute à cette considération les impossibilités résultant de la rareté de certains corps simples et du peu d'affinité mutuelle qui existe entre beaucoup d'entre eux, aussi bien que de la difficulté croissante d'obtenir des composés contenant plus de 4 éléments, on arrivera à un nombre de combinaisons que la science peut presque prévoir et embrasser dans son état actuel.

Les substances végétales sont essentiellement composées d'oxygène, d'hydrogène et de carbone; les substances animales, outre ces 3 principes, contiennent de l'azote. Les proportions dans lesquelles ils se combinent peuvent constamment être exprimées par des nombres entiers, mais qui ne sont plus aussi simples que dans les substances minérales.

On divise ordinairement la chimie en *inorganique* ou *minérale* et *organique*, comprenant l'étude des substances d'origine végétale et animale.

NOMENCLATURE CHIMIQUE. — Celle de la chimie minérale est implicitement fondée sur le fait de l'existence d'un nombre limité de combinaisons possibles.

D'abord les noms des 55 corps simples, rangés par ordre alphabétique, sont les suivants : Aluminium, Antimoine, Argent, Arsenic, Azote, Baryum, Bismuth, Bore, Brôme, Cadmium, Carbone, Calcium, Cerium, Chlore, Chrôme, Cobalt, Cuivre, Etain, Fer, Fluor, Glucynium, Hydrogène, Iode, Iridium, Lantane, Lithium, Magnesium, Manganèse, Mercure, Molybdène, Nickel, Or, Osmium, Oxygène, Palladium, Phosphore, Platine, Plomb, Potassium, Rhodium, Selenium, Silicium, Sodium, Soufre, Strontium, Tantale, Tellure, Thorinium, Titane, Tungstène, Uranium, Vanadium, Yttrium, Zinc, Zirconium.

On donne le nom de *combustibles* ou *oxygénables* à tous ces corps simples, à l'exception de l'oxygène qui est dit *comburant*.

Les substances les plus répandues dans la nature consistent soit en corps *brûlés* ou *oxygenés*, soit en combinaisons de ces corps.

On désigne par le nom d'*acides* les corps oxygénés qui, comme le vinaigre, comme l'eau forte, comme l'huile de vitriol, ont une saveur acide plus ou moins prononcée, et rougissent la couleur naturellement bleue de la teinture de tournesol. Les *oxydes*, au contraire, sont les corps oxygénés qui n'altèrent pas cette teinture et qui tendent plutôt à la ramener au bleu lorsqu'elle a été rougie par un acide, ou à verdir le sirop de violettes, ou à rougir la teinture jaune de curcuma. La chaux ou oxyde de calcium est dans ce cas.

Un corps peut donner lieu à plusieurs oxydes et acides. On distingue alors ces oxydes, suivant leur degré d'oxygénation, par les épithètes *proto*, *sesqui* (1 fois 1/2), *deuto*, *trito*; on dit donc protoxyde, deutoxyde et tritoxyde d'étain; sesquioxyde de manganèse. L'epithète *per* est encore attribuée à l'oxyde le plus oxygéné; de sorte que l'on peut dire peroxyde d'étain au lieu de tritoxyde. Quant aux acides, ils se designent en donnant la terminaison *eux* au moins oxygéné et la terminaison *ique* à celui qui l'est le plus. On dit donc acide sulfureux et acide sulfurique, pour deux acides formés par la combinaison du soufre avec l'oxygène. La qualification de *hypo*, mise avant le nom de l'acide, indique un degré d'oxygénation de moins. On désigne les quatre acides formés par la combustion de l'azote par les mots hypoazoteux, azoteux, hypoazotique, azotique, qui expriment des quantités croissantes d'oxygène.

Il y a des acides formés par la combinaison de deux corps combustibles simples, sans oxygène. On les désigne en terminant par les désinences *eux* ou *ique* un mot composé des deux noms. On dit donc acide chlorhydrique, acide iodhydrique, etc., pour les *hydracides* formés de la combinaison de l'hydrogène avec le chlore, avec l'iode, etc.

Quand un acide et un oxyde se combinent de manière à se neutraliser plus ou moins, ils forment ce que l'on appelle un *sel*, que l'on désigne par l'acide et l'oxyde qui le forment, en ajoutant au nom de l'acide la désinence *ite*, s'il était terminé en *eux*, et *ate*, s'il l'était en *ique*. L'acide sulfurique et le protoxyde de plomb donnent donc le sulfate de protoxyde de plomb; l'acide sulfureux et l'oxyde de potassium donnent le sulfite d'oxyde de potassium. Les oxydes de plomb et de potassium jouent, dans ce cas, le rôle de *bases*. Certains oxydes, qui sont des bases plus énergiques que les autres, qui ont plus d'affinité pour les acides, prennent le nom d'*alcalis* ou de *bases alcalines*. Tels sont les oxydes de calcium, de strontium, de baryum, de lithium et surtout de sodium et de potassium, connus vulgairement sous les noms de chaux, de strontiane, de baryte, de lithine, de soude et de potasse.

L'ammoniaque, combinaison d'hydrogène et d'azote, est aussi un alcali énergique.

On substitue aussi très-souvent, dans la nomenclature, la dénomination de *nitreux* et *nitrique* à celle d'azoteux et d'azotique, et celle de *muriatique* à celle de *chlorhydrique* ou d'*hydrochlorique*.

Lorsque le même acide et le même oxyde, se combinant en plusieurs proportions, donnent naissance à plus d'un sel, il y a un de ces sels que l'on appelle *neutre*, et dans lequel les propriétés de l'acide et de l'oxyde se sont en effet le mieux neutralisées réciproquement ; et les autres sels sont composes de telle sorte que la quantité d'oxyde restant la même que dans le sel neutre, les quantités d'acide deviennent 1 fois et demie, 2, 3, 4 fois, ou seulement les deux tiers, la moitié, le tiers ou le quart de la quantité d'acide du sel neutre. Pour exprimer ces nuances de composition, on se sert des qualifications de *sesqui*, *bi*, *tri*, *quadri*. Ainsi on dira biphosphate de chaux, pour exprimer que ce sel renferme deux fois autant d'acide que le phosphate neutre, pour la même quantité de chaux; ce serait au contraire un phosphate *sesquibasique*, si, pour la même quantité d'acide, il y avait une fois et demie autant de chaux, ou si, pour la même quantité de chaux, il n'y avait que les deux tiers de l'acide.

La combinaison de plusieurs métaux s'appelle *alliage*, à moins que le mercure n'y entre, auquel cas elle prend le nom d'*amalgame*.

La combinaison de deux corps combustibles, lorsqu'elle n'est pas gazeuse, se désigne par le nom de ces corps, en ajoutant la terminaison *ure* à celui des deux qu'on énonce le premier, et en ajoutant, s'il le faut, la qualification de *proto*, de *deuto*, etc. On aura donc protochlorure et deutochlorure de mercure, iodure de fer, etc.

Mais si cette combinaison est gazeuse, le second nom prend la terminaison *é*; on dit ainsi gaz hydrogène arséniqué, gaz hydrogène bicarboné, etc.

La nomenclature des produits de la chimie organique n'est soumise à aucune règle fixe. Cependant on y distingue des acides, des bases et des sels; et ceux-ci s'énoncent avec les terminaisons *ite* et *ate* s'il y a lieu.

§ 2. *Esquisse des faits généraux relatifs aux combinaisons des corps.*

PROPORTIONS DÉFINIES. — Un corps ne peut être composé que de la combinaison, 1° de l'oxygène avec un des 54 autres corps simples; 2° de 2 corps simples combustibles, rarement de 3 ou de 4; 3° d'un acide binaire et d'une base salifiable; 4° de deux sels; 5° de 2 composés binaires, tels qu'un sulfure et un oxyde, etc...

Ce dernier cas est très-rare. On comprend dans le 3e le cas où deux acides ou bien deux oxydes se combinent ensemble, parce qu'alors l'un d'eux joue le rôle de base et l'autre le rôle d'acide.

Ce ne sont pas seulement les combinaisons successives de deux corps simples qui ont lieu suivant des proportions définies, dont l'échelle est composée d'une suite de multiples ayant entre eux des rapports très-simples. Les composés formés de principes binaires sont soumis à cette loi, et de plus à une autre dont nous donnerons idée en disant que la quantité d'oxygène de l'acide dans un sel est généralement un multiple simple de la quantité d'oxygène de l'oxyde.

Ainsi les quantités d'acides carbonique, sulfurique et azotique nécessaires pour saturer complétement 590 parties de potasse, contenant 100 d'oxygène, sont:

276 501 677

qui contiennent respectivement en oxygène

200, 300, 500.

Les quantités d'oxygène dans l'acide des carbonate, sulfate et azotate de potasse, sont donc respectivement le double, le triple et le quintuple de celle que contient la potasse; et ces rapports sont les mêmes pour tous les carbonates, sulfates et azotates, quelle que soit la base.

Les composés formés de principes plus que binaires sont rares, et on n'en a d'exemple que parmi les sels. Ils sont aussi assujettis à cette loi remarquable, que si 2 sels ayant le même acide et des bases différentes se combinent, la quantité d'oxygène de la base dans l'un est un multiple par un nombre entier de la quantité d'oxygène de la base dans l'autre.

Ainsi l'*alun potassique* est un sel double composé de 2146 parties de sulfate d'alumine, lesquelles contiennent 1200 d'oxygène dont 300 dans l'alumine; et de 1091 de sulfate de potasse, lesquelles renferment 400 d'oxygène dont 100 pour la potasse. Le rapport entre les quantités d'oxygène que contiennent les 2 bases, dans ce sel double, est donc celui de 3 à 1. Nous faisons abstraction de l'eau combinée que contient l'alun.

Equivalents chimiques ou nombres proportionnels. — La constance du rapport entre l'oxygène de l'acide et celui de la base, dans tous les sels qui renferment cet acide, a donné naissance à l'expression d'*équivalents* pour désigner les poids d'oxydes différents qui sont saturés par un même acide au même degré, ou les poids d'acides différents qui saturent une même base au même degré. Ainsi 501 parties d'acide sulfurique qui contiennent 300 d'oxygène, saturant 590 de potasse, 391 de soude, 957 de baryte, 1394 de protoxyde de plomb, et 1452 d'oxyde d'argent, quantités d'oxydes qui renferment toutes 100 d'oxygène; on dira que ces quantités sont les équivalents chimiques ou les *nombres proportionnels* de ces bases.

De plus, les mêmes nombres expriment les quantités d'oxydes saturées par 677 d'acide azotique, qui renferme 500 d'oxygène. On regarde donc 501 d'acide sulfurique et 677 d'acide azotique comme des équivalents qui peuvent se remplacer mutuellement dans un sel, sans que la saturation cesse d'avoir lieu au même degré.

Les nombres

1091, 892, 1458, 1895, 1953,

que l'on obtient en ajoutant l'équivalent 501 de l'acide sulfurique aux équivalents des oxydes ci-dessus désignés, sont aussi ce que l'on appelle les équivalents des sulfates qui ont pour bases ces oxydes. De même les nombres

1267, 1068, 1634, 2071, 2129,

sont les équivalents respectifs des azotates de potasse, soude, baryte, oxyde de plomb, oxyde d'argent.

On voit, d'après ce qui précède, que si l'on met en présence deux équivalents de sels susceptibles de se décomposer mutuellement, par exemple 2071 d'azotate de plomb et 892 de sulfate de soude, la double décomposition sera complète. Les 677 d'acide azotique satureront les 391 de soude et donneront 1068 d'azotate de soude soluble; tandis que les 501 d'acide sulfurique saturant les 1394 d'oxyde de plomb, on aura 1895 de sulfate de plomb qui se précipitera au fond du vase.

Notons, en passant, qu'une réaction semblable a toujours lieu entre 2 sels solubles, lorsqu'il peut, de cette réaction, naître un sel insoluble.

C'est dans le même ordre d'idées que l'on évalue les nombres proportionnels des corps simples par les quantités de ces corps qui, combinées avec 100 d'oxygène, donnent naissance à un protoxyde.

Cette convention exigera que l'on emploie des nombres fractionnaires dans les équivalents de certains oxydes et de certains sels. Ainsi, le protoxyde de fer étant formé de 1 équivalent de fer et de 1 équivalent d'oxygène, le peroxyde, qui est un sesquioxyde, sera formé de 2/3 d'équivalent de fer et 1 équivalent d'oxygène. Le sesquicarbonate de soude renferme 1 équivalent de soude et 3/2 équivalents d'acide carbonique; le sulfate tribasique de cuivre, 1 équivalent d'oxyde de cuivre et 1/3 équivalent d'acide sulfurique.

Système atomique. En supposant la matière composée de particules d'une extrême petitesse, ou d'*atomes*, différant d'une substance à l'autre par le poids et peut-être par la forme, se juxtaposant sans jamais se confondre pour former des composés, et recouvrant au moment de leur séparation toutes leurs propriétés premières, on peint de la manière la plus nette les phénomènes chimiques à l'esprit.

Or, M. Gay-Lussac, en étudiant les combinaisons des gaz, est parvenu à ce résultat très-remarquable, que « les volumes des gaz qui se combinent sont toujours dans un rapport simple; et que si le composé éprouve une contraction, le volume contracté est lui-même en rapport simple avec le volume de l'un des deux gaz composants. » C'est ainsi que dans les 5 combinaisons déjà citées de l'azote avec l'oxygène, pour un volume d'azote il y en a successivement 1/2, 1, 1 et 1/2, 2, 2 1/2 d'oxygène; et les volumes des deux premières, les seules que l'on puisse observer à l'état gazeux, sont respectivement 1 et 2.

La première partie de cette loi, aussi bien que l'égale compressibilité et l'égale dilatabilité des gaz simples, porte à croire que tous ces gaz sous le même volume, à la même température et à la même pression, renferment le même nombre d'atomes.

Pour étendre cette hypothèse aux gaz composés, il faut faire une distinction entre l'atome physique et l'atome chimique, et admettre que le second n'est pas insécable comme le premier. Ainsi, un volume de gaz acide chlorhydrique étant formé de la combinaison d'un demi-volume de chlore et d'un demi-volume d'hydrogène, il faut que l'atome de chlore et celui de l'hydrogène puissent se couper en deux, pour donner naissance à l'atome de gaz chlorhydrique.

Il y a plus encore: si l'on compare le gaz ammoniac ou hydrogène azoté, composé de 3 volumes d'hydrogène pour 1 d'azote, avec l'hydrogène phosphoré, qui a avec le premier la plus grande analogie, on devrait admettre que le second gaz est composé aussi de 3 volumes d'hydrogène et de 1 de vapeur de phosphore; auquel cas la densité de cette vapeur serait 196, celle de l'oxygène étant 100. Mais l'expérience donne 392, c'est-à-dire précisément le double. L'hydrogène arséniqué donne lieu à une remarque tout à fait semblable. On doit donc renoncer aux plus belles analogies de la chimie, ou admettre que les gaz simples eux-mêmes ne renferment pas, à volume égal, le même nombre d'atomes chimiques. Ce nombre ne peut du reste varier que dans les rapports simples de 1 à 2 et à 3.

Cette restriction une fois adoptée, on voit que les *poids atomiques* des corps simples gazeux ou susceptibles de former des combinaisons gazeuses, sont proportionnels aux densités de ces corps ou des vapeurs qu'ils forment, ou plutôt à un multiple entier ou fractionnaire de ces densités. Le poids de l'atome d'oxygène est toujours pris pour type, et représenté par 100.

Des considérations d'un ordre différent peuvent guider dans la recherche de la composition atomique des corps solides et liquides qui ne donnent pas naissance à des combinaisons gazeuses. Il suffit pour cela d'admettre la loi de Dulong et Petit, sur la capacité des corps simples pour la chaleur, loi confirmée avec les restrictions convenables, et généralisée par les travaux remarquables de M. Regnault. Alors le poids atomique d'un corps simple quelconque s'obtiendra en divisant un nombre compris entre 38 et 42 par la chaleur spécifique de ce corps. On substituera au quotient le multiple simple du nombre proportionnel qui approchera le plus de ce quotient. Les multiples pourront être 1/3, 1/2, 2/3, 3/2, 2, 3... (col. 415).

Enfin, la belle loi de l'*isomorphisme* de M. Mitscherlich est du plus puissant secours pour achever la détermination des poids atomiques. Cette loi consiste en ce que les corps isomorphes, c'est-à-dire ceux qui cristallisent de la même manière, peuvent être considérés comme étant généralement composés du même nombre d'atomes, unis de la même manière.

Ainsi le poids atomique du fer 339 étant déterminé par sa chaleur spécifique, il faudra que le protoxyde soit composé d'un atome de fer et d'un d'oxygène, et le peroxyde de deux du fer et de trois d'oxygène. Or, comme le protoxyde de manganèse est isomorphe à celui du fer et son sesquioxyde avec le peroxyde de fer, ces deux oxydes sont atomiquement composés comme ceux de fer, ce qui conduit au nombre 346 pour le poids de l'atome de manganèse.

On a imaginé de représenter par des symboles la composition atomique des corps. On désigne d'abord tous les corps simples par une ou deux initiales ; puis par un *exposant* placé à droite et un peu au-dessus de ces initiales le nombre d'atomes de chaque corps qui entrent dans la composition d'une substance donnée.

Ainsi Fe représente l'atome de fer; FeO l'atome du protoxyde; Fe^2O^3 l'atome du peroxyde ; MnO et Mn^2O^3 les atomes du protoxyde et du sesquioxyde de manganèse.

Quelle que soit l'opinion que l'on se forme de la réalité du système atomique, on ne peut disconvenir que l'emploi simultané de ces formules abrégées et d'une table de poids atomiques mis en regard de ces formules, ne soit éminemment propre à mettre en lumière toutes les réactions chimiques des corps, et ne conduise absolument aux mêmes résultats que la table des nombres proportionnels.

CONSTITUTION MOLÉCULAIRE DES CORPS. — C'est un fait bien remarquable que l'identité, signalée par M. Dumas, des multiples ou sous-multiples les plus simples des poids atomiques de beaucoup de corps simples, comme on peut le voir dans le petit résumé suivant, où l'on indique les coefficients par lesquels on doit multiplier certains poids atomiques et les résultats qui s'appliquent à plusieurs corps, avec cette préparation préalable.

Silicium = 2 bore = 275.
Cobalt = nickel = 1/2 étain = 368.
Cuivre = 1/2 iode = 395.
Zinc = ytrium = 1/2 antimoine = tellure = 2 soufre = 403.
Cérium = 1/2 tantale = 575.
Molybdène = 1/2 tungstène = 597.
Platine = iridium = 1233.
Osmium = or = 1244.
Bismuth = 2 palladium = 1330.

« Ces rapprochements me semblent fort piquants, » dit le savant illustre auquel nous les empruntons, « et s'il n'en sort aucune preuve de la possibilité d'opérer des transmutations dans les corps simples, du moins s'opposent-ils à ce qu'on repousse cette idée comme une absurdité qui serait démontrée par l'état actuel de nos connaissances. » Il faut donc, sous ce rapport, séparer essentiellement le fond de l'idée de la *pierre philosophale*, objet de tant de recherches au moyen âge, de ses deux acolytes, la *quadrature du cercle* et le *mouvement perpétuel*, qui sont de véritables absurdités (col. 121 et 756). Néanmoins reconnaissons que c'est aux progrès successifs de la science qu'il faut laisser le soin d'éclaircir le mystère ; et qu'on doit regarder comme une preuve d'ignorance ou de folie les tentatives qui se font peut-être encore aujourd'hui, dans quelques obscures officines, pour trouver directement la transmutation des métaux en or. Autant vaudrait chercher la véritable pierre philosophale, l'*élixir de longue vie*, la *panacée universelle*.

Un autre fait non moins remarquable, signalé aussi par M. Dumas, c'est que si l'on cherche les rapports entre les densités et les poids atomiques des corps simples, on trouve des séries dans lesquelles les résultats sont identiques ou le deviennent lorsqu'on les multiplie par des coefficients très-simples : ce qui prouve que les nombres d'atomes, sous des volumes égaux, sont les mêmes ou du moins sont aussi dans ces rapports simples. Voici ces résultats :

1° Fer, cobalt, nickel, cuivre, manganèse, carbone, 0,023. Pour ce dernier corps, on trouve, 0,046 et 0,092, si l'on adopte pour poids atomique 76,5 ou 38,2 au lieu de 153. Les 5 premiers corps sont isomorphes.

2° Le platine, le palladium, le rhodium et l'iridium, qui sont isomorphes, donnent 0,017, ainsi que le chrôme, le titane et le zinc. L'osmium donne 0,017, ou la moitié suivant le poids atomique qu'on lui attribue.

3° Le molybdène et le tungstène offrent un des exemples les plus curieux à cause de la grande différence qui existe entre leurs densités et leurs poids atomiques (qui sont pour le second doubles environ de ce qu'ils sont pour le premier), et à cause de l'analogie de leurs propriétés. Les quotients des densités par les poids atomiques sont tous deux égaux à 0,014.

4° Or et argent 0,0155; pour le dernier métal peut-être 0,0077.; bismuth, 0,0074; tellure, 0,0079.

5° Plomb, sélénium, phosphore, 0,0087; antimoine 0,0084.

6° Platine 0,0170; potassium 0,0017, sodium 0,0017 ou 0,00334. Le platine renferme donc, à volume égal, dix fois autant d'atomes que le potassium, et dix ou cinq fois autant que le sodium.

Certains corps simples offrent des phénomènes qui prouvent d'une manière irrécusable des arrangements moléculaires différents. Ainsi le soufre natif et celui que l'on obtient en évaporant sa dissolution dans le sulfure de carbone sont cristallisés en octaèdres. Cependant le soufre mis en fusion par la chaleur et cristallisé par le refroidissement prend la forme d'aiguilles prismatiques qui ne peuvent être rapportées au même type que les cristaux octaédriques. Au bout de quelques jours, ces aiguilles, qui étaient d'abord transparentes et un peu flexibles, deviennent opaques et très-fragiles; et elles paraissent alors, au microscope, composées d'une multitude de petits octaèdres enchâssés les uns à la suite des autres.

Le soufre, de fluide qu'il est à 110°, devient pâteux à 250°; sa couleur passe du jaune au rouge-brun. Lorsqu'on coule dans de l'eau froide du soufre en fusion, il se solidifie en restant mou et conserve quelque temps cette propriété et sa couleur rouge-hyacinthe; mais il finit par recouvrer sa couleur et sa fragilité ordinaires.

Le phosphore, exposé à une chaleur de 60 à 70°, devient noir, transparent et incolore ou d'un aspect corné, suivant qu'on le fait refroidir subitement, très-lentement ou modérément.

Le carbone est de tous les corps simples celui dont l'arrangement moléculaire offre les contrastes les plus singuliers. Il constitue le diamant, cette pierre si précieuse par sa rareté, par son éclat, par sa dureté qui surpasse celle de tous les autres corps, aussi bien que le charbon, cette matière vulgaire, et le *graphite* ou *plombagine* improprement appelé *mine de plomb*.

Les corps composés, à plus forte raison, sont susceptibles de modifications moléculaires analogues. Ainsi le bi-iodure de mercure fait à froid est une substance d'un beau rouge; si on le distille, il devient d'un beau jaune citron; mais qu'on écrase cet iodure jaune, aussitôt la couleur rouge reparaît. Le temps détermine le même effet. Le changement de couleur est d'ailleurs accompagné d'un changement dans la forme cristalline.

L'acide arsénieux sublimé ou fondu a l'aspect vitreux et se trouve parfaitement transparent; mais abandonné à lui-même, il perd peu à peu sa transparence, devient opaque et laiteux de l'extérieur à l'intérieur, en quelques années. Cette modification moléculaire opérée promptement par M. Henri Rose, présente un phénomène singulier. Lorsqu'on laisse refroidir lentement la dissolution de l'acide vitreux dans l'acide chlorhydrique étendu et bouillant, l'acide opaque se dépose sous forme de cristaux; et si la cristallisation s'opère dans un endroit obscur, une vive lumière annonce le changement qui s'opère dans le groupement des molécules.

On retrouve des apparitions de lumière semblables dans la cristallisation du sulfate acide de potasse sorti des fabriques d'acide nitrique; dans la transmutation, opérée par une chaleur inférieure à celle de sa décomposition, de la variété de chaux carbonatée appelée *aragonite* en *spath*, autre variété qui est identique par sa composition chimique et tout à fait distincte par ses propriétés physiques.

On exprime par le mot de *dimorphisme* l'existence d'une même substance cristallisée sous deux formes incompatibles, comme le spath et l'aragonite; et M. Dumas, généralisant ce mot, a désigné sous le nom de *polymorphisme* tous les changements qui peuvent affecter les propriétés physiques d'un corps dont la nature chimique ne change pas.

Nous disons *nature* et non pas *composition* chimique. En effet, il y a des corps dont la composition chimique est la même et dont la nature diffère essentiellement. Tels sont les acides, 1° tartrique et para-tartrique 2° malique et citrique; 3° cyanique et fulminique, etc. Les deux acides de chacun de ces groupes ont une composition identique et cependant ils forment des combinaison dissemblables en s'unissant aux mêmes corps, et ils donnent des produits différents quand on les détruit avec ménagement. On appelle *isomères* les corps qui jouissent de cette singulière propriété. Il est certain que les molécules élémentaires qu'ils renferment ne sont pas groupées de la même manière. Mais comment le sont-elles? On est loin de le savoir.

Le *polymorphisme* dépend de variations dans les effets de la *cohésion; l'isomérie* de modifications dans les effets de l'*affinité*. Le premier s'exerce sur le groupement des molécules *intégrantes*, de même nature chimique que le corps; le second état atteint le groupement des *molécules constituantes* des atomes élémentaires eux-mêmes.

Si l'on trouve dissemblance de propriétés chimiques dans des corps dont la composition est identique, on la trouvera, *a fortiori*, dans des corps qui, sous le même volume gazeux, renferment des quantités différentes des mêmes principes, quoique le rapport de ces principes ne soit pas altéré. Ainsi, on connaît maintenant 3 gaz, 3 ou 4 liquides, et autant de solides, qui renferment exactement le carbone et l'hydrogène dans le rapport de 1 atome à 1 atome, c'est-à-dire en poids de 86 parties de carbone et à 14 d'hydrogène. La molécule de chacun de ces corps renferme cependant des quantités de matières différentes. Ainsi :

$$C^4 H^4, C^8 H^8, C^{16} H^{16}, C^{64} H^{64}$$

représentent respectivement 4 volumes ou un équivalent de *méthylène*, de *gaz oléfiant*, d'*hydrogène quadricarboné*, de *cétène*.

CHALEUR, LUMIÈRE ET ÉLECTRICITÉ DANS LES COMBINAISONS CHIMIQUES. — La combustion du bois, dans nos foyers, et de l'huile dans nos lampes, nous donnent un exemple familier de la chaleur et de la lumière produites dans les actions chimiques. L'hydrogène et le carbone de ces substances ne peuvent être brûlés par l'oxygène de l'air, sans que ce phénomène se produise. Les batitures de fer étincelantes que le forgeron détache, par les coups de son marteau, d'un fer rouge, sont dues aussi à la combustion du métal dans l'air. On donne une intensité remarquable au dégagement de chaleur et de lumière lorsque l'on opère la combustion dans de l'oxygène pur. Il suffit de plonger dans un bocal rempli de ce gaz un fil de fer portant à son extrémité inférieure un morceau d'amadou enflammé, pour voir l'ignition se communiquer de l'amadou au fer, et celui-ci brûler avec un éclat éblouissant.

Toute combinaison chimique est aussi accompagnée d'un dégagement d'électricité. Ainsi en dissolvant du fer dans de l'acide sulfurique hydraté, on recueille, à l'aide du *condensateur* de Volta, de l'électricité en quantité telle que l'on obtient de vives étincelles.

On admet généralement aujourd'hui qu'aucun développement d'électricité n'a lieu par le simple contact, et que l'action chimique est seule la véritable source de l'électricité.

Inversement, un courant d'électricité galvanique d'une énergie suffisante décompose tous les corps composés. Les deux éléments dont la combinaison produit ce corps se portent l'un au pôle zinc ou positif, l'autre au pôle cuivre ou négatif; et ces éléments sont alors considérés, le premier comme jouant le rôle électro-négatif, le second le rôle électro-positif. C'est ce qui arrive dans la fameuse expérience de la décomposition de l'eau ou protoxyde d'hydrogène; pour un volume d'oxygène qui se dégage au pôle positif, on en recueille deux d'ydrogène au pôle négatif.

L'oxygène est électro-négatif par rapport à tous les autres corps connus; et un grand nombre de ceux-ci jouent tantôt le rôle positif, tantôt le rôle négatif, dans diverses combinaisons. On a soin, dans la nomenclature des composés binaires, d'énoncer toujours en premier lieu le nom du corps qui joue le rôle électro-négatif. C'est ainsi que l'on dit sulfure de carbone et non pas carbure de soufre.

Composition des corps. — Nous renvoyons au supplément pour des tables qui renferment, sous une forme abrégée, toutes les données numériques relatives aux proportions des principes constituants des composés définis. V. col. n. 532 et suiv.

§ 3. *Classifications chimiques.*

Méthodes naturelles. — Le premier essai d'une classification naturelle en chimie est dû à l'illustre Ampère, qui a publié en 1816 un mémoire très-étendu à ce sujet Les trois corps simples différents alors connus sont disposés en une série circulaire continue, dont les 2 termes extrêmes se touchent, et qui forme une espèce d'anneau non interrompu, composé de 15 chaînons ou genres. Ces genres appartiennent à deux classes : les *gazolytes*, corps doués de la propriété de former des gaz permanents, et les *métaux* proprement dits; ceux-ci se subdivisent eux-mêmes en *leucocytes* et en *chroïcolytes* suivant qu'ils forment des dissolutions incolores ou colorées.

M. Despretz a reproduit, en la modifiant, l'idée d'Ampère. Nous donnons (colonne 1531) l'énumération des 14 familles dans lesquelles sont compris les 53 corps simples autres que l'oxygène et l'hydrogène lesquels n'appartiennent à aucun groupe, et se trouvent en dehors de toute classification.

On remarque une transition entre chaque famille et celle qui la précède ou qui la suit immédiatement.

M. Dumas a remarqué que l'on pouvait disposer les corps simples non métalliques en plusieurs familles et suivant leur ordre inverse d'affinité pour l'hydrogène, c'est-à-dire en mettant le plus près de l'hydrogène ceux qui ont le plus de rassemblance avec ce corps ou le moins d'affinité pour lui, et que les poids atomiques des substances correspondantes vont en augmentant à mesure que l'affinité pour l'hydrogène diminue; et comme les corps qui se ressemblent le plus sont ceux qui ont le moins de tendance à se combiner, M. Dumas est arrivé enfin à conclure que l'hydrogène n'est probablement pas autre chose qu'un métal gazeux.

Méthodes artificielles. — Les plus remarquables sont celles de MM. Berzélius, Thénard et Regnault.

Le premier range les corps simples dans l'ordre de leurs intensités électriques; il les divise d'abord en deux grandes classes, en *électro-positifs* et en *électro-négatifs*. Ceux de la première classe présentent toujours l'électricité positive en présence de ceux de la seconde; et leurs oxydes se comportent avec ceux des corps de la deuxième classe comme des bases salifiables avec des acides.

M. Thénard distingue les *métalloïdes* des *métaux* proprement dits. La seule distinction essentielle que l'on puisse faire entre ces corps, c'est que les combinaisons formées par les métalloïdes avec l'oxygène ne jouent jamais le rôle de base, comme cela a lieu pour les métaux. M. Thénard divise ensuite les métaux en six sections, suivant leur degré d'affinité pour l'oxygène, en se réglant 1° sur la manière dont les différents métaux se comportent avec l'oxygène gazeux à une haute température; 2° sur la facilité plus ou moins grande que l'on trouve à ramener leurs oxydes à l'état métallique; 3° enfin sur l'action décomposante qu'ils exercent sur l'eau suivant la température.

M. Regnaud, en partant à peu près des mêmes principes de classification que M. Thénard, et en ayant égard à de nouvelles données concernant l'action des métaux sur la vapeur d'eau, est parvenu à établir six sections assez nettement tranchées, et où sont assez bien réunis les métaux qui présentent le plus de ressemblance dans leurs propriétés générales.

§ 4. *Chimie appliquée.*

Manipulations chimiques. — On les opère ordinairement dans un *laboratoire* approprié à cette destination, et qui doit être, autant que possible, vaste, bien aéré et éclairé, sec, etc. Cependant il n'y a pas de chambres, munie d'une cheminée, qui ne puisse servir de laboratoire pour une foule d'opérations utiles ou amusantes.

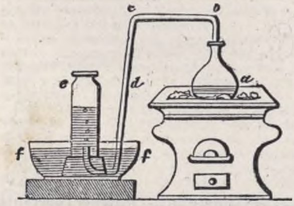
Le verre est la substance la plus souvent employée pour les vases destinés aux opérations chimiques. On la façonne sous la forme de fioles, de flacons, de cornues, de matras, de ballons, de cloches, de tubes droits ou recourbés, de capsules, de mortiers, de baguettes pleines, d'entonnoirs, d'éprouvettes, de pipettes, etc. La porcelaine est employée sous forme de tubes, de capsules, de mortiers, de cornues, de creusets.

Les creusets de Hesse sont les meilleurs pour opérer la fusion des substances métalliques. Les têts pour calciner sont faits de la même argile que les creusets.

On emploie aussi des creusets et des capsules d'argent et de platine pour certaines réactions.

La manière dont on recueille les gaz frappe toujours les personnes qui la voient employer pour la première fois. La figure 1 en donne une idée : *a* est une fiole dans laquelle on a placé de la tournure de fer, de l'eau et de l'acide sulfurique. L'eau étant décomposée, son oxygène se porte sur le fer et son hydrogène se dégage, tandis que l'acide sulfurique forme avec l'oxyde de fer un sulfate de protoxyde de fer. Une chaleur modérée favorise la réaction. Le gaz est conduit par le tube *bcd* dans l'éprouvette renversée *e*, que l'on avait d'abord remplie d'eau et appuyée par son extrémité inférieure dans la cuve *pneumatique ff* remplie d'eau elle-même. A mesure que ce gaz se dégage, il monte, en vertu de sa pesanteur spécifique, à la partie supérieure de l'éprouvette *e*, en chassant l'eau dont il prend la place.

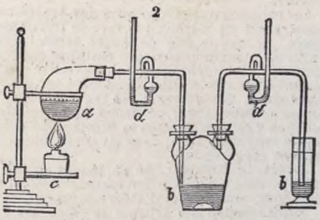
1



Beaucoup de gaz étant solubles dans l'eau, on est obligé de remplacer souvent ce liquide par du mercure, dans la cuve et dans l'éprouvette. Tels sont : le chlore, le gaz ammoniac, etc.

La figure 2 fait voir plusieurs dispositions très-usitées dans les manipulations chimiques. Une cornue *a*, dans laquelle on a introduit les matières propres à dégager un certain gaz, par leur réaction mutuelle, est chauffée à sa partie inférieure par une lampe à alcool *c*; Le gaz se dégage, et est amené par un tube au fond d'un flacon à *tubulures*, où il se dissout dans l'eau. Pour obtenir autant d'eau que possible saturée de gaz, on peut faire traverser à celui-ci plusieurs flacons tubulés semblables au premier. Les tubes de sûreté *d*, *d*, imaginés par Welter, sont une très-ingénieuse invention. Lorsque le dégagement du gaz vient à cesser, la tension, dans l'intérieur de la cornue, devenant moindre que la pression atmosphérique, l'eau des flacons *b* remonterait par le tube courbé jusque dans la cornue; mais grâce au tube de sûreté, dans les deux branches duquel de l'eau s'élève jusqu'à la hauteur du petit renflement, l'air pourra rentrer par l'extrémité ouverte de ce tube et s'introduire dans la cornue, en chassant la petite colonne d'eau jusque dans le renflement du tube *d*, mais pas plus loin. On n'a donc pas à craindre que le liquide du flacon *b* vienne à remonter dans la cornue *a*.

2



Les tubes des appareils ci-dessus sont réunis aux fioles, cornues et flacons par des bouchons de liége percés, qu'ils traversent à frottement dur. Ces bouchons sont percés d'abord avec une petite tige de fer rougi, puis ensuite régulièrement rodés à l'aide d'une lime ronde, appelée *queue de rat*. Pour éviter les fuites de gaz, on garnit les jointures avec un *lut*, qui est ordinairement composé de farine de lin et de colle d'amidon.

Le lut d'argile et de sable est employé pour les jointures qui doivent être soumises à une forte chaleur.

La *lampe d'émailleur* sert à façonner le verre sous mille formes différentes. Un manipulateur doit savoir la manier lui-même, pour souffler les boules aux tubes de verre, recourber ces tubes, y adapter des soudures, etc.

Analyse chimique. — Si un corps est composé de plusieurs éléments, on peut se proposer, soit de reconnaître la présence de ces éléments au moyen de *réactifs*, soit de les isoler et de les recueillir pour apprécier exactement les proportions dans lesquelles ils concourent à la formation du corps soumis à l'analyse.

Les réactifs s'emploient et les analyses se font, soit par la voie sèche, soit par la voie humide. Dans l'un et l'autre cas, on a reconnu qu'il ne fallait opérer que sur de très-petites quantités de matières (quelques grammes au plus).

On emploie pour les essais par voie sèche des *fondants* que l'on soumet avec une parcelle du corps donné à la chaleur intense de la flamme d'une bougie, activée par le souffle du *chalumeau* dont se servent les orfèvres. Le support est ordinairement un morceau de charbon ordinaire; on opère aussi dans de petites coupelles d'argile, dans de minces cuillers de platines, etc. L'extrémité de la flamme du chalumeau est oxydante, son milieu est désoxydant. Le *borax* ou borate de soude et le phosphate double de soude et d'ammoniaque sont les fondants les plus usités. La couleur du verre auquel ils donnent lieu varie suivant que l'on a employé le feu d'oxydation ou le feu de réduction, et est un indice précieux pour reconnaître la nature des substances métalliques soumises à l'essai.

Les principaux réactifs liquides sont :

Des acides, tels que l'acide chlorhydrique, azotique et sulfurique, qui décomposent les carbonates, en donnant lieu au dégagement de l'acide carbonique avec effervescence;

Des sels solubles de baryte, tels que l'acétate, le chlorhydrate et le nitrate, qui font reconnaître la plus petite quantité d'acide sulfurique libre ou combiné par la précipitation du sulfate de baryte (blanc);

Des sels solubles d'argent, tels que l'acétate et le nitrate, qui décèlent la presence de l'acide chlorhydrique libre ou combiné, en déterminant un précipité blanc de chlorure d'argent;

L'oxalate d'ammoniaque, qui donne lieu à un précipité blanc d'oxalate de chaux, lorsque cet alcali existe dans une liqueur, même en tres-petite quantité;

Les sels solubles de plomb, tels que l'acétate et le nitrate, par la précipitation d'un sulfure noir, d'un chlorure, d'un sulfate, d'un borate blancs, d'un phosphate décèlent la présence d'un des acides sulfhydrique, chlorhydrique, sulfurique, borique, phosphorique;

Les dissolutions de bases alcalines, telles que l'ammoniaque, la potasse et la soude, qui précipitent les oxydes métalliques non solubles dans les alcalis;

La teinture de noix de galle, qui fait reconnaître la présence du fer, en formant avec lui une couleur noire : l'encre ordinaire n'est autre chose qu'un mélange de tannate et de gallate de fer.

Les lames de cuivre, de fer, d'étain de zinc, précipitent de leurs dissolutions les métaux plus électro-négatifs qu'eux. Ainsi on forme l'*arbre de Saturne*, en faisant plonger un morceau de zinc dans une dissolution d'acétate de plomb. Le plomb se précipite sous forme de cristallisation arborescente sur les fils qu'on a soin de faire plonger dans la liqueur. On produit de même l'*arbre de Diane* en versant 50 à 60 grammes de nitrate d'argent sur 15 à 20 grammes de mercure placé dans un verre à pied. Ces réactions ne s'opèrent qu'en quelques jours.

Il y a certaines manipulations communes à un grand nombre d'analyses.

Si le corps à analyser est solide, il faut d'abord le diviser et le porphyriser au moyen de mortiers d'une dureté bien plus grande que celle du corps lui-même. On tamise ensuite la poussière obtenue.

Une certaine quantité de cette poussière étant pesée, on la met en contact soit avec le fondant, soit avec les agents qui doivent en opérer la dissolution totale ou partielle; après quoi l'on verse dans la dissolution différents réactifs pour précipiter successivement, autant que possible les substances qui s'y trouvent. Il faut toujours verser un grand excès du précipitant, à moins qu'il ne dissolve des quantités sensibles de précipité.

Ce précipité doit être lavé soit par *décantation*, soit par *filtrage*, jusqu'à ce que les eaux de lavage ne contiennent plus aucune trace des matières étrangères au précipité. Ensuite on le dessèche ou on le calcine, suivant sa nature. On le pèse enfin, en tenant compte, s'il y a lieu, du poids du filtre.

Les liquides à analyser donnent lieu aux mêmes opérations, si ce n'est qu'on est dispensé de la pulvérisation.

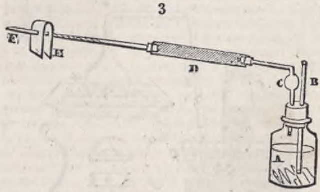
Les mesures des volumes des gaz se font dans des tubes gradués; on tient compte de la pression atmosphérique, de la température, et même de l'état hygrométrique du gaz lorsqu'il est en contact avec l'eau.

L'analyse des matières organiques se fait en brûlant ces matières au contact d'un excès de bioxyde de cuivre. L'oxyde est en partie réduit, il se forme: de la vapeur d'eau que l'on recueille dans du chlorure de calcium, et dont le poids donne le poids de l'hydrogène; de l'acide carbonique que l'on absorbe par une dissolution de potasse caustique, et dont le poids donne celui du carbone; le volume de l'azote dégagé se mesure directement; enfin l'oxygène est évalué par la perte.

L'analyse des poisons joue un rôle important dans la médecine légale. La recherche de l'arsenic ingéré dans des matières organiques a fortement attiré l'attention dans ces derniers temps, et a été le sujet d'un travail déjà célèbre d'une commission de l'Académie des sciences ayant pour rapporteur M. Regnault auquel nous empruntons les résultats suivants.

On carbonise la matière organique suspecte dans une capsule de porcelaine, avec 1/6 de son poids de l'acide sulfurique, avec un feu suffisant. Sur le charbon sec ainsi obtenu par le porcédé de MM. Danger et Flandin, on ajoute une petite quantité d'acide nitrique, que l'on évapore de nouveau à sec; puis on reprend par l'eau bouillante. On emploie alors un appareil dont la fig. 3 montre la disposition. D est un tube rempli d'amiante. F est un tube effilé en verre peu fusible, de plusieurs décimètres de longueur, enveloppé de clinquant sur un décimètre environ. On introduit quelques lames de zinc dans le flacon A, et une couche d'eau pour fermer l'ouverture du tube de sûreté; puis on y verse un peu d'acide sulfurique. Le gaz hydrogène qui se dégage chasse l'air du flacon. On porte au rouge le tube dans la partie qui est enveloppée de clinquant, au moyen de charbons placés sur une grille. Un petit écran empêche le tube de s'échauffer à une distance trop grande de la partie entourée de charbons. On introduit ensuite le liquide suspect par le tube ouvert B, en ajoutant, s'il le faut, une petite quantité

3



d'acide sulfurique; on fait marcher l'opération lentement et régulièrement. Si le gaz renferme de l'arsenic, celui-ci vient se déposer sous forme d'anneau en avant de la partie chauffée du tube. On pourra mettre hors de doute la présence de ce poison en chauffant un peu d'acide azotique dans le tube, et en versant quelques gouttes d'une dissolution bien neutre de nitrate d'argent dans la liqueur évaporée à sec avec précaution; on obtiendra un précipité rouge-brique (arséniure d'argent).

§ 5. *Indications historiques et bibliographiques.*

Si l'origine des applications technologiques qui sont du ressort de la chimie remonte à l'origine des sociétés, il n'en est pas de même de la chimie considérée sous le point de vue scientifique.

Ce n'est qu'au huitième siècle de notre ère que l'on trouve des notions exactes sur l'état des connaissances chimiques, quoiqu'on puisse affirmer que celles-ci remontent plus haut. C'est vers ce temps que vécut le célèbre Géber, fondateur de l'école des chimistes arabes. Mais à cette époque, et bien long-temps encore après, la chimie n'était que de l'*alchimie*, c'est-à-dire qu'elle s'occupait uniquement de la recherche de la pierre philosophale et de l'élixir de longue vie. Les Arabes cultivèrent beaucoup l'alchimie après Géber; Rhazès, Avicenne, Mesné, Averroës ont laissé des noms célèbres.

Les connaissances chimiques des Arabes ne pénétrèrent en Europe que vers le treizième siècle. Le moine anglais Roger Bacon (vers 1230) est le premier écrivain chimiste que les chrétiens d'Occident aient eu. On trouve dans ses ouvrages l'indication d'une foule de procédés dont la découverte a été regardée longtemps comme d'origine moderne. La poudre à canon y est décrite dans sa composition sous forme énigmatique, et dans ses effets avec une grande exagération.

Albert de Bollstadt, né en Souabe en 1205, n'a pas laissé une réputation moindre que celle de Bacon, sous le nom d'Albert-le-Grand.

Notre compatriote Arnauld de Villeneuve fit faire à la chimie des progrès remarquables. Son élève, l'Espagnol Raymond Lulle, s'illustra par la science aussi bien que par sa vie aventureuse.

Jean de Meunq, auteur du Roman de la Rose, Riplée, Basile Valentin (commencement du quinzième siècle), et surtout Paracelse, doivent être cités parmi les alchimistes célèbres.

Après eux la secte des *philosophalistes* s'efface peu à peu. Ce n'est qu'en 1783 qu'on retrouve en Angleterre un membre de la Société royale, le docteur Price, qui, après avoir mystifié un grand nombre de personnes en transformant le mercure en or ou en argent à volonté, à l'aide d'une poudre rouge et d'une poudre blanche, s'empoisonna lorsqu'il vit que sa fraude allait être découverte.

Après Paracelse, ses successeurs, Van Helmont, Cassius, Libavius, Glauber, Agricola, Bernard Palissy, entrèrent dans une voie meilleure, et enrichirent la science de produits nouveaux et de procédés utiles.

Dès 1630, Jean Rey, médecin périgourdin, reconnut que l'augmentation de poids des métaux combustibles calcinés au contact de l'air, tenait au *meslange de l'air espaissi*.

Nicolas Lefèvre fut le premier professeur de chimie en France; il enseignait au Jardin des Plantes sous Louis XIV. Glazer, mort en 1678, lui succéda. Nicolas Lemery, né à Rouen en 1645, mort en 1715, fut le professeur le plus célèbre de son temps.

Après Homberg et Becher paraît Stahl, né à Anspach en 1660, mort en 1734, célèbre par sa théorie du *phlogistique*, qui, quoique erronée, fut, par sa portée, un véritable progrès.

Scheele, né à Stralsund en 1742; Priestley, né dans le Yorkshire en 1733, et surtout Lavoisier, dont le premier mémoire parut en 1770, renouvelèrent la chimie vers la fin du siècle dernier. C'est à Priestley qu'est due la découverte de l'oxygène; mais c'est à l'illustre et infortuné Lavoisier que revient l'honneur d'avoir démontré l'immense importance de ce corps, et d'avoir détrôné le phlogistique. C'est lui qu'on doit regarder comme le véritable auteur de la belle nomenclature dont la France a doté le monde savant.

Guyton-Morveau, Geoffroy, Proust, Berthollet, Fourcroy, ont contribué à la gloire de l'école française, qui est encore si dignement représentée aujourd'hui.

Dalton, Davy, Faraday, etc., ont aussi contribué à la gloire de l'Angleterre. C'est au premier qu'est due l'idée du système atomique; c'est le second qui, à l'aide de la pile voltaïque, a fait connaître un si grand nombre de corps simples, entre autres le potassium et le sodium, singuliers métaux qui brûlent à la surface de l'eau sur laquelle on les projette.

Les Allemands Wenzel en 1777, Richter en 1792, jetèrent les premières bases de la théorie des équivalents chimiques.

Les découvertes de MM. Liebig, Gustave et Henri Rose, Vœhler, Mitscherlich, etc., en Allemagne, et surtout de l'illustre Berzélius, etc., en Suède, ont notablement augmenté le domaine de la science.

Parmi les ouvrages destinés à l'enseignement de la chimie, nous citerons le grand traité de *Chimie appliquée aux arts* de M. Dumas; le *Traité de chimie élémentaire* de M. Thénard; celui de M. Despretz; la traduction française de la chimie de Berzélius. MM. Orfila, Lassaigne, etc., sont les auteurs d'ouvrages estimés sur la chimie appliquée à la médecine. Les *Leçons sur la philosophie chimique* de M. Dumas, ouvrage auquel nous avons fait de nombreux emprunts, exposent sous la forme la plus séduisante l'histoire de la science et la discussion approfondie des théories les plus importantes qu'elle a fait naître. On doit encore à ce savant illustre un *Essai de statique chimique des êtres organisés*, rempli de documents numériques obtenus par des expériences faites en commun avec M. Boussingault, et où les phénomènes chimiques de la vie sont caractérisés de la manière la plus précise et la plus large à la fois.

Enfin les *Annalen der Chemie und Physick* de Poggendorf, les *Annales de chimie* (1789-1815), auxquelles ont succédé les *Annales de chimie et de physique*, par MM. Gay-Lussac, Arago, Chevreul, Dumas, Pelouze, Boussingault et Regnault, renferment les mémoires les plus curieux sur toutes les branches de la chimie.

XI. GÉOLOGIE.

§ 1. *Préliminaires.*

La *Géologie* (*gê*, terre; *logos*, discours), a pour but de faire connaître la forme extérieure de notre globe, la nature, la position et les propriétés des matériaux qui le composent, et la manière dont ces matériaux ont été formés et placés dans leur position actuelle. Selon les différents points de vue sous lesquels on envisage cette science, elle se divise en : 1° *Géographie mathématique*, pour la détermination et la représentation des formes extérieures du globe; 2° *Géographie physique*, qui peut être considérée comme intermédiaire entre la géographie mathématique et la physique du globe; 3° *Oryctognosie*, ou connaissance des minéraux, des roches et des fossiles; 4° *Géognosie*, ou connaissance des terrains de l'écorce du globe; 5° *Géologie appliquée*.

§ 2. *Géographie mathématique.*

Géodésie. — On appelle ainsi (du grec *gê*, terre; *daiô*, je divise) l'ensemble des méthodes géométriques et astronomiques applicables à la mesure de la terre et à la confection du canevas des cartes géographiques.

La position d'un point à la surface du globe est parfaitement connue lorsque l'on a sa longitude, sa latitude (col. 329), et son *altitude* ou hauteur au-dessus du niveau moyen des mers. Or, si l'on part d'une *base* mesurée exactement, et dont les extrémités soient déterminées de position, on pourra calculer rigoureusement tous les éléments des triangles dont les sommets seront reliés à cette base; et en prenant successivement les côtés de ces triangles pour bases, on fixera de proche en proche les positions d'autant de points que l'on voudra à la surface du globe.

La mesure d'une base est une opération des plus pénibles et des plus délicates. On emploie pour cela des règles en platine, ou au moins en sapin bouilli dans de l'huile, parfaitement comparées au mètre *étalon*; on les amène à un contact parfait, et on les établit toujours bien horizontalement.

Le théodolite répétiteur de haute précision tel que ceux qui sont construits par nos habiles artistes MM. Gambey, Brünner, Ernst, etc., est l'instrument employé pour mesurer les angles tout *réduits à l'horizon* (col. 174), et les *distances zénithales* (col. 325) des sommets des triangles.

Dans le calcul de ces triangles, on a égard à une foule de corrections délicates, telles que l'excentricité de la lunette, la réduction au centre de la station, la phase de l'objet auquel on vise, etc.

C'est par la formation de canevas trigonométriques ainsi établis et calculés avec la plus grande exactitude, que l'on est parvenu à trouver que la forme de notre globe est à peu près celle d'un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles ; de telle sorte que le diamètre équatorial excède de 1/309 environ la longueur de l'axe terrestre. Le rayon est de 6 376 984 m à l'équateur, et de 6 356 324 au pôle; le rayon moyen, qui correspond à la latitude de 45°, est de 6 336 745 m.

Cartes géographiques. — Elles ont pour objet de représenter, sur une surface plane, le résultat des triangulations géodésiques. On a recours pour cela à la *méthode des projections* (col. 165). La projection *stéréographique* est l'une des plus simples; ce n'est autre chose que la perspective du globe terrestre, le point de vue étant ordinairement pris sur la surface même de ce globe, et le plan du tableau étant le grand cercle dont ce point est le pôle. Si l'œil est au pôle, les méridiens sont représentés par des lignes droites, et les parallèles par des cercles concentriques au point principal. Si l'œil est à l'équateur, les méridiens comme les parallèles sont des arcs de cercle faciles à décrire, aussi bien que dans le cas où la projection a lieu sur l'horizon d'un certain lieu.

Dans la projection *orthogonale* sur le plan d'un méridien, les autres méridiens sont des ellipses, et les parallèles sont des lignes droites.

Ces divers modes de projection ne sont guère employés que pour représenter des hémisphères entiers. Quand il s'agit de régions d'une étendue moins considérable, il est plus commode d'avoir recours aux projections par développement, en regardant la surface d'une partie du globe terrestre comme rapportée sur une surface conique ou cylindrique que l'on développe ensuite. La *projection de Flamsteed* modifiée est le meilleur des développements coniques ; on l'emploie pour la confection de la grande carte de France.

La *projection de Mercator* est un développement cylindrique usité pour les cartes marines. Les méridiens, comme les parallèles, y sont représentés par des lignes droites ; mais les longueurs des degrés de latitude y vont en croissant suivant une certaine loi, de l'équateur au pôle.

Topographie. — Composé des deux mots grecs *topos*, lieu, *graphô*, je décris, ce nom a une signification plus étendue que ceux de *chorographie* (*chôros*, champ), d'*hydrographie* (*hudôr*, eau), et d'*orographie* (*oros*, montagne) ; il indique l'ensemble des moyens géométriques et graphiques à l'aide desquels on représente les détails de la configuration d'un pays.

Lorsque la triangulation géodésique a été opérée sur des triangles de premier ordre, on rattache à ceux-ci des triangles de second, puis de troisième ordre, à l'aide desquels tous les points principaux du sol sont déterminés en position et en altitude. Alors de simples opérations de nivellement et de levé de plans complètent la détermination des formes du pays à décrire. Pour représenter graphiquement ces formes on projette sur la carte les courbes de niveau équidistantes que l'océan atteindrait successivement s'il venait à s'élever de manière à recouvrir la surface de notre planète. Des *cotes*, ou nombres inscrits sur ces courbes, font connaître les altitudes des points par lesquels elles passent. Les plans ainsi cotés servent aux ingénieurs, qui ont besoin de la connaissance détaillée du relief d'un pays. Au moyen des *échelles de pente*, dont la pratique est familière aux ingénieurs militaires, on résout, sur les plans cotés, une foule de problèmes qui, avec les formes ordinaires de la géométrie descriptive, sembleraient exiger deux plans de projection.

Hypsométrie. — C'est la partie de la géographie mathématique qui traite de la mesure des différences de niveau.

Les nivellements trigonométriques faits à l'aide du théodolite exigent une correction importante due à la réfraction de l'atmosphère terrestre. Mais lorsqu'ils sont opérés et calculés avec les soins convenables, ils peuvent conduire à des résultats d'une grande exactitude. col. 1554.

Le baromètre à cuvette, tel que le construit aujourd'hui l'habile artiste Ernst, est aussi devenu un instrument de précision, que l'on appréciera de plus en plus pour mesurer promptement des différences de niveau considérables. Les travaux de MM. Laplace, de Humboldt, Ottmanns, Biot, Lindenau, Bouvard, Schleiermacher, Gauss, Delcros, etc. ont contribué à éclairer et faciliter cet usage du baromètre pour lequel nous donnons des tables au Supplément. Col. 1551.

§ 3. *Géographie physique.*

La densité moyenne de la terre est cinq fois plus grande que celle de l'eau, d'après les observations de Maskeline, Playfair et Cavendish.

Mer. — La surface du globe se compose de grandes masses de terres appelées *continents* et de grands bassins d'eau nommés *mers*. A proprement parler, il n'y a qu'une seule mer qui s'étend d'un pôle à l'autre, en couvrant à peu près les trois quarts de sa surface. Pour plus de commodité, on a divisé cette mer en plusieurs sections auxquelles on a donné des noms différents. On distingue les mers extérieures, qui entourent les continents et les îles, des *mers intérieures* ou *méditerranées*, qui sont comprises entre les continents, mais qui pourtant communiquent avec la mer extérieure par une portion d'eau resserrée entre deux terres, et qui, suivant les pays, prend les noms de *détroit, pas, canal, manche* ou *bras*.

La mer pénètre dans certaines terres et y forme des enfoncements qu'on nomme *golfes* ou *baies*, lorsqu'ils ont une certaine dimension; s'ils sont d'une étendue assez peu considérable pour offrir un abri aux vaisseaux, ils prennent le nom de *rade, anse, havre, port*.

Les mers occupent la plus grande partie de la surface du globe. Dans l'hémisphère boréal, le rapport de leur surface à celle des terres est comme 1 à 0,419; dans l'hémisphère austral, ce rapport est comme 1 à 0,129.

L'eau de la mer contient du sel commun (chlorure de sodium), du sulfate de soude, du chlorure de calcium et du chlorure de magnesium, en proportions variables, suivant la latitude. Ainsi, l'océan méridional contient un peu plus de sel que l'océan septentrional ; les petites mers intérieures en contiennent moins que l'océan ; la Méditerranée fait exception à cette règle.

La profondeur des mers varie beaucoup. Au milieu de l'océan Pacifique on n'a pas trouvé le fond, et il est probable qu'il est à 4000 mètres au-dessous de la surface. On a sondé par 2000 à 3000 mètres. 1000 à 1500 mètres sont une profondeur très-ordinaire en pleine mer.

La couleur de la mer varie beaucoup; elle est vert-bouteille dans l'Atlantique qui baigne les côtes de France, de Hollande et d'Allemagne; bleue dans la Méditerranée, et dans les hautes latitudes, surtout quand elle est calme. Dans le golfe de Guinée la mer est blanche; vermeille dans celui de Californie, et noire aux atterages des Maldives. La mer Noire mérite bien son nom sur une partie des côtes de la Russie méridionale.

Quand la mer est phosphorescente, sa surface tout entière paraît être en feu. Le plus souvent les parties agitées seules, telles que le sommet des vagues, le sillage des navires, l'eau frappée par les avirons, semblent un liquide enflammé. Ce phénomène se montre communément dans les mers des pays chauds, où on le voit dans toute sa beauté; cependant on l'observe aussi dans les hautes latitudes.

La mer est sillonnée de toutes parts par des courants. Dans l'Atlantique, le plus considérable est le *gulfstream* qui, partant du golfe du Mexique, s'avance jusqu'au cap Nord et au Spitzberg où il porte les fruits et les bois de l'Amérique tropicale. Il se ramifie en diverses branches dont l'une, plus considérable que toutes les autres, redescend le long de la côte occidentale de l'Afrique. Ce courant correspond au courant aérien supérieur qui va de l'équateur au pôle. Outre les courants constants, il en est de périodiques qui varient avec la direction des vents.

Quelquefois la mer est complétement calme et unie. Quand le vent souffle, la longueur et la hauteur de ses vagues varient suivant la force du vent, la proximité et la forme des continents. Les vagues les plus hautes que l'on ait observées ne paraissent pas avoir dépassé 10 mètres.

Marées. — Le niveau des mers est sujet à des changements ou oscillations régulières dues à l'attraction du soleil et de la lune; l'influence de ce dernier astre est triple, suivant Laplace, de celle du premier. La mer s'abaisse et s'élève deux fois en un jour.

Pendant les six premières heures du jour la mer monte, c'est le *flux* ou *flot;* et lorsqu'elle a atteint son niveau le plus élévé, on la nomme la *haute mer*. Puis elle descend, c'est le *reflux* ou *jusant*, et atteint son point le plus bas qui est connu sous le nom de *basse mer*. Les marées correspondent aux passages de la lune aux méridiens supérieurs et inférieurs; aussi, pendant le cours d'un jour lunaire de 24 h. 50 m., il y en a toujours deux. Chaque jour la haute mer vient 50 m. plus tard que le jour précédent. Ainsi, si le premier jour elle est venue à midi, le second elle viendra à midi 50 m.

Les marées les plus fortes ont lieu à l'époque de la pleine et de la nouvelle lune; les plus petites à celle des quadratures. Leur hauteur est proportionnelle à la distance du soleil et de la lune à la terre et à la déclinaison de ces deux astres.

Des circonstances locales dépendantes de la configuration des mers changent complétement l'heure de la marée, qui n'est souvent pas la même dans deux ports voisins. Il y a six heures de différence entre le moment de la haute mer à Dunkerque et à Saint-Malo.

L'intervalle de temps qui sépare le moment de la haute mer de celui du passage de la *nouvelle* lune au méridien se nomme l'*établissement du port*. C'est d'après cet élément qu'on calcule toutes les marées de l'année.

Une table donnée au Supplément le fait connaître pour diverses localités. col. 1591.

On nomme *marée totale* la demi-somme des hauteurs de deux hautes mers consécutives au-dessus de la basse mer qui les sépare. Ainsi, si l'une des hautes mers était de 8 m. 50, la suivante de 6 m. 94, la marée totale sera de 7 m. 72. Cette marée totale est, d'après une moyenne d'un grand nombre d'observations à Brest de 3 m. 21, Cherbourg 2 m. 70, Saint-Malo 5 m. 98, et Dieppe 2 m. 97.

C'est avant l'équinoxe du printemps et après celui de l'automne qu'on observe les plus grandes marées. Quand le vent souffle de la mer pendant la marée montante, celle-ci s'élève quelquefois à une hauteur prodigieuse.

Les marées sont à peine sensibles dans la Méditerranée, dans les mers intérieures, telles que la Caspienne, et dans quelques golfes profonds.

Lacs, fleuves, rivières, deltas. — Un *lac* est une masse d'eau entourée de tous côtés par la terre et n'ayant aucune communication immédiate avec la mer. L'*étang* est un lac d'une très-petite dimension. Les *lagunes* sont des espèces de lacs formés par certains fleuves sur les rivages plats de leur embouchure. On appelle *fleuves* les eaux courantes qui, après avoir parcouru une certaine étendue, se rendent directement à la mer; et *rivières*, celles qui viennent aboutir à un fleuve. Le *confluent* est le point où une rivière aboutit soit à une autre rivière, soit à un fleuve.

Dans certains fleuves la marée remonte à une certaine distance de l'embouchure: c'est ce qu'on nomme une *barre*.

Les rivières, en entraînant des détritus sur la mer, forment près de leur embouchure des dépôts d'alluvion connus sous le nom de *deltas;* tels sont ceux du Nil, du Pô, du Volga, du Rhin, du Danube, du Mississipi et du Gange. Quelques-unes élèvent leur lit: tel est le Pô, dont le niveau est supérieur à celui des maisons de Ferrare; d'autres les creusent. Ex.: le Panaro.

Parmi les lacs, les uns sont formés par de petits cours d'eaux superficiels ou souterrains qui se réunissent dans des dépressions du sol sans écoulement apparent. Tels sont en général ceux des hautes montagnes. Les grands lacs d'Europe sont des rivières ou des fleuves élargis et approfondis dans une portion de leur cours. Ex.: ceux de Genève, de Constance, lac Majeur, etc.

Quelques lacs d'Asie, et celui de Tititaca en Amérique, reçoivent des affluents considérables sans avoir d'écoulement apparent.

Diverses formes des terres. — Une *île* est une portion de terre moins étendue que le *continent* et entourée d'eau de tous les côtés La réunion de plusieurs îles s'appelle *groupe* ou *archipel* suivant leur importance, leur nombre et leur distance.

La *péninsule* ou *presqu'île* diffère de l'île en ce qu'elle tient au continent par une portion de terre étroite nommée *isthme*.

La saillie des terres dans la mer, si elle a peu d'étendue, surtout en longueur, reçoit le nom de *cap*, de *promontoire* ou de *pointe*.

Les deux continents, c'est-à-dire l'Europe, l'Asie et l'Afrique d'un côté, l'Amérique de l'autre, offrent un trait de ressemblance dans la direction de leurs péninsules: elles sont presque toutes dirigées vers le midi. Deux grandes péninsules cependant, le Yucatan et le Jutland, sont tournées vers le nord. La direction de l'ancien continent est sensiblement parallèle à l'équateur, celle du nouveau lui est perpendiculaire.

Tous deux sont interrompus par un isthme étroit, celui de Suez et celui de Panama.

MODIFICATIONS DE LA FORME DES CONTINENTS. — L'océan exerce sur ses rives une action destructive, surtout dans les parages à grandes marées: les îles de Jersey et Guernesey, les Shetland, la côte orientale de l'Angleterre en présentent de nombreux exemples, dont la grotte de Fingal est le plus célèbre.

Mais, d'un autre côté, certains continents se soulèvent avec une lenteur extrême mais appréciable depuis les temps historiques. Ainsi, au fond du golfe de Bothnie, la côte s'élève et la profondeur de la mer diminue. Les grands navires ne peuvent plus comme autrefois mouiller devant la ville de Torneo. Piteo, qui était un port de mer autrefois, est maintenant à plusieurs kilomètres de la mer. Chaque siècle l'exhaussement est d'environ 1 m. 38 près de Torneo, et de 0,m3 près de Stockholm. En Finmark, près de Bosecop, M. Bravais a constaté un exhaussement de la côte de 67 m. Aux environs d'Uddevalle, en Suède, M. Alex. Brongniart a recueilli des balanes encore adhérentes aux rochers, sur lesquels elles avaient vécu, à 70 mètres au-dessus du niveau de la mer. A Saint-Hospice, près de Nice, à Cagliari, en Sardaigne, et sur les côtes calcaires de la Grèce, on a fait des remarques analogues.

Le docteur Pingel a réuni une foule de documents et cité de nombreux exemples qui prouvent l'abaissement de la côte du Groenland, ou au moins son envahissement par les flots de la mer.

Pendant que certains continents s'élèvent et que d'autres s'abaissent, il se forme de nouveaux continents et de nouvelles îles au milieu du grand océan du Sud, soit par l'action des volcans souterrains, soit par les travaux lents et continus des animaux madréporiques qui bâtissent leurs édifices au sommet des cratères sous-marins.

RELIEF DES CONTINENTS. — Les *montagnes* sont les éminences les plus considérables de la terre; leurs pentes sont rapides ou du moins très-sensibles.

Un *volcan* est une montagne qui vomit des flammes, des laves ou de la boue.

La *plaine* est une surface entièrement unie ou couverte seulement par quelques ondulations. On appelle *steppes*, *savanes*, *landes*, *pampas*, *llanos*, de vastes plaines incultes, mais couvertes de végétation; et *déserts* des plaines stériles, sans eau ni végétation.

Les *plateaux* sont des plaines élevées.

Rarement les montagnes sont isolées, elles sont disposées en groupes et plus souvent encore en *chaînes*.

En moyenne, les montagnes sont moins élevées que la mer n'est profonde. On trouvera colonne 1546 la hauteur des principales.

Les montagnes sont séparées par des dépressions appelées *vallées*. Celles-ci sont en général perpendiculaires à la direction de la chaîne. Il en est cependant de longitudinales telles que le Valais.

Les vallées étroites et bordées par des escarpements perpendiculaires prennent le nom de *gorges* ou de *ravins*.

Les *cols* sont des intervalles entre les sommets d'une chaîne de montagnes qui permettent de communiquer d'une vallée à l'autre. Dans les Pyrénées ils prennent le nom de *ports*.

CAVERNES. — Entre les couches des montagnes calcaires on trouve des intervalles connus sous le nom de *cavernes*; la plupart ont une entrée étroite, mais s'élargissent ensuite et se composent de chambres immenses hérissées de stalactites et de stalagmites: telles sont celles de Vallon dans l'Ardèche, d'Adelsberg en Carinthie, d'Antiparos dans l'archipel.

Quelquefois la caverne traverse la montagne, qui est alors percée à jour: tels sont le *Torgathe* en Norvège, la *Pierre pertuise* dans le Jura et le *Martins-Loch* en Suisse.

Le sol de beaucoup de cavernes est jonché d'os de mammifères et d'oiseaux fossiles, tels que des ours, des hyènes, des loups, des renards, des éléphants, des hippopotames, des bœufs, des cerfs, des lièvres, des rats, des corbeaux, des pigeons, etc. On y trouve en outre les matières fécales pétrifiées de ces animaux, que le D. Buckland a désignées sous le nom de *coprolithes*. La caverne de Kirkdale dans le Yorkshire, celles de Gailenreuth, Kuloch, Daumann, Rabenstein en Allemagne, d'Echenoz (Haute-Saône), de Cette, d'Antibes, de Gibraltar, sont les plus riches en fossiles.

VOLCANS ET TREMBLEMENTS DE TERRE. — Le nombre des volcans connus aujourd'hui est de 195. Ils sont distribués de la manière suivante dans les différentes parties du monde:

Continent d'Europe	1
Iles d'Europe	12
Continent d'Amérique	97
Iles d'Amérique	19
Continent d'Asie	8
Iles d'Asie	58

Leur forme est ordinairement celle d'un cône tronqué, qui se termine par une ouverture circulaire; c'est la bouche du *cratère*, par laquelle s'écoulent des matières liquéfiées connues sous le nom de laves.

Les volcans en activité rejettent en outre pendant leurs éruptions des flammes, des cendres, des pierres ponces et de la vapeur d'eau. De nouveaux volcans se sont formés depuis les temps historiques, tels sont: le Muonte-Nuovo près de Naples, qui, en 1538, s'éleva en un jour et une nuit; l'île Julia qui surgit en juillet 1831, sur les côtes de Sicile, et quelques autres dont l'apparition n'a pas été observée avec autant de soin.

Un grand nombre d'îles ne doivent leur existence qu'à des volcans. Telles sont l'Islande, Owyhee, Sabrina, etc.

Le nombre des volcans éteints est de beaucoup supérieur à celui des cratères en activité. L'Auvergne, le Vivarais, l'Eifel, sur les bords du Rhin, sont hérissés de volcans dont les éruptions ont eu lieu bien avant les temps historiques. Ceux de l'Islande ne sont éteints que depuis le siècle dernier.

Les éruptions volcaniques sont souvent accompagnées de tremblements de terre qui ébranlent le sol à de grandes distances et modifient son relief en creusant des cavités et en formant des éminences.

Celui qui détruisit Lisbonne, le 1er novembre 1755, est le plus terrible dont on ait gardé le souvenir. Tous les grands édifices de la ville et un quart des maisons particulières furent renversés, 30 000 hommes périrent, des incendies se déclarèrent de tous les côtés. L'ébranlement s'étendit au loin en pleine mer; on en ressentit des secousses dans toute l'Europe, au Groenland, aux Indes occidentales, en Norvège et en Afrique.

§ 4. *Oryctognosie.*

MINÉRALOGIE. — C'est la science des *minéraux* ou des corps homogènes qui entrent dans la composition de notre globe.

La nature chimique des minéraux est leur caractère sinon le plus facile à reconnaître, au moins le plus certain et le seul sur lequel on puisse aujourd'hui baser essentiellement leur classification. On la reconnaît souvent par des essais très-simples qui sont des diminutifs des manipulations ordinaires (col. 438).

Les essais au chalumeau sont les plus importants.

La plupart des substances minérales se présentent sous des formes cristallines; et la considération de ces formes fournit le caractère le plus important après la composition chimique. Cependant il ne faut pas oublier que parfois une même substance cristallise dans des systèmes entièrement différents, et que d'autres substances appartenant au même type cristallin n'ont pas une composition chimique identique, mais seulement analogue.

Tous les cristaux que l'on rencontre dans la nature peuvent être ramenés à six *formes primitives*, qui sont :

1° Le tétraèdre régulier ; 2° le rhomboèdre ou parallélipipède dont toutes les faces sont des rhombes égaux; 3° l'octaèdre à base carrée ou le prisme droit à base carrée ; 4° l'octaèdre à base rectangle ou le prisme droit à base rectangle; 5° le prisme oblique à base rhombe; 6° le prisme oblique non symétrique.

Pour faire dériver les *formes secondaires* des formes primitives, on suppose que les sommets ou les arêtes de celles-ci sont modifiés par l'addition d'une ou de plusieurs faces ; mais ces faces additionnelles sont assujetties à une loi de symétrie, due à notre célèbre minéralogiste Haüy, et qui consiste en ce que toutes les parties semblables d'un cristal doivent être modifiées de la même manière.

Certains cristaux présentent des joints naturels, suivant lesquels il est possible de les diviser (*cliver*) de manière à trouver expérimentalement la forme primitive. Le spath calcaire (chaux carbonatée) jouit au plus haut degré de cette propriété de facile *clivage*.

Les sels simples ou multiples où la silice joue le rôle d'acide, sont les plus nombreux dans la nature; les sels dont la chaux est la base, sont ceux qui présentent les plus grandes masses minérales.

Certains caractères extérieurs peuvent servir à reconnaître une espèce minérale. Ces caractères, considérés suivant l'ordre dans lequel ils se présentent à l'observateur, sont la couleur, la transparence, l'éclat, la texture, qui peut être cristalline, fibreuse, grenue, saccharoïde, compacte ou terreuse: la dureté, la ténacité; la cassure, qui est lamelleuse, esquilleuse, compacte ou terreuse et toujours en rapport avec la texture ; la raclure, la tachure, l'onctuosité, la flexibilité, le happement à la langue, le froid, le son, l'odeur, etc.

Enfin, la pesanteur spécifique des minéraux, leurs propriétés optiques (double réfraction à un ou deux axes), magnétiques et électriques, offrent des caractères qui font souvent reconnaître l'espèce à laquelle ils appartiennent.

CONNAISSANCE DES ROCHES.—On appelle *roche* les matières homogènes d'une certaine étendue qui entrent dans la structure du globe. Les roches sont simples ou composées, suivant qu'elles renferment une seule ou plusieurs substances minérales distinctes. On peut les classer, soit géologiquement, c'est-à-dire, suivant leur ordre de superposition dans l'écorce terrestre, soit minéralogiquement, c'est-à-dire, d'apres la composition des minéraux qui y entrent.

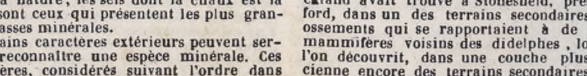
Nous donnons au SUPPLÉMENT la liste alphabétique des noms des roches les plus importantes avec leur composition. (col.1543).

FOSSILES. — Les débris organiques que l'on trouve enfouis à des profondeurs variables dans des terrains qui n'avaient point encore été fouillés diffèrent souvent les uns des autres, et n'offrent qu'un assez petit nombre d'espèces identiques aux espèces vivantes. Nous donnons plus loin quelques détails sur les animaux fossiles (col. 563, 586, 596, 599, etc.). Leur considération est d'une haute importance dans la géologie, parce qu'elle fournit un des meilleurs moyens de reconnaître et de classer les divers terrains qui constituent l'écorce du globe.

Il est hors de doute que les espèces animales et végétales n'ont pas toutes été créées à la même époque; et, quoique parmi les premiers animaux qui ont paru sur la terre, on trouve des poissons, c'est-à-dire des animaux vertébrés, et des céphalopodes, qui forment la classe la plus élevée des mollusques, il est vrai de dire que la vie organique a toujours été en se perfectionnant à la surface du globe. Ainsi les mammifères n'ont commencé à se montrer que très-tard ; et l'homme lui-même n'a été mis sur la terre que long-temps après, lorsque la permanence de l'ordre admirable qui y est établi pouvait lui permettre de se développer librement, sans craindre les cataclysmes où tant d'autres espèces animales ont été anéanties. Nulle part, en effet, on n'a trouvé de véritable fossile humain.

On a cru, pendant long-temps, l'apparition des mammifères beaucoup plus récente qu'elle ne l'est réellement. Mais déjà M. Buckland avait trouvé à Stonesfield, près Oxford, dans un des terrains secondaires, des ossements qui se rapportaient à de petits mammifères voisins des didelphes, lorsque l'on découvrit, dans une couche plus ancienne encore des terrains secondaires, près de Hildburghausen, des empreintes fossiles remarquables de pas de certains animaux qui doivent avoir été des mammifères voisins du groupe des marsupiaux. La figure 1 représente une suite de ces traces singulières. On y remarque la parfaite équidistance des pas, l'inégalité entre les empreintes de la patte de derrière et celle de devant, et une alternance régulière dans le sens où est tourné le pouce de chaque patte.

1



Les figures 2 et 3 représentent des fossiles d'une origine non moins singulière, que l'on rencontre dans la craie, et qui ont été désignés long-temps sous le nom de cônes du mélèze. M. Buckland a enfin reconnu que ces corps sont des excréments de poissons; et on les appelle aujourd'hui *coprolithes*.

2

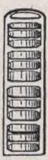
3

Il y a des localités où les fossiles abondent à tel point que des terrains entiers sont presque uniquement composés de débris de zoophytes et de testacés. Une découverte récente, due à M. Ehrenberg, savant professeur de Berlin, a étendu encore singulièrement le nombre des roches d'origine organique. Quand on examine, à l'aide d'un microscope puissant, la pierre siliceuse bien connue sous le nom de tripoli, et employée sous forme de poudre pour polir les pierres et les métaux, on reconnaît qu'elle est composée uniquement de carapaces d'animalcules infusoires; que la partie siliceuse des minerais de fer limoneux a la même origine, que la craie blanche elle-même renferme un grand nombre de semblables débris.

Les figures 4, 5 et 6 représentent des débris d'infusoires du tripoli de Bilin, en Bohême, savoir :

4

5



6

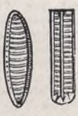


Fig. 4. *Gaillonella ferruginea*, avec un grossissement de 2,000 à gauche et de 300 fois à droite;
Fig. 5. *Gaillonella distans*, grossie 300 fois :
Fig. 6. *Baciltaria vulgaris*, id.

M. Ehrenberg estime que dans le tripoli de Bilin chaque centim. cube, pesant environ 6 décigr., renferme plus de 2,000 millions d'individus de la *Gaillonella distans*, ce qui fait à peu près 34 millions par centigramme. Or une seule couche de ce tripoli, qui s'étend sur un espace considérable, a plus de 4 mètres d'épaisseur.

On trouve encore à la partie supérieure de la grande couche de Bilin une espèce de demi-opale dans laquelle des quantités immenses d'infusoires et de spicules des spongilles sont remplies et cimentées par une matière siliceuse. En haut et à droite de la figure 7, on voit un petit fragment de cette opale ; le reste de la figure représente le même fragment grossi, qui laisse apercevoir les articulations circulaires d'une espèce de *Gaillonella*, et les *spicules* ou supports intérieurs en forme d'aiguilles de la *spongilla*.

On remarque dans la succession des végétaux fossiles, un progrès analogue à celui que présentent les espèces animales. Les plantes les plus compliquées prennent la place des plus simples qui avaient d'abord paru ; et on peut suivre les décroissements de température de la surface du globe d'après la nature de ces plantes à différentes époques géologiques. Consulter à ce sujet l'*Histoire des végétaux fossiles*, par M. Adolphe Brongniart, et les autres travaux du même savant.

7

§ 5. *Géologie proprement dite.*

DIVISION DES TERRAINS EN QUATRE PRINCIPALES CLASSES. — Les roches qui composent l'écorce du globe y sont généralement distribuées d'une manière régulière. Tel est le cas des bancs calcaires exploités aux environs de Paris, et qui sont separés par des lits continus de marne, d'argile ou de pierres tendres. L'ensemble des couches que l'on retrouve ainsi sur une certaine étendue de pays, constitue ce que l'on appelle un *terrain*.

On distingue les *terrains stratifiés* ou *neptuniens* qui ont été formés sous l'eau, qui renferment des débris organiques nombreux, et dont les couches distinctes conservent une épaisseur à peu près uniforme sur une grande étendue des *terrains non stratifiés* ou *plutoniens*, entièrement composés de roches cristallines susceptibles d'entrer en fusion assez facilement, qui ont été soumises à un refroidissement lent après avoir été en fusion. Les masses de roches qui appartiennent aux terrains non stratifiés sont remarquables par l'élévation de leurs saillies et l'âpreté de leurs contours ; elles sortent de dessous les terrains stratifiés, tout en les recouvrant souvent par un épanchement accidentel, et semblent former les fondements de la croûte terrestre.

A ces deux grandes classes de terrains, il faut encore ajouter : 1° les *terrains d'alluvion* ou *de transport*, formés par l'accumulation des débris de roches que les eaux ont abandonnés en ralentissant leur cours dans les plaines ou dans de larges vallées, et qui se distinguent principalement des autres terrains de sédiment, parce qu'ils sont *meubles*, en général, ou privés d'adhérence ; 2° les *terrains volcaniques* dans le sens le plus restreint de ce mot, qui ont une origine ignée comme les terrains plutoniens; mais les causes qui ont produit ceux-là sont bien moins étendues et puissantes que les causes qui ont donné naissance à ceux-ci.

Esquisse géogonique. — La terre soumise primitivement à une chaleur assez intense pour que la plupart des substances qui la composent fussent liquéfiées ou même vaporisées à sa surface, s'étant refroidie peu à peu, a fini par se recouvrir d'une croûte solide dont l'épaisseur augmente encore tous les jours. Malgré le refroidissement continuel que le noyau du globe ne cesse d'éprouver, l'équilibre est établi aujourd'hui entre la quantité de chaleur que la superficie reçoit et celle qu'elle rayonne vers les espaces planétaires. Laplace a démontré de la manière la plus certaine que la température moyenne du globe n'a pas varié de 1/10 de degré depuis le temps de l'astronome Hipparque; et un autre géomètre, l'illustre Fourier, a prouvé que le refroidissement du noyau intérieur ne pourrait, en le supposant prolongé pendant une éternité entière, abaisser la température moyenne de la surface de plus de 1/30 de degré. Si le refroidissement de ce noyau n'a plus d'influence sur la température superficielle, il en a encore et surtout il en a eu un immense sur la forme extérieure de la terre.

« La masse liquide qui occupe l'intérieur » du globe éprouve un retrait graduel par » suite de son refroidissement progressif. La » croûte solide, forcée par son propre poids » de suivre ce mouvement interne, s'écrase » sur elle-même, produit une ride à la » surface de la terre, et, réagissant sur la » matière pâteuse située au-dessous d'elle, » force une partie de cette dernière à s'éle- » ver en formant les axes d'un système de » chaînes de montagnes. » (*Explication de la carte géologique de la France*, par MM. Dufrénoy et Élie de Beaumont.)

Le soulèvement des montagnes est aujourd'hui un fait acquis à la science. Les matières demi-pâteuses qui forment le noyau d'une chaîne ont relevé sur les deux versants des couches stratifiées; celles-ci se présentent aujourd'hui sous des inclinaisons assez fortes et contraires en se relevant de la base vers le sommet, tandis qu'elles avaient été d'abord déposées horizontalement. Les parties de ces strates qui sont au contact des roches soulevantes ont été, en général, plus ou moins altérées. Tantôt le grès a été transformé en quartzite d'apparence cristalline; ailleurs le schiste ardoisier doit sa fissilité si utile à l'industrie à un changement moléculaire postérieur à son dépôt et produit par la même cause; car les lits des couches sont souvent obliques aux plans de fissilité de l'ardoise. On donne le nom de *métamorphiques* aux roches stratifiées qui ont éprouvé des modifications de ce genre au contact des roches ignées.

Près des surfaces de contact de ces deux espèces de roches se trouvent ordinairement les sources thermales et les *filons* ou fentes irrégulières remplies après coup, qui renferment souvent de riches minerais.

C'est à M. Élie de Beaumont que l'on doit la connaissance des lois générales qui ont présidé au soulèvement des chaînes de montagnes et la détermination de leurs âges relatifs. Il a démontré que les chaînes d'une même époque sont généralement parallèles entre elles à la surface du globe; et il a signalé en Europe douze systèmes de soulèvement correspondant à douze des intervalles de la série des terrains stratifiés. (*Recherches sur quelques-unes des révolutions de la surface du globe.* Annales des sciences naturelles, t. XVIII et XIX.)

Divisions des terrains stratifiés. — On a réuni les terrains stratifiés en quatre groupes désignés sous les noms suivants : 1° *terrains de transition* ou *intermédiaires ;* 2° *terrains secondaires ;* 3° *terrains tertiaires ;* 4° *terrains d'alluvion*. Ces groupes correspondent à des interruptions énergiques dans le dépôt des formations, interruptions causées par les soulèvements de quelques-unes des chaînes, tandis que les terrains d'un même groupe présentent une certaine analogie qui indique que le trouble qui a produit des modifications dans leur dépôt n'a pas causé dans nos contrées de changements dans l'inclinaison générale des couches et n'y a pas suspendu la vie organique.

On trouvera col. 1539 et suiv. un *Tableau général des formations* emprunté à MM. Dufrénoy et Élie de Beaumont, ainsi que les *époques de surgissement des roches ignées.*

§ 6. *Géologie appliquée.*

Les diverses branches de la géologie, telle que nous l'avons définie, sont susceptibles des applications les plus importantes et les plus variées.

Ainsi, les résultats de la géographie mathématique et de la géographie physique sont mis à propos par le navigateur, par l'homme d'État, par l'économiste, par le général d'armée. La terre végétale et les mines étant les deux éléments principaux de la richesse territoriale, l'oryctognosie et la géognosie sont la base naturelle des études auxquelles on peut se livrer sur les sources de la prospérité nationale.

« Chaque minéral, » dit Cuvier, « peut re- » cevoir quelque emploi; et de sa plus ou » moins grande abondance dans chaque » lieu, du plus ou moins de facilité qu'on » trouve à se le procurer, dépendent souvent » la prospérité de chaque peuple, ses pro- » grès dans la civilisation, tous les détails de » ses habitudes, » etc.

L'influence du relief et de la nature du sol sur le développement de l'esprit humain n'est pas moins sensible. « On ne pensera jamais » en Limousin et en Basse-Bretagne comme » en Champagne ou en Normandie. »

Le bon sens populaire a depuis longtemps qualifié par des dénominations propres, telles que la *Beauce*, la *Brie*, la *Sologne*, indépendamment des circonscriptions administratives et politiques, les espaces où des caractères géognostiques ou topographiques prononcés se manifestent sur une certaine étendue.

La connaissance de l'ordre de superposition des terrains, des directions, de leurs relèvements, de leur étendue, de leur puissance, etc., exerce la plus haute influence sur la recherche et sur l'exploitation des mines.

C'est ainsi qu'aux environs de Valenciennes, de Denain, de Douai, on a percé la craie pour atteindre au-dessous d'elle, à une profondeur considérable, des couches de houille productives qui sont le prolongement de celles qui étaient connues et exploitées depuis longtemps en Belgique.

Le forage des *puits artésiens*, que l'on doit considérer comme une dépendance de l'art des mines, a donné lieu, de nos jours, à des applications aussi belles qu'utiles de la géognosie. Pour obtenir des eaux jaillissantes, dans une certaine localité, il suffit que le forage puisse établir communication entre la surface du sol et une nappe d'eau intérieure, reposant sur une couche imperméable, suffisamment étendue, et qui se relève assez pour que ses extrémités soient à un niveau supérieur à celui où l'on veut recevoir le liquide. Le succès le plus éclatant que l'on ait obtenu dans des entreprises de ce genre, est celui du puits artésien de Grenelle. D'après les indications données par plusieurs géologues et physiciens célèbres, qui avaient prédit hardiment le succès, l'habile sondeur et mécanicien, M. Mulot, après une foule de difficultés et d'accidents vaincus avec une persévérance au-dessus de tout éloge, est parvenu, le 26 février 1841, à ramener de la profondenr de 548 mètres une immense colonne d'eau chaude qui donne 3 000 mètres cubes par 24 heures.

Les *puits artésiens absorbants*, où une couche perméable non ascendante reçoit les liquides dont on veut se débarrasser à la surface du sol, paraissent aussi destinés à jouer un rôle important pour l'assainissement des lieux habités. Il y en a qui fonctionnent avec succès à Saint-Denis, à Villetaneuse (près Saint-Denis), à la barrière du Combat, à Bicêtre, etc.

Nous renvoyons à la col. 1555 pour l'énumération des roches et des minéraux principaux employés par l'industrie.

§ 7. *Indications historiques et bibliographiques.*

« Cicéron disait qu'il ne concevait pas » comment deux augures pouvaient se regarder sans rire. Ce mot, il y a un certain » nombre d'années, avait été appliqué aux » géologues, sans qu'ils eussent trop le droit de » s'en plaindre; car la science qu'ils professaient était alors une simple collection » d'hypothèses bizarres, et dont aucune observation précise ne montrait la nécessité. » Aujourd'hui, au contraire, la géologie a pris » rang parmi les sciences exactes. » (ARAGO.)

Ce jugement, qui n'est que juste pour une foule de systèmes des temps modernes, serait un peu sévère si on l'appliquait sans réserve à certaines idées géogoniques, dont quelques-unes remontent à une antiquité très-reculée. Telles sont celles des pythagoriciens, dont l'origine se trouve probablement dans l'Egypte ou même dans l'Inde. En voyant la profondeur des enseignements géologiques qu'un poète aussi superficiel qu'Ovide met dans la bouche de Pythagore, on peut se figurer la grandeur qu'ils devaient avoir à leur source.

Bernard Palissy, simple potier de terre, qui avait pris pour devise « Povreté empêche bons esprits de parvenir, » fut le premier qui, vers le milieu du seizième siècle, osa dire que les coquilles fossiles n'étaient pas des jeux de la nature, mais qu'elles avaient été déposées par la mer dans les localités où elles se trouvent aujourd'hui.

Les traits les plus généraux et les plus simples de la distribution des matières minérales qui constituent le sol de la France, sont figurés, avec une exactitude surprenante pour l'époque, dans une petite carte géologique de la France, publiée en 1664 par l'abbé L. Coulon.

Guettard, reprenant les mêmes idées et les poussant plus loin, publiait en 1746, dans les Mémoires de l'Académie des sciences, un nouvel essai de carte géologique de la France, dans lequel l'ordre de superposition, le cours souterrain et la disposition circulaire autour de Paris des grandes assises des terrains de sédiment sont clairement expliqués.

De Saussure et Dolomieu, vers la fin du siècle dernier, ont démontré le soulèvement des montagnes par l'examen de la position des galets qui existent dans les couches relevées sur les versants opposés.

Le travail déjà cité de M. Elie de Beaumont sur l'ancienneté relative des différentes chaînes de montagnes, a été « rangé unanimement par les géologues, » ainsi que le prédisait M. Arago, « parmi tout ce que leur science possède de plus curieux et de mieux établi. »

C'est à deux Français, Romé de Lisle et Haüy, que sont dus les progrès les plus remarquables de la cristallographie si importante pour l'étude des minéraux.

On sait aussi quelle gloire Cuvier s'est acquise par ses brillantes découvertes sur la nature et la forme des êtres dont les débris souvent dispersés existent dans des couches de sédiment.

Plusieurs autres pays civilisés, l'Allemagne et l'Angleterre surtout, ont cultivé avec succès les différentes branches de la géologie.

Les noms de Werner de MM. A. de Humboldt, L. de Buch, etc. sont des titres de gloire pour l'Allemagne; ceux de Buckland, de Labèche, de Lyell, etc. sont à juste titre populaires en Angleterre.

Parmi les livres que l'on peut étudier avec succès, nous indiquerons : 1° Pour la géographie mathématique, le *Traité de Géodésie*, celui *de Topographie* et la *Nouvelle Description géométrique de la France*, de M. Puissant; 2° pour l'oryctognosie, le *Traité élémentaire de Minéralogie*, de M. Beudant; les ouvrages de Haüy, la *Cristallographie*, de M Brochand de Villiers, l'excellente *Introduction à la Minéralogie*, de M. Al. Brongniart; *Classification et Caractères minéralogiques des Roches*, par le même; *Nouveaux Eléments de Minéralogie*, par M. Brard, etc.,; *Recherches sur les Ossements fossiles*, par Cuvier, comprenant une description devenue classique des couches des environs de Paris, rédigée en commun avec M. Al. Brongniart; *Description des Coquilles caractéristiques des terrains*, par M. Deshayes; *Histoire des Végétaux fossiles*, par M. Ad. Brongniart; 3° pour la géographie physique et la géologie proprement dite, les *Eléments de Géologie*, par d'Omalius d'Halley; le *Manuel géologique*, par M. de La Bèche; les *Eléments de Géologie*, par Lyell; *Essai géognostique sur le gisement des Roches dans les deux Hémisphères*, par M. de Humboldt, et beaucoup d'autres ouvrages du même auteur, etc.; 4° pour la géologie appliquée, la *Minéralogie appliquée aux arts*, de M. Brard; les *Eléments pratiques d'exploitation des Mines*, par le même; le *Traité sur les Puits artésiens*, par M. Garnier : le *Cours de Minéralogie et de Géologie appliqué aux constructions*, fait à l'Ecole des ponts et chaussées, par M. Dufrénoy.

Enfin, l'*Explication de la carte géologique de la France*, par MM. Dufrénoy et Elie de Beaumont, les *Mémoires* publiés antérieurement par ces deux savants, et la carte elle-même, constituent un magnifique ensemble de travaux géologiques. L'introduction à l'explication offre, dans un cadre restreint, une esquisse des principaux faits acquis à la science, remarquable par la clarté et par la profondeur; nous y avons fait de nombreux emprunts, et nous en aurions fait encore davantage, sans l'étroitesse du cadre où nous devions nous restreindre.

XII. BOTANIQUE.

La Botanique est la science des végétaux. Elle se divise naturellement de la manière suivante :

1° *Anatomie végétale* ou science de la structure intime des végétaux;

2° *Organographie végétale* ou description des organes extérieurs des végétaux;

3° *Physiologie végétale* ou connaissance des lois qui régissent la vie des végétaux;

4° *Taxonomie végétale* ou classification des végétaux;

5° *Botanique descriptive* ou description des végétaux qui croissent à la surface du globe;

6° *Géographie botanique* ou lois de la distribution des végétaux à la surface du globe;

7° *Botanique appliquée* soit à l'agriculture, soit à la médecine, soit à l'industrie, ou Botanique agricole, médicale et industrielle.

§ 1. *Anatomie végétale.*

Une trame cellulaire analogue à celle des animaux est le tissu fondamental de tous les végétaux. Il se compose de vésicules transparentes dont les parois se touchent; la membrane qui sépare deux cellules voisines est donc nécessairement double. Si l'adhérence entre les cellules contiguës n'est point parfaite, il existe entre elles des espaces que l'on nomme *méats intercellulaires*.

Les vésicules du tissu cellulaire, considérées isolément, sont rondes ou oblongues; elles prennent aussi la forme d'un dodécaèdre, d'un prisme, d'un cylindre ou d'un fuseau.

Il est des végétaux entièrement composés de tissu cellulaire; tels sont les Champignons, les Algues, les Lichens, etc. Toutefois, chez la plupart, quelques parties seulement sont exclusivement composées de ce tissu; tels sont les fruits, la moelle, les rayons médullaires et tout le tissu interposé entre les nervures des feuilles.

Quelquefois les cellules sont uniquement remplies d'air. Le plus souvent elles contiennent de l'eau incolore ou colorée en vert par une matière appelée *Chlorophylle*, ou en d'autres couleurs par différentes substances. Cette eau peut aussi tenir en dissolution de la gomme, de la fécule, des sels de nature variée.

Les cellules s'engendrent l'une l'autre par leur face externe ou interne, ou bien une seule cellule se sépare en plusieurs parties qui finissent par s'isoler complétement.

Les vaisseaux sont des cellules modifiées qu'on trouve dans tous les végétaux pourvus de fleurs. D'après leurs fonctions, on peut les diviser en deux ordres :

1° Les *vaisseaux séveux*. Ce sont des cylindres tronqués, ajoutés bout à bout, communiquant entre eux et parsemés de points ou de raies à leur surface. Ils conduisent la sève de la racine aux feuilles.

2° Les *vaisseaux aériens*. Formés d'une ame roulée en spirale comme un élastique de bretelle, ceux-ci ne renferment que de l'air. On les nomme *trachées*, par analogie avec des organes similaires qu'on observe chez les insectes. On les trouve, en général, dans toutes les parties ascendantes encore jeunes, rarement dans les racines.

Ces trachées sont tellement grandes et nombreuses dans le Bananier, qu'on s'en sert en guise d'amadou.

Les vaisseaux aériens communiquent avec l'atmosphère par des orifices elliptiques garnis de bourrelets et appelés *stomates*. Ces orifices se trouvent sur toutes les parties vertes, et en particulier à la surface inférieure des feuilles. Ils manquent dans toutes les plantes ou parties de plantes qui sont submergées, et sont fort rares sur les feuilles charnues et succulentes des plantes grasses, telles que les Joubarbes, les *Sedum*, etc.

Sous le nom de *Fibre végétale*, on désigne un assemblage de tissu cellulaire allongé et de vaisseaux. Une pareille fibre se sépare facilement dans le sens de sa longueur, parce qu'on ne fait que déchirer le tissu cellulaire qui unit les vaisseaux; elle se rompt au contraire difficilement en travers, à cause de la résistance des parois vasculaires. Exemples : le Chanvre, le Lin, l'Ortie, le *Phormium tenax*.

Les cavités désignées sous le nom de réservoirs du suc propre, tels que ceux qu'on trouve dans les Euphorbes, les Pins, les Sapins, les feuilles d'Oranger, sont des méats intercellulaires agrandis; il en est probablement de même des *vaisseaux du latex* des Figuiers, de la Chélidoine et d'autres plantes.

§ 2. *Organographie et Physiologie végétales.*

Organes de la nutrition. — On nomme ainsi tous ceux qui sont nécessaires ou utiles à l'existence et à l'accroissement de l'individu.

Racine. — C'est la partie du végétal qui tend sans cesse vers le centre de la terre et est ordinairement cachée sous la surface du sol.

Il ne faut point confondre les racines avec les tiges souterraines ou *rhizômes* des Iris, des Asperges et des Fougères de nos climats.

Quelques plantes, telles que le Maïs, les Aloès, les Figuiers, les Mangliers, poussent le long de leur tige des racines aériennes. Celles-ci descendent verticalement, s'enfoncent dans le sol, et jouent le rôle de véritables haubans qui soutiennent l'arbre contre les efforts du vent ou des flots.

Les racines ne s'allongent que par leurs extrémités. Deux fils placés sur une racine de quelques décimètres de longueur seront toujours également distants, quand même la racine aurait atteint une longueur de plusieurs mètres.

Quelques racines ne vivent qu'un an; les plantes auxquelles elles appartiennent meurent avec elles, et sont dites annuelles. Ex. : Coquelicot (*Papaver Rhœas*). D'autres vivent deux ans : Exemple : la Carotte. D'autres enfin sont vivaces : telles sont celles des arbres, des arbrisseaux et de beaucoup d'autres plantes dont la durée n'est point limitée à un nombre d'années déterminé.

Le climat peut modifier la nature d'un végétal. Le Réséda et le Ricin, vivaces en Égypte et même en Algérie, deviennent annuels dans le nord de la France, parce qu'ils sont tués par les premiers froids de l'hiver.

La longueur des racines n'est pas toujours proportionnelle à la hauteur des tiges.

Les racines de la Luzerne sont aussi longues que celles du Peuplier et plus longues que celles du Sapin.

Dans l'eau, les racines prennent un développement extraordinaire; ces racines, appelées *queues de renard*, obstruent souvent les tuyaux de conduite.

Les racines ont différentes formes. Voici les principales :

1º Pivotante : Carotte, Navet, etc ;
2º Fibreuse : Blé, *Yucca;*
3º Bulbifère : Lis, Ognon
4º Rameuse : Arbres et Arbrisseaux ;
5º Fasciculée : *Dahlia.*

Les racines fixent le végétal au sol, et absorbent les sucs contenus dans la terre par leur *extrémité seulement.* C'est pourquoi les jeunes arbres épuisent le sol près de leur pied, les vieux dans les limites d'un cercle dont le diamètre est plus grand en général que celui de la cime de l'arbre. Grâce à cette disposition, l'extrémité de la racine reçoit toujours l'influence de la pluie ; car son extrémite dépasse en général la surface de terrain abritée par la cime de l'arbre.

Quand une portion de racine rencontre un sol fertile, elle s'y développe prodigieusement comparativement à celles qui se trouvent dans un mauvais terrain. De là le dicton des jardiniers : Les racines *cherchent la bonne terre.*

Tige. — C'est la partie du végétal qui tend à s'élever verticalement, et qui porte en haut les feuilles et les fleurs et en bas les racines.

Il est des plantes dépourvues de tiges ou *acaules.* Ex. : la Dent de Lion, le *Cyclamen.*

Chez les plantes bulbeuses, telles que les Ognons et les Lis, c'est le bulbe qui représente la tige.

Quelquefois la tige existe, mais ensevelie sous la terre : c'est ce qui arrive aux Saules qui vivent sur les pentes des Alpes ; l'éboulement ensevelit la tige à mesure qu'elle s'élève, et on ne voit que les branches au-dessus de la surface du sol.

La direction des tiges varie ; elles sont couchées sur le sol (Vigne), rampantes (Fraisier), enroulées ou volubiles (Houblon, Liseron, Haricot).

Les divisions de la tige sont appelées : branches, rameaux, ramuscules. Tantôt elles forment avec la tige un angle aigu (Peuplier), ou droit (Cèdres, Ormes, Chênes), ou obtus (Frêne-Parasol). Sur une pente, les branches sont en général parallèles au sol.

Tiges exogènes. — On nomme ainsi celles de tous les arbres et de beaucoup d'autres plantes de nos climats, parce qu'elles croissent de l'intérieur à l'extérieur. Ces troncs, examinés de dedans en dehors, se composent des parties suivantes :

La *moelle.* C'est un cylindre plein, composé de tissu cellulaire dans les jeunes branches, surtout celles du Sureau, mais qui disparaît avec l'âge. Elle est entourée d'un cylindre creux formé de trachées et appelé *étui médullaire.*

Les *rayons médullaires* sont des lames de tissu cellulaire analogues à la moelle et qui la mettent en communication avec la périphérie de l'arbre. Ces deux organes servent probablement à nourrir le bourgeon. De là leur disparition avec l'âge.

Autour de l'étui médullaire on remarque une série de *couches concentriques* qui constituent le *bois.* Autour du tronc des arbres il se forme chaque année une nouvelle couche de bois, et dans les climats où la végétation est interrompue par l'hiver on peut savoir l'âge d'un arbre en le coupant au pied et en comptant le nombre de ses couches. On a vérifié ce fait sur des arbres d'un âge connu, sur des plantations d'allées dont la date était consignée dans les registres d'une commune.

En 1800, M. de Candolle faisait couper un Genévrier dans la forêt de Fontainebleau : il remarqua vers le centre de l'arbre une couche de bois qui avait été gelée, et trouva qu'il y avait quatre-vingt-onze couches entre cette couche et l'écorce, ce qui faisait remonter cet accident à l'année 1709 ; or chacun sait que l'hiver de cette année a été un des plus rigoureux dont on ait gardé le souvenir.

Adanson trouva aux îles du Cap-Vert quelques Baobabs, arbres gigantesques auxquels on a donné son nom *(Adansonia Baobab).* Ils portaient des inscriptions et des dates qui y avaient été gravées par des navigateurs portugais. Le nombre de couches qui séparait ces dates de l'écorce était précisément le nombre d'années écoulées depuis l'époque de leur voyage jusqu'à celui d'Adanson.

On trouve dans l'intérieur des arbres des clous, des liens circulaires qui y ont pénétré, parce que l'addition successive de nouvelles couches ligneuses a fini par les recouvrir. Le *Periploca græca* est une plante grimpante qui s'enroule fortement autour des arbres, et on a vu des cas où ses tiges se trouvaient enchâssées dans le bois.

Les couches ne se développent pas toujours également dans tous les sens : de là l'origine des arbres excentriques. Il peut même arriver qu'une couche ne se développe pas d'un côté, tandis qu'elle prend un accroissement assez notable du côté opposé.

En général, l'épaisseur des couches annuelles va en décroissant régulièrement du centre à la circonférence. Toutefois on rencontre de nombreuses exceptions à cette règle.

Les couches ligneuses n'ont pas toutes la même dureté. Celles qui entourent la moelle sont les plus résistantes et constituent le *bois parfait* ou le *cœur du bois;* celles qui sont plus excentriques forment l'*aubier.* Le bois se distingue souvent encore de l'aubier par une colloration différente. Ainsi le bois est noir dans l'Ebène, jaune dans le Cytise *(Cytisus Laburnum),* brun dans le Chêne et l'Orme. L'aubier n'offre jamais une teinte foncée ; il est presque toujours blanc.

Equarrir un arbre, c'est enlever l'aubier qui est mou et se détruit facilement pour ne laisser que le bois qui résiste aux ravages du temps.

Après l'aubier vient l'*écorce* qui se compose en dedans de lames superposées formées elles-mêmes par un réseau de vaisseaux entremêlé de tissu cellulaire. C'est dans le Bois-dentelle de Saint-Domingue *(Lagetta lintearia)* que cette disposition s'observe de la manière la plus évidente. On donne à ces couches le nom de *liber.*

Chaque année il se forme une nouvelle couche de liber en *dedans* de celle de l'année précédente, c'est-à-dire entre celle-ci et l'aubier. On le prouve en interposant, entre l'aubier et le liber, des lames d'argent ou un corps quelconque. Au bout d'un certain temps ce corps, repoussé en dehors par les couches qui se forment entre l'arbre et lui, finit par être rejeté tout à fait.

Ainsi donc l'aubier et le liber croissent en sens inverse l'un de l'autre : l'aubier de dedans en dehors, le liber de dehors en dedans. Un corps inséré dans l'aubier finit par être recouvert de bois par l'addition successive de couches nouvelles. Le même corps placé dans le liber est rejeté vers la périphérie.

Les couches corticales les plus extérieures étant distendues et déchirées par l'accroissement successif de l'arbre, sont en général privées de vie.

En dehors de toutes ces parties est l'enveloppe générale de la plante appelée *Medulle externe* qui la recouvre tout entière comme un fourreau. On ne la voit clairement que sur les jeunes tiges qui sont encore vertes; là elle est semblable à une pellicule transparente qu'on peut enlever avec facilité.

Dans quelques végétaux, tels que le Chêne-Liége (*Quercus Suber*), cette dernière couche prend un développement extraordinaire. Elle forme le liége qui est employé dans l'industrie. Sur les jeunes branches des Ormes qui végètent dans les endroits humides et ombragés, on observe souvent un développement accidentel et tout à fait analogue de la médulle externe. Elle est, comme la couche corticale, distendue et déchirée à mesure que l'arbre grossit; elle se déchire alors, meurt et souvent même se détache de l'arbre comme on le constate sur le Platane.

Accroissement des tiges exogènes. — Prenons un chêne au moment où il germe: la racine s'enfonce dans le sol, et une petite tige s'élance portant un bourgeon à son sommet. L'hiver vient, et tout s'arrête; mais au printemps suivant le petit bourgeon émet une nouvelle pousse qui continue la première. L'année suivante une troisième pousse s'ajoute à la seconde. Cet accroissement en hauteur marche simultanément avec celui en épaisseur. En effet, chaque année il se forme une nouvelle couche d'aubier et une nouvelle couche de liber. Ainsi, sur un arbre de trois ans la dernière pousse a une couche d'aubier et une de liber; celle de la seconde année, deux couches d'aubier et autant de liber; celle de la première, trois couches d'aubier et trois couches de liber. Toutes ces couches forment autant de cônes emboîtés les uns dans les autres depuis la base jusqu'au sommet de l'arbre, comme on peut le voir en le coupant par le milieu, suivant son axe longitudinal. En même temps les couches d'aubier les plus intérieures, et par conséquent les plus anciennes, se transforment successivement en bois parfait.

Les branches sont de nouvelles plantes qui se développent sur un tronc commun ou elles se montrent d'abord à l'état de bourgeons.

Tiges endogènes ou Stipes. — Nous n'avons point dans nos climats d'arbres à tiges endogènes: ce sont celles des Palmiers, des Bananiers, des Cocotiers, qui caractérisent les régions intertropicales. Leur structure est tout à fait différente de celle des troncs exogènes. Au centre nous ne trouvons point de moelle ni des rayons médullaires, mais des fibres ligneuses distinctes, séparées ou unies seulement par un tissu cellulaire très-lâche. A mesure qu'on s'approche de la circonférence, ces fibres se rapprochent, se soudent et finissent par former un bois parfait qui enveloppe la partie centrale comme un cylindre creux. C'est ce qui a fait dire que dans les Endogènes le bois était à la circonférence et l'aubier au centre. La hache du bûcheron qui veut abattre un Chêne éprouve plus de résistance à mesure qu'elle approche du centre; celle du sauvage est repoussée d'abord, puis pénètre facilement dans le stipe du Cocotier lorsqu'elle atteint sa partie non indurée.

Les tiges endogènes n'ont point de véritable écorce; la dernière enveloppe est formée par la base des feuilles qui persiste, tandis que le reste s'est détaché. Toutefois on trouve une écorce assez analogue à celle des exogènes dans plusieurs endogènes herbacés.

Un palmier s'accroît d'abord en hauteur et en épaisseur; mais, lorsqu'il a atteint un certain diamètre et que les fibres extérieures ont formé un anneau ligneux inextensible, alors son accroissement en diamètre s'arrête, et l'arbre, au lieu d'offrir la forme conique des troncs de nos Chênes et de nos Ormes, est cylindrique dans toute sa hauteur. C'est pourquoi un Palmier a pu vivre étroitement entouré par le tronc d'un *Bauhinia* sans le fendre et sans souffrir de son étreinte, comme on peut s'en assurer dans les collections du Muséum de Paris.

Les bulbes des Lis et des Ognons, les racines horizontales, véritables tiges souterraines des Iris, celles des Poireaux, peuvent nous donner une idée de la structure des stipes à leur naissance.

Longévité et grosseur des arbres. — 1° *Exogènes.* — Un Ormeau à Morges, sur les bords du lac de Genève, avait 9m,74 de circonférence, et, d'après le nombre de ses couches, 335 ans.

A Gigean, entre Montpellier et Pezenas, se trouvait un lierre dont le tronc avait 1m,9 de circonférence et dont les branches couvraient une surface triangulaire de 72 mètres carrés. Cet arbre avait 433 ans.

A Geffle, en Suède, j'ai mesuré un Pin-Sylvestre qui avait 63 centimètres de diamètre et 437 ans.

A Neustadt en Wurtemberg est un Tilleul dont les branches étaient déjà en 1550 soutenues par des étais; en 1664 son tronc avait plus de 12 mètres de circonférence.

Près de Trous, dans le canton des Grisons, se trouve un Erable sous lequel furent jurées les ligues grises en 1484. A cette époque il devait avoir au moins 100 ans, ce qui donne un âge approximatif de 500 ans environ.

Les Chênes de 800 ans à 1000 ans ne sont pas très-rares. Le Chêne de Wallace, près de Paisley en Angleterre, a plus de 700 ans. Un bûcheron a trouvé des vases et des monnaies d'origine romaine dans un vieux Chêne des Ardennes, ce qui lui donne un âge de 15 à 16 siècles.

L'Oranger qu'on voit au couvent de Sainte-Sabine, à Rome, y a, dit-on, été planté par saint Dominique en 1200, et celui de Fondi par saint Thomas d'Aquin en 1278.

Le plus grand Olivier cité en Italie par Picconi est à Pescio, il a 7m,70 de circonférence et environ 7 siècles d'existence d'après les lois connues de l'accroissement des Oliviers.

En Angleterre on trouve des Ifs dans beaucoup d'anciens cimetières. Ces arbres, dont l'accroissement est fort lent, ont cependant un grand diamètre, et l'âge de plusieurs d'entre eux doit être de 1000 à 3000 ans. Ce sont les doyens de la végétation européenne. La tradition attribue à un Figuier, *Ficus indica*, près de Nerbudda dans l'Inde, un âge de 2 500 ans.

Les Baobabs mesurés par Adanson, et comparés à de petits individus d'un âge connu, devaient avoir au delà de 5000 ans.

2° *Endogènes.* — On a moins de documents sur l'âge des arbres endogènes; toutefois il est incontestable que beaucoup de Cocotiers et de Dattiers ont plusieurs siècles d'existence.

Le *Dracœna* du jardin Franchi à Oratava, île de Ténériffe, était déjà célèbre par sa grosseur en 1402, lors de la découverte de l'île. En 1796 il avait 13 mètres de circonférence, et, depuis cette époque, son accroissement a été si peu de chose que l'âge qu'on est forcé de lui donner fait remonter celle de sa naissance bien au delà des limites que toutes les traditions historiques assignent aux derniers grands bouleversements dont notre planète a été le théâtre.

Multiplication des végétaux. — Si l'on entoure de terre humide une jeune branche d'arbre, elle ne tardera pas à pousser des racines; et en la séparant du tronc, on aura un nouvel individu. Cette opération se nomme *marcottage*. On l'emploie de préférence pour des végétaux précieux ou délicats tels que ceux qu'on cultive dans les serres.

Pour multiplier certains arbres, tels que les Saules, les Peupliers qui poussent facilement des racines, il suffit de couper de jeunes branches et de les planter en terre. Ce sont alors des *boutures*.

La *greffe* consiste dans l'union de deux branches du même individu, ou dans le transport d'une jeune branche ou d'un jeune bourgeon d'un arbre sur un arbre de la même espèce ou du même genre. Elle est fort usitée pour améliorer les espèces de fruits ou obtenir de plus beaux sujets.

Organes appendiculaires. — On nomme ainsi tous les organes auxquels la tige sert de support. Ils se divisent en organes de la nutrition et organes de la fécondation.

Organes de la nutrition. — 1° *Poils.* Beaucoup de plantes ont des appendices filiformes analogues à ceux des animaux et désignés sous le même nom. Les uns sont une simple cellule allongée; d'autres se composent de plusieurs cellules placées bout à bout; d'autres sont rameux, en étoile, en goupillon, etc.

Quelques-uns ont une glande à leur base. tels sont ceux de l'Ortie (*Urtica urens* et *U. dioica*). Le poil qui est creux perce la peau, et la glande comprimée laisse échapper un suc âcre qui pénètre sous l'épiderme. Les poils du *Malpighia urens* sont placés horizontalement, au-dessus d'une glande analogue.

La Fraxinelle (*Dictamnus Fraxinella*) et le Pois chiche (*Cicer arietinum*) sont munis de poils qui portent des glandes à leur sommet. Les poils protégent certains organes contre le froid ; tels sont ceux qu'on trouve à l'intérieur des bourgeons dans le Marronnier d'Inde : ils s'opposent à une trop forte évaporation : aussi les plantes dépourvues de stomates sont-elles en général privées de poils.

2° *Bourgeons.* Corps ovoïdes et d'aspect varié, développés dans l'*aisselle* des feuilles, c'est-à-dire dans l'angle qu'elles forment avec la tige.

Certains bourgeons ne contiennent que des feuilles, ils sont *folifères ;* d'autres, *florifères*, ne renferment que des fleurs; d'autres, mixtes, contiennent l'un et l'autre. Leurs enveloppes sont formées de feuilles ou de stipules avortées. Quelques-uns, tels que ceux du Marronnier d'Inde et de certains Peupliers, sont enduits d'une matière résineuse qui empêche la pluie de pénétrer dans l'intérieur du bourgeon et de pourrir les organes délicats qu'il renferme.

3° *Feuilles.* Expansions d'un faisceau de fibres de formes variées et le plus souvent colorées en vert. Lorsque ce faisceau se ramifie au moment où il se sépare de la tige, on dit de la feuille qu'elle est *sessile* (exemple, le Pavot). Le plus souvent ce faisceau se prolonge en dehors de la tige, et forme le *pétiole*, appelé vulgairement la queue de la feuille (ex. Tilleul, Lilas). Celui-ci est quelquefois continu avec la tige, comme dans le Lierre, et quelquefois *articulé* avec elle (Platane, Marronnier d'Inde). D'autres fois il l'embrasse, comme dans les Ombellifères, les Céréales ; on dit alors qu'il est *amplexicaule* ou *engainant*.

Le Pétiole compose quelquefois la feuille tout entière, alors il en prend la forme en se dilatant et se nomme *Phyllode*. Exemple : les Acacias de la Nouvelle-Hollande, le *Strelitzia juncea*, le *Bupleurum falcatum*, etc. L'expansion du pétiole est appelée le *limbe* de la feuille. Ce limbe se compose d'une couche épidermique de cellules étroitement unies entre elles, percées de trous elliptiques ou arrondis, appelés *stomates*, qui communiquent avec les méats intercellulaires de la feuille. C'est l'épiderme de la surface supérieure. Au-dessous se trouvent les ramifications du pétiole appelées *nervures*, qui se divisent à l'infini et forment un réseau des plus compliqués ; ces nervures se composent de trachées, de vaisseaux séveux, et de vaisseaux du latex.

Les intervalles de ce réseau sont remplis de tissu cellulaire plus ou moins lâche, dont les méats intercellulaires sont fort grands, surtout vers la face inférieure de la feuille. L'épiderme de cette face inférieure est percé d'un plus grand nombre de stomates que la face supérieure et elle est aussi plus souvent hérissée de poils.

Cette face inférieure est toujours invariablement tournée vers le sol. Ainsi, dans le Frêne pleureur dont les rameaux se dirigent vers la terre, tous les pétioles des feuilles sont tordus, et la face inférieure des feuilles se trouve ainsi replacée dans sa position normale par rapport au sol.

Les feuilles sont *opposées*, c'est-à-dire placées l'une en face de l'autre sur la tige (ex. Lilas), ou disposées en *spirales* plus ou moins compliquées. Ces spirales s'expriment par des fractions dont le numérateur indique le nombre des tours de spire, le dénominateur le nombre des feuilles qui composent cette spirale. Ainsi $\frac{2}{5}$ est une spirale composée de cinq feuilles et qui fait deux tours (ex. le Poirier). Cette fraction exprime en même temps l'angle que forment entre eux les pétioles des deux feuilles consécutives. On reconnaît que la spirale est terminée lorsqu'ayant pris une feuille pour point de départ, on en rencontre une qui la recouvre exactement.

Relativement à la forme, les feuilles se divisent en simples et en composées.

A. Les *feuilles simples* sont formées d'un pétiole et d'un limbe ; leur figure dépend de la manière dont les nervures se ramifient. Si les nervures restent parallèles quoique plus distantes que dans le pétiole, il en résulte des feuilles *parallélinerves* en forme de ruban, de lame d'épée, comme celles des Iris et de toutes les Céréales.

Les nervures vont-elles en rayonnant à partir de l'extrémité du pétiole, comme d'un centre, les feuilles sont dites *peltinerves*. Ex : Capucine.

Les nervures qui s'écartent comme les doigts de la main engendrent les feuilles *palminerves*. Ex. : Ricin, Erable.

Si le pétiole se continue jusqu'à l'extrémité des limbes sous la forme d'une nervure médiane et le partage en deux moitiés symétriques, les nervures s'échappent latéralement comme les barbes d'une plume, et la feuille est *penninerve*. Ex. : Orme, Pavot, *Magnolia*.

Il est rare que le limbe d'une feuille soit entier et qu'il ne présente aucune interruption. Le plus souvent il est découpé. Ces découpures ne traversent jamais les nervures, mais elles s'insinuent entre elles ; aussi les feuilles à nervures parallèles sont-elles toujours entières. Les autres sont *dentées* si leurs divisions sont aiguës, *lobées* lorsqu'elles sont partagées en parties arrondies, ou *laciniées* quand elles sont irrégulièrement déchirées.

Si les divisions comprennent la moitié du limbe, on ajoute la terminaison *fide* au mot qui exprime le genre de distribution des nervures. Ainsi une feuille sera *palmatifide* (Ricin), *pinnatifide* (*Polypodium vulgare*), selon qu'elle sera palmée ou pennée.

Si les divisions vont jusqu'à la nervure médiane, la feuille est *palmatipartite* ou *pinnatipartite*. Leur forme est extrêmement variable et s'exprime par des dénominations géométriques, telles que : elliptique, triangulaire, ou en les comparant à celle d'un objet connu, feuilles sagittées, spatulées, ensiformes, etc.

B. *Une feuille composée* est celle qui, sur un pétiole commun, porte plusieurs folioles distinctes et articulées sur lui. La disposition des folioles est la même dans les feuilles composées que celle des nervures dans les feuilles simples, penninerves et palminerves. Ainsi les feuilles de l'Acacia commun (*Robinia Pseudo-acacia*), du Frêne, du Pois, sont pennées, car leurs folioles sont disposées comme les barbes d'une plume le sont sur son axe. Celles du Marronnier d'Inde, des Lupins, sont *digitées*, car elles s'écartent comme les doigts de la main. Une feuille peut être simple en apparence, quoique composée en réalité, c'est lorsque toutes les folioles moins une ne se développent pas. Telle est celle de l'Oranger, qui est articulée sur son pétiole et non continue avec lui. Dans certaines plantes, *Mimosa Julibrizin, Epimedium alpinum*, les folioles sont remplacées par des feuilles pennées. On dit alors que la feuille est *bipennée*. Celles de la Sensitive (*Mimosa pudica*) sont *digitopennées*.

Mouvements des feuilles. Si l'on abaisse vers la terre l'extrémité d'une branche et qu'on la fixe dans cette position, les pétioles se tordent et les feuilles ont toujours leur face inférieure dirigée vers le sol et l'autre vers le ciel.

Presque toutes les feuilles pennées ou digitopennées présentent le phénomène du *sommeil*, c'est-à-dire que le soir les folioles s'abaissent et s'appliquent l'une contre l'autre, tandis que, dans le jour, elles sont horizontales ou dressées. M. de Candolle changea leurs habitudes en les éclairant la nuit et en les tenant pendant le jour dans une profonde obscurité.

Si l'on touche légèrement les feuilles de la Sensitive, les folioles s'appliquent l'une contre l'autre ; un choc plus fort fait fléchir les pétioles qui s'abaissent le long de ces tiges. Le vent, l'ombre d'un nuage, l'électricité, la chaleur, le froid, les vapeurs irritantes suffisent pour produire ces effets. Dès que l'action cesse, les parties reprennent leur position habituelle. Mais l'habitude émousse pour ainsi dire la sensibilité de cette plante. Transportée dans une voiture, les premières secousses agissent sur ses folioles; mais peu à peu elle s'habitue au mouvement et reste dans son état normal.

D'autres plantes de la même famille présentent les mêmes phénomènes, mais à un moindre degré.

L'*Hedysarum gyrans*, espèce d'Esparcette du Bengale, porte des feuilles composées de trois folioles. Les deux latérales s'abaissent et s'élèvent alternativement par petites saccades. Ces mouvements sont tantôt plus rapides, tantôt plus lents, sans qu'on puisse bien analyser les circonstances qui les produisent, les accélèrent ou les ralentissent.

Quand le ciel se couvre de nuages, les feuilles du *Porliera hygrometrica* se collent contre la tige. Celles du *Dionæa muscipula*, plante des marais de l'Amérique septentrionale, se terminent par deux lobes réunis par une charnière médiane et hérissée de poils glanduleux; si un insecte touche ces poils, les lobes se rapprochent et l'insecte est pris.

Une plante qui croît dans nos marais, le *Drosera rotundifolia*, a de petites feuilles couvertes de poils et d'une sécrétion visqueuse; un insecte s'approche-t-il attiré par cette humeur, les petits poils se redressent, s'entre-croisent, et l'animal se trouve enlacé comme dans un filet.

4° *Stipules*. Ce sont de petits organes foliacés situés à la base du pétiole des feuilles; celles des Pois (*Pisum sativum*) sont aussi grandes que les feuilles elles-mêmes; dans le *Lathyrus Aphaca*, les feuilles avortent, les stipules seules persistent. Les stipules sont souvent soudées avec les feuilles, comme dans la Rose; celles du *Ficus elastica* enveloppent le jeune bourgeon et tombent dès qu'il s'est ouvert. Les stipules se changent aussi en épines, comme dans l'Acacia commun (*Robinia pseudo-acacia*), l'*Acacia cornigera*, etc.

On nomme *vrille* un organe quelconque qui se contourne en hélice sur lui-même ou autour des corps voisins. Dans le Pois, le *Cobea*, ce sont les extrémités des feuilles; dans l'OEillet, les feuilles elles-mêmes; dans le *Smilax*, la Bryone, les Stipules; dans la vigne, des grappes qui ne portent point de fruits.

Dans le *Nepenthes distillatoria* la vrille se termine par un godet dans lequel se réunit une eau très-pure que la plante sécrète, et qui peut servir à désaltérer le voyageur.

Les *aiguillons* tels que ceux de la Rose sont des prolongements de l'épiderme qui sont durs et aigus.

Les Epines sont des organes transformés; dans le Prunier sauvage et le *Gleditschia ferox*, les rameaux se changent en épines; dans l'Acacia commun, ce sont les stipules; dans d'autres plantes (*Astragalus tragacantha*), les pétioles.

Nutrition végétale. — Elle se compose, comme la nutrition animale, de deux ordres de phénomènes. 1° L'introduction dans le végétal des substances alimentaires, ou l'*absorption*, et la *circulation* des sucs nutritifs : 2° leur modification sous l'influence de l'air atmosphérique, ou la *respiration*.

1° *Absorption*. Les végétaux ne se nourrissent que de substances liquides; la terre est leur estomac commun.

L'absorption de ces liquides se fait par les extrémités des racines, qui jouent le rôle de vaisseaux lymphatiques.

L'extrémité d'une racine absorbe infiniment plus que tout le reste; une Carotte dont la pointe seule plonge dans l'eau augmente de poids beaucoup plus que si toute la carotte, l'extrémité seule exceptée, était immergée dans le liquide

Quelques plantes, telles que le Gui (*Viscum album*), la Cuscute, le *Monotropa*, les Orobanches, vivent en parasites sur d'autres plantes dont elles s'approprient la nourriture.

Les racines absorbent l'eau avec les sels et les gaz qu'elle tient en dissolution. Ainsi Théodore de Saussure trouva du carbonate de chaux dans les *Rhododendron* qui avaient vécu sur un terrain calcaire, et de la silice dans ceux qui avaient végété sur du granit.

Les plantes qui vivent au bord de la mer ou des lacs salés contiennent du sel marin ; celles qui poussent parmi les décombres, du nitrate de potasse.

Certains sels, tels que ceux de strontiane ne sont point absorbés.

Une solution trop épaisse de gomme ou d'engrais, l'eau de fumier par exemple, ne pénètre pas dans les racines, quoiqu'elle soit eminemment nourrissante.

Les liquides corrosifs, tels que les acides concentrés ou peu étendus, les dissolutions de sulfate de cuivre, détruisent l'extrémité de la racine, et y pénètrent avec une grande facilité.

Dans la racine, le liquide absorbé prend le nom de *sève*.

2° *Ascension de la sève.* De la racine la sève monte dans le tronc, et, sous le nom de *sève ascendante*, elle s'élève à travers tout le corps ligneux dans les arbres à bois mou : mais dans ceux tels que l'Ebène, le Chêne, où le bois devient très-dur, et dans ceux où le bois est détruit, tels que les Saules creux de nos prairies, elle ne monte que par l'aubier.

La sève passe par les vaisseaux séveux. — MM. Link et Meyen l'ont vue sortir de ceux de la Vigne et du Bouleau, et ont coloré ces vaisseaux en bleu en faisant pénétrer dans la plante une dissolution d'hydrocyanate de potasse, puis une autre de sulfate de fer.

M. Boucherie a heureusement appliqué cette expérience à l'industrie. Il a plongé des arbres avec leurs racines ou récemment coupés pendant qu'ils sont en sève dans des solutions diverses destinées, soit à rendre les bois durables et presque incombustibles, soit à les colorer pour en faire des ouvrages d'ébénisterie.

Hales, en fixant au bout d'un tronçon de Vigne un tube recourbé deux fois et rempli de mercure, vit que la sève pouvait soulever une colonne de mercure de 102 centimètres, c'est-à-dire d'une atmosphère et demie environ.

La chaleur, la sécheresse et l'agitation de l'air, le nombre et la grandeur des feuilles, concourent au même résultat; l'évaporation étant plus rapide, l'absorption devient plus active.

Qu'on introduise au milieu de l'hiver une branche de Vigne dans une serre chaude, la sève ne tardera pas à monter; et la branche se couvrira de feuilles et quelquefois de fleurs.

La sève monte avec une grande vitesse. Hales introduisit une racine d'un Poirier dans un tube rempli d'eau et plongeant dans un bain de mercure; le mercure s'éleva dans le tube de 21 centimètres en 6 minutes pour remplacer le liquide absorbé. Ayant introduit dans le tube une branche coupée, le mercure monta de 13 centimètres en une demi-heure.

La quantité de sève qui s'élève dans un arbre varie suivant les espèces. Un Bouleau, un Erable à sucre ou une Vigne en absorbent au printemps une quantité égale à leur poids. Elle est aussi très-abondante dans les Palmiers, les Peupliers, l'*Agave americana*, et en général dans les arbres à bois mou.

La sève ne suit pas une route déterminée. Là où elle trouve un obstacle ou une solution de continuité, elle se dévie pour les éviter. Hales fit sur le tronc d'un arbre des entailles à diverses hauteurs combinées de façon que si elles eussent toutes été dans un même plan horizontal, le tronc de l'arbre eût été entièrement coupé. Par conséquent tous les faisceaux ligneux qui le composent se trouvaient divisés par l'une ou l'autre des incisions; la sève n'en continua pas moins à monter dans ce tronc.

Mustel intercepta le chemin direct de la sève en faisant une profonde entaille au-dessous d'une branche; celle-ci s'accrut comme auparavant.

La sève arrive enfin dans les feuilles où elle est mise en contact avec l'atmosphère qui la modifie. (Voyez *Respiration végétale*.)

3° *Sève descendante.* Des feuilles la sève modifiée par l'action atmosphérique redescend le long des branches et du tronc. On la nomme alors *sève descendante*, ou *cambium*, lorsqu'elle est incolore; *latex* lorsqu'elle est colorée.

Le cambium descend entre l'arbre et le liber et détermine la formation d'une nouvelle couche d'aubier qui est en dehors des précédentes, et d'une nouvelle couche de liber qui est en dedans des plus anciennes.

Le latex est blanc dans les Euphorbiacées, les Papavéracées, les Apocynées; jaune dans la Chélidoine (*Chelidonium majus*), le *Glaucum luteum*, etc.; rouge dans les *Sanguinaria*, vert dans le Pourpier, etc. Il contient du caoutchouc dans le *Siphonia elastica*, de l'albumine, du sucre et de la cire dans l'arbre à lait (*Galactodendron utile*), dont la sève est nourrissante de même que celle du l'*Asclepias lactifera*, et de l'*Euphorbia balsamifera*.

Dans le pavot somnifère (*Papaver somniferum*), le latex est riche en opium, et en gomme-résine dans l'arbre qui fournit la gomme-gutte.

Les feuilles de la Chélidoine, les stipules du *Ficus elastica* permettent de voir, à l'aide du microscope, le fluide circuler dans les méats intercellulaires appelés par quelques-uns vaisseaux du latex.

Cette circulation est favorisée par la chaleur; arrêtée par des secousses électriques ou l'action des styptiques, tels que l'alun et l'acide sulfurique.

4° *Gyration.* Outre cette circulation générale des sucs, il existe encore une circulation intracellulaire locale qu'on a nommée gyration.

Elle a été découverte, en 1772, par l'abbé Corti sur la Charaigne flexible (*Chara flexilis*).

Les tiges de cette plante aquatique se composent d'une série de cylindres creux ajoutés bout à bout et complètement séparés les uns des autres par des cloisons.

Si on place sous le microscope un de ces cylindres, on voit un liquide charriant des granules verts qui se meut parallèlement à l'une des parois, arrive à la cloison, se réfléchit sur lui-même pour descendre en sens contraire le long de la paroi opposée.

Fontana revit ce phénomène en 1776; Treviranus en 1806.

En 1818, Gozzi essaya le premier de faire des ligatures au milieu des cylindres; et il vit deux courants au lieu d'un, la ligature faisant l'effet d'une cloison.

Amici, en 1820, découvrit qu'il y avait dans les parois des articles des bandes de chapelets composés de petits granules. Il remarqua en même temps que les courants étaient parallèles à ces chapelets. Aussi, dans les jeunes plantes ces bandes, ainsi que le courant, sont parallèles à l'axe de la plante. Plus tard les chapelets se contournent en hélice, et les courants suivent la même direction.

Si un granule se trouve entre les deux courants, dont l'un est ascendant, l'autre descendant, il tourne sur lui-même sans changer de place.

Suivant M. Dutrochet, la vitesse de cette gyration est à peu près d'un millimètre en 35 à 38 secondes.

Elle a encore lieu dans l'eau au-dessous de zéro, et dans celle à 45° au-dessus. C'est entre 12 et 15° qu'elle est aussi rapide que possible.

Elle se ralentit mais ne cesse pas dans l'obscurité. Une piqûre d'aiguille pénétrant dans la cavité du tube, l'action des acides concentrés, d'une forte commotion électrique l'arrêtent sans retour. Elle ne continue pas dans le vide. L'opium, les acides et les alcalis faibles la suspendent momentanément, mais elle reprend ensuite avec une énergie nouvelle.

M. Slack a découvert une circulation analogue dans les branches du *Chara*.

Meyen l'a observée dans les cellules du *Vallisneria spiralis*, de la Balsamine, de l'*Hydrocharis morsus-ranæ*, et de la Sagittaire (*Sagittaria sagittifolia*). M. R. Brown ; dans les poils staminaux du *Tradescantia virginica*, et M. Pouchet, dans les jeunes pousses de la *Zanichellia palustris*.

M. Dutrochet a vu qu'il se forme autour d'un petit morceau de camphre placé sur l'eau, des courants analogues à ceux qui ont lieu dans les tiges de *Chara;* et il assimile les chapelets de granules verts contenus dans leurs parois à des grains de camphre qui, semblables à de petites roues, pousseraient le liquide avec lequel elles sont en contact.

5° *Respiration végétale*. La sève ascendante subit en se transformant en *cambium* ou en *latex*, dans les nervures des feuilles, une modification analogue à celle du sang dans les poumons. C'est par l'influence de l'air qu'elle acquiert des propriétés nutritives. Aussi les végétaux meurent-ils dans le vide ou dans les gaz privés d'oxygène.

Pour analyser les phénomènes de la respiration végétale, il faut distinguer toutes les parties dont se compose une plante en parties vertes et parties colorées. On appelle parties *colorées* toutes celles qui *ne* sont *pas* vertes, même celles qui sont blanches : parties *non colorées*, toutes celles qui *sont* vertes.

Le tableau suivant présente en résumé l'ensemble des phénomènes.

Respiration végétale.

1° PARTIES COLORÉES.	Absorbent l'oxygène et exhalent l'acide carbonique *de jour et de nuit*.	
2° PARTIES VERTES.	A. *Pendant la nuit*, absorbent de l'oxygène et exhalent de l'acide carbonique.	
	B. *Pendant le jour*, décomposent l'acide carbonique, exhalent l'oxygène et gardent le carbone; cet acide carbonique provient de trois sources.............	*a*. De l'air. *b*. Des racines. *c*. De la combinaison de l'oxygène absorbé pendant la nuit avec le carbone de la plante.

Voici la preuve de ces faits. Des fleurs, des fruits mûrs, des feuilles colorées, des racines, des graines, des champignons, des parties colorées, en un mot, placées sous une cloche remplie d'air, absorbent peu à peu l'oxygène de cet air et exhalent de l'acide carbonique. La vie n'est point une condition nécessaire de cet effet qui se continue encore après la mort de ces parties.

Pendant la nuit, mais pendant la nuit seulement, les parties *vertes* se comportent de même avec l'air. L'oxygène est absorbé, mais la machine pneumatique ne saurait l'extraire du végétal, parce qu'il se combine aussitôt avec le carbone. Il en résulte de l'acide carbonique dont une partie est exhalée.

Suivant Th. de Saussure, les *Cactus*, les *Agave*, le *Stapelia*, n'exhalent point d'acide carbonique.

Pendant le *jour*, et sous l'influence directe des rayons du soleil, les parties vertes vivantes exhalent de l'oxygène.

Cet oxygène provient de l'acide carbonique qui entoure cette plante. Bonnet ayant placé des feuilles vertes dans de l'eau de source vit qu'elles laissaient échapper des bulles qu'il prit pour de l'air. Trente ans après Priestley montra que c'était de l'oxygène. Cet oxygène est dû à la décomposition de l'acide carbonique ambiant. En effet, 1° dans de l'eau distillée les feuilles n'exhalent pas d'oxygène. 2° Si on les renouvelle souvent dans la même eau, le dégagement cesse bientôt. 3° Si l'eau ne contient que des carbonates, il n'y a point de dégagement d'oxygène ; mais dès qu'on ajoute une goutte d'acide sulfurique, les carbonates étant décomposés et l'acide carbonique devenant libre, le dégagement commence.

Dans l'air même phénomène, M. de Saussure a fait germer 21 Pervenches : 7 furent analysées immédiatement, 7 placées sous une cloche A dans un gaz privé d'acide carbonique, 7 autres sous une cloche B dans un air contenant 7 $\frac{1}{2}$ pour cent d'acide carbonique. Au bout de six jours, pendant lesquels elles avaient été exposées au soleil, il analysa ces 14 Pervenches. Celles qui avaient végété sous la cloche A ne contenaient pas plus de carbone que celles qui avaient été analysées 6 jours auparavant. Dans celles qui avaient vécu sous la cloche B, la quantité de carbone avait considérablement augmenté. Les 7 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{0}$ d'acide carbonique avaient disparu, et au lieu de 21 pour cent d'oxygène on trouva 24 pour cent.

L'oxygène provient aussi de l'acide carbonique absorbé par ces racines. Senebier prit deux branches de framboisier aussi semblables que possible, et portant le même nombre de feuilles; le pied de l'une plongeait dans une bouteille vide, l'autre dans une bouteille pleine d'eau chargée d'ac. carbonique: les feuilles de la seconde exhalèrent deux fois plus d'oxygène que celles de la première.

L'acide carbonique formé par la combinaison de l'oxygène absorbé et combiné pendant la nuit avec le carbone de la plante est aussi décomposé pendant le jour par les parties vertes, car on ne la retrouve pas dans le végétal.

Le résultat unique de cette décomposition de l'acide carbonique est de fixer dans les végétaux le carbone qui est la base de tous leurs tissus.

M. Boussingault a fait voir que le Trèfle enlevait de l'azote à l'atmosphère, et que l'hydrogène que les plantes contiennent quelquefois provient de la décomposition de l'eau.

Les plantes absorbant l'acide carbonique et exhalant l'oxygène, tandis que les animaux absorbent l'oxygène et exhalent de l'acide carbonique, on a cru long-temps que la constance de la composition de l'air dépendait de l'antagonisme de ces deux genres de respiration. Mais les expériences de Link, Woodhouse et Grisch. ont prouvé que des plantes *entières* n'améliorent point l'air dans lequel elles vivent, et M. Dumas a fait voir récemment que ces phénomènes étaient incapables de modifier en rien la composition de l'immense atmosphère dans laquelle nous sommes plongés.

Tous les composés fondamentaux des plantes sont le résultat de la combinaison des trois corps élémentaires qui se trouvent dans la sève, savoir : l'oxygène, l'hydrogène et le carbone.

Si l'oxygène et l'hydrogène restent dans les proportions convenables pour faire de l'eau, ils produisent, en se combinant avec le carbone, le ligneux ou le bois, la gomme, la fécule et le sucre.

L'oxygène est-il en excès, il constitue la base des acides végétaux ; tels que les acides citrique, tartrique, malique, etc.

L'hydrogène domine-t-il, nous avons les huiles telles que celles d'olive, de noix, d'œillette, etc., ou les térébenthines et les résines, que l'on extrait d'un grand nombre de Conifères.

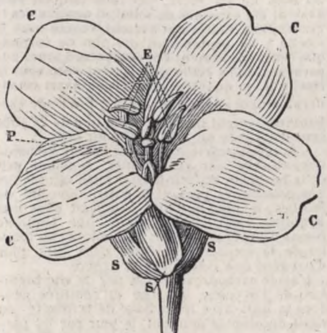
La composition de la sève rend donc compte, de la manière la plus satisfaisante, de la présence de ces principes dans les végétaux.

II. Organes de la reproduction. — Les organes destinés à reproduire le végétal, entourés des enveloppes qui les protègent constituent la fleur.

La fleur est *mâle*, *femelle* ou *hermaphrodite*, suivant qu'elle contient des *étamines* seulement, ou un *pistil* seulement, ou bien ces deux organes réunis.

La plupart des fleurs sont hermaphrodites. Ex : la Rose, la Tulipe, l'OEillet, la Cardamine. (Voy. fig. 1.)

1



Cardamine pratensis.

Quand les fleurs mâles et femelles sont réunies sur le même individu, comme dans le Maïs, le Chanvre, etc., la plante est dite *monoïque*.

Quelquefois les fleurs mâles et femelles se trouvent sur deux individus séparés. Tels sont les Saules, les Palmiers, le *Lychnis dioica*. Ces plantes sont *dioïques*.

Certaines fleurs sont *sessiles*, c'est-à-dire immédiatement insérées sur la tige. Ex. : la Chicorée (*Cichorium Intybus*), ou portées sur une queue qui prend le nom de *pédoncule*. Si ce pédoncule se ramifie, les ramifications se nomment des *pédicelles*.

On remarque souvent à la base du pédoncule (Tilleul), des pédicelles, ou de la fleur elle-même, de petites feuilles semblables qui sont à la fleur ce que les stipules sont à la feuille. Ces petits pédoncules se nomment *bractées* ; ils sont colorés dans l'*Hortensia*, le *Salvia splendens*, le *Cornus florida*, le *Bouguinvillea spectabilis*, etc.

Quand plusieurs bractées sont disposées en rond, au-dessus d'un pédoncule portant plusieurs fleurs ou au-dessous de ces fleurs elles-mêmes, elles forment un *involucre*. Ex. : la Carotte, la Dent de Lion, le Tournesol (*Helianthus annuus*). Quelquefois ces bractées se soudent entre elles et forment une petite coupe comme celle qui entoure la base du gland de chêne.

Inflorescence. L'inflorescence est le mode de disposition des fleurs sur la tige.

Les fleurs *axillaires* sont celles qui naissent dans l'aisselle d'une feuille. Ex.: la Nummulaire (*Lysimachia nummularia*), le Thym (*Thymus vulgaris*).

Les fleurs en *épi* sont rapprochées et sessiles sur la tige ou sur un pédoncule commun qui forme l'axe de l'épi. Ex. : le Plantain, le Seigle, le Froment.

Le *chaton* est un épi court, caduc et composé de fleurs unisexuées. Ex. : le Noisetier, les Saules, les Peupliers.

Les fleurs, au lieu d'être sessiles sur leur pédoncule commun, sont quelquefois portées sur des pedicelles, comme dans le Muguet (*Convallaria majalis*), la Giroflée (*Cheiranthus Cheiri*). Alors on dit qu'elles sont disposées en grappe.

Les pédoncules sont-ils ramifiés, il en résulte une *panicule* ou un *thyrse*, comme l'Avoine, le Lilas, le Marronnier d'Inde.

Le *corymbe* est une inflorescence où les pédoncules communs vont aboutir sensiblement à un même plan. Ex : le Sureau.

Dans l'*ombelle simple* les pédoncules partent du même point comme les rayons d'une sphère, et portent chacune une fleur à leur extrémité. Ex. : l'Ail, l'*Asclepias syriaca*, les *Astrantia*, etc.

Dans l'*ombelle composée*, les pédoncules se ramifient en pédicelles. Ex. : le Cerfeuil, la Carotte et la plupart des ombellifères.

Les fleurs sont-elles serrées ou réunies ensemble de manière à simuler une fleur unique, alors on dit qu'elles sont en *capitule*. Ex.: le Tournesol, l'Artichaud, la Reine Marguerite, la Paquerette, en un mot toutes les fleurs de la famille des composées sans exception.

Structure de la fleur. Une fleur complète (fig. 1) se compose, 1° d'une première enveloppe, ordinairement verte, appelée *calice*, 2° d'une seconde enveloppe, presque toujours colorée, appelée *corolle*, 3° d'un rang d'organes filiformes et terminés par de petites bourses ou *étamines*, 4° d'un ou plusieurs organes, contenant une ou plusieurs graines, appelé *pistil* quand il est jeune; *fruit* quand il est arrivé à son plus haut degré de développement.

Le calice est l'enveloppe la plus extérieure des organes reproducteurs. Il se compose de plusieurs folioles séparées, appelées sépales. (Fig. 1. S, S, S.) (*Calice polysépale*). Ex. : Cardamine, Giroflée, Renoncule, etc.; ou de plusieurs sépales soudés et réunis entre eux (*calice gamosépale*). Ex. : OEillet, Datura.

Les calices polysépales tombent après la floraison. Les calices gamosépales persistent en partie ou en totalité.

Le calice gamosépale est souvent soudé avec le pistil. Ex. : les fleurs des Rosiers, des Pommiers, des ombellifères.

Quand il n'y a qu'une seule enveloppe, cette enveloppe est un calice lors même qu'elle serait colorée. Ex. : les Tulipes, les Iris, les Lis, etc. ; car elle est quelquefois soudée avec l'ovaire, comme dans les Iris et les Narcisses : la corolle au contraire ne l'est jamais.

La corolle est la seconde enveloppe de la fleur. Presque toujours colorée de la manière la plus variée, elle se compose de plusieurs parties séparées ou pétales (*Corolle polypétale*) placés dans les intervalles des sépales, c'est-à-dire alternes avec eux. Ex. : Rose, Pavot, Giroflée, OEillet, etc. (Fig. 1, CCCC.)

Quand ces parties sont soudées entre elles, la corolle est *gamopétale*. Ex. Datura, Lilas, Bruyère, etc.

Les formes regulières de la corolle gamopetale sont les suivantes : 1° en clochette ou *campanulée*. Ex. : Campanules, Belladone ; 2° en cloche ou *campaniforme*. Ex. : Datura ; 3° en entonnoir ou *infundibuliforme* Ex. : Tabac (*Nicotiana tabacum*) les fleurons des composées Tournesol. 4° *Urcéolée*. Ex. : Bruyères.

Les formes irrégulières se réduisent à deux principales. 1° La corolle *bilabiée*. Ex. Sauge (*Salvia*), *Lamium*, etc. 2° La corolle *personnée*. Ex.: Muflier (*Antirrhinum*).

La corolle polypétale peut se composer de trois, quatre, cinq, et un plus grand nombre de pétales de forme et de grandeur variées. Les formes régulières sont 1° la corolle *cruciforme* formée de quatre pétales disposés en croix (voy. fig. 1). 2° Corolle *rosacée* : cinq pétales disposés circulairement. Ex. : Rose, 3° Corolle *caryophyllée* : cinq pétales munis inférieurement d'un long prolongement appelé *onglet* dont le rapprochement simule un tube. Ex.: OEillet.

Les étamines sont placées en dedans des pétales et en face des sépales. Leur nombre varie beaucoup relativement à celui des pétales.

Une étamine (fig. 1, E) se compose de deux parties : le support ou *filet*, qui est de nature pétaloïde. Le plus souvent libres les filets se soudent cependant quelquefois. S'ils forment un faisceau unique, on dit que les étamines sont *monadelphes* ; s'ils en forment deux, *diadelphes* ; trois ou plus *polyadelphes*.

Une fleur double est une fleur où les filets se sont métamorphosés en pétales. Ex.: Roses, Pavots, Renoncules, Jacinthes doubles.

L'*anthère* est une bourse composée d'une (Mauve), de deux (Lis), ou de quatre loges (*Butomus umbellatus*), et contenant une poussière appelée *Pollen* qui joue un grand rôle dans la fécondation. Ces loges sont quelquefois séparées et réunies par un corps appelé *connectif*. Ex.: Sauge, Melastomes.

Les étamines s'ouvrent le plus souvent par des fentes longitudinales (Lis, Tulipe), quelquefois par un trou placé au sommet de chaque loge. Ex.: Pomme de terre (*Solanum tuberosum*), Bruyères (*Erica*) ; rarement enfin par des valves ou panneaux qui se lèvent. Ex.: Epine-Vinette (*Berberis*), *Epimedium alpinum*. Laurier (*Laurus*).

Dans les Composées les anthères sont *syngénèses*, c'est-à-dire soudées entre elles. Dans les Aristoloches, les Orchidées, elles sont *gynandres*, c'est-à-dire unies au pistil.

Le pistil est un organe unique ou multiple placé au centre de la fleur, et qui renferme les jeunes graines ou ovules.

Un pistil unique est simple s'il n'a qu'une seule loge. Ex. : *Asclepias vincetoxicum*. S'il en renferme plusieurs, il est formé de la réunion de plusieurs pistils secondaires appelés *carpelles* et soudés entre eux. (Lis, Jacinthe).

Les carpelles peuvent être libres. (Renoncules, Hellébore, Framboise).

Le pistil se compose de trois parties superposées.

1° L'ovaire (fig. 2, OP) qui contient les ovules G, G, G, G, G. Il est placé au fond de la fleur, quelquefois sessile, d'autres fois élevé sur une base. Le nombre des loges varie beaucoup.

Le *style* P S est une colonne qui surmonte ordinairement l'ovaire. Il est ordinairement terminal (Lis), cardamine ou latéral (Rosacée), simple (Lis) ou multiple (*Lychnis*).

Le *stigmate* est la partie N qui termine le style; elle est souvent renflée (Lis, Tulipe), ou divisée (Sauge), ou pétaloïde (Iris), discoïde (Pavot), plumeuse (Graminées).

Entre ces organes on observe souvent des organes glanduleux ou filiformes, en forme de crosse ou de massue, que Linné appelle *nectaires* : ce sont des étamines ou des pétales avortés.

Fécondation végétale. — Pour qu'un pistil devienne fruit et renferme des graines fertiles, c'est-à-dire capables de reproduire la plante qui les a portées, il faut que le pollen des anthères ait touché le stigmate du pistil.

Cette vérité a été annoncée pour la première fois d'une manière positive par Sébastien Vaillant en 1717. Elle avait été pressentie par Césalpin en 1583, Zalusianski en 1604, Grew en 1682, et Camerarius en 1694.

Preuves de la fécondation végétale. — Les Palmiers-Dattiers sont des arbres dioïques. Il y a des individus femelles qui ne portent que des pistils; d'autres, mâles, seulement des étamines. On ne cultive en Afrique et en Asie que les individus femelles ; mais les anciens Babyloniens savaient déjà qu'il fallait secouer au-dessus des Dattiers femelles les branches de Dattiers mâles en fleurs; cette opération se nomme la *caprification* des Palmiers. Si on la néglige, la récolte des fruits manque complétement ; c'est ce qui arriva, en 1800, parce que l'invasion de l'Egypte par l'armée française empêcha les habitants d'aller chercher dans les forêts les branches de Palmiers mâles, et d'accomplir la caprification.

Un Palmier nain femelle fleurissait dans la serre de Gleditsch, à Berlin ; mais il ne donnait pas de fruit. Ayant appris qu'un pied mâle se trouvait à Carsruhe, Gléditsch écrivit qu'on lui envoyât du pollen par la poste. Il saupoudra le Palmier femelle avec cette poussière fécondante, et ses fruits se développèrent.

Le Pistachier est aussi un arbre dioïque. Deux pieds femelles vivaient depuis longtemps au Jardin-des-Plantes de Paris, fleurissaient chaque année, mais ne portaient pas de fruits. Une année, à son grand étonnement, Bernard de Jussieu les vit nouer et mûrir leurs fruits. Il conjectura qu'un Pistachier mâle devait se trouver quelque part dans le voisinage. En effet, il en découvrit un qui avait fleuri, pour la première fois, à la pépinière des Chartreux, près du Luxembourg.

Ce sont les vents, et surtout les insectes, dont chaque espèce recherche toujours les mêmes plantes, qui se chargent de transporter ainsi le pollen à de grandes distances.

Les prétendues pluies de soufre ne sont que des nuages du pollen si abondant des Pins qui a été transporté par les vents.

Dans le Maïs les étamines forment une panicule au sommet de la plante ; les épis sont en bas. Si l'on retranche de bonne heure la panicule terminale, les grains de l'épi ne se développent pas.

Si sur un pied de Chanvre femelle on enlève avec soin toutes les petites fleurs à étamines qui peuvent s'y trouver, la plante ne portera pas de fruits.

Coupez sur une fleur hermaphrodite, un Lis par exemple, les étamines, avant que les anthères ne se soient ouvertes, le fruit ne grossira pas et les graines seront stériles.

Les fleurs doubles où *toutes* les étamines se sont métamorphosées en pétales sont toujours stériles.

Mis en contact avec l'eau, les grains de pollen crèvent et perdent leurs propriétés. Si donc il pleut abondamment pendant la floraison de la Vigne, du Blé ou des arbres à fruit, on dit qu'ils *coulent*, ce qui veut dire que les grains de pollen, crevant à mesure qu'ils s'échappent de l'anthère, ne fécondent point le pistil, et alors le fruit ne se développe pas.

Ces grains de raisin très-petits, qu'on observe quelquefois dans une grappe, sont des pistils qui n'ont point été fécondés.

Circonstances qui préparent ou facilitent la fécondation. — 1° *La position relative des étamines et du pistil.* Dans beaucoup de fleurs dressées, le stigmate est placé au-dessous des étamines et le pollen y tombe par son propre poids. Ex. : Lis, Oranger. Dans les fleurs pendantes, au contraire, le style est souvent plus long que les étamines. Ex. : Sauges, *Fuchsia*, *Amaryllis*, etc.

2° Les insectes qui se roulent dans les fleurs font sortir le pollen des anthères et favorisent la fécondation.

3° Dans les plantes monoïques, Maïs, *Carex*, Ricin, les panicules ou épis formés d'étamines sont placés au-dessus des organes femelles.

4° Les étamines se projettent souvent vers l'intérieur de la fleur pour féconder le pistil. M. de Humboldt a vu le premier que les cinq étamines de la *Parnassia palustris* s'approchent du stigmate à mesure que leurs anthères éclatent, et cela dans l'ordre suivant, de droite à gauche : 1, 5, 2, 4, et enfin 3.

Les étamines de la Rue puante (*Ruta graveolens*) offrent le même phénomène. Si l'on pique la base du style de l'Épine-vinette (*Berberis vulgaris*) et de plusieurs autres espèces du même genre, les étamines se projettent sur le stigmate. L'huile de Térébenthine, l'insolation au moyen d'un verre lenticulaire produisent le même effet.

On observe les mêmes effets dans la Pariétaire, l'Épinard, l'Aroche et l'Ortie.

Dans la plupart des espèces de *Kalmia*, et en particulier le *Kalmia latifolia*, les anthères sont logées dans de petites fossettes de la corolle ; à mesure que la fleur s'épanouit le filet se recourbe en dehors, mais il arrive un moment où l'anthère se dégage de la cavité où elle est logée et, en vertu de l'élasticité du filet, elle est projetée contre le stigmate.

5° Quelquefois ce sont les mouvements du stigmate qui favorisent la fécondation. Les deux lames qui composent celui des *Mimulus* se rapprochent dès que le pollen y est tombé. Les soies qui entourent le stigmate en entonnoir des *Lechenaultia* se replient en dedans ; des mouvements analogues s'observent sur le *Nigella sativa*.

6° Plusieurs fleurs développent de la chaleur au moment de la fécondation ; telles sont en particulier celles des *Arum*, *Caladium*, espèces exotiques de Gouet, et *Colocasia*. Un thermomètre placé dans l'intérieur de la spathe qui entoure les organes reproducteurs s'y élève à plusieurs degrés au-dessus du milieu ambiant.

7° La forme de plusieurs corolles est éminemment propre à protéger le pollen contre l'action destructive de la pluie. La lèvre supérieure de la corolle de presque toutes les Labiées (*Sauge*, *Lamium*), l'étendart de celles des Légumineuses (Pois, Cytise, Fève) protègent les étamines comme un toit. Dans les Campanules et les Composées, la fécondation se fait avant l'épanouissement de la corolle.

Les fleurs appelées météoriques s'ouvrent les unes le matin pour se faner le soir ; telles sont le Lin, les *Cistus* des Liserons ; quelques-unes s'ouvrent le soir : ex. : la Belle-de-Nuit (*Nyctago hortensis*), le *Cactus grandiflorus*, et le *Mesembryanthemum noctiflorum*. D'autres se ferment le soir ; tels sont la Paquerette (*Bellis perennis*).

Ces phénomènes sont dus aux influences de la lumière, car, en éclairant ces plantes la nuit et en les laissant pendant le jour dans un endroit obscur, on peut changer complétement leurs habitudes.

8° Dans les plantes aquatiques, la nature s'est plu à résoudre de mille manières le problème difficile de soustraire le pollen à l'influence délétère de l'humidité au moment où il s'échappe de l'anthère.

Dans le *Nymphæa*, la Renoncule aquatique, la fleur s'élève au-dessus de l'eau avant de s'épanouir ; mais si celle-ci est surprise par les crues subites des mares et des petits lacs dans lesquels elle végète, si son pédoncule ne peut pas s'allonger assez pour atteindre la surface de l'eau, le bouton se gonfle sans s'ouvrir, se remplit d'air, et l'acte mystérieux s'accomplit au fond des eaux.

Lorsque la fécondation est près de s'accomplir, les pétioles des feuilles de la Châtaigne d'eau (*Trapa natans*) deviennent vésiculeux, se remplissent d'air, et ces vessies natatoires végétales élèvent la fleur hors de l'eau.

Tout le monde connaît les noces poétiques du *Vallisneria spiralis*, qui habite les canaux des environs d'Arles. Portée sur une longue tige roulée en hélice, la fleur femelle monte en la déroulant à la surface des eaux ; mais les fleurs mâles sont captives au fond de l'eau, retenues par une spathe : tout à coup la spathe s'ouvre, les fleurs mâles s'échappent, et viennent nager autour de la fleur femelle, qui redescent mûrir au fond des eaux son fruit et ses graines fécondes.

Fécondation proprement dite. — Le pollen contenu dans l'anthère se compose de grains de forme très-variée. Ordinairement sphériques, ils sont dans quelques plantes ovoïdes, allongés et même triangulaires.

Ils se composent de deux membranes, l'une extérieure, souvent réticulée ou hérissée de pointes et de saillies souvent visqueuses ; l'autre interne, très-fine.

Dans les Orchidées et les Asclépiadées, le pollen se montre sous forme de masses cohérentes, composées de grains agglutinés.

Dans chacun de ces grains se trouve un liquide appelé *fovilla*, où nagent des petits corps animés d'un mouvement très-rapide, qu'on a comparé à celui des animalcules microscopiques.

Quand un grain de pollen se trouve en contact avec un stigmate (fig. 2, N) sa membrane extérieure se déchire ; l'intérieur reste intact, passe à travers l'ouverture, fait hernie, et pénètre dans le stigmate et le style.

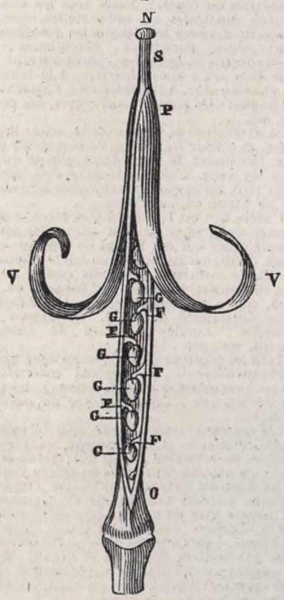
Suivant M. Schleiden, c'est l'extrémité de ce boyau pollinique qui se sépare du reste ou la fovilla seule qui constitue l'embryon reproducteur.

Du fruit. — Après la fécondation, le pistil grossit, les graines qu'il contient s'accroissent, le plus souvent le style et le stigmate tombent, et le pistil prend le nom de *fruit*.

On distingue dans le fruit, de dehors en dedans, 1° l'*epicarpe*, c'est la membrane la plus extérieure. Ex.: la pelure de la Pêche, de la Cerise. Elle est souvent formée par le calice, quand celui-ci est adhérent au pistil. Ex.: la Pomme, la Nèfle. 2° Le *mésocarpe*. Il n'est pas développé dans les fruits secs, tels que ceux du Pavot, du Baguenaudier (*Colutea arborescens*). Très développé, il constitue la partie mangeable de la Pêche, de la Poire, de la Pomme, de la Groseille. 3° L'*endocarpe* qui enveloppe immédiatement les graines. Membraneux dans la Pomme, dur et osseux dans les fruits à noyaux, charnu dans l'Orange, papyracé dans le Baguenaudier. Les fruits sont uniloculaires ou multiloculaires, contenant une graine (monospermes) ou plusieurs (polyspermes) (fig. 2). La partie du fruit à laquelle les graines sont attachées se nomme le placenta. Quelques-uns sont indéhiscents, c'est-à-dire ne s'ouvrent pas. Ce sont les fruits charnus en général dont le mésocarpe sert de terroir et de fumier à la jeune graine.

Les fruits secs s'ouvrent, soit par des trous (Pavot, *Anthirrinum*), des fentes (*Silene*), des *valves* ou panneaux (fig. 2, VV) en nombre égal à celui des loges (*Datura*, *Crucifères*.)

2



Silique de Cardamine

Voici comment M. Lindley a classé et distingué les principaux fruits que présente le règne végétal.

I. Fruits simples ou formés d'un seul carpel et à une seule loge :

1° *Monospermes et indéhiscents*.

Akène. Graine distincte du péricarpe Ex.: Soleil, et Composées en général, *Diakène* Ex: Fenouil.

Drupe. Charnu extérieurement et endocarpe osseux. Cerise, Prune, Pêche, etc.

2° *Polyspermes et déhiscents*.

Follicule. Valve s'ouvrant par une fente. Dompte-venin (*Asclepias vincetoxicum*), Apocynées en général.

Gousse. Deux valves. Haricot, Baguenaudier et Légumineuses en général.

II. Fruits agrégés formés de plusieurs carpels réunis, mais non intimement soudés entre eux.

1° Carpels au-dessus du calice.

Etérion. Framboise, Fraise, Renonculacées.

2° Carpels soudés au calice.

Cynorrhodon, Rose.

III. Fruits multiples.

1° Péricarpe sec.

Cariopse. Péricarpe soudé à la graine. Blé, Orge, Maïs.

Samare. 1-2 loges, ailes membraneuses Orme, Erable, Frêne.

Pyxide. Capsule multiloculaire polysperme fermée par un couvercle. Mouron, Jusquiame.

Silique (fig. 2) *et silicule*. 2 valves, 2 loges séparées par une cloison. Ex.: Giroflée, Lunaire et toutes les Crucifères.

Capsule. Fruit déhiscent, polysperme, à une ou plusieurs loges. Cobæa, Datura, Digitale.

2° *Péricarpe charnu*.

Hespéride. Endocarpe charnu, carpels séparables. Orange.

Péponide. Calice adhérent, placenta pariental. Melon, Potiron, Concombre.

Mélonide. Calice adhérent, graines dans des loges distinctes au centre du fruit. Pomme, Poire, Sorbier.

Baie. Calice adhérent ou non, loges indistinctes, polyspermes. Raisin, Groseilles.

IV. Fruits composés ou formés de la réunion de plusieurs fruits appartenant chacun à une fleur distincte.

Cône. Bractées endurcies, ovules nus. Pin, Sapin, Cèdre.

Sycône. Réceptacle charnu, fruits intérieurs. Figue *Dorstenia*.

Sorose. Baies soudées ensemble. Fruit du Mûrier.

De la graine. — C'est un corps particulier contenu dans le fruit et renfermant l'embryon qui doit reproduire la plante.

La graine se tient au placenta par un filament plus ou moins long connu sous le nom de *funicule*, fig. 2, F, F, F. Celui-ci se prolonge quelquefois et forme une enveloppe à la graine connue sous le nom d'*arille*. Ex.: le Fusain (*Evonymus europœus*).

Le macis est l'arille de la noix muscade; le point où s'insère le podosperme sur la graine se nomme le *hile*. Il est large, circulaire sur la graine du Marronnier, elliptique, petit sur celle du Haricot.

Souvent le funicule est soudé à la graine, il prend alors le nom de *raphé*, et le point opposé au hile où il se pénètre les enveloppes de la graine, celui de *chalaze*.

Toute graine est munie de deux enveloppes plus ou moins distinctes; l'extérieure appelée *test*, est ordinairement dure et sèche. Ex.: Haricot, Noix de coco. L'intérieure ou endoplèvre est fine, presque transparente; on le voit bien dans la graine de Ricin et d'Orange.

La graine dépouillée de ses enveloppes se nomme l'*amande*. L'amande tout entière est quelquefois formée par l'embryon seul comme dans le Haricot.

Dans d'autres plantes, l'amande se compose de l'ambryon et d'une substance appelée *albumen*. Cet albumen est farineux dans le Blé, corné dans la graine de Café, huileux dans le Ricin, sucrée dans le noix de Coco.

L'embryon se compose de quatre parties: une *radicule* ou petite racine, d'une *tigelle* ou petite tige qui porte une ou plusieurs feuilles primordiales appelées *cotylédons*. Ces cotylédons sont épars, charnus dans les graines dépourvues d'albumen (Ex.: Haricot, Fève, Marronnier d'Inde), minces, foliacés dans celles qui en ont un. Ex.: Ricin, Erable. Enfin la *plumule* qui s'élève entre les cotylédons et est terminée à son sommet par un bourgeon.

Germination. — Pour qu'une graine germe, il faut qu'elle ait été fécondée et qu'elle soit mûre.

Quelques-unes ne germent que peu de temps après avoir été récoltées et sont en général des graines à albumen huileux. D'autres, telles que les Haricots, le Maïs, le Café, germent plusieurs années après avoir été récoltées.

On a vu des graines germer après soixante ans, et d'autres, trouvées dans des tombeaux, après plusieurs siècles.

Plusieurs agents sont indispensables à la germination.

1° L'eau qui ramollit le test favorise la sortie de l'embryon et dissout les matières nutritives.

2° Une température modérée, mais variant entre un ou deux degrés au-dessous de zéro et 40 ou 50 au-dessus.

3° L'air. Une graine ne germe pas dans le vide, ni si on l'enfonce trop profondément dans le sol.

Lorsqu'on coupe des forêts, on voit paraître d'autres arbres à la place de ceux qu'on a abattus: des bois blancs succèdent à des chênes, des bouleaux à des sapins; ce sont des graines de ces essences que l'action de l'air, de l'eau a fait germer.

Des terrains défriches nouvellement dans des îles ou sur le continent américain se couvrent de végétaux qui n'existent même plus dans le pays. Les labours ont rapproché leurs graines enfouies de la surface du sol où elles se sont bientôt développées.

En germant, la graine absorbe l'oxygène de l'air et dégage l'acide carbonique.

Quelques graines germent au bout de deux jours. Ex.: Cresson alenois. (*Lepidium sativum*). D'autres, seulement après deux ans de séjour dans la terre, comme la graine du Rosier.

La germination s'annonce par le ramollissement et la rupture du test; la radicule paraît d'abord. Quelle que soit la position de la graine, cette radicule se dirige toujours vers le centre de la terre, tandis que la plumule prend une direction inverse.

Ces deux directions opposées paraissent être un effet des lois de la gravitation universelle, combinées avec le mode de croissance des racines et des tiges. En effet, Knight ayant mis des graines dans les auges d'une roue de moulin qui faisait 150 révolutions par minute, trouva que toutes les radicules étaient dirigées vers la circonférence de la roue. Or, la pesanteur étant une force analogue à la force centrifuge à laquelle ces graines étaient soumises alors, on conçoit qu'elle produise des effets analogues sur celles qui sont dans le sol.

Les végétaux herbacés et les branches des arbres se dirigent toujours vers la lumière. Mettez des plantes dans une cave qui ait des soupiraux, dont les uns munis de vitres admettent de la lumière sans air, les autres de l'air sans lumière, vous verrez les plantes se diriger vers les premiers. De même les branches des arbres situés sur le bord d'une forêt s'avancent toujours vers l'extérieur des bois. De là la nécessité de couper en dehors les arbres des allées si l'on veut obtenir des allées couvertes.

§ 3. *Classification des Végétaux.*

Linné connaissait 8000 plantes. Le nombre des végétaux décrits s'élève maintenant à 75000 espèces. Il faut donc les classer afin de ne pas se perdre au milieu de ce nombre immense d'êtres variés quoique toujours semblables.

Ces classifications sont fondées sur des principes tout à fait différents, suivant le but qu'on se propose.

Les unes, dites *empiriques*, n'ont point une connexion intime avec l'organisation de la plante; telles sont les classifications par ordre alphabétique, historique, etc.

Les autres, dites *usuelles*, se lient à une des propriétés du végétal; telles sont les classifications médicales ou industrielles. Ainsi le médecin divisera les plantes en émollientes, astringentes, purgatives, narcotiques, etc. L'économiste rangera les arbres suivant que leur bois sert à la construction, à la teinture, au charronnage, à l'ébénisterie; l'agriculteur distinguera les plantes fourragères, des céréales, etc.

Le naturaliste se propose deux buts: le premier, de classer les plantes de manière à trouver facilement le nom d'une plante qu'il a sous les yeux. C'est le but qu'on s'est proposé dans tous les systèmes *artificiels* et dans celui de Linné en particulier.

L'autre but est beaucoup plus élevé, c'est de classer les plantes suivant leurs affinités, de réunir celles qui ont le plus de rapport entre elles, d'éloigner celles qui en ont le moins. La *méthode naturelle* tend sans cesse à atteindre ce résultat. Indiquée par Bernard de Jussieu, elle a été fondée par A. L. de Jussieu, puis développée par MM. R. Brown, de Candolle, Lindley, Adrien de Jussieu, Kunth, etc., etc.

Tous les végétaux se divisent en deux grands embranchements, les végétaux *vasculaire* ou *phanerogames* ou *cotylédonés*, les plantes *cellulaires*, *cryptogames* ou *acotylédones*.

Les végétaux *vasculaires* sont formés de tissu cellulaire et de vaisseaux, leurs feuilles munies de stomates. Ils ont une racine et une tige; ils ont des fleurs plus ou moins visibles, et au moment de leur germination, l'embryon presque toujours protégé par des téguments, se montre avec un ou plusieurs cotylédons.

Les végétaux *cellulaires* n'ont point de vaisseaux. Leurs organes de la reproduction ne sont pas doubles (étamines et pistils), ils se propagent par des graines non fécondées, appelées sporules. Enfin à leur germination on ne remarque pas de cotylédons.

La nature ne passe pas sans transition du premier de ces embranchements au second: ainsi les Fougères sont des végétaux vasculaires, acotylédones et cryptogames.

Les végétaux vasculaires se divisent en

deux classes : les *dicotylédones* ou *exogènes*, plantes qui germent avec deux ou plusieurs cotylédons, et dont la tige se lignifie de dedans en dehors ; et en *monocotylédones* ou *endogènes*, plantes à embryon pourvu d'un seul cotylédon, dont la tige se lignifie de dedans en dehors. Voici les caractères différentiels de ces deux classes.

DICOTYLEDONES.	MONOCOTYLEDONES.
Radicule de l'embryon rameuse.	*Radicule* de l'embryon fibreuse.
Cotylédons, 2 ou plusieurs opposés.	*Cotylédons*, 1 ou alternes s'il y en a deux.
Tige formée d'une moelle, de bois, d'aubier, de rayons médullaires et d'écorce.	*Tige* sans moelle, ni rayons médullaires, ni écorce.
Feuilles à nervures non parallèles et anastomosées entre elles.	*Feuilles* à nervures parallèles(excepté dans les Aroïdées).
Parties de la fleur au nombre de cinq ou multiples de cinq en général.	*Parties de la fleur*, en général au nombre de 3 ou multiples de 3
Dans nos climats, herbes, arbrisseaux et arbres.	Herbes dans nos climats.

Les dicotylédones (50000 espèces) se subdivisent en quatre classes suivant M. de Candolle; ces divisions sont beaucoup moins naturelles, et par conséquent moins certaines que les précédentes en ce que leurs caractères différentiels sont empruntés seulement à la fleur et non pas à l'ensemble des organes, comme dans les divisions fondamentales. Voici ces divisions :

1° *Thalamiflores* (8000 espèces). Calice polysépale. Corolle polypétale, étamines et pistils, insérés sur le fond de la fleur. Ex. : Renoncule, Géranium, OEillet, Mauve, etc., etc.

2° *Caliciflores* (25000 espèces). Calice gamosépale, pétales et étamines, insérées sur le calice (épigynes ou périgynes). Pétales libres ou soudés. Ovaire libre ou soudé avec le calice. Ex. : Rose, Persil, Groseillers, Campanules, Bruyères, etc.

3° *Corolliflores* (10000 espèces). Calice gamosépale. Corolle gamopétale, insérée au fond de la fleur. Etamines insérées sur la corolle. Ex. : Datura, Lilas, Liseron, Primevère, etc.

4° *Monochlamidées* (16000 espèces). Une seule enveloppe verte ou colorée. Ex. : Belle-de-nuit, Plantain, Bois gentil, Aristoloches, Ortie.

Les Monocotylédones (12000 espèces) ont été divisés par M. Lindley de la manière suivante :

1°. Enveloppes de la fleur, *pétaloïdes*. Elles se présentent sous deux formes, tantôt le calice est vert, à trois sépales, la corolle pétaloïde à trois pétales. Ex. : le Plantain d'eau, le Jonc fleuri (*Butomus umbellatus*), l'Ananas, etc.

Ou bien, le calice est pétaloïde, coloré, semblable à la corolle. Ex. : Orchis, Iris, Lis, Amaryllis, etc.

2° Fleurs en spadice, souvent environnées d'une spathe.

3° Enveloppes de la fleur *bractéiformes*. Ex.: Blé, Seigle, Laiche (Carex).

Les Acotylédones (13000 especes) se divisent en deux sections, ceux qui sont pourvus de feuilles, tels que les Fougères, les Lycopodes, les Mousses, etc.

Ceux qui sont dépourvus de feuilles. Ex., Lichens, Champignons, Algues, etc.

Chacune de ces classes se divise en familles qui sont la réunion des genres de plantes les plus analogues entre eux. La plupart de ces familles sont naturelles en ce que les genres qui les composent ont entre eux des caractères analogiques tirés des organes de la nutrition et de ceux de la végétation. Les noms des familles se terminent presque toujours par la désinence *acées*. Ex. : Renonculacées, Malvacées, Rosacées, désignant les familles auxquelles appartiennent la Renoncule, la Mauve, la Rose, etc.

Les familles enfin se divisent en genres qui sont à leur tour formées de l'ensemble des espèces qui ont le plus de rapports entre elles. Tels sont les genres Renoncule, Mauve, Rose, OEillet.

L'espèce est la réunion de tous les individus qu'on peut supposer être issus originairement d'une seule plante. Linnée a introduit dans la botanique l'usage de désigner toujours l'espèce par deux mots : le nom du genre et une épithète dite spécifique. Ainsi la Renoncule âcre (*Ranunculus acris*), Mauve à feuilles rondes (*Malva rotundifolia*), Rose à cent feuilles (*Rosa centifolia*), OEillet superbe (*Dianthus superbus*), désignent autant d'espèces des genres précédemment indiqués.

§ 4. *Botanique appliquée.*

Nous donnons ci-dessous la liste de toutes les familles végétales qui fournissent des produits à l'économie domestique ou agricole, à l'industrie ou à la médecine, ainsi que l'indication des espèces utiles et de leur emploi. Ainsi, l'agriculteur, le fabricant, le médecin sauront à quel végétal et à quelle famille rapporter le produit dont ils font journellement usage.

Par espèces indigènes, nous entendons non-seulement les plantes originaires de France, mais toutes celles qui s'y sont naturalisées complétement, de manière à donner des produits utiles ou employés.

VÉGÉTAUX VASCULAIRES OU COTYLEDONES.

I. DICOTYLÉDONES.

1° *Thalamiflores.*

RENONCULACÉES.

Espèces indigènes.

Renoncule âcre (*Ranunculus acris*), R. scélérate (*R. sceleratus*), R. petite flamme (*R. Flammula*). Plantes âcres, vésicantes, dangereuses pour les troupeaux.

Anémone coquelourde (*Anemone Pulsatilla*). Eau distillée employée dans les cas d'amaurose.

Hellébore noir (*Helleborus niger*). Racine drastique.

Dauphinelle staphisaigre (*Delphinium staphysagria*). Graines âcres.

Aconit napel. (*Aconitum napellus*). L'extrait des feuilles est narcotique.

Aconit tue-loup (*Aconitum lycoctonum*). Mêmes propriétés.

MAGNOLIACÉES.

Espèces exotiques.

Drymis de Winter (*Drymis Winteri*). Détroit de Magellan. Ecorce de Winter tonique et aromatique.

Badiane. Anis étoilé (*Ilicium anisatum*). Chine. Fruit aromatique qui donne son parfum à l'anisette de Bordeaux.

Magnolia Plumieri. Ce sont les fleurs de cet arbre qui communiquent aux liqueurs de la Martinique l'arôme qui les caractérise.

MÉNISPERMACÉES.

Espèces exotiques.

Coque du Levant (*Menispermum cocculus*). Indes, Malabar. Fruits vénéneux.

Colombo (*Menispermum palmatum*). Afrique méridionale. Racine amère et tonique.

BERBÉRIDÉES.

Espèce indigène.

L'épine vinette (*Berberis vulgaris*). Les baies renfermant de l'acide oxalique, servent à préparer des boissons acidules.

Espèce exotique.

Epine vinette tinctoriale (*Berberis tinctoria*). Inde. Principe colorant jaune.

NYMPHAEACEES.

Espèce indigène.

Le Nénuphar blanc (*Nymphæa alba*). Fleur narcotique et sédative.

PAPAVÉRACÉES.

Espèces indigènes.

Pavot noir (*Papaver somniferum. V. nigrum*). Cultivé pour exprimer des graines l'huile d'œillette.

Pavot blanc (*Papaver somniferum V. album*). On retire l'opium de ses capsules encore vertes.

Coquelicot (*Papaver rhæas*). Infusion pectorale.

Grande Eclaire (*Chelidonium majus*). Le suc jaune qu'elle contient était employé autrefois comme purgatif drastique.

FUMARIACÉES.

Espèce indigène.

Fumeterre officinale (*Fumaria officinalis*). Suc amer et tonique.

CRUCIFÈRES.

Espèces indigènes.

Radis cultivé (*Raphanus sativus*). Racine servant de condiment.

Chou cultivé (*Brassica oleracea*). Feuilles étiolées, alimentaires.

Navette (*Brassica rapa*). Les deux variétés à racines charnues, *B. rapa depressa* et *oblonga*, fournissent la racine connue sous le nom de rave. La variété *B. rapa oleifera* donne l'huile de navette.

Navet (*Brassica napus*). Racine charnue, alimentaire.

Colza (*Brassica campestris*). Graines oléagineuses.

Roquette (*Brassica eruca*). Feuilles antiscorbutiques.

Cresson (*Nasturtium officinale*). Toute la plante sert de condiment.

Moutarde blanche (*Sinapis alba*). Graines renfermant un principe âcre et rubéfiant.

Moutarde noire (*Sinapis nigra*). Mêmes propriétés.

Alliaire (*Alliaria officinalis*). Principe âcre et anti-scorbutique à forte odeur alliacée.

Cardamine. (*Cardamine pratensis*). Feuilles anti-scorbutiques.

Passerage (*Lepidium latifolium*). Feuilles très-âcres.

Cresson alenois (*Lepidium sativum*). Assaisonnement.

Cochléaria. (*Cochlearia officinalis*). Feuilles anti-scorbutiques,

Raifort de Bretagne (*Cochlearia armoriaca*). Racine très-âcre, employée comme condiment.

Caméline (*Myagrum sativum*). Graines oléagineuses.

Pastel (*Isatis tinctoria*). Cette plante fournit le bleu de pastel.

CAPPARIDÉES.

Espèce indigène.

Le Câprier (*Capparis spinosa*). Racines diurétiques. Boutons de fleurs confits dans le vinaigre, servant de condiment.

VIOLARIÉES.

Espèces indigènes.

Violette odorante (*Viola odorata*). Fleurs pectorales. Racine émétique.

Pensée (*Viola tricolor*). Infusion amère et dépurative.

Espèces exotiques.

Ipécacuanha blanc (*Jonidium itoubou*). Tige souterraine purgative.

RÉSEDACÉES.

Espèce indigène.

La Gaude (*Reseda luteola*). Employée pour teindre en jaune.

POLYGALÉES.

Espèce indigène.

Polygala amer (*Polygala amara*). Infusion de la plante entière amère et tonique.

Espèces exotiques.

Polygala de Virginie (*Polygala seneca*). Racine excitante.

Ratanhia (*Krameria triandra*). Racine astringente.

CARYOPHYLLÉES.

Espèces indigènes.

L'OEillet des Chartreux (*Dianthus superbus*). Pour la fabrication du sirop d'œillet.

La Saponaire (*Saponaria officinalis*). Infusion dépurative.

LINACÉES.

Espèces indigènes.

Le Lin ordinaire (*Linum usitatissimum*). Fibres de la tige employées pour tisser les toiles. Graines émollientes et donnant une huile dont on se sert dans les arts.

Le Lin purgatif (*Linum catharticum*). On s'en servait autrefois comme vermifuge.

MALVACÉES.

Espèces indigènes.

La grande Mauve (*Malva sylvestris*). Feuilles émollientes, fleurs pectorales.

La petite Mauve (*Malva rotundifolia*). Mêmes propriétés.

La Mauve glabre (*Malva glabra*). Mêmes propriétés.

La Guimauve (*Althæa officinalis*). Racine et feuilles mucilagineuses. Fleurs pectorales.

La Rose trémière (*Althæa rosea*). Mêmes usages.

Espèces exotiques.

Gombo (*Hibiscus esculentus*). E. Pays tropicaux. Fruits et feuilles mangeables.

Cotonnier (*Gossipium herbaceum*). Pays tropicaux. Graines entourées de poils textiles.

Cacaoier (*Theobroma cacao*). Amérique méridionale. Ses graines torréfiées sont la base du Chocolat.

TILIACÉES.

Espèce indigène.

Tilleul (*Tilia europæa*). Fleurs sudorifiques et antispasmodiques. Ecorce employée pour faire des cordes à puits.

THEACÉES.

Espèce exotique.

Thé (*Thea sinensis*). Feuilles employées en infusion.

AURANTIACÉES.

Espèces indigènes.

Le Limonier (*Citrus medica*). Appelé à Paris Citronnier. Fruit employé pour préparer de l'acide citrique et des boissons rafraîchissantes appelées limonades.

L'Oranger (*Citrus aurantium*). Ses feuilles, infusées dans l'eau chaude, constituent une boisson légèrement diaphorétique. Les fleurs servent à préparer l'eau distillée de fleurs d'oranger. Les fruits sont un aliment rafraîchissant. L'écorce d'orange entre dans la confection du *curaçao*.

HYPÉRICINÉES.

Espèces indigènes.

La Toute-Saine (*Androsœmum officinale*). Employée autrefois.

Le Millepertuis (*Hypericum perforatum*). Ses fleurs et feuilles macérées dans l'huile étaient autrefois en usage dans le traitement des plaies.

GUTTIFÈRES.

Espèces exotiques.

Mangostan guttier (*Cambogia gutta*). Indes orientales. Fournit la gomme-résine-gutte, qui est employée dans la médecine et les arts.

Mangostan (*Mammea americana*). Fruit acidule mangeable.

ACÉRINÉES.

Espèces indigènes.

Erable sycomore (*Acer pseudo-platana*). Son bois est employé par les ébénistes, les tourneurs et les luthiers.

Erable champêtre (*Acer campestris*). Sert à faire des manches de fouet en Allemagne.

Erable de Montpellier (*Acer monspessulanus*), Mêmes usages que le précédent.

Erable plane (*Acer platanoïdes*). Son bois sert dans la menuiserie, le charronnage, etc. Les feuilles teignent en jaune citron les draps de laine préparés avec de l'alun.

Espèce exotique.

Erable à sucre (*Acer saccharinum*). Amérique du Nord. Des incisions faites à l'arbre fournissent une quantité de sève sucrée égale à son propre poids.

HIPPOCASTANÉES.

Espèce indigène.

Marronnier d'Inde (*OEsculus hippocastanum*). Ecorce amère et fébrifuge. — Graines employées pour la nourriture des bœufs, chèvres et moutons. — Bois réduit en charbon pour la fabrication de la poudre à canon.

MÉLIACÉES.

Espèces exotiques.

L'Azédarach commun (*Melia azedarach*). Orient. Fruits vénéneux.—Purgatifs et anthelmintiques à faible dose.

Lansium domesticum. Inde. Fruits amers mangeables.

Sandoricum indicum. Fruits acidules servant de condiment.

Winterania canella. Golfe du Mexique. Fournit la fausse écorce de Winter.

AMPELIDÉES.

Espèce indigène.

La Vigne (*Vitis vinifera*).

TROPÉOLÉES.

Espèce indigène.

Grande Capucine (*Tropeolum majus*). Fleurs d'un goût âcre, servant de condiment.

OXALIDÉES.

Espèces indigènes.

L'Oxalide surelle (*Oxalis acetosella*). On en retire l'oxalate de potasse (*Sel d'oseille*).

L'Oxalide à feuilles crénelées (*Oxalis crenata*), l'Oxalide tubéreuse (*O. tuberosa*) et l'Oxalide à tige charnue (*O. crassicaulis*) donnent des tubercules féculents, analogues à ceux de la pomme de terre.

RUTACÉES.

Espèce indigène.

La Rue puante (*Ruta graveolens*) emménagogue et anthelmintique.

Espèces exotiques.

Cusparia febrifuga. Amérique méridionale. Son écorce est connue sous le nom d'*Angusture vraie*.

Gaïac (*Guiacum officinale*). Amérique méridionale. Bois employé en médecine et en ébénisterie.

Quassia amère (*Quassia amara*). Surinam. Racine amère.

Simarouba (*Simaruba guianensis*). Ecorce amère.

CORIARIÉES.

Espèce indigène.

Le Myrte des Corroyeurs (*Coriaria myrtifolia*). Les teinturiers en retirent une couleur noire. Fruit vénéneux.

2° Calyciflores.

CÉLESTRINÉES.

Espèces indigènes.

Fusain (*Evonymus europæus*). Charbon employé pour dessiner.

Houx (*Ilex aquifolium*) Feuilles amères, fébrifuges.

ONAGRAIRES.

Espèces indigènes.

L'OEnothère bisannuelle (*OEnothera biennis* L.). On mange ses racines en salade dans beaucoup de pays.

RHAMNÉES.

Espèces indigènes.

Jujubier (*Zizyphus vulgaris*). Drupes rafraîchissants, employés en décoction et à la confection des pâtes du jujube.

Nerprun cathartique (*Rhamnus catharticus*). Fuits purgatifs; le suc qu'on en tire, mêlé à l'eau de chaux et à la gomme, constitue le vert de vessie.

TÉRÉBINTHACÉES.

Espèces exotiques.

Pistachier franc (*Pistachia vera*). Amandes oléagineuses dont on fait des émulsions, des dragées, etc.

Pistachier térébinthe (*Pistachia terebinthus*). Fournit la térébenthine de Chio, employée autrefois en médecine.

Pistachier lentisque (*Pistachia lentiscus*). Des incisions faites à l'arbre s'écoule le mastic que les Orientaux mâchent continuellement.

Sumac des corroyeurs (*Rhus coriaria*). Les jeunes branches et les feuilles servent à tanner le cuir.

Sumacs vénéneux (*Rhus radicans, R. toxicodendron*). Le contact et les exhalaisons de ces arbres sont dangereux à cause du principe âcre qu'ils contiennent.

Baumier de la Mecque (*Amyris opobalsamum*). Arabie. Fournit le baume de la Mecque.

Baumier élémifère (*Amyris elemifera*). Donne la résine élémi.

Noix d'Acajou (*Anacardium occidentale*). Amérique du Sud. Fruit contenant un suc très-âcre.

Heudelotia africana. Sénégal. Fournit la ésine connue sous le nom de Bdellium.

Mangifera indica, *Spondias mombin*: Fruits excellents.

LEGUMINEUSES.

Espèces indigènes.

Le Genêt des teinturiers (*Genista tinctoria*). Donne une couleur jaune assez vive.

Bugrane épineuse (*Ononis spinosa*). Racine douceâtre, amère et diurétique.

Pistache de terre (*Arachis hypogæa*). Graines oléagineuses.

Fénugrec (*Trigonella fœnum-græcum*). Graines odorantes employées en cataplasmes.

Mélilot (*Melilotus officinalis*). Eau distillée légèrement aromatique.

Astragale sans tige (*Astragalus excapus*). Racine amère et astringente.

Luzerne (*Medicago sativa*).

Trèfle (*Trifolium pratense*).

Esparcette (*Onobrychis sativa*).

Baguenaudier (*Colutea arborescens*). Feuilles purgatives.

Réglisse (*Glycirhiza glabra*). Racine sucrée.

Spartier à balais (*Spartium scoparium*). Tubercules féculents.

Pois (*Pisum sativum*), Haricot (*Phaseolus vulgaris*), Fève (*Faba vulgaris*), Lentille (*Ervum lens*), Pois chiche (*Cicer arietinum*): Graines féculentes.

Robinier, faux acacia (*Robinia pseudo-acacia*). Bois employé en fine menuiserie, et servant, dans quelques pays, à faire d'excellents échalas.

Caroubier (*Ceratonia siliqua*). Provence. Fruits laxatifs.

Espèces exotiques.

Astragale de Crète (*Astragalus creticus*). Fournit la gomme adraganthe.

Sang-Dragon (*Pterocarpus draco*). Inde et Amérique méridionale. Donne la résine Sang-Dragon.

Santal rouge (*Pterocarpus santalinus*). Bois de teinture employé dans les arts.

Copahu (*Copaifera officinalis*). Amérique du Sud. Des incisions faites à l'arbre s'écoule la térébenthine du même nom.

Myroxylon peruiferum. Pérou. Donne le baume du Pérou.

Indigotier (*Indigofera anil*). *I. tinctoria*. *I. argentea*. Inde, Amérique. Les feuilles de ces trois espèces donnent la belle couleur bleue connue sous le nom d'indigo.

Casse à feuilles aiguës (*Cassia acutifolia*). Egypte. Ses feuilles et ses fruits, désignés sous le nom de follicules de casse, sont purgatifs.

Casse à feuilles obtuses (*Cassia obovata*). Egypte. Mêmes propriétés.

Casse canefice (*Cassia fistula*). Levant, Antilles. La pulpe qui enveloppe les graines est laxative.

Tamarinier (*Tamarindus indica*). Pulpe laxative.

Bois de Campêche (*Hœmatoxylon campechianum*). Bois de teinture rouge.

Acacia vrai (*Acacia vera*). Egypte. Son tronc fournit la gomme arabique.

Acacia verek. Sénégal. Laisse exsuder la gomme Sénégal.

Acacia catechu. Le Cachou est l'extrait des fruits verts et du bois de cet arbre.

ROSACÉES.

Espèces indigènes.

La Tormentille (*Potentilla tormentilla*). Racine très-astringente.

Le Fraisier (*Fragaria vesca*). Fruit alimentaire.

La Benoite (*Geum urbanum*). Racine amère et astringente.

La Framboise (*Rubus idœus*). Fruit rafraîchissant.

La Mûre de Ronce (*Rubus fructicosus*, *R. cœsius*, *R. glandulosus*, *R. corylifolius*). Fruit mangeable, quoique d'une qualité fort inférieure. — Feuilles astringentes.

La Rose de Provins (*Rosa gallica*). Pétales astringents, employés pour la fabrication de la conserve de roses, du miel rosat, etc.

La Rose de Damas (*Rosa Damascena*). C'est l'espèce la plus employée pour la distillation de l'eau de rose.

L'Amandier (*Amygdalus vulgaris*). Graine mangeable et servant à faire des émulsions.

Le Pêcher (*Persica vulgaris*). Péricarpe mangeable. Fleur employée pour préparer un sirop laxatif.

Abricotier (*Armeniaca vulgaris*). Péricarpe mangeable. Les graines entrent dans la composition de l'eau de noyaux.

Prunier ordinaire (*Prunus communis*). Péricarpe mangeable.

Prunier de Briançon (*Prunus Brigantiaca*). Ses amandes fournissent l'*huile de marmottes*.

Cérisier commun (*Cerasus avium*). Péricarpe mangeable. La variété des Vosges et de la Forêt-Noire sert à fabriquer le *Kirschenwasser*.

Laurier-cerise (*Cerasus laurocerasus*). L'eau distillée de laurier-cerise est employée comme antispasmodique en médecine.

Cerisier à grappes (*Cerasus padus*). Écorce astringente.

Griottier (*Cerasus caproniana*). Fruit mangeable.

Guignier (*Cerasus juliania*). Fruit mangeable.

Néflier (*Mespilus germanica*). Fruits alimentaires.

Bibacier du Japon (*Eriobotrya japonica*). Arbre naturalisé dans le midi de la France. Fruits alimentaires.

Sorbier des oiseleurs (*Sorbus aucuparia*). Bois employé par les charrons, les tourneurs, etc.

Alizier commun (*Cratœgus torminalis*). Bois employé pour le charronnage, etc.

Poirier commun (*Pyrus communis*). Fruits alimentaires, employés pour faire une espèce de cidre (le poiré).

Pommier commun (*Malus communis*). Fruits alimentaires employés pour faire le cidre.

Coignassier (*Cydonia vulgaris*). Fruit employé pour faire des gelées, des sirops. Graines mucilagineuses.

Espèce exotique.

Brayera anthelmintica. Orient. Racine vermifuge.

MYRTACÉES.

Espèces indigènes.

Le Grenadier (*Punica granatum.*) Les fleurs et le péricarpe sont astringents. L'écorce et la racine sont vermifuges La pulpe qui entoure les graines est mangeable

Le Myrte commun (*Myrtus communis*). Ecorce astringente, usitée autrefois en médecine.

Espèces exotiques.

Piment (*Myrtus pimenta*). Fruits aromatiques.

Melaleuca leucadendron (huile de Cajeput).

Goyavier (*Psidium pomiferum* et *P. pyriferum*). Fruits mangés aux Antilles et dans l'Inde.

Jamrose (*Eugenia jambos*). Même produit.

CUCURBITACÉES.

Espèces indigènes.

Bryone (*Bryonia dioica*). Racine drastique contenant beaucoup de fécule.

Melon (*Cucumis melo*). Fruit alimentaire.

Concombre (*Cucumis sativus*). Fruit alimentaire; sert à la préparation d'une pommade adoucissante.

Coloquinte (*Cucumis colocynthis*). Orient. Pulpe du fruit amère et purgative.

Pastèque (*Cucurbita citrullus*). Fruits servant d'aliment dans le midi de la France.

Potiron (*Pepo macrocarpus*). Fruit alimentaire.

Espèces exotiques.

Melothria pendula, *Momordica purgans*. Espèces du Brésil à fruits amers et purgatifs.

PORTULACÉES.

Espèce indigène.

Le Pourpier (*Portulaca oleracea*). Plante alimentaire.

Espèce exotique.

(*Claytonia cubensis*). Mangé comme légume à Cuba.

CRASSULACÉES.

Espèce indigène.

La Joubarbe des toits (*Sempervivum tectorum*). Feuilles légèrement astringentes.

GROSSULARIÉES.

Espèces indigènes.

Groseiller à maquereau (*Ribes uva-crispa*). Fruits alimentaires.

Groseiller ordinaire (*Ribes rubrum*). Fruit rafraîchissant.

Groseiller noir (*Ribes nigrum*). Employé à la fabrication de la liqueur appelée cassis.

OMBELLIFÈRES

Espèces indigènes.

L'Anis (*Pimpinella anisum*). Fruits stimulants aromatiques.

Carvis (*Carum carvi*). Fruits aromatiques.

OEnanthe safranée (*OEnanthe crocata*). Feuilles et racine vénéneuses.

OEnanthe phellandre. *OEnanthe phellandrium*). Feuilles et fruits aromatiques, préconisés autrefois comme spécifique contre la phthisie.

Persil (*Petroselinum sativum*). Feuilles employées comme condiment.

Céleri (*Apium graveolens*). Tiges alimentaires, racine diurétique.

Fenouil (*Anethum fœniculum*). Fruits très-excitants. Racines mangées comme hors-d'œuvre dans l'Europe méridionale.

Cumin (*Cuminum cyminum*). Fruits aromatiques et stimulants.

Coriandre (*Coriandrum sativum*). Fruits aromatiques qui entrent dans la composition de l'eau de mélisse.

Grande Ciguë (*Conium maculatum*). Tiges et feuilles vénéneuses, poudre et extrait narcotiques, propriétés d'autant plus énergiques que les plantes ont cru dans des pays plus chauds.

Petite Ciguë (*OEthusa cynapium*) Plante vénéneuse, narcotique.

Cicutaire aquatique (*Cicutaria aquatica*). Plante plus vénéneuse encore que les grande et petite ciguës.

Carotte (*Daucus carotta*). Racine charnue et sucrée, servant d'aliment.

Cerfeuil (*Anthriscus cerefolium*). Feuilles employées comme condiment.

Panais (*Pastinaca sativa*). Racine sucrée alimentaire.

Angélique officinale (*Archangelica officinalis*). Tiges confites au sucre, stomachiques. Racine classée autrefois parmi les diurétiques.

Impératoire (*Imperatoria ostruthium*). Racine d'un goût chaud et aromatique, employée rarement.

Espèces exotiques.

Férule opoponax (*Ferula opoponax*). Orient. Fournit la gomme résine de même nom.

Férule assa-fœtida (*Ferula assa-fœtida*). Perse. La gomme résine de même nom, s'écoule des incisions faites au pied de la tige.

CAPRIFOLIACÉES.

Espèces indigènes.

Lierre (*Hedera helix*). Les feuilles servent à panser les vésicatoires.

Sureau (*Sambucus nigra*). Les fleurs sont employées comme sudorifiques, l'enveloppe Herbacée (*seconde écorce*), comme amère.

Chèvre-feuille (*Lonicera caprifolium*). Fleurs mucilagineuses, pectorales.

RUBIACÉES.

Espèces indigènes.

Garance. (*Rubia tinctorum*). Racine astringente, fournissant un principe colorant rouge.

Herbe à l'esquinancie (*Asperula cynanchica*). Plante légèrement astringente, administrée autrefois en gargarisme contre les maux de gorge.

Aspérule odorante (*Asperula odorata*). Infusion théiforme, aromatique.

Espèces exotiques.

Cafier (*Coffea arabica*). Orient, Amérique. Ses graines torréfiées, pulvérisées et infusées, donnent la boisson si généralement usitée sous le nom de café.

Ipécacuanha annelé *Cephælis ipecacuanha.*) Brésil. Racine émétique.

Ipécacuanha strié (*Psychotria emetica*). Pérou. Mêmes propriétés, mais moins actives.

Caïnca (*Chiococca racemosa*). Antilles. Racine employée contre l'hydropisie.

Quinquina gris (*Cinchona condaminea*). Nouvelle Grenade. Ecorce antipériodique et peu astringente.

Quinquina orangé (*C. lancifolia*). Mêmes propriétés

Quinquina rouge (*C. magnifolia*). Nouvelle Grenade. Antipériodique et très-astringent.

Kino (*Nauclea gambeer*). Afrique. Suc astringent.

VALÉRIANÉES,

Espèces indigènes.

Mâche (*Valerianella olitoria*). Herbe alimentaire.

Valériane officinale (*Valeriana officinalis*). Racine très-odorante, antispasmodique.

Valériane de montagne (*Valeriana phu*). Mêmes propriétés.

DIPSACÉES.

Espèces indigènes.

Chardon à foulon (*Dipsacus fullonum*). Epi floral employé, après la maturité, à carder les draps.

Scabieuse des champs (*Scabiosa arvensis*). Infusion amère et dépurative, employée autrefois dans les maladies de la peau.

COMPOSÉES.

Espèces indigènes.

Bardane (*Lappa major*). Racine diurétique et amère.

Chardon-Marie (*Carduus mariana*). Jeunes feuilles alimentaires.

Carline sans tige (*Carlina acaulis*). Racine tonique et excitante.

Carthame tinctorial ou safran bâtard (*Carthamus tinctorius*). Fleurs employées pour la teinture en jaune ou en rouge.

Chardon bénit (*Centaurea benedicta*). L'infusion de la racine est amère et nauséabonde.

Bleuet (*Centaurea cyanus*). Employé autrefois comme diurétique.

Chaussetrappe (*Centaurea calcitrapa*). Mêmes usages que la précédente.

Artichaut (*Cynara scolymus*). Bractées et réceptacles charnus servant d'aliment.

Cardon (*Cynara cardunculus*). Jeunes feuilles étiolées, alimentaires.

Pied de chat (*Gnaphalium dioïcum*) Fleurs pectorales.

Tanaisie (*Tanacetum vulgare*). Plante anthelmintique.

Armoise *Artemisia vulgaris*). Infusion des feuilles emménagogue.

Absinthe *Artemisia absinthium*). Sert à fabriquer la liqueur connue sous le nom d'absinthe.

Estragon *Artemisia dracunculus*). Assaisonnement, employé surtout dans la fabrication de la moutarde et du vinaigre.

Tupilage (*Tussilago farfara*). Feuilles pectorales.

Aunée (*Inula helenium*). Racine amère et dépurative.

Tournesol (*Helianthus annuus*). Moelle de la tige proposée comme moxa. Graines oléagineuses.

Topinambour (*Helianthus tuberosus*). Tubercule de la racine féculente.

Camomille romaine (*Anthemis nobilis*) Infusion de fleurs amère et aromatique.

Pyrètre (*Anthemis pyrethrum*). Racine à saveur âcre et brûlante.

Matricaire (*Matricaria camomilla*). Mêmes propriétés, mais à un degré moindre que la camomille romaine.

Achillée sternutatoire (*Achillæa ptarmica*). La poudre des feuilles est sternutatoire.

Tabac de montagne (*Arnica montana*). Excitant dont l'action se fait sentir même sur le cerveau.

Chicorée sauvage (*Cichorium intybus*). Les racines fournissent une décoction amère.

Chicorée endive (*Cichorium endivia*). Feuilles alimentaires.

Dent de lion (*Taraxacum dens-leonis*). Feuilles alimentaires, extrait amer.

Laitue cultivée (*Lactuca virosa*). Plante narcotique.

La Scorzonère (*Scorzonera hispanica*).

Le Salsifis *Tragopogon porrifolium*). Les racines de ces deux espèces sont un alimen des plus communs.

Espèce exotique.

Semencontra (*Artemisia judaïca*). Arabie, Egypte. Boutons de fleurs vermifuges.

LOBÉLIACÉES.

Espèce indigène.

La Lobélie brûlante (*Lobelia urens*). Plante âcre et vésicante.

Espèce exotique.

Les *Lobelia tupa* et *L. longiflora* de l'Amérique septentrionale sont encore plus âcres que l'espèce européenne.

CAMPANULACÉES.

Espèce indigène.

La Raiponce (*Campanula rapunculus*) Feuilles alimentaires.

VACCINIÉES.

Espèce indigène.

L'Airelle myrtil (*Vaccinium myrtillus*) Baies mangeables.

ERICACÉES.

Espèce indigène.

Le Raisin d'ours (*Arbutus uva-ursi*). Plante amère diurétique.

3° *Corolliflorœ.*

DIOSPYRÉES.

Espèce indigène.

Styrax officinal (*Styrax officinale*), ou bien Styrax calamite, suc aromatique.

Espèce exotique.

Benjoin (*Styrax benzoin*). Java. Suc solidifié très-riche en acide benzoïque, et d'une odeur très-agréable.

JASMINÉES.

Produits indigènes.

Le Jasmin (*Jasminum officinale*). Distille pour la parfumerie.

Le Troëne (*Ligustrum vulgare*). Sert à faire des haies.

L'Olivier (*Olæa Europæa*). Feuilles amères et fébrifuges. Péricarpe contenant une quantité considérable d'huile.

Lilas commun (*Lilac vulgaris*). Capsules vertes amères, et employées quelquefois comme fébrifuges.

Frêne (*Fraxinus*). Le bois de toutes les espèces de ce genre est plus ou moins estimé.

STRYCHNACÉES.

Espèce exotique.

Noix vomique. (*Strychnos nux-vomica*). Fruit et graines vénéneuses au plus haut degré.

Fève de St-Ignace (*Ignatia amara*). Mêmes propriétés

GENTIANÉES.

Espèces indigènes.

Grande Gentiane. (*Gentiana lutea*). Racine amère.

Petite Centaurée (*Chironia centaurium*). Herbe amère dans toutes ses parties.

CONVOLVULACÉES.

Espèces exotiques.

Jalap (*Convolvulus officinalis*). Mexique. Racine purgative.

Scammonée (*Convolvulus scammonia*). Orient. Suc purgatif.

Patate (*Convolvulus batatas*). Amérique méridionale. Racines féculentes.

BORRAGINÉES.

Espèces indigènes.

Bourrache (*Borrago officinalis*). Suc de la plante non fleurie, diurétique. Fleurs sudorifiques.

Buglosse tinctoriale (*Anchusa tinctoria*). La racine donne un principe colorant rouge.

Cynoglosse officinal (*Cynoglossum officinale*). Les propriétés narcotiques attribuées à la racine sont très-douteuses.

Grande Consoude (*Symphytum officinale*). Racine mucilagineuse et légèrement astringente.

SOLANÉES.

Espèces indigènes.

La Belladone (*Atropa belladona*). Les baies, les racines et les feuilles sont un poison narcotico-âcre. L'extrait des feuilles est employé en médecine.

La Mandragore (*Atropa mandragora*). Plante vénéneuse.

La Pomme de terre (*Solanum tuberosum*). Tubercules féculents formés par un développement extraordinaire des branches souterraines, et servant d'aliment.

La Douce-Amère (*Solanum dulcamara*). Tiges dépuratives.

L'Aubergine (*Solanum melongena*). Fruits que l'on mange très-communément dans le midi de l'Europe.

La Tomate (*Solanum lycopersicum*). Fruits employés comme assaisonnement.

La Morelle noire (*Solanum nigrum*). On en mange les feuilles dans plusieurs pays.

L'Alkekenge (*Physalis alkekengi*). Baies employées autrefois comme diurétiques.

Le Piment ou Poivre long (*Capsicum annuum*). Fruit de haut goût, servant d'assaisonnement.

Jusquiame noire (*Hyoscyamus niger*). Plante vénéneuse dans toutes ses parties.

Jusquiame blanche (*H. albus*), Jusquiame jaune (*H. aureus*). Mêmes propriétés. Extrait employé comme narcotique.

Pomme épineuse (*Datura stramonium*). Plante narcotico-âcre à un très-haut degré. Extrait employé en médecine.

Tabac (*Nicotiana tabacum*). Propriétés narcotiques. Feuilles employées pour fumer ou priser.

SCROPHULARIÉES.

Espèces indigènes.

Gratiole (*Gratiola officinalis*). Plante drastique.

Digitale (*Digitalis purpurea*). Diurétique, irritante et ralentissant les battements du cœur.

LABIÉES.

Espèces indigènes.

Sauge officinale (*Salvia officinalis*). Herbe très-aromatique, employée dans les bains, les fumigations ou les gargarismes.

Romarin (*Rosmarinus officinalis*). On en retire une huile essentielle. Cette plante entre dans la composition de l'eau de la reine de Hongrie et du vinaigre des quatre voleurs.

Menthe poivrée (*Mentha piperata*). Menthe des jardins (*Mentha viridis*). Menthe pouilleuse (*Mentha pulegium*), espèces odorantes employées à la fabrication de l'eau distillée de Menthe.

Germandrée petit chêne (*Teucrium chamædrys*), aromatique et amère, fébrifuge.

Hysope officinal (*Hysoppus officinalis*). Plante aromatique employée comme la sauge.

Cataire (*Nepeta cataria*). Infusions emménagogues, employées sous forme de pédiluves.

Lierre terrestre (*Glechoma hederacea*). Fleurs pectorales.

Ortie blanche (*Lamium album*). Mêmes usages

Origan (*Origanum vulgare*). Infusion théiforme excitante.

Marjolaine (*Marjorana crassa*). Condiment.

Lavande (*Lavandula spica*). Arbrisseau très-aromatique. On en retire l'huile d'aspic par la distillation.

Thym (*Thymus vulgaris*). Herbe d'un fréquent usage comme condiment, en économie domestique, et comme aromatique en médecine, bains, fumigations, etc.

Serpolet (*Thymus serpyllum*). Propriétés moins énergiques, usages analogues.

Mélisse (*Mellissa officinalis*). Infusion théiforme aromatique et excitante, analogue à celle du thé.

VERBÉNACÉES.

Espèce indigène.

Verveine officinale (*Verbena officinalis*). Infusion légèrement aromatique.

ACANTHACÉES.

Espèce indigène.

Acanthe molle (*Acanthus mollis*) Feuilles et racines douées de propriétés émollientes.

PRIMULACÉES.

Espèces indigènes.

Mouron des oiseaux (*Anagallis arvensis*).
Primevère officinale (*Primula officinalis*). Infusion pectorale.

GLOBULARIÉES.

Espèce indigène.

Globulaire turbith (*Globularia alypum*). Feuilles et racines amères et purgatives.

4° *Monochlamydées.*

PLUMBAGINÉES.

Espèce indigène.

Dentelaire d'Europe (*Plumbago europæa*). Plante âcre.

PLANTAGINÉES.

Espèce indigène.

Le plantain (*Plantago major*). Feuilles légèrement astringentes.

CHÉNOPODÉES.

Espèces indigènes.

Soude (*Salsola kali*). Pour l'extraction de la soude du commerce.

Arroche (*Atriplex hortensis*). Légume alimentaire.

Epinard (*Spinacia oleracea*). Légume alimentaire.

Betterave (*Beta vulgaris*). Racine alimentaire très-riche en principe sucré.

Camphrée de Montpellier (*Camphorasma monspeliaca*). Herbe aromatique rappelant l'odeur du camphre.

POLYGONÉES.

Espèces indigènes.

Oseille (*Rumex acetosa*). Employée comme légume, et pour en tirer l'acide oxalique.

Patience (*Rumex patientia*). Racine diurétique.

Rhubarbe de moine (*Rumex alpina*). Racine purgative.

Rhubarbe (*Rheum undulatum*, *R. compactum*). Pétioles mangés comme légumes en Angleterre. Racines purgatives.

Poivre d'eau (*Polygonum hydropiper*). Feuilles âcres vésicantes.

Bistorte (*Polygonum bistorta*). Racine amère et astringente.

Blé sarrasin (*Polygonum fagopyrum*). Graines farineuses employées pour faire du pain dans les pays pauvres.

THYMÉLÉES.

Espèces indigènes.

Bois gentil (*Daphne mezereum*). Ecorce âcre, épispastique.

Daphne gnidium. Extrait usité quelquefois dans certaines maladies. Couleur jaune employée en teinture

Daphne laureola. Fruits vénéneux.

LAURINÉES.

Espèces indigènes.

Laurier d'Apollon (*Laurus nobilis*). Feuilles et baies chaudes, aromatiques, usitées en médecine.

Laurier sassafras (*Laurus sassafras*). Bois aromatique et sudorifique.

ELOEAGNÉES.

Espèce indigène.

L'Hippophae (*Hippophæ rhamnoides*). Pour fixer les terrains sablonneux des dunes.

ARISTOLOCHIÉES.

Espèces indigènes.

Asaret d'Europe (*Asarum europæum*). Racine émétique et sternutatoire

Aristoloche ronde (*Aristolochia rotunda*). Racine âcre.

Aristoloche longue (*Aristolochia longa*). Mêmes propriétés.

EUPHORBIACÉES.

Espèces indigènes.

Le Buis (*Buxus sempervirens*). Bois sudorifique et employé pour les ouvrages de tour.

Bleu en drapeaux (*Croton tinctorium*).

Ricin ou Palma-Christi (*Ricinus communis*). Huile des graines purgative.

L'Epurge (*Euphorbia lathyris*). Huile des graines drastique.

Mercuriale (*Mercurialis perennis*). Suc de la plante laxatif.

Espèces exotiques.

Médicinier manioc (*Jatropha manioc*). Toute l'Amérique du Sud. Sa racine desséchée fournit le manioc. Fécule nourrissante appelée aussi *Pain de Cassave* et *Tapioca*.

Curcas (*Jatropha curcas*). Amérique méridionale. Pignons d'Inde très-purgatifs.

Croton cascarille (*Croton cascarilla*). Pérou, Paraguay. Ecorce chaude et aromatique.

Croton tiglion (*Croton tiglium*). Graines contenant une huile extrêmement purgative.

Croton à laque (*Croton lacciferum*). Inde. Donne la laque des vernis et de la cire à cacheter.

Hevea guianensis. Le suc qui découle des incisions faites à cet arbre est connu sous le nom de caoutchouc ou gomme élastique.

Mancenillier (*Hippomane mancenilla*). Java. Arbre vénéneux dans toutes ses parties.

Euphorbe officinale (*Euphorbia officinarum*). Afrique et Inde. Suc fortement âcre e purgatif.

Euphorbe ipécacuanha (*Euphorbia ipecacuanha*). Racine purgative.

URTICÉES.

Espèces indigènes.

Chanvre (*Cannabis sativa*). Plante économique.

Pariétaire (*Parietaria officinalis*). Herbe diurétique dans toutes ses parties

Houblon (*Humulus lupulus*). Strobiles employés pour la fabrication de la bière et des boissons amères.

Mûrier blanc (*Morus alba*). Fruits alimentaires. Feuilles récoltées pour la nourriture des vers à soie.

Mûrier des Philippines (*Morus multicaulis*). Même usage.

Figuier (*Ficus carica*). Fruits alimentaires.

Ortie (*Urtica urens*). Plante rubéfiante à l'extérieur, vénéneuse à l'intérieur.

Espèces exotiques.

Antiar (*Antiaris toxicaria*). Java. Fournit l'Upas antiar, un des poisons végétaux les plus énergiques.

Arbre à Pain (*Arctocarpus incisa*). Polynésie. Fruits très-gros et nourrissants.

Arbre à lait (*Galactodendron utile*). Amérique du Sud. Suc propre, lactescent, mucilagineux et sucré

ULMACÉES.

Espèces indigènes.

Orme champêtre (*Ulmus campestris*). Bois de charronnage.

Orme étalé (*Ulmus effusa*). Mêmes usages.

Celtis australis. Les branches servent à faire des manches de fouet.

JUGLANDÉES.

Espèces indigènes.

Le Noyer ordinaire (*Juglans regia*). Graine alimentaire, oléagineuse. Bois employé en ébénisterie.

Noyer noir (*Juglans nigra*). Bois employé dans les constructions navales.

Espèces exotiques.

Noyer à écorce cendrée (*Juglans cinerea*) Amérique du Nord. La partie interne de l'écorce est un excellent purgatif fort employé aux États-Unis.

AMENTACÉES.

Espèces indigènes.

Chêne à fleurs sessiles (*Quercus sessiliflora*). Bois de construction. Écorce astringente.

Chêne à fleurs pédonculées (*Quercus pedunculata*). Mêmes usages.

Chêne liége (*Quercus suber*). Le liége du commerce est formé par la partie la plus extérieure et par conséquent la plus ancienne de l'écorce.

Chêne au kermès (*Quercus coccifera*). Nourrit l'insecte connu sous le nom de *Kermès végétal* ou graine d'écarlate.

Hêtre (*Fagus sylvatica*). On retire de l'huile de ses fruits.

Châtaignier (*Castanea vulgaris*). Fruit féculent.

Noisetier (*Corylus avellana*). Graine alimentaire.

Charme (*Carpinus betulus*). Bois de chauffage.

Saule marceau (*Salix capræa*). Écorce employée à tanner les cuirs en Laponie. Bois propre à faire des perches, des échalas, mais peu durable.

Saule blanc (*Salix alba*). Propre, ainsi que beaucoup d'autres, à faire des liens, des cercles, etc. Charbon employé dans la fabrication de la poudre à tirer.

Peuplier blanc (*Populus alba*). P. grisâtre (P. *canescens*). P. tremble (P. *tremula*). P. d'Italie (P. *fastigiata*). P. noir (P. *nigra*). P. de la Virginie, mal à propos nommé P. suisse (P. *virginica*), etc., etc. Bois blanc, en général léger, mais mauvais pour le chauffage, dont on fait des caisses, des tables, des lattes, etc. Toutefois, le bois du Peuplier noir et du peuplier de Virginie, convient pour faire des planchers, des cloisons, des solives et même des poutres.

Saule herbacé (*Salix herbacea*). Employé à tanner les cuirs en Islande.

Aune (*Alnus glutinosa*). Bois propre à faire des conduits d'eau, des échalas, etc.

Bouleau blanc (*Betula alba*). Bois de chauffage. Huile empyreumatique employée à tanner le cuir dit de Russie.

Espèces exotiques.

Liquidambar styracifère (*Liquidambar styraciflua*). Mexique. Donne le liquidambar, substance liquide riche en acide benzoïque.

Chêne à Galles (*Quercus infectoria*). Orient. La piqûre d'un insecte du genre cynips y développe les excroissances connues.

CONIFÈRES.

Espèces indigènes.

Genévrier commun (*Juniperus communis*). Baies aromatiques employées en Écosse à la fabrication du *whisky*.

Sabine (*Juniperus sabina*). Feuilles emménagogues.

Pin maritime (*Pinus maritima*). La térébenthine découle de son tronc.

Pin pignon (*Pinus pinea*). Graines huileuses mangeables.

Sapin (*Abies excelsa*). Bois de construction. Bourgeons usités en médecine.

Mélèze (*Larix europæa*). Fournit la térébenthine molle de Venise.

Espèce exotique.

Pin de Riga (*Pinus sylvestris*). Tiré de Suède, de Norvège et de Finlande. Il fournit d'excellent bois de mâture.

II. MONOCOTYLÉDONES.

1° *Fleurs à enveloppe pétaloïde.*

ALISMACÉES.

Espèce indigène.

Le plantain d'eau (*Alisma plantago*). Proposé comme un remède contre la rage.

NAYADÉES.

Espèce indigène.

Zostera marina. Elle remplace les rognures de papier pour emballer les marchandises et sert encore à remplir les matelas.

BROMELIACÉES.

Espèce indigène.

Agavé d'Amérique (*Agave americana*). Les fibres des feuilles peuvent être employées pour remplacer le lin.

Espèce exotique.

Ananas (*Ananassa sativa*). Fruit comestible.

AMOMÉES.

Espèces exotiques.

Amome en grappe (*Amomum racemosum*) Inde. Ses fruits, appelés cardamones, sont aromatiques et excitants.

Curcuma long (*Curcuma longa*). Inde. Racine aromatique contenant un principe colorant jaune.

Gingembre (*Zinziber officinale*). Inde. Racine aromatique et excitante.

Zedoaire ronde (*Kaempferia rotunda*). Mêmes propriétés.

Galange (*Maranta galanga*). Mêmes propriétés.

Arrow-Root (*Maranta indica*). Inde, Amérique. Racine très-riche en fécule.

ORCHIDÉES.

Espèce indigène.

Le Salep. (*Orchis mascula*). Tubercules féculents.

Espèce exotique.

La Vanille (*Vanilla aromatica*). Fruits aromatiques.

IRIDÉES.

Espèces indigènes.

Iris d'Allemagne (*Iris germanica*). Rhizôme purgatif.

Iris de Florence (*Iris florentina*). Racine âcre et odorante.

Safran cultivé (*Crocus sativus*). Stigmates employés comme matière colorante et comme emménagogues.

MUSACÉES.

Espèce exotique.

Bananier (*Musa paradisiaca*, *M. violacea*, *M. sapientium*). Indes et Antilles. Les tiges servent de fourrage, ou fournissent des fibres textiles. Le fruit est alimentaire.

AMARILLIDÉES.

Espèce indigène.

Narcisse faux-narcisse (*Narcissus pseudonarcissus*). Plante vénéneuse, antispasmodique à faibles doses.

DIOSCORÉES.

Espèce exotique.

Igname (*Dioscorea alata*). Inde, Amérique. Racine alimentaire.

PALMIERS.

Chou palmiste (*Euterpe edulis*). On mange le bourgeon terminal.

Sang-Dragon (*Calamus Draco*). Fournit la substance usitée en teinture et en médecine.

Ceroxylon andicola. De son tronc et de ses feuilles suinte une cire végétale employée à la fabrication des bougies.

Cocotier (*Cocos nucifera*). Graines mangeables. Fournit aussi de l'huile et des boissons fermentées.

Dattier (*Phœnix dactylifera*). Fruits mangeables, béchiques qu'on peut réduire en farine.

Sagoutier (*Sagus farinifera*). Son tronc est rempli d'une fécule connue sous le nom de sagou.

JONCÉES.

Espèce indigène.

Jonc commun (*Juncus communis*). On l'emploie comme lien pour le palissage des espaliers, etc.

ASPARAGINÉES.

Espèces indigènes.

Asperge comestible (*Asparagus officinalis*). Jeunes pouces alimentaires.

Asperge amère (*Asparagus amarus*). Employée à la fabrication du sirop sédatif de pointes d'asperges.

LILIACÉES.

Espèces indigènes.

Scille maritime (*Scilla maritima*, L., *Urginea scilla*, Stenh.). Bulbes diurétiques.

Ognon (*Allium cæpa*). Bulbe alimentaire.

Poireau (*Allium porrum*). Bulbe et tige alimentaires.

Ail (*Allium sativum*). Condiment très-âcre.

Civette (*Allium schænoprasum*). Condiment.

Rocambole (*Allium scorodoprasum*). Condiment.

Échalotte (*Allium ascalonicum*). Condiment.

COLCHICACÉES.

Espèces indigènes.

Colchique d'automne (*Colchicum autumnale*). Plante vénéneuse, employée en médecine.

Hellébore blanc (*Veratrum album*). Racine violemment drastique.

Espèce exotique.

Cevadille (*Veratrum Sabadilla*). Mexique. Fruits vénéneux. Teinture employée en frictions.

2° *Fleurs en spadice.*

PANDANÉES.

Espèces exotiques.

Pandanus edulis. Madagascar. Fruits mangeables.

Pandanus humilis. On mange le bourgeon terminal.

AROIDÉES.

Espèces indigènes.

Gouet ordinaire (*Arum vulgare*). Racine âcre et purgative.

Açore aromatique (*Acorus calamus*). Rhizôme aromatique, stimulant

Espèces exotiques.

Arum colocasia. A. arisarum.

Caladium esculentum. Racines alimentaires, après avoir été débarrassées du principe âcre par le lavage ou la dessiccation.

TYPHACÉES.

Espèce indigène.

Roseau à larges feuilles (*Typha latifolia*). Filaments accompagnant les fruits, employés en guise de coton.

3° *Enveloppes de la fleur bractéiformes.*

CYPÉRACÉES.

Espèces indigènes.

Souchet long (*Cyperus longus*). Rhizôme odorant et aromatique.

Souchet rond (*Cyperus rotundus*). Mêmes propriétés.

Souchet, comestible (*Cyperus esculentus*). Saveur sucrée et agréable.

Laiche des sables (*Carex arenaria*). Racines sudorifiques succédanées à la salsepareille.

GRAMINÉES.

Espèces indigènes.

Maïs (*Zea maïs*). Sert à faire des potages et des gâteaux farineux.

Millet (*Panicum miliaceum*). Sert de nourriture à l'homme et aux oiseaux.

Avoine (*Avena sativa*). Fournit le gruau, et est un excellent fourrage pour les chevaux et les bœufs.

Blé (*Triticum sativum*, *T. compositum*, *T. spelta*, *T. monococcum*). Donne la meilleure farine.

Chiendent (*Triticum repens*). Racines diurétiques.

Seigle (*Secale cereale*). Sa farine est plus riche en gluten que celle du froment. On en fait un pain de qualité inférieure.

Orge (*Hordeum vulgare*, *H. hexastichon*, *H. distichum*, *H. zeocriton*). On en prépare une espèce de pain, de la bière et des décoctions rafraîchissantes.

Roseau à quenouille (*Arundo donax*). Sa tige donne une infusion légèrement sucrée.

Sorgho (*Holcus sorghum*). Graine alimentaire.

Espèces exotiques.

Sucre (*Saccharum officinarum*). Inde, Antilles, Amérique, etc.

Bambou (*Bambusa vulgaris*). Tiges employées à des usages fort divers.

VÉGÉTAUX CELLULAIRES OU ACOTYLÉDONES.

ÉQUISÉTACÉES.

Espèce indigène.

La Prêle d'hiver (*Equisetum hyemale*). La grande quantité de silice déposée sous l'épiderme la rend propre à polir différents objets.

FOUGÈRES.

Espèces indigènes.

Fougère mâle (*Polystichum filix mas*). Huile vermifuge.

Fougère des bois (*Pteris aquilina*) Employée pour emballer les raisins et autres fruits.

Capillaire de Montpellier (*Adianthum capillus veneris*). Sert à la fabrication du sirop capillaire.

LYCOPODIACÉES.

Espèce indigène.

La poussière contenue dans les capsules mâles de tous les lycopodes, et en particulier du *L. clavatum* est employée pour rouler des pilules, confectionner des artifices, etc., sous le nom de poudre de lycopode.

MOUSSES.

Espèces indigènes.

Toutes celles qui séjournent dans les marais forment la tourbe à brûler par l'entrelacement de leurs tiges successivement enterrées.

LICHENS.

Espèces indigènes.

Lichen d'Islande *Cetraria islandica*). Gélatineux, pectoral.

Pulmonaire de chêne (*Lobaria pulmonaria*)

Faisait autrefois partie du sirop dit de *mou de veau.*

Parelle ou Orseille d'Auvergne *(Lecanora parella)*. Contenant un principe colorant.

Variolaire blanche *(Variolaria dealbata)*. Même usage.

Espèce exotique.

Orseille des Canaries *(Rocella tinctoria)*. Contenant un principe colorant rouge.

LYCOPERDACÉES.

Espèce indigène.

La Truffe *(Tuber cibarium)*. Production végétale très-estimée à cause de son goût et de son parfum.

FUCACÉES.

Espèces indigènes.

Varecs *(Fucus vesiculosus, F. serratus)*. On en extrait de l'iode.

Mousse de Corse *(Gigartina helminthocorton)*. Vermifuge.

L'agriculture emploie les fucacées comme engrais.

Espèce exotique.

Durvillæa utilis. Chili. Sert d'aliment aux classes pauvres sur les côtes du Chili.

ULVACÉES.

Espèce indigène.

Ulve étendue (*Ulva latissima*). On la mange dans le nord de l'Angleterre et en Écosse.

§ 5. *Géographie botanique.*

Cette science a pour objet l'étude des lois de la distribution des végétaux à la surface de la terre : elle se lie par conséquent intimement à la physique du globe, à la géologie, mais surtout à la météorologie; car ce sont les influences climatériques qui sont les plus puissantes de toutes. L'intelligence de la géographie botanique nécessite la connaissance des végétaux, ou au moins de leurs principaux genres; elle exige, de plus, des notions de géographie fort complètes. Nous ne saurions raisonnablement supposer la connaissance des végétaux chez la plupart de nos lecteurs : nous nous bornerons donc à donner une idée de la distribution de nos arbres forestiers et des principales plantes cultivées d'abord dans les plaines et sur les plateaux peu élevés de l'Europe, puis sur les différentes chaînes de montagnes qu'elle présente depuis l'Etna jusqu'aux Alpes scandinaves. Nous suivrons, dans ce travail, l'excellent ouvrage de Schouw, intitulé : *Europa physisch-geographische Schilderung.*

I. Distribution des végétaux cultivés dans les plaines et sur les plateaux peu élevés de l'Europe. — 1° *Région de l'Olivier* (*Olea europæa*). Cette région comprend l'Espagne, la Sicile, l'Italie et la partie occidentale de la Grèce. Au nord elle est limitée par une ligne qui part de Bayonne, passe par Montmeillan, s'élève un peu au nord de l'Adriatique, et se termine dans le voisinage de Constantinople. Le Coton, l'Oranger, le Figuier, le Riz, le Maïs, le Froment, prospèrent dans cette région, et les quatre premiers végétaux ne sauraient être cultivés au delà avec la certitude d'une récolte annuelle. L'Oranger s'arrête au sud des Pyrénées ; en France il se montre aux environs d'Hyères; en Italie, il ne dépasse pas les latitudes de 44° 30'; sur la côte de Gênes et en Grèce on ne le trouve guère au nord du 40e de latitude.

2° *Région de la Vigne.* De l'embouchure de la Loire, la limite septentrionale s'élève en passant un peu au nord de Paris jusqu'à Bonn et Dresde, où elle atteint son point le plus boréal ; de là elle redescend au sud du 50e degré de latitude, et se termine enfin près de la mer Caspienne, sous le 45e environ.

La Vigne supporte assez bien les hivers rigoureux, mais elle ne saurait mûrir ses fruits pendant les étés sans chaleur de l'Europe occidentale ; c'est pourquoi, contrairement à la plupart des végétaux cultivés, elle s'avance plus vers le nord dans l'intérieur du continent que sur les côtes occidentales de l'Europe. Tous les arbres fruitiers cultivés en Europe réussissent admirablement dans toute l'étendue de cette région. La ligne du Maïs est à peu près parallèle à celle de la Vigne, mais elle reste à un degré plus au sud.

3° *Région des céréales.* Elle comprend presque toute l'Europe centrale. En effet, la limite moyenne de ces cultures se trouve en Écosse sous le 58e de latitude. Dans la presqu'île Scandinave elle passe un peu au nord de Drontheim, sous le 64e, puis elle redescend dans l'est et se termine en Russie au sud, sous le 59e environ. Toutes les céréales, le Froment, le Seigle, l'Orge, l'Avoine, les Pommes de terre, le Blé sarrasin *(Polygonum fagopyrum)* réussissent très-bien dans toute l'étendue de cette région ; dans sa partie septentrionale, c'est l'Orge, l'Avoine, le Seigle, le Lin et le Chanvre qui sont cultivés de préférence.

On plante aussi des arbres fruitiers dans toute cette région, mais leur limite est, en général, un peu plus méridionale, et dans l'intérieur du continent elle s'abaisse au-dessous du 55e degré.

4° *Région inculte.* Elle s'étend de la limite des céréales jusqu'au pôle ; on peut la nommer ainsi, car ce n'est que dans les localités spéciales et favorisées que l'Avoine, l'Orge et le Seigle peuvent encore réussir. L'Orge est de toutes les céréales celle qui s'avance le plus vers le nord. On la trouve encore à Elfbaken, village situé sous le 70e de latitude, dans la Laponie norwégienne. En Russie, elle ne dépasse guère le 65e. Au delà de ces limites, on ne trouve plus de céréales ; les Raves, les Choux, les Pois, l'Oseille, croissent seuls dans les jardins qui entourent les habitations.

II. Distribution des arbres forestiers dans les plaines et sur les plateaux peu élevés de l'Europe. — La region la plus méridionale est caractérisée par l'existence d'un grand nombre d'arbres à feuillage toujours vert. Tels sont le Chêne-Liége *(Quercus suber)*, le Chêne vert *(Q. ilex)*, le Laurier-rose *(Nerium Oleander)*, l'Arbousier, le Myrthe, le Laurier *(Laurus nobilis)*, le Pin pignon *(Pinus pinea)*, le Pin d'Alep, *(P. Alepensis)*, le Nopal *(Cactus)*, le Palmier nain *(Chamærops humilis)*, l'*Agave americana*, les Aloès, la Bruyère en arbre *(Erica arborea)*, le Genêt d'Espagne *(Spartium junceum)*, *Phyllirea latifolia*, le Laurier-Tin *(Viburnum Tinus)*. La ligne qui limite cette région au nord passe sur le versant septentrional des Pyrénées, sous le 44°, puis s'élève en Provence jusqu'à Montmeillan, coupe l'extrémité septentrionale de la mer Adriatique pour redescendre le long de sa côte orientale, traverser la Grèce et s'arrêter à Constantinople.

2° *Région du Châtaignier et du Chêne.* Sa limite septentrionale passe au nord du comté de Cornouailles en Angleterre, coupe la côte française au niveau de Boulogne et vient se terminer, sous le 49e, aux environs de Carlsruhe. Le Chêne (*Quercus robur*), le Hêtre (*Fagus sylvatica*) sont les essences dominantes dans les forêts de cette région.

3° La *Région du Chêne* s'étend dans les îles Britanniques jusqu'au golfe de Murray sous le 58e; elle s'élève ensuite dans la presqu'île Scandinave au nord de Drontheim jusqu'au 66e environ, puis elle s'abaisse en Suède en coupant la côte orientale de la presqu'île par 61° environ, puis elle traverse le 60e au niveau de Pétersbourg et se termine au 59e dans l'intérieur de la Russie d'Europe. L'Orme, le Tilleul, le Bouleau, le Pin, le Sapin et le Hêtre caractérisent cette région : ce dernier ne dépasse pas Edimbourg; sa limite s'élève ensuite dans la presqu'île Scandinave un peu au nord de Christiania, traverse la Suède au nord du lac Wettern, coupe la côte allemande au niveau de Kœnigsberg et descend toujours vers le sud où elle s'arrête près de la mer Caspienne sous le 43° de latitude; cet arbre est celui de tous dont la limite latitudinale varie le plus. Pour une différence de 35 degrés en longitude, on trouve que sa limite boréale varie de 17° en latitude.

4° *Région du Bouleau*. Au nord elle est bornée par une ligne qui passe par le nord de l'Islande, s'élève en Scandinavie jusqu'à 70°40′, puis s'abaisse vers l'est et se termine près de l'Obi au niveau du 67e. Le Bouleau nain (*Betula nana*), le Mélèze (*Larix europæa*), le Sapin et le Pin Sylvestre habitent cette région; ce dernier va jusqu'au nord de l'Ecosse, s'arrête en Scandinavie sous le 70e, mais dans l'intérieur de la Russie il ne dépasse pas le 65e.

III. Distribution des végétaux sur les montagnes de l'Europe. A mesure qu'on s'élève sur une montagne la température s'abaisse, et on parcourt une succession de climats analogue à celle qu'on traverserait en partant du pied de la montagne et en s'avançant vers le pôle.

Ainsi, dans les Apennins, lat. 42° jusqu'à une hauteur de 400 mètres, on trouve les arbres qui, dans les plaines, caractérisent la région la plus méridionale. La culture de l'Olivier réussit très-bien jusqu'à 500 mètres; puis vient la région du Châtaignier et du Chêne rouvre qui ombragent toutes les pentes comprises entre 400 et 1000 mètres; là s'arrête aussi la culture de la vigne. La zone suivante, qui se trouve comprise entre 1000 et 1900 mètres, correspond à la région du Hêtre qui s'y trouve en compagnie du Pin Sylvestre, du Pin, de l'If (*Taxus baccata*), du Noisetier, du Framboisier. La limite des céréales se trouve dans cette zone à une hauteur de 1400 mètres environ; au-dessus de la limite du Hêtre on ne trouve plus dans les Apennins que des plantes alpines ou polaires. Les Apennins n'atteignent pas la ligne des neiges éternelles.

Sur le mont Ventoux, en Provence, lat. 44° 10′. j'ai trouvé les limites suivantes sur les deux versants :

Versant méridional.	mètres.	Versant septentrional.	mètres.
Pin d'Alep	400		
Olivier	486		
Chêne vert. . . .	540	Chêne vert. . . .	620
Thym et Lavandes	1150	Noyer.	800
Hêtres	1660	Hêtres	1380
Pinus uncinata .	1810	Pinus uncinata .	1720

Sommet. . . 1911.

Sur les Alpes helvétiques, lat. moyenne 46°, la région inférieure est caractérisée principalement sur le versant méridional par la culture de la vigne et l'existence du Châtaignier qui s'élève à 800 mètres environ. Au-dessus on trouve des forêts de Hêtres et de Chênes qui s'arrêtent vers 1300 mètres sur le versant nord, et montent jusqu'à 1500 mètres sur le versant sud. La limite des champs cultivés se complique d'éléments politiques et ethnologiques, de sorte qu'elle n'est plus le résultat d'une simple différence de climat; ainsi, dans les Alpes pennines j'ai trouvé qu'en moyenne elle était de 1398 mètres sur le versant sud, de 1617 sur le versant nord. A cette zone succède celle des arbres verts qui, au sud, s'élèvent au-dessus de 2000 mètres, et ne dépassent pas 1800 sur le versant nord.

Au-dessus des Pins et des Sapins on ne trouve plus qu'une espèce d'Aune (*Alnus viridis*), des Saules herbacés, le Rhododendron et des plantes alpines telles que les *Saxifrages*. La ligne des neiges éternelles se trouve en moyenne à 2700 mètres.

Dans les Alpes scandinaves, sous le 60e de latitude, les Pins et les Sapins s'élèvent jusqu'à 800 mètres environ, le Bouleau monte 200 mètres plus haut; le Bouleau nain lui succède jusqu'à la ligne des neiges éternelles qui se trouve entre 1500 et 1600 mètres, suivant l'exposition et suivant l'année.

Sous le 67e degré de latitude, dans le même pays, les Pins et les Sapins s'arrêtent à une élévation moyenne de 320 mètres, le Bouleau atteint 500 mètres, et les plantes alpines ainsi que le Bouleau occupent le reste de la hauteur jusqu'aux neiges éternelles qui descendent jusqu'à 1100 mètres au-dessus du niveau de la mer.

Au Spitzberg, entre le 77e et le 80e de latitude, on ne trouve plus que deux Saules si humbles qu'ils se perdent au milieu de touffes de mousses et des plantes herbacées dont plusieurs habitent aussi les sommets neigeux des Alpes continentales.

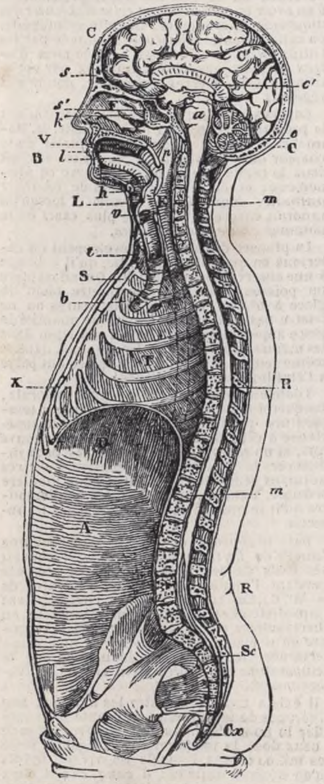
§ 6. *Indications historiques et bibliographiques*

Hippocrate, Aristote, et surtout Théophraste (225 ans avant J.-C.) chez les Grecs; Pline, Columelle et Galien, dans les deux premiers siècles de l'ère chrétienne chez les Romains, nous ont laissé des indications précieuses sur l'étude des végétaux dans l'antiquité. Le moyen âge ne sut guère que conserver les ouvrages des anciens. C'est à notre compatriote Tournefort, qui fit paraître, en 1694, ses *Institutiones rei herbariæ*, que commence une ère nouvelle pour la taxonomie végétale. Les noms des botanistes les plus célèbres du dix-huitième siècle, tels que Boerhaave, Haller, Gleditsch, Adanson, etc., sont dominés par celui du grand Linné, l'auteur du système sexuel. Mais nos compatriotes, Bernard de Jussieu et Antoine-Laurent de Jussieu, se sont aussi acquis une juste célébrité par l'établissement et le développement de la méthode naturelle. C'est à l'illustre voyageur M. de Humboldt que l'on doit la création de la géographie des plantes.

Les ouvrages de MM. Lamarck, de Candolle, Mirbel, Desfontaines, Richard, Ad. Brongniart, etc., plusieurs dictionnaires d'histoire naturelle, les collections académiques et les journaux scientifiques doivent être étudiés, ainsi que les livres des maîtres précédemment cités, par les personnes qui désirent acquérir une instruction solide en botanique.

XIII. ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE DE L'HOMME.

Coupe du corps humain sur la ligne médiane.

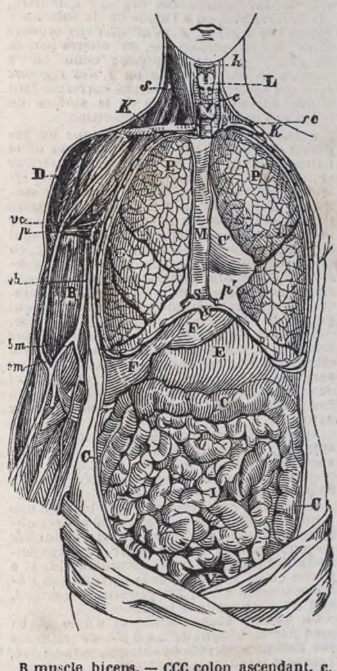


A abdomen. — **B** bouche. — **CC** crâne. — **C'** cerveau. — **D** diaphragme. — **E** œsophage. — **F** fosses nasales. — **L** larynx. — **R** rachis. — **S** sternum. — **T** thorax. — **V** voûte palatine. — **X** Appendice xyphoïde. — **Cx** Coccyx. — **Sc** sacrum.

a protubérance annulaire. — *b* bronches. — *c* cervelet. — *c'* corps calleux. — *k* cornets olfactifs. — *l* langue. — *m* moelle épinière. — *p* pharynx. — *s* sinus frontaux. — *s'* sinus sphénoïdal. — *t* trachée-artère. — *v* cordes vocales.

Corps humain vu de face

(Les téguments de la partie antérieure du cou et du bras droit ont été enlevés ainsi que la paroi antérieure de la poitrine et celle de l'abdomen.)



B muscle biceps. — **CCC** colon ascendant, c. transverse, c. descendant. — **C'** cœur. — **D** muscle deltoïde. — **E** Estomac. — **FF** foie. — **I** circonvolutions de l'intestin grêle. — **KK** clavicule, elle est coupée à gauche. — **L** larynx. — **M** médiastin antérieur. — **PP** poumons. — **S** extrémité inférieure du sternum. — **V** vessie. — **X** appendice xyphoïde.

c artère carotide. — *sc* artère sous-clavière — *vc* veine céphalique. — *vb* veine basilique. — *bm* v. basilique médiane. — *cm* v. céphalique médiane. — *h* os hyoïde. — *p* muscle gr. pectoral coupé. — *p'* plèvre recouvrant la face supérieure du diaphragme, etc. — *s* muscle sterno-cléïdo-mastoïdien

§ I. Notions préliminaires.

A la vue d'un être vivant, nous remarquons d'abord sa forme, sa structure, puis le jeu de ses organes et leur action vitale.

L'Anatomie (*ana temno*, disséquer) nous apprend à connaître la structure des êtres vivants.

La Physiologie (*phusis logos*, nature discours) traite des phénomènes dont l'ensemble constitue la vie.

On a donné à l'anatomie différentes qualifications ; suivant qu'elle s'applique aux végétaux, *A. végétale*, ou aux animaux, *A. animale* ; à tous les animaux, *A. comparée*, ou à l'homme seul, *A. de l'homme*; à la description topographique des organes d'un être, *A. descriptive*, ou à l'étude de la substance même des organes, *A. générale*; aux organes sains, *A. physiologique*, ou altérés par la maladie, *A. pathologique*; enfin on a nommé *A. chirurgicale* ou *A. des régions* celle qui détermine les parties correspondant à une région quelconque de la surface du corps et l'ordre de leur superposition.

Etres vivants. — Ce qui distingue les végétaux et les animaux des autres corps de la nature, c'est la *vie*, ce mouvement intérieur dont la cause est inconnue, mais dont les effets frappent nos sens. Aux êtres vivants seulement appartient la faculté de reproduire leur espèce, et, après avoir pris naissance par une sorte de dédoublement, de durer pendant un temps et sous une forme déterminée, en attirant dans leur composition des substances étrangères à eux, et rendant au monde extérieur une partie de leur propre substance. Cet échange, cette évolution de la matière, qui s'opère de l'être vivant au monde extérieur, constitue la *nutrition* dont le travail intime échappe à nos sens, mais dont l'existence est révélée par des faits nombreux. Pour ne parler que des animaux, l'enfant, au moment de sa naissance, pèse en moyenne 3 kil., et 25 ans après, à l'âge adulte, son poids dépasse 50 kil.

Après quelque temps de diète, le corps est amaigri, son poids a diminué; il a donc abandonné une partie de sa substance, dont la perte est devenue sensible parce qu'il ne l'a pas réparée par l'alimentation.

Sanctorius, qui passa dans une balance une grande partie de sa vie, a prouvé par ses observations que la *transpiration insensible* ou *perspiration* fait éprouver au corps humain des pertes de poids considérables. Il a trouvé qu'en sept heures la perspiration s'élevait souvent à 1 k., 224 pendant le sommeil, et à 0 k., 612 pendant la veille.

Un homme bien portant et d'âge moyen perd journellement de 2 à 3 kil. de son poids par l'effet des sécrétions cutanée, pulmonaire, rénale et intestinale (Burdach).

Enfin, lorsqu'on nourrit pendant un certain temps un animal avec de la garance, ses os se teignent en rouge; puis, quand on suspend l'usage de la garance, la teinte rouge diminue et finit par disparaître dans un temps déterminé (Voyez Absorption et Résorption, col. 511 et 512.)

L'*Organisation* est le mode de structure particulier suivant lequel sont réunies les parties dissemblables qui forment le corps des êtres vivants, d'où la dénomination de *corps organiques* donnée à ces êtres par opposition à celle de *corps inorganiques*, donnée à ceux qui ne sont pas doués de la vie.

Caractères distinctifs des végétaux et des animaux. — Les principes chimiques des êtres organisés appartiennent à la nature entière. Toutefois l'hydrogène, l'oxygène, le carbone et l'azote ont la plus grande part dans la composition chimique de ces êtres.

Le caractère essentiel des végétaux c'est le carbone: celui des animaux c'est l'azote.

Un caractère bien plus frappant qui distingue les animaux des végétaux, c'est la faculté de sentir ou de recevoir des impressions, et d'en avoir la conscience, et celle d'exécuter des mouvements spontanés. De cette spontanéité, de cette volonté intérieure, nommée par les Latins *anima* (souffle), est venu le nom d'*êtres animés*, donné aux animaux par opposition à celui d'*êtres inanimés*, donné aux végétaux.

Chaleur animale. — Les êtres organisés ont la propriété de produire de la chaleur. M. Dutrochet a démontré qu'il se produisait de la chaleur dans les végétaux. Mais c'est surtout dans le règne animal qu'on observe ce phénomène, et de là vient le nom de *chaleur animale*, donné à son résultat, lorsqu'on ignorait encore qu'il eût été plus exact de le nommer *chaleur organique*.

La plupart des animaux développent du calorique en quantité si minime, qu'il échappe à une observation superficielle. Quand on place un poisson dans un calorimètre plein de glace à 0°, au bout de trois heures on ne trouve pas qu'il se soit fondu une quantité de glace appréciable. En plaçant un lapin dans les mêmes conditions, on trouve que, dans le même temps, 500 grammes de glace ont passé à l'état liquide (M. Edwards).

Toutefois, Hunter, Davy, MM. Despretz, Becquerel et Breschet ont reconnu que la température intérieure des poissons était supérieure à celle de l'eau. Spallanzani a prouvé que, si un seul limaçon ne suffit pas pour influencer le thermomètre, plusieurs de ces animaux réunis le font monter d'une manière sensible. Melloni, Davy, Berthold ont démontré qu'il se produit de la chaleur chez les insectes.

Dans le courant du mois de juin 1840, une femelle de *Python bivittatus*, qui couvait ses œufs au Jardin-des-Plantes, a présenté pendant l'incubation une température de + 41° C. Les couvertures qui enveloppaient immédiatement le serpent ne donnaient au thermomètre que + 22°, et l'air de la chambre où il était renfermé, + 20°. L'incubation terminée, le serpent ne donna plus que la température du milieu où il vivait. (M. Valenciennes).

Il existe cependant entre les animaux une différence de température suffisante pour justifier le nom d'*animaux à sang froid* donné à ceux dont la température est égale à celle des milieux dans lesquels ils vivent, tandis qu'on nomme *animaux à sang chaud* ceux qui conservent une température presque toujours supérieure à celle de l'atmosphère. Au reste, la température des uns et des autres est à peu près constante. Cette température varie pour l'homme et les autres mammifères de + 36° à + 40°; chez les oiseaux, elle s'élève à + 42° (M. Edwards).

Suivant Burdach, le sang de l'homme a une température de + 36° à + 36°,2 dans l'intérieur du corps. C'est dans les organes qui touchent immédiatement au diaphragme que la température est le plus élevée.

L'action musculaire accroît la chaleur chez les animaux. Les émotions vives l'accroissent ou la diminuent.

On ne sait rien de positif sur les causes de la chaleur dans les êtres organisés.

ORGANISATION. — On appelle *organes* (*organon*, instrument) les parties à l'action desquelles sont dus les phénomènes vitaux. Quand plusieurs organes concourent à produire un phénomène, on désigne cet assemblage sous le nom d'*appareil*, et l'on entend par *fonction* l'action d'un appareil ou d'un organe.

Les fonctions peuvent se diviser en trois classes : fonctions de *génération* et de *nutrition* assurant la conservation de la race et l'entretien des corps, communes à tous les êtres vivants et constituant la vie *végétative* ; fonctions de *relation* servant à établir les rapports entre les individus, particulières aux animaux et constituant la vie *animale*.

Moins les organes et les appareils sont nombreux, plus les fonctions sont restreintes. Chez les animaux dont la vie est la plus simple et dont les facultés sont aussi les plus bornées, la structure du corps est partout la même, et il n'y a qu'un organe, c'est le corps, l'être tout entier qui, suivant l'ingénieuse comparaison de M. Milne Edwards, est semblable à un atelier où tous les ouvriers seraient occupés d'un même genre de travail ; et de même que, séparés les uns des autres, ces hommes n'en exécuteraient pas moins leur travail, et que chacun d'entre eux pourrait devenir le noyau d'un nouvel atelier, de même si l'on divise ces animaux en plusieurs morceaux, chaque fragment continue à vivre, se nourrit, se développe, et constitue bientôt un nouvel animal aussi complet que celui dont il provient. Entre des êtres aussi simples et ceux dont l'organisation est la plus complexe, il existe une distance immense, mais occupée par des degrés intermédiaires. En les parcourant, on voit les organes augmenter de nombre et les fonctions se *localiser*, c'est-à-dire que chaque organe occupe une place spéciale dans le corps. Lorsqu'on l'en sépare, l'animal perd une de ses fonctions, et cette perte amène dans l'organisme une perturbation proportionnelle à l'importance de cette fonction pour l'entretien de la vie.

Le corps des animaux est composé de *solides* et de *liquides*.

Les *solides* constituent ce qu'on appelle les *tissus organiques*. Quelque variés que semblent ces tissus, telle est leur analogie qu'examinées au microscope ils paraissent tous formés, en dernière analyse, de petits globules réunis en chapelet et ne différant que par leur disposition. On distingue cependant cinq tissus organiques principaux :

1° Le *tissu cellulaire*, ainsi nommé à cause de sa texture en cellules ; il constitue la presque totalité du corps chez les animaux les plus simples, et concourt chez l'homme à la formation de tous les organes dans la plupart desquels il joue le même rôle que le mortier dans une construction. C'est dans son épaisseur que se dépose la graisse, sécrétion particulière à laquelle on a donné le nom de *tissu adipeux*.

2° Le *tissu musculaire*, connu vulgairement sous le nom de *chair*. C'est l'agent producteur des mouvements ; il consiste en fibres susceptibles de se raccourcir par contraction. Ces fibres, disposées par couches ou réunies en faisceaux, prennent le nom de *muscles*

3° Le *tissu fibreux*, qui diffère du tissu musculaire par ses caractères chimiques et physiques, et surtout en ce qu'il n'est pas contractile. Il forme les tendons, les aponévroses et les ligaments.

4° Le *tissu osseux*, de consistance pierreuse, formé de gélatine et de phosphate de chaux, présentant quelquefois une disposition celluleuse, quelquefois compacte comme l'ivoire.

5° Le *tissu nerveux*, siége de la faculté de sentir, substance molle et ordinairement blanchâtre qui constitue l'*encéphale* et les *nerfs*. M. Milne Edwards considère les membranes muqueuses et séreuses, et même les tissus fibreux et osseux, comme des modifications du tissu cellulaire.

Les *liquides* se réduisent tous à de l'eau tenant en dissolution ou en suspension diverses substances, et c'est à leur existence dans l'épaisseur même des tissus que ceux-ci doivent leur souplesse ; de là la rigidité des tissus organiques soumis à la dessiccation, et la possibilité de leur rendre leur souplesse en les humectant de nouveau. Le corps de l'homme contient environ les 9/10e de son poids de liquides ; ainsi, en desséchant au four pendant dix-sept jours, un cadavre pesant 60 kil., on en a réduit le poids à 6 kil.

Les principaux liquides sont :

1° Le *sang*, auquel on peut rapporter tous les autres, soit comme destinés à entrer dans sa composition, soit comme lui ayant appartenu ;

2° La *lymphe*, dont les caractères physiques présentent beaucoup d'analogie avec ceux du sang, et qui paraît n'être qu'un sang imparfait.

Le sang n'a pas les mêmes caractères chez tous les animaux. Celui de l'homme est rouge et présente au microscope deux parties distinctes : 1° un liquide jaunâtre et transparent, le *sérum* ; 2° de petits corps solides circulaires et d'un beau rouge, les *globules* du sang. Leur diamètre est en moyenne 0 mil., 0073. La quantité de ces globules est, suivant M. Milne Edwards, en rapport avec la chaleur animale. Chez les oiseaux qui de tous les animaux possèdent la plus haute température, les globules forment 14 ou 15 centièmes du poids du sang ; chez l'homme et les autres mammifères, ils varient de 9 à 12 centièmes, tandis que chez les animaux à sang froid le sang n'a guère que 5 à 6 centièmes de son poids en globules.

Sur 100 parties de sang on compte environ 78 d'eau, 7 d'albumine, 15 de fibrine, quelques millièmes de graisse et de sels et des traces de peroxyde de fer.

Hors du corps, le sang se divise bientôt en deux parties distinctes : l'une gélatiniforme, compacte, assez cohérente et de couleur rouge, c'est le *caillot* ; l'autre liquide, d'un jaune verdâtre, baignant la première, c'est le *sérum*.

Le caillot est formé principalement de fibrine et de matière colorante. Le sérum se compose presque uniquement d'eau et d'albumine.

Aucun moyen ne peut arrêter la coagulation du sang, ce n'est qu'à l'état de vie que ses parties constituantes restent entièrement unies, et la coagulation peut être considérée comme la mort du sang.

Dans quelques maladies, le sang qu'on tire de la veine se coagule imparfaitement. Dans le choléra asiatique, au contraire, le sang se coagule tout vivant, pour ainsi dire, puisque lorsqu'on ouvre la veine pendant la période algide, on le voit sortir à l'état de gelée.

Subvenir aux besoins de la nutrition, telle est la destination spéciale du sang qui renferme tous les matériaux nécessaires à la formation des parties solides ou liquides du corps; c'est là ce qui lui a fait donner le nom expressif de chair coulante.

C'est encore à ce liquide que sont dus l'excitation vitale des organes et l'entretien de l'activité. Lorsque dans un point quelconque le cours du sang est interrompu de manière que le liquide nourricier ne puisse arriver à une partie du corps, cette partie perd bientôt la sensibilité et est frappée de mort; c'est ce qui arrive lorsque chez les vieillards les artères des membres, obstruées par des concrétions osseuses, ne donnent plus passage au sang.

L'*hémorrhagie* ou écoulement du sang, pour peu qu'elle soit considérable, amène la suspension des mouvements et de la faculté de sentir, et si elle continue, l'abolition de tout phénomène vital.

Lorsque, sans être interrompu complétement dans une partie du corps, le cours du sang y est ralenti ou gêné de manière que cette partie ne reçoive pas toute la quantité de sang qui lui est dévolue, la nutrition s'opère avec moins d'énergie, le volume, la vitalité des tissus diminuent, on dit alors que ces tissus sont à l'état d'*atrophie*. (V. Résorption, col. 512).

Quand au contraire une cause augmente fréquemment ou d'une manière continue l'afflux du sang vers un point, la nutrition est plus énergique, et l'on voit se produire l'*hypertrophie*.

Le repos long-temps prolongé d'une partie du corps amène constamment le premier effet; exemple : l'atrophie d'un membre qu'une fracture a condamné long-temps à l'inaction.

L'exercice produit toujours une hypertrophie plus ou moins marquée, c'est ainsi que chez les danseurs les membres inférieurs prennent un développement considérable; que les muscles qui font mouvoir le bras sur la poitrine deviennent très-volumineux chez les ouvriers qui les exercent beaucoup, comme les boulangers, les tailleurs de pierre, etc.

Pour porter ainsi les éléments de la nutrition et l'excitation vitale dans toutes les parties, il faut que le sang les parcoure, qu'il se meuve, et c'est ce mouvement qu'on nomme *circulation* (voyez § 6).

Pour que les éléments de la nutrition puisés dans le monde extérieur puissent se mêler au sang et être assimilés aux organes, il faut que ces éléments pénètrent dans l'économie, qu'ils soient en quelque sorte pompés par les tissus, et ce dernier phénomène a reçu le nom d'*absorption*.

C'est par *imbibition* que les liquides sont absorbés. Les tissus de l'économie animale sont perméables aux liquides; ainsi, lorsque l'on remplit d'eau acidulée un tronçon de veine et qu'on le place dans un vase contenant de la teinture de tournesol, on voit au bout de quelque temps le liquide bleu tourner au rouge, par le contact de l'acide qui passe à travers la membrane qui le contient.

En observant les phénomènes de la perméabilité des tissus et du mélange des liquides séparés par des membranes, M. Dutrochet a reconnu que quand deux liquides d'inégale densité, comme de l'eau et une solution de gomme, sont ainsi mis en expérience, parfois le liquide le moins dense est absorbé et vient se mêler au plus dense; si donc la solution de gomme est placée dans un sac membraneux, surmonté d'un tube et plongeant dans un vase plein d'eau, l'eau pénètre dans le sac et, mêlée à la solution de gomme, s'élève dans le tube, de sorte que le niveau du liquide le plus dense devient alors supérieur à celui du liquide le moins dense. Ce phénomène curieux de l'absorption des liquides a reçu le nom d'*endosmose*. (voyez col. (385).

Quand le sang ou une portion de sa partie aqueuse et des matières solubles qu'elle renferme, pénètre les tissus et s'épanche dans les cavités ou au dehors à l'état liquide ou en vapeurs, on dit qu'il y a *exhalation*.

Le sang ou les liquides épanchés dans les cavités, ou extravasés dans l'épaisseur des tissus, disparaissent dans un certain espace de temps et sont repris par l'économie. De même aussi les atomes constituants de l'organisme qui ont pris naissance dans le sang par l'action plastique, retournent après un temps donné dans le torrent de la circulation, y sont de nouveau modifiés, abandonnent sous forme d'excrétions une portion de leur substance, et par cette évolution continuelle sont tour à tour assimilés en remplacement d'autres et éliminés tandis que d'autres les remplacent.

Il en résulte qu'en un certain espace de temps, sur lequel les auteurs ne sont pas d'accord, toute la substance du corps est renouvelée. Ce phénomène d'absorption particulière est appelé *résorption*. Son action s'étend non-seulement sur les liquides épanchés ou extravasés, mais aussi, comme nous l'avons dit, sur les parties solides dans lesquelles l'activité vitale diminue, et qui au lieu de puiser dans le sang les éléments de leur nutrition, coopèrent à la nutrition générale aux dépens de leur propre substance.

La résorption est donc un des phénomènes qui concourent à produire l'atrophie. C'est par résorption que les os colorés par la garance reprennent leur couleur normale, que chez les individus affectés d'*ictère* ou jaunisse, la bile qui colore en jaune le pigment tum de la peau, disparaît au bout d'un certain temps, etc.

Les tissus animaux seuls sont résorbés. Quand un corps étranger insoluble est placé dans un point quelconque de l'économie, il peut y séjourner indéfiniment sans diminuer de volume. On voit des balles de plomb demeurer dans l'épaisseur des tissus sans y être soumises à la résorption, tandis que les esquilles détachées d'un os s'arrondissent et finissent quelquefois par disparaître.

J'ai connu un jeune homme qui depuis plusieurs années portait dans la pulpe du pouce gauche une écharde de bois : comme ce corps étranger lui causait souvent des douleurs vives, il s'ouvrit un jour le pouce et parvint avec assez de peine à extraire l'écharde qui avait environ 2 millimètres de large sur 6 à 7 de longueur; elle était d'une couleur brune assez foncée, mais les angles en étaient aussi vifs que si son introduction dans le doigt eût daté de la veille, et l'on pouvait y reconnaître la texture du bois de chêne.

Quand il se sépare du sang des produits nouveaux qui en diffèrent par leur nature ou leurs proportions chimiques, ou qui renferment en abondance des substances dont on ne trouve dans le sang que des traces, ce travail, ainsi que le produit qui en résulte, sont désignés sous le nom de *sécrétion*.

Nous étudierons les autres liquides en même temps que les organes, avec lesquels ils ont un rapport spécial.

§ 2. *Idée générale du corps humain.*

En considérant le corps de l'homme, on voit d'abord un tégument général qui l'enveloppe en entier; c'est la *peau* dont les ongles et les poils sont une dépendance. Partout où des ouvertures établissent une communication entre l'intérieur et l'extérieur du corps, la peau se réfléchit sur leur pourtour et va, en modifiant sa structure, constituer la *membrane muqueuse*, cette peau interne destinée, comme l'externe, à préserver les organes qu'elle tapisse de l'action directe des agents extérieurs ou des sécrétions.

D'autres fonctions non moins importantes sont communes à la peau et à la muqueuse; ce sont l'exhalation et l'absorption. Telle est l'analogie entre ces deux membranes, que la peau, soumise au contact prolongé des matières qui baignent la muqueuse, des larmes par exemple, prend bientôt l'aspect et les caractères de la muqueuse, de même que celle-ci, exposée au frottement des vêtements et à l'action desséchante de l'air, se transforme bientôt en peau. Telle est la sympathie, la solidarité qui résultent de leurs fonctions communes, que l'une ne saurait être gravement atteinte sans que l'autre n'en ressente le contre-coup; exemples: la diarrhée, suite des brûlures étendues, le rhume, suite des refroidissements, l'influence bonne ou mauvaise mais constante des médications internes sur les maladies de la peau.

Sous la peau s'étend une couche de *tissu cellulaire graisseux* qui remplit les vides et arrondit les formes, c'est ce qu'on nomme vulgairement la *graisse*. Dans quelques régions, des muscles s'insèrent directement à la peau qu'ils sont destinés à mouvoir; ce sont les *muscles peauciers*. Au milieu du tissu cellulaire sous-cutané rampent les veines et les vaisseaux lymphatiques superficiels; ces derniers traversent çà et là des renflements réunis par groupes sur quelques points, et que l'on nomme *ganglions lymphatiques*.

Au-dessous du tissu cellulaire on trouve les *muscles* juxtà-posés et superposés les uns aux autres, et enveloppés par des membranes chatoyantes comme la nacre, solides, inextensibles, qui séparent les couches musculaires et quelquefois isolent les muscles en les engaînant et s'attachant à certains points de leur surface. Ces membranes sont les *aponévroses*. Quand, nées à la surface ou dans l'intérieur d'un muscle, elles constituent son extrémité sous forme de cordes à fibres parallèles, on les nomme *tendons*.

Au centre de toutes ces parties, sont les *os*, charpente articulée dont chaque pièce est inflexible et soutient ce qui l'entoure; c'est dans le voisinage des os et à l'abri des agents extérieurs que se trouvent les troncs principaux des vaisseaux et des nerfs.

Au sommet du corps, la *tête* repose sur le *rachis* ou *colonne vertébrale*, support osseux le long duquel viennent se suspendre les parties qui constituent le tronc et les membres supérieurs. La colonne vertébrale maintient le tronc dans la ligne droite et transmet son poids aux membres inférieurs.

A l'intérieur de la tête, on remarque une grande cavité à peu près ovoïde, formée par la boîte osseuse du crâne et contenant le *cerveau* et le *cervelet*; cette cavité communique avec un canal creusé dans l'épaisseur du rachis: c'est le *canal vertébral* qui renferme la *moelle épinière*.

Dans des cases spéciales et comme enchâssés dans les os de la face et du crâne, se présentent les *appareils de la vision*, de l'*audition*, de l'*olfaction*. Au-dessous de ces appareils et en communication avec la cavité qui recèle le dernier, s'ouvre la bouche où siège l'organe du goût et de la parole. De la bouche part un canal qui descend le long du cou au-devant de la colonne vertébrale et conduit dans la grande *cavité du tronc*. Cette dernière est divisée vers la moitié de sa hauteur par une cloison musculo-aponévrotique, le *diaphragme*, qui établit la limite entre la partie supérieure du tronc ou *thorax* et sa partie inférieure ou *abdomen* et sépare la *poitrine* ou *cavité thoracique* du *ventre* ou *cavité abdominale*. Dans la poitrine sont placés les poumons et le cœur, organes principaux de la respiration et de la circulation. L'abdomen renferme dans sa cavité les différents appareils destinés à élaborer les éléments de la nutrition et à séparer du sang les sécrétions principales.

Les poumons communiquent avec la bouche par un long tube, la *trachée-artère* dont l'extrémité est formée par le *larynx*, organe de la voix. Derrière la trachée et les poumons, descend un autre tube, l'*œsophage*, qui, parti aussi de l'arrière-bouche, va traverser le diaphragme et parvient dans l'abdomen.

Nous avons pris du corps humain une idée générale en l'examinant de l'extérieur à l'intérieur. Procédant maintenant en détail, nous parcourrons dans l'ordre qui suit les divisions de l'anatomie, en étudiant les phénomènes physiologiques qui s'y rapportent.

1° L'*Ostéologie* (os et cartilages).

2° La *Myologie* (muscles) et l'*Aponévrologie* (aponévroses et tendons).

3° La *Splanchnologie* (organes contenus dans les cavités.)

4° L'*Angéiologie* (système vasculaire).

5° La *Névrologie* (centres nerveux et nerfs).

§ 3. *Ostéologie*.

L'OSTÉOLOGIE (*osteon, os*) comprend l'étude des os et celle des cartilages, ou *chondrologie*; on y rattache également celle des articulations ou *syndesmologie*.

Les os sont des parties de consistance pierreuse, destinées à servir de jonction aux autres parties du corps, de moyens de protection à plusieurs, et de points d'attache aux muscles qui les enveloppent.

On divise les os, suivant leur forme, en os *longs*, os *plats* ou *larges*, os *courts*, et os *mixtes*. Les os participent à la nutrition générale, et reçoivent des vaisseaux par leur superficie. Ils sont entourés d'une membrane vasculaire et fibreuse nommée le *périoste*. Les os longs présentent à leur centre, et dans une partie de leur étendue, une cavité dont la forme est en rapport avec celle du corps de l'os, et qu'on nomme la *cavité médullaire* parce qu'elle contient la *moelle* de l'os, substance graisseuse qu'il ne faut pas confondre avec la moelle épinière.

Les os sont plus gros chez l'homme que chez la femme, et les saillies qu'ils forment dans les points d'attache des muscles sont plus prononcées.

Le tissu osseux est plus ou moins compacte suivant qu'on l'observe à l'extérieur ou à l'intérieur des os. Les couches externes, dont la densité est très-grande, constituent le *tissu éburné* ou ivoire des os. Dans les os plats, comme, par exemple, ceux du crâne, c'est le tissu éburné qui forme la *table interne* et la *table externe*. A l'intérieur des os, le tissu osseux devient aréolaire, comme spongieux, et reçoit le nom de *diploé*. C'est ce dernier qui constitue presque exclusivement les *os courts*, comme, par exemple, ceux du carpe et du tarse.

Les os présentent à considérer une partie moyenne ou *corps* et des extrémités qui, suivant leur forme, prennent le nom d'*ailes*, d'*apophyses*, de *têtes*, de *condyles* ou de *crêtes*. Les extrémités des os qui ont des surfaces articulaires sont formées dans le jeune âge par des pièces séparées qui portent le nom d'*épiphyses*, et se soudent, avec le temps, au reste de l'os

L'ensemble des os constitue le *squelette*, qui est la charpente du corps. Les auteurs ne sont point d'accord sur le nombre des os; en les comptant à l'époque où leur développement est complet, c'est-à-dire vers trente ans, on trouve qu'ils sont au nombre de 198, savoir :

Colonne vertébrale, y compris le sacrum et le coccyx,	26
Crâne,	8
Face,	14
Hyoïde,	1
Thorax, côtes et sternum,	25
Chaque membre supérieur, épaule, bras, avant-bras et main, 32	64
Chaque membre inférieur, bassin, cuisse, jambe et pied, 30	60
	198.

En même temps que les os doivent être étudiés, les *cartilages*, ces os flexibles qui tantôt forment à eux seuls le squelette de certains appareils, comme à la conque de l'oreille, tantôt servent à établir la continuité entre les pièces osseuses, donnent à certaines parties du squelette l'élasticité, l'extensibilité nécessaires, comme au thorax, ou revêtent les surfaces articulaires, et servent comme de coussinets destinés à supporter la pression et les frottements auxquels ne résisterait pas le tissu osseux.

Les os sont réunis les uns aux autres par juxta-position, et maintenus dans ces rapports soit par les dentelures de leurs bords, qui s'enchevêtrent et forment des *sutures*, comme au crâne, soit par des liens fibreux qui s'attachent à leur surface, et qu'on nomme *ligaments*. Le point où des os sont réunis par contiguité, au moyen de ligaments, se nomme *articulation*. Les articulations sont en général enveloppées d'un sac fibreux, la *capsule articulaire*, qui concourt à les consolider, et dont l'intérieur est baigné par un liquide onctueux qui joue dans les articulations le rôle de l'huile dans les rouages d'une machine. C'est la *synovie* que secrète une membrane spéciale appelée *membrane synoviale*.

TÊTE. Les os de la tête sont : le *coronal* ou *frontal*, les deux *pariétaux*, les deux *temporaux*, l'*occipital*, le *sphénoïde* et l'*ethmoïde*, qui forment le *crâne*, les *os propres du nez*, les *os unguis*, les *os malaires*, les *maxillaires supérieurs* et *inférieur*, le *vomer*, les *os palatins*, qui forment la *face*. Le frontal, le temporal, le pariétal et l'occipital sont des os plats; leur surface interne est concave et présente des inégalités nommées *digitations*; leur surface externe est convexe, lisse, et les saillies qu'elle offre ne sont point, pour la plupart, en rapport avec les dépressions de la face interne.

Le frontal constitue la région antérieure du crâne ou *sinciput*, le temporal forme par sa partie plate ou écailleuse la région des *tempes*, et sa partie épaisse ou *rocher* renferme l'appareil interne de l'audition. L'occipital constitue la région postérieure du crâne ou *occiput*, et concourt à former, avec le sphénoïde et l'ethmoïde, la *base du crâne*, au milieu de laquelle on voit une ouverture nommée *trou occipital* qui fait communiquer la cavité du crâne avec le canal vertébral, et de chaque côté de cette ouverture deux protubérances ou *condyles* qui s'articulent avec la première vertèbre.

Le maxillaire supérieur, l'os unguis et l'os malaire concourent avec le sphénoïde et l'ethmoïde à former l'*orbite* de l'œil. Les *fosses nasales* sont creusées dans les maxillaires supérieurs, recouvertes en avant par les os propres du nez auxquels s'ajoutent des cartilages et séparées en deux par une cloison que forment le vomer et un cartilage.

Tous les os de la tête, à l'exception du maxillaire inférieur, s'articulent entre eux au moyen de *sutures* dont un grand nombre se soudent avec l'âge, de sorte que dans la vieillesse presque tous ces os sont inséparablement unis.

La *cavité buccale* est comprise entre les maxillaires supérieurs et les os palatins en haut, et le maxillaire inférieur qui la borde en bas et sur les côtés, et s'articule avec le maxillaire supérieur. Les maxillaires supérieurs et inférieur présentent sur un de leurs bords des trous disposés suivant une ligne parabolique: ce sont les *alvéoles*, où s'implantent les dents.

Enfin, outre ces cavités, il en existe d'autres nommées *sinus*, qui sont situées dans l'intérieur des os; nous citerons les *sinus frontaux*, le *sinus maxillaire*, et le *sinus sphénoïdal*.

COLONNE VERTÉBRALE. On nomme ainsi une série d'os appelés *vertèbres* qui sont placés bout à bout et articulés entre eux. Sur le sommet de la colonne vertébrale repose la base du crâne.

Chaque vertèbre présente : 1° un *corps* réuni à celui de ses deux voisines par un cartilage ou ligament *intervertébral*; 2° une ouverture arrondie qui concourt à former le canal vertébral, et est comprise entre le corps et les *lames* des vertèbres; 3° des apophyses ou branches saillantes dont deux latérales, *apophyses transverses*, et une médiane, *apophyse épineuse*. C'est à la série de ces dernières qu'on donne vulgairement le nom d'*épine du dos*. A la base de chaque apophyse transverse, on remarque une surface articulaire et un trou rond nommé *trou de conjugaison* destiné au passage des vaisseaux et nerfs.

Des ligaments vont d'une apophyse à l'autre et consolident l'ensemble. On compte sept vertèbres *cervicales*, dont la première qui s'articule avec l'occipital se nomme l'*atlas* et la deuxième l'*axis*; douze *vertèbres dorsales* et cinq *lombaires*. La dernière lombaire s'articule avec le *sacrum*, os composé de cinq vertèbres primitivement séparées, puis soudées entre elles. A l'extrémité inférieure du sacrum s'articule le *coccyx*, diminutif du sacrum et formé de trois vertèbres rudimentaires. Le coccyx développé devient chez les animaux le squelette de la queue.

L'OS HYOÏDE est un demi-cercle osseux placé au-devant des vertèbres cervicales, et au-dessous du maxillaire inférieur. Seul de tous les os il n'est pas articulé avec le reste du squelette, et n'y tient que par des muscles ou des ligaments; il sert de point d'attache supérieur à quelques muscles du cou, et inférieur à des muscles de la langue.

LE THORAX est une cage osseuse formée par les *côtes* et le *sternum*. On appelle côtes des os arqués, flexibles et de grandeur différente qui s'articulent en arrière avec les vertèbres dorsales, et viennent s'unir en avant par des cartilages à un os plat et long, le sternum.

Les côtes sont au nombre de douze de chaque côté, savoir : sept *vraies côtes* ou côtes sternales, réunies directement au sternum par des cartilages séparés, et cinq *fausses côtes* ou côtes asternales dont les cartilages s'unissent entre eux pour venir se joindre à celui de la septième vraie côte.

Membre supérieur ou thoracique. — C'est au thorax que se fixe le membre supérieur au moyen de deux os.

1° La *clavicule*, os long, cylindrique, légèrement courbé en S, placé transversalement du sternum à l'omoplate et articulé par ses extrémités avec ces deux os.

2° L'*omoplate* (*scapulum*), os large, plat, à peu près triangulaire, présentant deux apophyses : l'*acromion* et l'apop. *coracoïde*, et une surface articulaire, *cavité glénoïde*.

Articulation de l'épaule ou *huméro-scapulaire*. C'est dans la cavité glénoïde que s'articule l'*humérus*, os du *bras* qui présente une extrémité supérieure ou *tête*, arrondie et jointe par un *col* très-court au corps de l'os. L'extrémité inférieure est large et offre deux protubérances, les *condyles* en forme de poulies et avec lesquels s'articule l'avant-bras.

Articulation du coude ou *huméro-cubitale*. On compte à l'*avant-bras* deux os, le *cubitus* et le *radius*. Ils sont placés parallèlement. Le cubitus s'articule d'une manière solide avec l'humérus et présente une apophyse, l'*olécrâne*, qui en s'appuyant sur l'humérus borne en arrière les mouvements de l'avant-bras.

Le radius s'articule en haut avec l'humérus et le cubitus auquel l'unit une aponévrose, *ligament interosseux*, et sur lequel il peut exécuter des mouvements de rotation. A leur extrémité inférieure, ces deux os s'articulent encore entre eux, et tous deux sont articulés avec la main.

Articulation du poignet et de la main, ou *radio-carpienne*, *carpo-métacarpienne* et *métacarpo-phalangienne*. — Le radius a plus de part que le cubitus à l'articulation de l'avant-bras avec la main. On divise la main en trois parties :

1° Le *carpe* ou poignet, formé de huit os irréguliers et rangés sur deux lignes : on les nomme le *scaphoïde*, le *semi-lunaire*, le *pyramidal*, le *pisiforme*, le *trapèze*, le *trapézoïde*, le *grand os* et l'*unciforme*. Les trois premiers forment par un de leurs côtés une surface convexe, une sorte de condyle qui est reçu dans une cavité creusée à l'extrémité inférieure des deux os de l'avant-bras.

2° Le *métacarpe*, ou la partie pleine de la main, articulé avec le carpe et composé de cinq os que l'on nomme *métacarpiens*, et qui se comptent du bord externe ou correspondant au pouce, au bord interne ou correspondant au petit doigt.

3° Les *doigts*, dont les os nommés phalanges sont au nombre de deux pour le pouce, et de trois pour les autres doigts. La première phalange de chaque doigt s'articule avec le métacarpien correspondant et avec la deuxième qui s'articule elle-même avec la troisième ou *phalange unguéale*.

Membre inférieur ou abdominal. — De chaque côté du sacrum, s'articule un os large et contourné sur lui-même, c'est l'*os iliaque* ou *coxal* qui concourt avec son congénère à former le bassin. La région qui correspond extérieurement à cet os est connue vulgairement sous le nom de *hanche*. La partie pleine de l'os iliaque présente les *fosses iliaques interne* et *externe* ; sa branche antérieure qui, pour sa disposition, rappelle la clavicule se nomme le *pubis ;* sa branche inférieure, l'*ischion* ; entre ces deux branches, est une ouverture ovale chez l'homme, triangulaire chez la femme : c'est le *trou sous-pubien*. Les deux pubis sont réunis sur la ligne médiane par un fibro-cartilage ; leur point d'union porte le nom de *symphyse*.

Articulation de la hanche ou *coxo-fémorale*. Vers le milieu et en dehors de l'os iliaque, on voit une cavité demi-sphérique, c'est la *cavité cotyloïde* dans laquelle s'articule l'os de la *cuisse* ou *fémur*. Ce dernier est long, un peu courbé sur lui-même, sa tête arrondie est reçue dans la cavité cotyloïde où la fixent un ligament intérieur et une capsule articulaire. Le corps et la tête du fémur sont réunis par un col dirigé obliquement ; à l'extrémité supérieure du corps de l'os sont deux saillies, le *grand* et le *petit trochanters*. Le grand trochanter forme la saillie de la hanche proprement dite. Deux lignes rugueuses partent des trochanters, se réunissent plus bas et forment la *ligne âpre* qui suit en arrière le corps de l'os ; l'extrémité inférieure, large et solide, est taillée en poulie et présente les *deux condyles* du fémur.

Articulation du genou ou *fémoro-tibiale*. Ces condyles reposent et roulent sur le *tibia*, dont l'extrémité supérieure, large et creusée pour recevoir les condyles, se rétrécit pour former un corps long et prismatique. Au-devant de l'articulation du tibia avec le fémur est située la *rotule*, os plat et presque triangulaire fixé au tibia par le *ligament rotulien* et concourant à l'articulation du genou. En dehors du tibia on voit un os long et grêle, c'est le *péroné* qui forme avec le tibia le squelette de la *jambe*. L'extrémité inférieure du tibia présente une protubérance ou *malléole interne*, celle du péroné constitue la *malléole externe ;* on donne vulgairement à ces deux saillies le nom de *cheville du pied*.

Articulations du pied, ou *tibio-tarsienne*, *tarso-métatarsienne* et *métatarso-phalangienne*. Le tibia transmet au pied le poids du corps, et s'articule, ainsi que le péroné, avec le *tarse*, partie qui est au pied ce que le carpe est à la main. Le tarse se compose de l'*astragale*, du *calcanéum* qui forme le talon, du *scaphoïde*, du *cuboïde* et de trois autres os nommés *cunéiformes*. Le *métatarse*, qui forme en dessus le coude-pied, fait suite au tarse et se compose de cinq *métatarsiens* que l'on compte du bord interne du pied au bord externe. Enfin les doigts du pied ou *orteils* sont composés de phalanges comme ceux de la main et en même nombre. De petits os arrondis et analogues à la rotule se placent au-dessous de quelques-unes des articulations des orteils : ce sont les *os sésamoïdes*.

§ 4. *Myologie* (*mys*, muscle) et *Aponévrologie*. — *Mouvements*.

Les muscles sont les organes des mouvements; ils sont rouges, et leur couleur vient du sang qu'ils contiennent. Formés de faisceaux de fibres unis par du tissu cellulaire, ils sont en dernière analyse constitués par des fibres d'une ténuité extrême, droites, parallèles et qui, vues au microscope, apparaissent comme un chapelet de petits globules d'environ 1/300 de millimètre de diamètre. (M. Edwards). Les muscles forment une grande partie de la masse du corps; ils sont essentiellement composés de fibrine : on y trouve aussi de l'albumine et quelques sels.

Contraction musculaire, mouvements. Les fibres musculaires ont la propriété de se contracter sous l'influence de certaines causes ; elles forment alors des lignes brisées sous des angles plus ou moins ouverts suivant l'énergie de la contraction, et en outre elles paraissent revenir individuellement sur elles-mêmes (Muller) ; toutes se contractent à la fois, et le muscle qu'elles forment se trouvant raccourci, tend à rapprocher les deux points où s'attachent ses extrémités. C'est ainsi que les muscles impriment le *mouvement* aux différentes parties du corps.

Dans la théorie des mouvements, les os représentent des bras de levier de divers genres, et les muscles la puissance ; on comprend donc que, suivant que le muscle s'insère à l'os sous un angle plus ou moins rapproché de l'angle droit, il agit dans sa contraction, suivant une ligne plus ou moins rapprochée de la perpendiculaire à l'axe de l'os, et avec plus ou moins de puissance.

Les mouvements sont volontaires ou involontaires, simples ou complexes. Chez l'homme et les animaux supérieurs, ils se combinent de manière à présenter les phénomènes les plus curieux, comme la locomotion et ses différents modes. Nous renvoyons, pour l'étude de ces questions compliquées, à la physiologie du système nerveux de Muller.

Tous les muscles ne sont pas soumis à l'empire de la volonté; il ne dépend pas de nous de produire et de suspendre l'action de quelques-uns (V. *Névrologie*). On observe aussi dans les muscles en général des contractions indépendantes de la volonté, et qui n'ont lieu que dans quelques muscles à la fois ou dans un seul : ces contractions, d'autant plus douloureuses qu'elles sont plus énergiques, constituent les *crampes*.

La contraction musculaire ne peut durer un certain temps sans produire un épuisement de force et un sentiment de lassitude que le repos seul peut faire cesser. Telle est la *fatigue* qui survient plus ou moins promptement, suivant que les contractions sont plus ou moins énergiques et répétées, et que les muscles sont plus ou moins habitués à agir.

La contractilité musculaire persiste quelque temps encore après que la vie a cessé. On sait depuis *Galvani* qu'on peut, au moyen d'un courant électrique, produire sur un cadavre récent des mouvements semblables à ceux que l'on observe pendant la vie.

Les muscles sont *extenseurs* ou *fléchisseurs* suivant qu'ils étendent les parties en ligne droite ou qu'ils les fléchissent sous un angle quelconque; *abducteurs*, *adducteurs* ou *rotateurs* suivant qu'ils écartent ou rapprochent une partie quelconque de la ligne médiane, ou qu'ils font tourner un os sur son axe; *dilatateurs* quand ils ouvrent un orifice; *sphincters* quand ils le ferment.

Quand deux muscles agissent dans le même sens, on dit qu'ils sont *congénères* ; leur action opposée s'appelle *antagonisme*.

La plupart des muscles ont leurs extrémités formées par des *tendons*. On nomme ainsi des faisceaux fibreux, blancs, chatoyants, inextensibles qui naissent dans l'épaisseur des muscles et les terminent, tantôt sous forme de toiles, *aponévroses* ; tantôt arrondis en fuseau ou aplatis comme un lacet *tendons* proprement dits.

Muscles de la tête. — Les uns sont destinés à mouvoir les organes des sens ou leurs enveloppes, et concourent au jeu de la physionomie, comme le muscle *occipito-frontal*, les muscles de l'œil dont l'inégalité d'antagonisme constitue le strabisme, les *élévateurs* et les *orbiculaires* des paupières et des lèvres, les *sourciliers*, les muscles du nez, du menton, les *auriculaires*, ces derniers à l'état rudimentaire chez l'homme. D'autres, comme le *temporal*, le *masseter*, les *ptérygoïdiens*, les *buccinateurs*, sont destinés à rapprocher le maxillaire inférieur du supérieur dans la mastication, ou à maintenir les aliments entre les deux mâchoires. D'autres enfin forment la langue ou lui donnent le mouvement.

Muscles du cou. — Les uns servent à mouvoir la tête ou à la maintenir immobile par antagonisme. Tels sont : le *sterno-cléido-mastoïdien*, qui doit son nom à ses attaches au sternum, à la clavicule et à l'apophyse mastoïde de l'occipital, le *splénius* et le *complexus* ; d'autres agissent sur les vertèbres cervicales, comme les *scalènes* ; d'autres enfin servent à fixer le larynx et l'os hyoïde, ou partent de cet os pour se rendre au maxillaire inférieur et à la langue, tels sont : les *sterno-thyroïdien*, *sterno-hyoïdien*, etc.

De chaque côté du cou s'étend un muscle membraniforme, sous-jacent à la peau, c'est le muscle *peaucier*.

Les muscles de la colonne vertébrale maintiennent le tronc dans sa rectitude, le fléchissent et le redressent. De ces muscles, les uns, *sacro-lombaire*, *long-dorsal*, vont du sacrum aux vertèbres lombaires ou aux vertèbres dorsales; d'autres vont d'une apophyse à l'autre, comme les *transversaire-épineux*, *inter-épineux*, etc.

Muscles du thorax. — Le thorax est muni de muscles qui élèvent ou abaissent les côtes. Plusieurs jouent tour à tour l'un et l'autre rôle, et sont *inspirateurs* et *expirateurs* ; les principaux sont les *inter-costaux*, le *grand* et le *petit dentelé*. Ces deux derniers, ainsi que plusieurs autres, ont aussi pour fonction de fixer l'omoplate, et par conséquent le membre supérieur au thorax, tels sont le *rhomboïde* et le *trapèze*, qui agit à la fois sur la tête et sur l'omoplate.

Muscles du membre supérieur. — Les *muscles de l'épaule* et *du bras* sont : le *deltoïde*, principal élévateur du bras et qui forme le *moignon de l'épaule*, le *grand* et le *petit pectoral* en avant, le *grand-dorsal* en arrière, le *grand-rond*, le *sous-épineux*, le *sous-scapulaire*, etc., qui sont adducteurs ou rotateurs du bras.

Les muscles qui font mouvoir l'avant-bras sur le bras sont : au *bras*, le *biceps* et le *brachial antérieur*, fléchisseurs, le *triceps brachial*, extenseur ; à l'*avant-bras*, autour de l'articulation du coude et à la face intérieure de l'avant-bras, sont placés superficiellement les muscles *rond-pronateur*, *radial* et *cubital antérieur*, *long supinateur*, *radiaux externes*, *palmaires*, etc., qui fléchissent l'avant-bras ou la main, et les mettent dans la pronation ou la supination, c'est-à-dire la paume en dessous ou en dessus. Au-devant de l'articulation et entre les deux faisceaux que forment ces muscles est comprise la région qu'on nomme vulgairement la *saignée*. Plus profondément sont les *fléchisseurs superficiels et profonds* des doigts. A la face postérieure sont les *extenseurs* de la main et des doigts.

Les *muscles de la main* sont destinés à rapprocher ou à écarter les doigts et à mettre le pouce en opposition avec les autres doigts. Ils forment les deux saillies de la paume de la main ou *éminences thénar* et *hypothénar*

Muscles de l'abdomen. — Les parois de l'abdomen sont formées par les muscles *grand* et *petit obliques* et *transverse*. Ces muscles dont les noms indiquent la direction par rapport à l'axe du tronc, donnent naissance à des *aponévroses* qui, superposées et imbriquées entre elles, viennent se joindre au-devant de l'abdomen et former à leur point de réunion sur la ligne médiane, ce qu'on nomme la *ligne blanche.* De chaque côté de cette ligne descend un muscle long et plat, le *grand droit*, qui consolide la paroi abdominale et fléchit le tronc en avant ; près de son attache au pubis, il est renforcé par le muscle *pyramidal* rudimentaire chez l'homme. Sur la ligne médiane et vers son tiers supérieur, on voit l'*ombilic* ou *nombril*, orifice oblitéré de l'ouverture à laquelle s'abouche le cordon ombilical.

La partie antérieure de l'abdomen située au-dessus de l'ombilic se nomme l'*épigastre;* on désigne plus particulièrement par ce nom le point appelé vulgairement *creux de l'estomac.* La région inférieure à l'ombilic est l'*hypogastre* ou *bas-ventre.*

A droite et à gauche de la ligne blanche, un peu au-dessus des pubis, les aponévroses forment une arcade fibreuse, l'*arcade crurale*, par laquelle passent les vaisseaux et nerfs cruraux. Vers la partie interne de l'arcade crurale on voit l'*anneau inguinal*, orifice du *canal inguinal*, qui vient de l'intérieur du bassin et passe obliquement entre les couches aponévrotiques. La région qui, de chaque côté, s'étend de la symphyse des pubis à l'épine iliaque antéro-sup[illegible]ieure est la région inguinale ou de l'*aine*.

L'abdomen est séparé du thorax par un muscle membraniforme, le *diaphragme.* Ce muscle, presque circulaire, s'attache par son pourtour aux parois thoraciques, et vers son centre par des prolongements en faisceaux nommés *piliers*, à la colonne vertébrale. Le centre du diaphragme est formé par une aponévrose en trèfle. Ce muscle à l'état de repos forme au-dessus de l'abdomen deux voûtes dont la convexité correspond au thorax et qui répondent aux deux côtés du tronc : ce sont les *hypochondres*, ainsi nommés parce qu'ils sont situés sous les cartilages des côtes.

Muscles du membre inférieur. *Muscles du bassin* et *de la cuisse.* Le bassin, dans son intérieur, présente le *psoas-iliaque*, les *jumeaux*, le *pyramidal*, et à l'extérieur les *grand*, *moyen* et *petit fessiers*, le *carré crural*, etc., qui se rendent aux trochanters et à d'autres points de l'extrémité supérieure du fémur qu'ils fixent et meuvent sur ce bassin. C'est également au bassin qu'il convient de rapporter les muscles du périnée (*V.* ce mot col.532).

D'autres muscles comme le *couturier*, le plus long muscle du corps, le *droit antérieur*, les *adducteurs*, le *biceps*, le *demi-tendineux* et le *demi-membraneux*, et enfin le *triceps crural*, moteurs de la cuisse ou de la jambe, vont du bassin au fémur ou au tibia, et occupent les régions antérieure et interne, postérieure et externe de la cuisse. Une vaste aponévrose dite *fascia lata* que tend un muscle spécial enveloppe cet énorme faisceau de muscles.

Les *muscles de la jambe* ont pour fonction de mouvoir le pied sur la jambe ou les orteils sur le pied. Les principaux sont, à la face antérieure et externe, le *jambier antérieur*, le *long extenseur* des orteils et les *péroniers* [illegible], postérieurement les *jumeaux* et le *soléaire* qui forment le mollet et se réunissent en un tendon commun qui va au calcanéum ; c'est le *tendon d'Achille*, dans lequel vient se confondre celui d'un petit muscle rudimentaire chez l'homme, le *plantaire grêle ;* plus profondément on trouve le *jambier postérieur* et le *long fléchisseur* des orteils.

Les *muscles du pied* sont, à la face dorsale, le *pédieux*, en dedans les muscles propres au gros orteil, en dehors les muscles du petit orteil, et à la face plantaire le *court fléchisseur commun*, les *lombricaux* et les *interosseux* qui agissent ici comme à la main.

§ 5. *Splanchnologie.*

La splanchnologie (*splanchnon*, *viscera*, entrailles) a pour objet l'étude des organes contenus dans les trois grandes cavités du corps, et par extension celle des *organes des sens.* Le cerveau et la moelle épinière se rattachent spécialement au système nerveux (v. *Névrologie*, § 7).

La peau est l'organe du tact ; elle enveloppe tout le corps et présente des modifications suivant les régions qu'elle recouvre. Elle se compose de l'intérieur à l'extérieur, 1° d'un tissu élastique et serré nommé *derme* ou *chorion ;* 2° des *papilles* ou petites saillies qui hérissent le derme ; 3° du *pigmentum*, couche de matière colorante à laquelle est due la couleur de la peau et dont l'absence constitue l'*albinisme ;* 4° d'un *réseau lymphatique* qui lui est propre ; 5° de l'*épiderme*, tissu corné, non organisé et sécrété par la peau. C'est encore comme des productions sécrétées par la peau, comme des modifications de l'épiderme, qu'il faut considérer les *cheveux*, la *barbe*, les *poils* qui couvrent différentes régions, et les *ongles* qui protègent les extrémités. On confond sous le nom de parties accessoires de la peau ces différents produits et les *follicules sébacés*, petites poches qui contiennent et versent à la surface de la peau une substance graisseuse.

L'épaisseur du derme varie suivant les régions, et la délicatesse du tact est plus ou moins grande suivant l'épaisseur de l'épiderme. La *couleur du pigmentum*, et par conséquent de la peau, peut être modifiée par des causes externes comme les rayons solaires, les plaies, ou des causes internes, comme par exemple l'emploi du nitrate d'argent à l'intérieur.

Indépendamment du tact, les fonctions d'exhalation et d'inhalation appartiennent encore à la peau. On observe à sa surface de petites ouvertures visibles à la loupe et par lesquelles on voit s'écouler la sueur. Ce sont les *pores ;* ils sont plus ou moins nombreux suivant les régions, et donnent passage à la *sueur*, sécrétion acide et différant du liquide aqueux qui s'exhale dans la transpiration insensible. L'intérieur des cavités splanchniques, ou des organes eux-mêmes, est revêtu de membranes qui sont les téguments internes comme la peau est le tégument externe. Les unes sont nommées *muqueuses* parce qu'elles sécrètent les mucosités, elles tapissent en général l'intérieur des canaux organiques; les autres exhalent la *sérosité ;* ce sont les *séreuses* qui revêtent les parois des cavités splanchniques et la surface libre des organes.

L'œil, organe de la *vision*, est contenu dans une cavité de la face qu'on nomme *orbite.* D'une forme à peu près sphérique, le globe de l'œil est fixé et mu dans l'orbite par six muscles. La *sclérotique*, membrane fibreuse qui forme l'enveloppe extérieure de l'œil, est percée en avant d'une ouverture circulaire que remplit la *cornée transparente* et par où pénètre la lumière; une cloison contractile diversement colorée, l'*iris*, sépare l'intérieur de l'œil en deux *chambres* qui communiquent par l'ouverture qu'on nomme la *pupille.* Derrière celle-ci est placé le *cristallin*, lentille organique qui remplit ici les mêmes fonctions que la lentille dans un instrument d'optique, et dont l'opacité constitue la maladie nommée *cataracte*. A la surface interne de l'œil s'épanouit la *rétine* séparée de la sclérotique par la *choroïde* que recouvre un *pigmentum* noir qui remplit dans l'œil le même but que le noir dans les instruments d'optique. Sur la rétine formée par l'expansion du nerf optique, vient se peindre l'image des objets que nous voyons.

Le globe de l'œil est protégé en avant par les paupières auxquelles l'unit une membrane muqueuse, la *conjonctive*. Le *sourcil* ombrage l'œil et en détourne la sueur. Enfin, la *glande lacrymale*, placée dans l'orbite au-dessus du globe oculaire, sécrète les larmes qui le baignent et entretiennent la souplesse de ses membranes, puis s'écoulent par les *points lacrymaux* et sont reçues dans le *sac lacrymal*.

L'OREILLE est l'organe de l'ouïe. L'appareil auditif est divisé en trois régions : l'*oreille externe*, l'*oreille moyenne* et l'*oreille interne* ; ces deux dernières renfermées dans l'épaisseur du crâne. L'oreille externe est composée de la *conque*, véritable cornet acoustique, et du *conduit auditif* externe par où le son arrive dans la cavité auriculaire. Cette cavité est fermée par une membrane, le *tympan*, en arrière duquel s'étend un espace nommé *caisse du tympan*. Le son frappe et fait vibrer le tympan ; trois *osselets* que leur forme a fait appeler le *marteau*, l'*enclume* et l'*étrier*, transmettent cette vibration dans l'oreille moyenne et jusqu'à l'oreille interne, où le son, après avoir parcouru les conduits sinueux du *labyrinthe*, des *canaux demi-circulaires* et du *limaçon*, est perçu par les expansions du nerf auditif.

L'air arrive dans la caisse du tympan par un canal qui s'ouvre à la partie supérieure et latérale du pharynx. C'est la *trompe d'Eustache*.

FOSSES NASALES. — Le sens de l'odorat a son siége dans une cavité comprise entre la base du crâne et le palais. Une cloison la sépare en deux moitiés latérales que l'on nomme *fosses nasales*, et qui sont tapissées d'une membrane muqueuse nommé *memb. pituitaire*. Trois feuillets osseux roulés sur eux-mêmes, et que l'on nomme *cornets*, augmentent dans chacune des fosses nasales la surface que tapisse la pituitaire. Les sinus frontaux et maxillaires et les *cellules ethmoïdales* communiquent avec les fosses nasales dans lesquelles arrivent, par le *canal nasal*, les larmes qui de l'œil sont reçues dans le sac lacrymal. En arrière, les fosses nasales s'ouvrent au-dessus de l'arrière-bouche.

VOIES AÉRIENNES. — Les fosses nasales forment avec la bouche l'entrée des voies aériennes. Les fonctions de la *bouche* sont nombreuses : elle livre passage à l'air, c'est dans sa cavité que la voix revêt la forme du langage ; elle renferme aussi l'organe du goût et les appareils chargés de la première élaboration des aliments.

Fermée en avant par les lèvres qui jouent un rôle important dans ses fonctions, elle est tapissée dans toute son étendue par la muqueuse, et présente à son pourtour les *arcades dentaires*, formées chacune chez l'adulte de seize dents, savoir quatre incisives, deux canines et dix molaires. Les dents sont le produit d'une sécrétion spéciale et analogue à celle des ongles et des poils. Elles commencent à paraître chez l'enfant vers la fin de la première année, c'est ce qu'on nomme la *première dentition*. Elles ne parviennent alors qu'au nombre de dix à chaque arcade dentaire. De sept à douze ans, ces premières dents ou *dents de lait* tombent, et sont remplacées par la deuxième dentition qui s'augmente de quatre molaires en haut et en bas. Enfin, de dix-huit à vingt-cinq ans, paraissent les dernières molaires ou *dents de sagesse*.

Sur la partie inférieure de la bouche repose la *langue*, véritable membre, que composent et meuvent des muscles nombreux. Sur les bords et la face supérieure de la langue, on voit des *papilles* de formes différentes, et qui, comme celles de la peau, sont chargées de percevoir les sensations. La cavité buccale est bornée en haut par la *voûte palatine*, d'où pend le *voile du palais*, cloison mobile, dont le bord libre forme deux arcades séparées par la *luette*.

L'espace circonscrit par la base de la langue en bas, les piliers du voile du palais latéralement, et le voile du palais en haut, se nomme *isthme du gosier*.

A droite et à gauche, le voile du palais vient se rattacher au *pharynx* par deux replis qu'on nomme *piliers* du voile du palais, et qui embrassent les *amygdales*, ou *tonsilles*, glandes dont l'usage est inconnu.

APPAREIL DE LA RESPIRATION. — Dans le pharynx est placé un organe qui en forme la paroi antérieure, et que l'on nomme le *larynx*. C'est un tube formé de cartilages articulés entre eux; l'intérieur est tapissé par une membrane muqueuse, et s'ouvre dans le pharynx par un orifice triangulaire dirigé d'avant en arrière, et de haut en bas.

Cet orifice est clos par une sorte de soupape cartilagineuse, mobile, rattachée à la base de la langue, et que l'on nomme *épiglotte*. Au-dessous de l'orifice supérieur du larynx, la muqueuse forme des replis qui circonscrivent un espace triangulaire, et par leur vibration produisent les sons comme l'anche des instruments à vent. Ce sont les *cordes vocales*, et le canal qu'elles laissent entre elles se nomme la *glotte*.

VOIX. — C'est donc dans la glotte que se produisent les sons qui constituent la voix ; ils sont ensuite modifiés par les mouvements instinctifs de la glotte elle-même et du larynx, du voile du palais, des parois de la bouche, des lèvres et de la langue qui est l'organe de la parole, comme la glotte est celui de la voix.

Au-devant et à la partie inférieure du larynx, on trouve un organe glanduleux et symétrique et dont l'usage est inconnu : c'est le *corps thyroïde*, dont l'hypertrophie constitue le *goître*.

Le larynx se continue avec la *trachée-artère*, tube formé de cerceaux cartilagineux, unis entre eux par une membrane fibreuse; au niveau de la troisième vertèbre dorsale, la trachée se divise en deux rameaux qui se subdivisent eux-mêmes en une foule d'autres : ce sont les *bronches*. Elles pénètrent dans le poumon comme les racines d'une plante dans le sol, et chacune de leurs radicules va s'ouvrir dans une des *cellules pulmonaires*. Les parois de ces cellules, tapissées par la membrane muqueuse, sont formées par le tissu propre des poumons et contiennent dans leur épaisseur les vaisseaux et nerfs pulmonaires. Adossées les unes aux autres et indépendantes comme les alvéoles d'un rayon de miel, ces cellules constituent par leur ensemble les poumons, organes principaux de la respiration.

Les *poumons* sont au nombre de deux et

situés l'un à droite l'autre à gauche ; leur forme est à peu près celle de deux cônes dont la base repose sur le diaphragme et dont le sommet correspond à la région supérieure du thorax. C'est un peu au-dessous du sommet des poumons et à leur face interne que pénètrent les bronches. Le poumon gauche est divisé en trois *lobes* par deux *scissures* profondes, le poumon droit n'a que deux lobes.

Plèvre. — Les poumons sont enveloppés par une membrane séreuse, la *plèvre*, qui tapisse la surface interne du thorax, se replie sur les poumons et les embrasse en laissant en avant et en arrière un espace prismatique, le *médiastin antérieur* et le *médiastin postérieur*. L'antérieur contient le cœur et ses enveloppes et le *thymus*, organe dont l'usage est inconnu et paraît se borner à la vie intra-utérine ; dans le postérieur passent l'œsophage et plusieurs vaisseaux. La cavité du thorax se trouve ainsi complétement remplie. A l'état normal, elle ne contient ni gaz ni liquides, et la présence des uns ou des autres à l'état pathologique coïncide toujours avec la compression et la diminution de volume du poumon.

Respiration. — C'est une des conditions essentielles de la vie que l'assimilation par les êtres vivants d'une partie de l'air atmosphérique. Chez l'homme, c'est au poumon qu'appartient cette fonction qu'on appelle respiration. Elle se compose de deux temps : 1° l'*inspiration* pendant laquelle l'air entre dans les poumons où son oxygène se combine avec le sang ; 2° l'*expiration* par laquelle le poumon se débarrasse de l'acide carbonique, produit par la combinaison de l'oxygène de l'air avec le carbone du sang. C'est aussi dans l'expiration que s'exhale à l'état de vapeur le produit de la transpiration pulmonaire. C'est par un mécanisme analogue à celui d'un soufflet que le phénomène de la respiration s'exécute; seulement l'air entre dans les poumons et en sort par un même conduit. Des muscles dont plusieurs ne sont pas soumis à la volonté, augmentent par leur action la capacité du thorax; les poumons, qui se trouvent alors dans le vide, suivent ce mouvement de dilatation, leurs cellules s'ouvrent et l'air s'y précipite en passant par les fosses nasales et la bouche, le larynx et la trachée-artère. Voici comment a lieu l'augmentation de capacité du thorax. Le diaphragme à l'état de repos forme à la base du thorax une double voûte qui fait saillie dans cette cavité ; quand il se contracte, cette voussure s'abaisse et tend à se transformer en plan. D'autre part nous avons vu que les côtes forment des arcs de cercle dont la courbure est dirigée en bas. L'action des muscles inspirateurs soulève ces arcs de cercle de manière que chacun de leurs points décrit un arc autour de leur corde; leur convexité est ainsi dirigée en dehors et non plus en bas, et par conséquent, la capacité du thorax est augmentée latéralement. De plus, les côtes dont l'articulation à la colonne vertébrale est plus élevée que l'autre extrémité unie au sternum, sont soulevées de manière que leur axe se rapproche du plan horizontal, et par conséquent la capacité antéro-postérieure du thorax est augmentée. Tel est le mouvement d'inspiration, auquel succède le mouvement contraire ou d'expiration amené par l'alternance nécessaire entre la contraction et le repos musculaire, et aussi par l'antagonisme des muscles de l'abdomen qui sont les principaux expirateurs.

Le *soupir*, le *bâillement*, le *rire*, le *sanglot* ne sont que des inspirations et des expirations modifiées par des mouvements spasmodiques de quelques-uns des muscles respirateurs. La *toux* et le *hoquet* se rangent dans la même catégorie.

Dans l'inspiration, l'oxygène de l'air est absorbé et se combine avec le sang (v. Circulation); dans l'expiration, le poumon rejette au dehors, entre autres substances, une partie de l'acide carbonique contenu dans le sang, et sur la formation duquel les auteurs ne sont pas d'accord.

La combinaison du sang avec l'oxygène de l'air complète l'*hématose* ou formation du sang dont le premier phénomène est la transformation du chyle (v. Digestion, col. 527.)

En se combinant avec l'oxygène, le sang devient d'un rouge éclatant; lorsqu'au contraire il est chargé d'acide carbonique, il prend une teinte d'un rouge sombre et presque noir.

La quantité d'acide carbonique expiré correspond à celle des aliments qui ont été pris (Burdach).

Quand la nourriture est végétale, la respiration consomme moins d'oxygène, et l'on a remarqué que les hommes nourris exclusivement de végétaux pouvaient demeurer plus long-temps sous la cloche du plongeur que ceux qui vivent de viande.

Le mouvement active la respiration et la rend plus fréquente; dans le repos, au contraire, elle est plus rare et plus régulière. La digestion augmente aussi la fréquence de la respiration.

Le nombre des inspirations dans un temps donné varie suivant l'âge. Chez l'adulte, on en compte en moyenne dix-huit par minute.

Un adulte dont la poitrine est saine aspire environ sept cent quatre-vingt-six litres d'air par heure.

Voies digestives. — Elles se composent d'un long canal dont l'orifice supérieur est placé dans l'arrière-bouche et qui, en variant de diamètre, vient se terminer à l'anus.

Le *canal digestif* est formé dans toute sa longueur par une couche musculaire plus ou moins épaisse, suivant les régions, tapissée intérieurement par la muqueuse. Cette membrane présente dans plusieurs régions du canal digestif des replis circulaires qui font l'office de soupapes et sont appelées *valvules*. Elle offre aussi, depuis l'estomac inclusivement jusqu'au rectum exclusivement, des villosités ou *papilles*. Enfin, on remarque sur la muqueuse du duodénum des *glandules* analogues aux glandes salivaires, et sur celle de l'intestin grêle et du colon des *follicules* isolés ou agminés, c'est-à-dire réunis en groupes. On nomme ces derniers *follicules* ou *plaques de Peyer*, du nom de l'auteur qui le premier les a décrits.

Les différentes parties du canal digestif sont : le *pharynx*, qui s'étend au-devant des vertèbres, depuis la base du crâne jusqu'au niveau de la cinquième vertèbre cervicale et sert de canal commun dans sa partie supérieure aux voies aériennes et digestives. Au-dessous de l'orifice supérieur du larynx, il n'appartient plus qu'à ces dernières, et bientôt il se retrécit et se continue avec l'*œsophage*. Celui-ci descend derrière la trachée-artère et un peu à gauche, passe dans le médiastin postérieur, traverse le diaphragme au-devant et un peu à gauche du rachis, et vient s'ouvrir par un orifice appelé *cardia* dans l'*estomac* (*gaster*). On nomme ainsi une poche unique chez l'homme, dilatable par une alimentation abondante et susceptible de rétrécissement par la diète. Sa capacité chez l'adulte est en moyenne d'environ trois litres. Sa forme a été comparée à celle d'une peau de cornemuse. L'estomac est placé en travers dans l'hypochondre gauche et au-devant de la colonne vertébrale; sa *grande courbure* est dirigée en bas et à gauche, sa *petite courbure* en haut et à droite. L'estomac communique par un orifice, appelé *pylore*, et garni d'une *valvule*, avec le *duodenum*, qui lui fait suite. Le duodénum, ainsi nommé par les anciens à cause de sa longueur d'environ douze travers de doigt, est le commencement du tube intestinal; il se continue avec l'*intestin grêle* proprement dit. Celui-ci est divisé par quelques auteurs en deux parties, le *jéjunum* et l'*iléon*; mais aucune limite n'établit de point de démarcation entre ces deux divisions imaginaires. L'intestin grêle, généralement un peu plus étroit que le duodénum, est, ainsi que ce dernier, garni de valvules, nommées *valvules conniventes*, et dont l'usage paraît être de retarder le cours des matières alimentaires et surtout de multiplier les surfaces d'absorption. L'intestin grêle s'abouche avec l'extrémité du *gros intestin* et perpendiculairement à l'axe de cette extrémité; l'orifice de communication est garni d'une valvule nommée *valvule iléo-cæcale* qui s'oppose dans l'état normal au mouvement rétrograde des matières. Le gros intestin, d'un diamètre beaucoup plus considérable que l'intestin grêle, au lieu d'être cylindrique comme ce dernier, présente des renflements et des étranglements successifs qui forment des bosselures. On a divisé le *gros intestin* en plusieurs parties, qui sont : 1° le *cæcum*, c'est la portion qui fait suite à l'iléon. On remarque, près du point où ils s'unissent, l'*appendice vermiculaire*, sorte de prolongement du cæcum et organe rudimentaire chez l'homme; 2° le *colon*, divisé lui-même en *colon ascendant*, *colon transverse*, *colon descendant* et *S iliaque du colon*. Il va de droite à gauche. Le *rectum*, ainsi nommé parce qu'il suit une ligne moins flexueuse que le reste des intestins, d'un diamètre plus petit que celui du colon, lui fait suite, commence au niveau de la base du sacrum et finit à l'anus. Son extrémité inférieure est entourée par un muscle analogue à l'orbiculaire des lèvres et qu'on nomme *sphincter de l'anus*. Ce muscle, par sa contraction, ferme l'extrémité inférieure du rectum.

ANNEXES DES ORGANES DE LA DIGESTION. — On nomme ainsi des organes qui réagissent sur les matières élaborées dans le tube digestif, en y mêlant le produit de leurs sécrétions, ou qui sécrètent, en les séparant du sang, des substances qui doivent être éliminées. Ces organes sont :

1° Les *glandes salivaires* qui, placées à l'angle de la mâchoire inférieure et près de l'oreille, *g. parotides*, ou sous la mâchoire et la langue, *g. sous-maxillaires*, *g. sublinguales*, sécrètent la salive et la versent dans la bouche par des canaux dont le principal est le *canal de Sténon*. La *salive* est un liquide alcalin donnant à l'évaporation environ 1 pour 100 de résidu sec et contenant du phosphore, plusieurs sels alcalins, et notamment du sulfo-cyanure de potassium (Tiedemann et Gmelin).

2° Le *Foie* (*hepar*), organe glanduleux, impair, non symétrique, très-volumineux, et pesant chez l'adulte environ 2 kilogrammes. Placé dans l'hypochondre droit qu'il remplit et dans lequel il se moule, le foie s'étend à l'épigastre et jusque dans l'hypochondre gauche; de profondes *scissures* le divisent en plusieurs *lobes*. Il sécrète la *bile* ou *fiel*, liquide jaunâtre, alcalin qui s'amasse dans la *vésicule biliaire* suspendue à sa face inférieure. La bile arrive à la vésicule biliaire par les *conduits hépatiques* et *cystiques*, et de là est versée dans le duodénum par le *canal cholédoque*.

3° Le *pancréas*, organe analogue aux glandes salivaires, impair, placé transversalement derrière l'estomac; il sécrète et verse dans le duodénum un liquide analogue à la salive et nommé *suc* ou *liquide pancréatique*.

4° La *rate* (*splen*), organe spongieux, vasculaire, impair, situé profondément dans l'hypochondre gauche, derrière la grosse tubérosité de l'estomac. Ses fonctions, sur lesquelles on ne sait rien de précis, paraissent être accessoires au travail digestif.

5° Les organes dont l'ensemble constitue les *voies urinaires* : Le *rein*, organe glanduleux ayant la forme d'une fève de haricot, ordinairement double, quelquefois simple, situé derrière les intestins, de chaque côté des vertèbres lombaires, et surmonté d'une sorte de capsule graisseuse nommée *capsule surrénale*. Les reins sécrètent l'urine qui descend par deux canaux, les *uretères*, dans la *vessie*. On nomme ainsi un sac ovoïde formé d'une membrane musculeuse et tapissé intérieurement d'une muqueuse. Placée à la partie inférieure du bassin, en avant du rectum, la vessie se termine antérieurement par un col auquel fait suite le canal excréteur de l'urine ou *canal de l'urètre*.

PÉRITOINE. — Les organes contenus dans l'abdomen y sont enveloppés plus ou moins complétement et fixés par une membrane séreuse nommée le *péritoine*, qui est à l'abdomen ce que la plèvre est au thorax.

Qu'on se figure une toile appliquée à elle-même dans son milieu, de manière à former un long et large pli. Au fond et dans le dédoublement de ce pli, est logé l'intestin que nous supposons étendu en ligne droite. La toile qui l'embrasse, adhère fortement aux trois quarts de sa surface, et vient se réappliquer à elle-même. Les deux *feuillets* sont unis par un tissu cellulaire lâche, qui en permet l'écartement dans la distension de l'intestin. Si maintenant on fronce ce pli à sa base, le limbe dans lequel l'intestin est contenu, formera de nombreuses sinuosités, et telle est la disposition des *circonvolutions intestinales*. Dans la région du colon, le pli que forme le péritoine est beaucoup plus large et l'intestin est logé dans le milieu de sa largeur; le reste retombe comme un tablier au-devant de la masse intestinale, descend chez quelques individus jusque dans le bassin, et, se repliant sur lui-même, remonte jusqu'à l'estomac qu'il embrasse comme le colon. Ce vaste repli, c'est le grand *épiploon*, que dans les animaux on nomme vulgairement la *coiffe*. Il contient dans son épaisseur du tissu adipeux. Dans la région du foie et de la rate, on observe des replis analogues qui sont connus sous le nom d'épiploons *gastro-hépatique* et *gastro-splénique*. La portion du pli située en arrière de l'intestin, se fixe au-devant de la colonne vertébrale et reçoit le nom de *mésentère*. On l'a subdivisé en *mésocæcum*, *mésocolon*, *mésorectum*, selon la portion d'intestin qu'il embrasse. Après avoir formé le mésentère, le péritoine se dédouble et va recouvrir à droite et à gauche du rachis tous les organes contenus dans l'abdomen. Il adhère à leur surface dans une partie de l'étendue qui n'est pas ap-alimentation abondante et susceptible de rétrécissement par la diète. Sa capacité chez l'adulte est en moyenne d'environ trois litres. Sa forme a été comparée à celle d'une peau de cornemuse. L'estomac est placé en travers dans l'hypochondre gauche et au-devant de la colonne vertébrale ; sa *grande courbure* est dirigée en bas et à gauche, sa *petite courbure* en haut et à droite. L'estomac communique par un orifice, appelé *pylore*, et garni d'une *valvule*, avec le *duodenum*, qui lui fait suite. Le duodénum, ainsi nommé par les anciens à cause de sa longueur d'environ douze travers de doigt, est le commencement du tube intestinal ; il se continue avec l'*intestin grêle* proprement dit. Celui-ci est divisé par quelques auteurs en deux parties, le *jéjunum* et l'*iléon* ; mais aucune limite n'établit de point de démarcation entre ces deux divisions imaginaires. L'intestin grêle, généralement un peu plus étroit que le duodénum, est, ainsi que ce dernier, garni de valvules, nommées *valvules conniventes*, et dont l'usage paraît être de retarder le cours des matières alimentaires et surtout de multiplier les surfaces d'absorption. L'intestin grêle s'abouche avec l'extrémité du *gros intestin* et perpendiculairement à l'axe de cette extrémité ; l'orifice de communication est garni d'une valvule nommée *valvule iléo-cæcale* qui s'oppose dans l'état normal au mouvement rétrograde des matières. Le gros intestin, d'un diamètre beaucoup plus considérable que l'intestin grêle, au lieu d'être cylindrique comme ce dernier, présente des renflements et des étranglements successifs qui forment des bosselures. On a divisé le *gros intestin* en plusieurs parties, qui sont : 1° le *cæcum*, c'est la portion qui fait suite à l'iléon. On remarque, près du point où ils s'unissent, l'*appendice vermiculaire*, sorte de prolongement du cæcum et organe rudimentaire chez l'homme ; 2° le *colon*, divisé lui-même en *colon ascendant*, *colon transverse*, *colon descendant* et *S iliaque du colon*. Il va de droite à gauche. Le *rectum*, ainsi nommé parce qu'il suit une ligne moins flexueuse que le reste des intestins, d'un diamètre plus petit que celui du colon, lui fait suite, commence au niveau de la base du sacrum et finit à l'anus. Son extrémité inférieure est entourée par un muscle analogue à l'orbiculaire des lèvres et qu'on nomme *sphincter de l'anus*. Ce muscle, par sa contraction, ferme l'extrémité inférieure du rectum.

ANNEXES DES ORGANES DE LA DIGESTION. — On nomme ainsi des organes qui réagissent sur les matières élaborées dans le tube digestif, en y mêlant le produit de leurs sécrétions, ou qui secrètent, en les séparant du sang, des substances qui doivent être éliminées. Ces organes sont :

1° Les *glandes salivaires* qui, placées à l'angle de la mâchoire inférieure et près de l'oreille, *g. parotides*, ou sous la mâchoire et la langue, *g. sous-maxillaires*, *g. sublinguales*, sécrètent la salive et la versent dans la bouche par des canaux dont le principal est le *canal de Sténon*. La *salive* est un liquide alcalin donnant à l'évaporation environ 1 pour 100 de résidu sec et contenant du phosphore, plusieurs sels alcalins, et notamment du sulfo-cyanure de potassium (Tiedemann et Gmelin).

2° Le *Foie* (*hepar*), organe glanduleux, impair, non symétrique, très-volumineux, et pesant chez l'adulte environ 2 kilogrammes. Placé dans l'hypochondre droit qu'il remplit et dans lequel il se moule, le foie s'étend à l'épigastre et jusque dans l'hypochondre gauche ; de profondes *scissures* le divisent en plusieurs *lobes*. Il sécrète la *bile* ou *fiel*, liquide jaunâtre, alcalin qui s'amasse dans la *vésicule biliaire* suspendue à sa face inférieure. La bile arrive à la vésicule biliaire par les *conduits hépatiques* et *cystiques*, et de là est versée dans le duodénum par le *canal cholédoque*.

3° Le *pancréas*, organe analogue aux glandes salivaires, impair, placé transversalement derrière l'estomac ; il secrète et verse dans le duodénum un liquide analogue à la salive et nommé *suc* ou *liquide pancréatique*.

4° La *rate* (*splen*), organe spongieux, vasculaire, impair, situé profondément dans l'hypochondre gauche, derrière la grosse tubérosité de l'estomac. Ses fonctions, sur lesquelles on ne sait rien de précis, paraissent être accessoires au travail digestif.

5° Les organes dont l'ensemble constitue les *voies urinaires* : Le *rein*, organe glanduleux ayant la forme d'une fève de haricot, ordinairement double, quelquefois simple, situé derrière les intestins, de chaque côté des vertèbres lombaires, et surmonté d'une sorte de capsule graisseuse nommée *capsule surrénale*. Les reins sécrètent l'urine qui descend par deux canaux, les *uretères*, dans la *vessie*. On nomme ainsi un sac ovoïde formé d'une membrane musculeuse et tapissé intérieurement d'une muqueuse. Placée à la partie inférieure du bassin, en avant du rectum, la vessie se termine antérieurement par un col auquel fait suite le canal excréteur de l'urine ou *canal de l'urètre*.

PÉRITOINE. — Les organes contenus dans l'abdomen y sont enveloppés plus ou moins complétement et fixés par une membrane séreuse nommée le *péritoine*, qui est à l'abdomen ce que la plèvre est au thorax.

Qu'on se figure une toile appliquée à elle-même dans son milieu, de manière à former un long et large pli. Au fond et dans le dédoublement de ce pli, est logé l'intestin que nous supposons étendu en ligne droite. La toile qui l'embrasse, adhère fortement aux trois quarts de sa surface, et vient se réappliquer à elle-même. Les deux *feuillets* sont unis par un tissu cellulaire lâche, qui en permet l'écartement dans la distension de l'intestin. Si maintenant on fronce ce pli à sa base, le limbe dans lequel l'intestin est contenu, formera de nombreuses sinuosités, et telle est la disposition des *circonvolutions intestinales*. Dans la région du colon, le pli que forme le péritoine est beaucoup plus large et l'intestin est logé dans le milieu de sa largeur ; le reste retombe comme un tablier au-devant de la masse intestinale, descend chez quelques individus jusque dans le bassin, et, se repliant sur lui-même, remonte jusqu'à l'estomac qu'il embrasse comme le colon. Ce vaste repli, c'est le grand *épiploon*, que dans les animaux on nomme vulgairement la *coiffe*. Il contient dans son épaisseur du tissu adipeux. Dans la région du foie et de la rate, on observe des replis analogues qui sont connus sous le nom d'épiploons *gastro-hépatique* et *gastro-splénique*. La portion du pli située en arrière de l'intestin, se fixe au-devant de la colonne vertébrale et reçoit le nom de *mésentère*. On l'a subdivisé en *mésocæcum*, *mésocolon*, *mésorectum*, selon la portion d'intestin qu'il embrasse. Après avoir formé le mésentère, le péritoine se dédouble et va recouvrir à droite et à gauche du rachis tous les organes contenus dans l'abdomen. Il adhère à leur surface dans une partie de l'étendue qui n'est pas ap-